

UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences

Dualité pour les modules différentiels

Dissertation présentée par

Jean-Pierre SCHNEIDERS

ASPIRANT F.N.R.S.

pour l'obtention du grade de
Docteur en Sciences

Année académique 1986-1987

UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences

Dualité pour les modules différentiels

Dissertation présentée par

Jean-Pierre SCHNEIDERS

ASPIRANT F.N.R.S.

pour l'obtention du grade de
Docteur en Sciences

Année académique 1986-1987

INTRODUCTION

La notion de théorie cohomologique de dualité est apparue en géométrie analytique en 1954 dans l'article [28] de J-P SERRE. Depuis cette époque, la notion a fortement évolué et s'est adaptée à d'autres contextes. En géométrie algébrique, elle a subi une formalisation poussée sous l'impulsion de A. GROTHENDIECK et a fourni des résultats capitaux en théorie des schémas. En topologie algébrique, elle a permis à J-L. VERDIER d'interpréter d'une nouvelle manière la dualité de Poincaré et de l'étendre aux espaces localement compacts. Les travaux de J.-P. RAMIS, G. RUGET et J.-L. VERDIER [20], [21], [22] ont montré que l'on pouvait également construire une théorie cohomologique de la dualité pour les espaces analytiques complexes bien que la théorie cohomologique des faisceaux d'espaces vectoriels topologiques soit incomplète.

Le but de notre travail est d'étudier la dualité relative pour les modules différentiels sur les variétés analytiques complexes. Signalons qu'une telle étude a été réalisée par J. BERNSTEIN [1] dans le cas, plus simple, des modules différentiels sur des variétés algébriques non singulières sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Signalons également que Z. MEBKHOUT a démontré dans sa thèse un théorème de dualité absolue topologique mais que les techniques qui y sont utilisées ne s'étendent pas au cas relatif. Signalons enfin, que certains résultats en relation avec la théorie de la dualité sont connus pour les modules différentiels holonomes (cf: [13], [18]).

Notre résultat essentiel est le théorème IV.1.1. Pour l'obtenir, nous avons suivi le "yoga général de la dualité" dont parle A. GROTHENDIECK dans la préface du séminaire [7]. Tout d'abord, nous construisons une trace relative pour les modules différentiels et établissons le théorème de dualité dans le cas facile des immersions.

Ensuite, nous établissons un théorème de dualité pour les modules différentiels relatifs associés à une submersion analytique par un procédé technique semblable à la descente cohomologique. Enfin nous en déduisons le théorème final grâce à un procédé analogue à celui utilisé par C. HOUZEL et P. SCHAPIRA dans la preuve de leur théorème d'image directe [9].

Décrivons plus en détail le contenu de chaque chapitre.

Dans le chapitre 0, nous rappelons les résultats essentiels de la théorie des modules différentiels relatifs afin de rendre notre travail accessible au non spécialiste. Nous n'avons établi que les propositions pour lesquelles nous n'avons pas de références directes. Dans ce chapitre, nous introduisons également les différentes définitions, notations et conventions utilisées dans la suite.

Au chapitre I, nous construisons la trace relative pour les modules différentiels. Nous effectuons d'abord cette construction par une méthode directe qui nous permet d'obtenir aisément la compatibilité avec la composition et avec la trace de la géométrie analytique. Ensuite nous construisons une trace valable pour les modules différentiels sur les variétés analytiques réelles et nous montrons comment elle permet de retrouver la trace relative pour les modules différentiels dans le cas complexe.

Le théorème de dualité pour les immersions relatives fait l'objet du chapitre II.

Dans le chapitre III, nous abordons le cas des submersions analytiques relatives. Pour obtenir le théorème clef III.4.2, nous bâtissons une théorie des faisceaux à liaisons covariantes ou contravariantes sur des Δ -systèmes relatifs à une variété analytique. Cela nous permet grâce à une série de lemmes de réaliser en quelque sorte une descente cohomologique topologique. On en déduit un théorème de dualité topologique que nous réduisons au niveau algébrique grâce à un résultat capital de [21]. La notion de f -cohérence et le théorème de finitude [9] de C. HOUZEL et P. SCHAPIRA nous permettent alors d'établir le théorème de dualité dans le cas des submersions relatives.

Au chapitre IV, nous établissons le théorème de dualité dans le cas relatif général en utilisant la décomposition d'un morphisme par son graphe et les résultats

des chapitres précédents. Nous en déduisons un corollaire relatif aux solutions des systèmes différentiels et nous montrons comment déduire le théorème de dualité pour les faisceaux analytiques cohérents de celui pour les modules différentiels. Nous concluons par deux applications. La première est à rapprocher de la proposition 5.1. de BONY-SCHAPIRA [3] et concerne les ouverts d'une variété analytique complexe relative dont le bord est non caractéristique pour un système d'équations différentielles relatives. La seconde concerne les systèmes elliptiques sur une variété analytique réelle compacte (cf: KAWAI [16]).

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur le Professeur J. SCHMETS pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de nous prodiguer ainsi que pour les facilités qu'il nous a accordées durant la préparation de ce travail.

Nos plus vifs remerciements vont également à Monsieur le Professeur P. SCHAPIRA qui a attiré notre attention sur les problèmes traités ici. Les nombreux entretiens qu'il nous a accordés nous ont été très précieux. Les différents séminaires auxquels il nous a invité ont été très enrichissants et nous ont permis de lier connaissance avec différents spécialistes de l'analyse algébrique.

Que Messieurs les Professeurs J.E. BJÖRK et C. HOUZEL trouvent ici l'expression de notre plus profonde gratitude. L'intérêt qu'ils ont porté à notre travail a été pour nous un excellent stimulant.

Nous ne voudrions pas terminer cette introduction sans remercier chaleureusement le Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique pour son aide constante et efficace.

CHAPITRE 0

MODULES DIFFERENTIELS RELATIFS

0.1. Faisceaux noethériens

DEFINITION 0.1.1. Un faisceau d'anneaux \mathcal{A} de base X est **noethérien** si

- 1° \mathcal{A} est cohérent,
- 2° \mathcal{A}_x est un anneau noethérien pour chaque $x \in X$
- 3° pour tout ouvert U de X , toute famille croissante de sous-modules cohérents d'un $\mathcal{A}|_U$ -module libre de type fini est localement stationnaire.

Un module **pseudo-cohérent** sur un faisceau d'anneaux cohérent \mathcal{A} est un \mathcal{A} -module \mathcal{M} tel que, pour tout ouvert U de X , tout sous module \mathcal{N} de type fini de $\mathcal{M}|_U$ est cohérent en tant que $\mathcal{A}|_U$ -module. ■

Un exemple fondamental de faisceau noethérien est fourni par le faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe

(cf. SERRE[29]). Pour établir le caractère noethérien du faisceau des opérateurs différentiels relatifs, nous aurons besoin de la proposition suivante qui constitue la version faisceautique du théorème de la base d'Hilbert. Nous en fournissons une preuve détaillée car nous ne connaissons pas de référence pour ce résultat "bien connu".

PROPOSITION 0.1.2. Si \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux noethérien alors le faisceau d'anneaux $\mathcal{A}[x]$ est également noethérien.

Preuve : Démontrons d'abord que $\mathcal{A}[x]$ est cohérent. Pour ce faire, considérons un morphisme de $\mathcal{A}[x]$ -modules du type suivant

$$\mathcal{A}^k[x] \rightarrow \mathcal{A}^l[x]$$

Nous devons établir que le noyau \mathcal{N} de ce morphisme est de type fini. Posons

$$\mathcal{N}_n = \mathcal{N} \cap \bigoplus_{j=0}^n \mathcal{A}[x]_j$$

Le faisceau \mathcal{N}_n est \mathcal{A} -cohérent car c'est le noyau d'un morphisme du type

$$\bigoplus_{j=0}^n \mathcal{A}^k[x]_j \rightarrow \bigoplus_{j=0}^m \mathcal{A}^l[x]_j$$

La suite $(\mathcal{A}[x]\mathcal{N}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du lemme suivant. En effet,

$$\mathcal{A}[x]\mathcal{N}_n \cap \bigoplus_{j=0}^r \mathcal{A}^k[x]_j = \left(\bigoplus_{j=0}^r \mathcal{A}[x]_j \right) \cdot \mathcal{N}_n \cap \bigoplus_{j=0}^r \mathcal{A}^k[x]_j$$

et ce \mathcal{A} -module est cohérent comme intersection de deux sous modules cohérents du \mathcal{A} -module $\bigoplus_{j=0}^{r+n} \mathcal{A}^k[x]_j$. La conclusion du lemme précédent est donc valable et \mathcal{N} est engendré localement par un des \mathcal{N}_n . Cela entraîne en particulier que \mathcal{N} est localement de type fini sur $\mathcal{A}[x]$.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}[x]$ est noethérien. Pour cela, il suffit de constater que si $(\mathcal{J}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous modules

cohérents du $\mathcal{A}[x]$ -module $\mathcal{A}^k[x]$ alors $\mathcal{I}_n \cap \bigoplus_{s \leq 1} \mathcal{A}^k[x]_s$ est un \mathcal{A} -module cohérent. En effet, le lemme précédent s'applique alors et montre que la suite étudiée est localement stationnaire. ■

LEMME 0.13. Si \mathcal{A} est un anneau noethérien, si $(\mathcal{I}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous $\mathcal{A}[x]$ -modules de $\mathcal{A}^r[x]$ et si

$$\mathcal{I}_j \cap \left(\bigoplus_{s \leq n} \mathcal{A}^r[x]_s \right)$$

est \mathcal{A} cohérent pour tout $j, n \in \mathbb{N}$ alors la suite $(\mathcal{I}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est localement stationnaire.

Preuve : Considérons la flèche

$$p_n : \bigoplus_{s \leq n} \mathcal{A}[x]_s \rightarrow \mathcal{A}$$

qui associe à chaque polynôme son coefficient de degré n . Comme $\mathcal{A}[x]_s$ est un \mathcal{A} -module cohérent, l'image de $\mathcal{I}_k^1 = \mathcal{I}_k \cap \left(\bigoplus_{s \leq 1} \mathcal{A}^r[x]_s \right)$ par la flèche

$$p_1^r : \bigoplus_{s \leq 1} \mathcal{A}^r[x]_s \rightarrow \mathcal{A}^r$$

est un \mathcal{A} -module cohérent noté \mathcal{I}_k^1 . D'une part, on a $\mathcal{I}_k^1 \subset \mathcal{I}_k^{1+1}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ car $x \cdot \mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k$. D'autre part, $\mathcal{I}_k^1 \subset \mathcal{I}_{k+1}^1$ puisque $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$. Soit x un point de X . L'anneau \mathcal{A} étant noethérien, il existe un voisinage U de x , un entier k et un entier l tels que $\mathcal{I}_{k|U}^1 = \mathcal{I}_{k'|U}^1$ si $k \geq k', l \geq l'$. On a donc

$$\mathcal{I}_{k|U}^1 \subset \mathcal{I}_{k|U}^1 + \mathcal{I}_{k'|U}^1 \tag{*}$$

En effet, au niveau des fibres, un élément $f(x)$ de $(\mathcal{I}_k^1)_y, l > l'$, est un r -uplet de polynômes de degré l et à coefficients dans \mathcal{A}_y . Ainsi

$$f(x) = cx^1 + P_{1-1}(x)$$

avec $c \in (\mathcal{J}_k^1)_y$ et $P_{1-1}(x) \in (\bigoplus_{s \leq 1-1} \mathcal{A}^\Gamma[x]_s)_y$.

Vu ce qui précède, $c \in (\mathcal{J}_{k'}^{1-1})_y$ et il existe $g \in (\mathcal{J}_{k'}^{1-1})_y$ tel que

$$g(x) = cx^{1-1} + Q_{1-2}(x)$$

avec $Q_{1-2}(x) \in (\bigoplus_{s \leq 1-2} \mathcal{A}^\Gamma[x]_s)_y$.

On en déduit que $f - xg \in (\mathcal{J}_k^{1-1})_y$; cela montre que $f \in (\mathcal{J}_k^1 + \mathcal{J}_k^{1-1})_y$ d'où la relation (*). La suite $(\mathcal{J}_{k|U}^{1'})_{k > k'}$ est une suite croissante de sous modules cohérents de $\bigoplus_{s \leq 1'} \mathcal{A}^\Gamma[x]_s$; elle est donc localement stationnaire . Il existe par conséquent un voisinage de x inclus dans U et un entier $k'' > k'$ tels que $\mathcal{J}_{k|V}^{1'} = \mathcal{J}_{k''|V}^{1'}$ si $k > k''$. Ce qui précède montre alors que

$$\mathcal{J}_{k|V}^1 \subset \mathcal{J}_{k''|V}^{1'} + \mathcal{J}_{k'|V}^1$$

si $k > k''$. Cela entraîne que $\mathcal{J}_{k|V}^1 \subset \mathcal{J}_{k''|V}^1$ si $k > k''$ et la suite $(\mathcal{J}_j^1)_{j \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. ■

LEMME 0.1.4. Si \mathcal{B} est un faisceau d'anneaux noethérien de base X , fidèlement plat relativement à un sous anneau \mathcal{A} cohérent alors un \mathcal{A} -module \mathcal{M} est cohérent si et seulement si le \mathcal{B} -module $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ est cohérent.

Preuve : Si \mathcal{M} est un \mathcal{A} -module cohérent, il existe pour tout ouvert U suffisamment petit une suite exacte du type

$$(\mathcal{A}_{|U})^p \rightarrow (\mathcal{A}_{|U})^q \rightarrow \mathcal{M}_{|U} \rightarrow 0$$

Si l'on tient compte de la platitude de \mathcal{B} en tant que \mathcal{A} -module, il est clair

que l'on obtient la suite exacte

$$(\mathcal{B}|_U)^p \rightarrow (\mathcal{B}|_U)^q \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})|_U \rightarrow 0$$

Ce qui démontre la cohérence de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$.

Supposons maintenant que \mathcal{M} est un \mathcal{A} -module pour lequel le module $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ est cohérent. Pour tout point x de X , le \mathcal{B}_x -module $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_x$ est engendré par $\mathcal{M}_x \otimes 1$. Comme \mathcal{B}_x est noethérien, il existe une famille finie (m_1, \dots, m_p) d'éléments de \mathcal{M}_x telle que la famille $(m_1 \otimes 1, \dots, m_p \otimes 1)$ engendre $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_x$. On en déduit aussitôt l'existence d'un voisinage ouvert U de x et d'un morphisme

$$(\mathcal{A}|_U)^p \rightarrow \mathcal{M}|_U$$

donnant par tensorisation avec \mathcal{B} et passage à la fibre en x la suite exacte

$$(\mathcal{B}_x)^p \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_x \rightarrow 0$$

Le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ étant cohérent, il résulte de ce qui précède qu'il existe un sous-ouvert V de U contenant x et sur lequel on a la suite exacte

$$(\mathcal{B}|_V)^p \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})|_V \rightarrow 0$$

Comme \mathcal{B} est un \mathcal{A} -module fidèlement plat, la suite exacte précédente montre que le morphisme

$$(\mathcal{A}|_V)^p \rightarrow \mathcal{M}|_V$$

est un épimorphisme. Si l'on note \mathcal{N} son noyau, il est clair que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}|_V} \mathcal{B}|_V \rightarrow (\mathcal{B}|_V)^p \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})|_V \rightarrow 0$$

est exacte. Il en résulte que $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}|_V} \mathcal{B}|_V$ est un $\mathcal{B}|_V$ -module cohérent et en raisonnant comme ci-dessus, on voit que \mathcal{N} est localement de type fini ce qui permet de conclure. ■

0.2. Faisceaux d'anneaux et de modules filtrés

DEFINITION 0.2.1. Un **faisceau d'anneaux filtrés** $F\mathcal{A}$ sur un espace topologique X est la donnée d'un faisceau d'anneaux \mathcal{A} muni d'une famille de sous faisceaux abéliens $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que :

- 1° $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
- 2° $\mathcal{A}_l \cdot \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{l+k}$ pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$,
- 3° $1_U \in \mathcal{A}_0(U)$ pour tout ouvert U de X ,
- 4° $\mathcal{A} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_k$

Pour chaque $x \in X$, la filtration de \mathcal{A} induit sur \mathcal{A}_x une structure d'anneau filtré notée $F\mathcal{A}_x$. L'**ordre en x** d'une section σ de \mathcal{A} sur un ouvert U contenant x est alors simplement l'ordre de σ_x dans l'anneau $F\mathcal{A}_x$; on le note $\text{ord}_x(\sigma)$. Par définition, $\text{ord}_x(\sigma)$ est donc le plus petit entier k pour lequel $\sigma_x \in (\mathcal{A}_x)_k$.

Le **faisceau d'anneaux gradués** $G\mathcal{A}$ associé à $F\mathcal{A}$ est défini par la formule

$$G\mathcal{A} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_k / \mathcal{A}_{k-1}$$

Le morphisme "**symbole d'ordre k** " est la flèche naturelle

$$\sigma_k : \mathcal{A}_k \rightarrow G\mathcal{A}$$

déduite de la projection $p_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_k / \mathcal{A}_{k-1}$.

Un **module $F\mathcal{M}$ sur l'anneau filtré $F\mathcal{A}$** est la donnée d'un \mathcal{A} -module \mathcal{M} muni d'une famille de sous faisceaux abéliens $(\mathcal{M}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que:

- 1° $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
- 2° $\mathcal{A}_l \cdot \mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+l}$ pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$,
- 3° $\mathcal{M} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_k$

Pour tout entier r , on définit le $r^{\text{ème}}$ **décalé** $F\mathcal{M}[r]$ de $F\mathcal{M}$ comme étant le module \mathcal{M} muni de la filtration définie par

$$(\mathcal{M}[r])_k = \mathcal{M}_{k-r}$$

Le $G\mathcal{A}$ -**module gradué** $G\mathcal{M}$ **associé à** $F\mathcal{M}$ est défini par la formule

$$G\mathcal{M} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_k / \mathcal{M}_{k-1}$$

Un **morphisme de $F\mathcal{A}$ -modules** $f: F\mathcal{M} \rightarrow F\mathcal{N}$ est la donnée d'un morphisme de \mathcal{A} -modules $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tel que $f(\mathcal{M}_k) \subset \mathcal{N}_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

L'**image** de f est le \mathcal{A} -module $\text{Im } f$ muni de la filtration définie par la formule $(\text{Im } f)_k = f(\mathcal{M}_k)$.

Le **noyau** de f s'obtient en munissant le \mathcal{A} -module $\ker f$ de la filtration définie par la formule $(\ker f)_k = (\ker f) \cap \mathcal{M}_k$.

Une **suite exacte de $F\mathcal{A}$ -modules** est la donnée d'une suite

$$\begin{array}{ccccccc} F\mathcal{L} & \rightarrow & F\mathcal{M} & \rightarrow & F\mathcal{N} & & \\ & & f & & g & & \end{array}$$

telle que $\text{Im } f = \text{Ker } g$ au sens des $F\mathcal{A}$ -modules.

Un $F\mathcal{A}$ -module $F\mathcal{M}$ est **libre de type fini** s'il est isomorphe à une somme directe de décalés de $F\mathcal{A}$.

Une **s-présentation libre de type fini** d'un $F\mathcal{A}$ -module $F\mathcal{M}$ est une suite exacte

$$F\mathcal{L}_{-s} \rightarrow \dots \rightarrow F\mathcal{L}_{-1} \rightarrow F\mathcal{L}_0 \rightarrow F\mathcal{M} \rightarrow 0$$

où les $F\mathcal{A}$ -modules $F\mathcal{L}_{-i}$ sont libres de type fini.

Un $F\mathcal{A}$ -module est de **type fini** s'il admet une 0-présentation libre de

type fini.

Enfin, une **bonne filtration** sur un \mathcal{A} -module \mathcal{M} est par définition une filtration telle que le $F\mathcal{A}$ -module $F\mathcal{M}$ associé soit localement de type fini. ■

Ces définitions étant posées, les propriétés des modules filtrés dont nous aurons à faire usage dans la suite de ce travail sont résumées dans les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 0.2.2. Si $F\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux filtrés, si \mathcal{A} est cohérent, si \mathcal{A}_0 est un faisceau d'anneaux noethérien et si les \mathcal{A}_0 -modules \mathcal{A}_k sont cohérents alors tout \mathcal{A} -module cohérent \mathcal{M} est \mathcal{A}_0 -pseudo-cohérent.

Preuve : Ce résultat est établi en [26] proposition II.1.4.2. ■

PROPOSITION 0.2.3. Soit $F\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux filtrés sur l'espace topologique X . Si l'anneau $F\mathcal{A}_x$ est zariskien pour chaque $x \in X$ et si $G\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux gradués cohérent alors

- a) le faisceau d'anneaux \mathcal{A} est cohérent,
- b) tout $F\mathcal{A}$ -module $F\mathcal{M}$ localement de type fini est cohérent en tant que \mathcal{A} -module si et seulement si $G\mathcal{M}$ est cohérent en tant que $G\mathcal{A}$ -module gradué,
- c) la trace d'une bonne filtration d'un \mathcal{A} -module cohérent \mathcal{M} sur sous module cohérent \mathcal{N} est une bonne filtration,
- d) quel que soit le naturel r , un $F\mathcal{A}$ -module $F\mathcal{M}$ localement de type fini, cohérent en tant que \mathcal{A} -module admet localement une r -présentation libre de type fini,
- e) le faisceau d'anneaux \mathcal{A} est noethérien si $G\mathcal{A}$ est noethérien en tant que faisceau d'anneaux gradués,

f) tout $F\mathcal{A}$ -module $F\mathcal{M}$ cohérent en tant que \mathcal{A} -module admet localement une résolution projective de longueur $n \geq 1$ par des $F\mathcal{A}$ -modules libres de type fini si tout $G\mathcal{A}$ -module cohérent admet localement une résolution projective de longueur n par des $G\mathcal{A}$ -modules libres de type fini.

Preuve : Pour les points a),b),c),d) et e), nous renvoyons le lecteur à la proposition II.1.4.1. du livre de P. SCHAPIRA [26]. Le point f) est quant à lui une conséquence des propositions II.1.2.1, II.1.2.2. et B.2.2. de ce même ouvrage. ■

Pour appliquer la proposition précédente, nous aurons besoin du résultat classique suivant :

PROPOSITION 0.2.4 Si FA est un anneau filtré dont le gradué associé GA est noethérien et si $A_k = 0$ pour k suffisamment petit alors A est zariskien.

Preuve : Ce résultat est une conséquence évidente de la proposition II.1.1.5. de [26]. ■

Nous aurons également besoin de la généralisation suivante du théorème des syzygies de Hilbert.

DEFINITION 0.2.5. Un anneau gradué à degrés positifs A vérifie la **condition $H(n)$** si tout A -module gradué A -plat est libre et si $\text{Tor}_A^p(M,N) = 0$ pour tout $p > n$.

REMARQUE 0.2.6. Si A vérifie la condition $H(n)$ et si

$$L_n \xrightarrow{u_n} \dots \rightarrow L_0 \xrightarrow{u_0} M \rightarrow 0$$

est une présentation du A -module gradué M par des A -modules gradués libres alors

$$0 \rightarrow \text{Im } u_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

est une résolution libre de M . En effet, il est clair que

$$\text{Tor}_A^k(\text{Im } u_n, N) = \text{Tor}_A^{k+n}(M, N)$$

pour tout A -module gradué N et cela montre que $\text{Im } u_n$ est A -plat donc libre. ■

PROPOSITION 0.2.7. Si un anneau gradué A vérifie la condition $H(n)$ alors l'anneau gradué $A[x]$ vérifie la condition $H(n+1)$.

Preuve : Remarquons d'abord que la suite

$$0 \rightarrow A[x][1] \xrightarrow{x} A[x] \rightarrow A \rightarrow 0$$

est exacte au sens des modules gradués. De l'existence de cette suite, on déduit que

$$\text{w.dim}_{A[x]} N \leq \text{w.dim}_A N + 1$$

pour tout A -module gradué N car on dispose de la formule

$$N \otimes_{A[x]}^{\mathbb{L}} M \simeq N \otimes_A^{\mathbb{L}} (A \otimes_{A[x]}^{\mathbb{L}} M) \quad (*)$$

Considérons maintenant un $A[x]$ -module gradué M tel que

$$\text{Tor}_{A[x]}^k(M, P) = 0$$

pour tout A -module gradué P et tout entier $k > 0$ et montrons que M est libre. Pour cela, remarquons que la formule (*) entraîne la platitude de $M \otimes_{A[x]} A$ en tant que A -module gradué. L'hypothèse montre alors qu'il existe un isomorphisme

$$A^{(l)} \xrightarrow{u} M \otimes_{A[x]} A$$

Cet isomorphisme provient évidemment par tensorisation d'une flèche

$$A[x]^{(l)} \xrightarrow{v} M$$

posons $N = \ker v$ et $N^* = \text{coker } v$. En tensorisant par A sur $A[x]$ on obtient la suite exacte

$$A^{(l)} \xrightarrow{u} M \otimes_{A[x]} A \rightarrow N^* \otimes_{A[x]} A \rightarrow 0$$

d'où l'on déduit que $N^* \otimes_{A[x]} A = 0$ et par conséquent que $N^* = 0$. Comme on a par hypothèse $\text{Tor}_{A[x]}^1(M, A) = 0$ on dispose de la suite exacte

$$0 \rightarrow N \otimes_{A[x]} A \rightarrow A^{(l)} \xrightarrow{u} M \otimes_{A[x]} A \rightarrow 0$$

d'où l'on déduit que $N = 0$ et donc que v est un isomorphisme.

Pour conclure, il nous suffit de considérer un $A[x]$ -module gradué M et de montrer qu'il admet une résolution libre de longueur $n+1$. Pour ce faire, considérons une $(n+1)$ -présentation

$$L_{n+1} \xrightarrow{u_{n+1}} \dots \rightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0 \xrightarrow{u_0} M \rightarrow 0$$

de M par des $A[x]$ -modules gradués libres. Il est clair que l'on a

$$\text{Tor}_{A[x]}^k(\text{Im } u_{n+1}, P) = \text{Tor}_{A[x]}^{k+n+1}(M, P)$$

pour tout A -module gradué P . Ce qui précède montre alors que $\text{Im } u_{n+1}$ est libre en tant que $A[x]$ -module gradué, ce qui suffit. ■

0.3 Le faisceau $\mathcal{D}_X|_S$

Variétés analytiques relatives

DEFINITION 0.3.1. Précisons d'abord que, par souci de concision, nous emploierons dans ce travail le terme **variété analytique** pour désigner une variété analytique complexe, lisse de dimension finie. Soit S une telle variété. Une **variété analytique relative à S** est alors simplement une variété analytique X munie d'une submersion analytique $\epsilon_X : X \rightarrow S$.

Si X, Y sont deux telles variétés, nous appellerons **morphisme de X vers Y** toute application analytique $f : X \rightarrow Y$ telle que $\epsilon_Y \circ f = \epsilon_X$.

Opérateurs différentiels relatifs

DEFINITION 0.3.2. Rappelons tout d'abord que \mathcal{D}_X désigne le **faisceau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques sur X** et qu'il est défini comme le sous-anneau du faisceau $\text{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ engendré par les multiplications par des fonctions holomorphes et par les dérivées de Lie selon les champs de vecteurs holomorphes. Rappelons également que la filtration par l'ordre fait de \mathcal{D}_X un faisceau d'anneaux filtrés. Si X est un ouvert de \mathbb{C}^n , alors pour tout ouvert connexe U de X les sections de \mathcal{D}_X au dessus de U sont données par la formule

$$\mathcal{D}_X(U) = \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k} a_\alpha(z) D_z^\alpha : a_\alpha \in \mathcal{O}_X(U), m \in \mathbb{N} \right\}$$

De plus, un élément P de $\mathcal{D}_X(U)$ appartient à $(\mathcal{D}_X)_k(U)$ si et seulement si

$a_\alpha = 0$ pour tout n-uple α tel que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n > k$.

Considérons maintenant une variété analytique S et une variété analytique X relative à S . Définissons la suite $(F_k^{X|S} \mathcal{D}_X)_{k \in \mathbb{Z}}$ de sous faisceaux abéliens de \mathcal{D}_X par récurrence en choisissant le faisceau $F_k^{X|S} \mathcal{D}_X$ nul si $k < 0$ et égal au plus grand sous faisceau abélien \mathcal{M} de \mathcal{D}_X vérifiant

$$[\mathcal{M}, \epsilon_X^{-1} \mathcal{O}_S] \subset F_{k-1}^{X|S} \mathcal{D}_X$$

si $k \geq 0$. Le faisceau $F_0^{X|S} \mathcal{D}_X$ est le **faisceau des opérateurs différentiels relatifs** associé à la variété relative X , on le note $\mathcal{D}_{X|S}$. C'est un sous anneau de \mathcal{D}_X . En effet, si P, Q sont des éléments de $(\mathcal{D}_{X|S})_X$ et si $h \in (\mathcal{O}_X)_X$ alors la relation

$$[P.Q, h] = P.[Q, h] + [P, h].Q$$

montre que $[P.Q, f \circ \epsilon_X] = 0$ pour tout $f \in (\mathcal{O}_S)_{\epsilon_X(X)}$. La structure locale de $\mathcal{D}_{X|S}$ est claire. En effet, si U (resp. V) est un ouvert connexe de \mathbb{C}^u (resp. \mathbb{C}^v) alors la projection canonique $p : U \times V \rightarrow V$ fait de $U \times V$ une variété analytique relative à V et on vérifie aisément que pour tout ouvert connexe W de $U \times V$, on a

$$\mathcal{D}_{U \times V|V}(W) = \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_u = k} a_\alpha(z', z'') D_z^\alpha : a_\alpha \in \mathcal{O}_{U \times V}(W), m \in \mathbb{N} \right\}$$

où z' désigne le système de coordonnées de U et z'' celui de V . Sous les mêmes conditions, on vérifie que

$$F_k^{U \times V|V} \mathcal{D}_{U \times V}(W) = \left\{ \sum_{l=1}^m \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_u = l \\ \beta_1 + \dots + \beta_v \leq k}} a_{\alpha, \beta}(z', z'') D_z^\alpha \cdot D_z^\beta : a_{\alpha, \beta} \in \mathcal{O}_{U \times V}(W), m \in \mathbb{N} \right\}$$

Vu sa structure locale, il est clair que le faisceau $\mathcal{D}_{X|S}$ est identique au sous anneau de \mathcal{D}_X engendré par les champs de vecteurs verticaux (i.e. tangents aux fibres de ϵ_X) de X . Pour terminer, signalons que l'on peut également interpréter une section globale $\mathcal{D}_{X|S}$ comme une famille d'opérateurs différentiels analytiques paramétrée analytiquement par S . ■

REMARQUE 0.3.3. La **définition** de $\mathcal{D}_{X|S}$ donnée ci-dessus n'utilise pas le fait que l'application $\epsilon_X: X \rightarrow S$ est une submersion. Nous avons donc le droit de considérer l'anneau $\mathcal{D}_{X|Y}$ des opérateurs différentiels relatifs associés à un morphisme de variétés analytiques complexes $f: X \rightarrow Y$. Cependant, ce faisceau possède peu de propriétés intéressantes lorsque f n'est pas une submersion ; c'est pourquoi nous avons choisi de nous placer d'emblée dans le cas des variétés analytiques relatives. ■

PROPOSITION 0.3.4. Si X est une variété analytique relative à S alors

- a) pour tout $x \in X$, l'anneau filtré $(\mathcal{D}_{X|S})_x$ est zariskien à droite et à gauche,
- b) Le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_{X|S}$ est noethérien à droite et à gauche,
- c) Tout \mathcal{D}_X -module cohérent est pseudo-cohérent en tant que $\mathcal{D}_{X|S}$ -module,
- d) pour tout \mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{M} , l'intersection d'un \mathcal{D}_X sous module cohérent avec un $\mathcal{D}_{X|S}$ sous module cohérent est un $\mathcal{D}_{X|S}$ sous module cohérent,
- e) Le faisceau d'anneaux \mathcal{D}_X est plat sur $\mathcal{D}_{X|S}$,
- f) tout $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent admet localement une résolution projective de longueur finie par des $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules libres de type fini.

Preuve : Toutes les affirmations ci-dessus sont de nature locale, on peut donc supposer que S est un ouvert de \mathbb{C}^s et que $X = Y \times S$ avec Y ouvert de \mathbb{C}^{x-s} , ϵ_X étant la projection naturelle de $Y \times S$ sur S . Il résulte alors de la structure de $\mathcal{D}_{X|S}$ que $G\mathcal{D}_{X|S} \simeq \mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_{x-s}]$.

Comme \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux noethérien, il résulte de la proposition 0.1.2. que le faisceau d'anneaux gradués $G\mathcal{D}_{X|S}$ est noethérien. La proposition 0.2.4. montre alors que $(\mathcal{D}_{X|S})_X$ est un anneau filtré zariskien à gauche et à droite, ce qui établit a).

On peut maintenant appliquer la proposition 0.2.3. et obtenir de la sorte b).

Le point f) s'obtient, quant à lui, grâce au point f) de la proposition 0.2.3. En effet, les anneaux $(\mathcal{O}_X)_X$ vérifient les hypothèses de la proposition 0.2.5. si on les munit de la graduation triviale. Il en résulte par récurrence que les anneaux gradués $(\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_{x-s}])_X$ vérifient la condition $H(2x-s)$. La conclusion résulte alors de la remarque 0.2.6. et du caractère noethérien du faisceau $\mathcal{D}_{X|S}$.

Pour démontrer c), il suffit d'appliquer la proposition 0.2.2. au faisceau d'anneaux \mathcal{D}_X muni de la filtration relative car $F_k^{X|S} \mathcal{D}_X$ est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module libre comme le montre sa structure locale.

Etablissons maintenant d). Soient \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent et \mathcal{N} (resp. \mathcal{M}_0) un sous \mathcal{D}_X (resp. $\mathcal{D}_{X|S}$)-module cohérent de \mathcal{M} . Munissons \mathcal{D}_X de la filtration relative. De la structure locale de la filtration relative, on déduit que le gradué de \mathcal{D}_X pour cette filtration est isomorphe au faisceau d'anneaux gradués $\mathcal{D}_{X|S}[\xi_1, \dots, \xi_s]$. Comme ce dernier est noethérien vu la proposition 0.1.2., l'application de la proposition 0.2.3. montre que, quitte à restreindre un peu les ouverts Y et S , on peut munir \mathcal{M} d'une bonne filtration $F\mathcal{M}$ et que la trace $F\mathcal{N}$ de cette bonne filtration sur \mathcal{N} est également bonne. Il est alors clair que les faisceaux $F_k \mathcal{M}$ et $F_k \mathcal{N}$ sont des $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules

cohérents. Comme \mathcal{M}_0 est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module de type fini, on peut supposer en restreignant à nouveau Y et S qu'il existe un entier k pour lequel $\mathcal{M}_0 \subset F_k \mathcal{M}$. Dans ces conditions les faisceaux $F_1 \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_0$ sont $\mathcal{D}_{X|S}$ -cohérents pour $l > k$ comme intersection de sous $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules cohérents de $F_1 \mathcal{M}$. On conclut alors la preuve de d) en remarquant que

$$\mathcal{M}_0 = \bigcup_{l > k} (F_1 \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_0)$$

et en utilisant le fait que $\mathcal{D}_{X|S}$ est un faisceau d'anneaux noethérien.

Le point e) étant évident, la preuve de la proposition 0.3.4. est complète. ■

Variétés caractéristiques

DEFINITION 0.3.5. Si X est une variété analytique relative à S et si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent alors il résulte de la proposition 0.3.4. que l'on peut recouvrir X par une famille ouverte \mathcal{X} de sorte que $\mathcal{M}|_U$ puisse être muni d'une bonne filtration pour tout $U \in \mathcal{X}$. En procédant comme dans le cas des \mathcal{D}_X -modules, on montre que pour tout ouvert $U \in \mathcal{X}$ l'ensemble

$$C_U = \text{supp}(\mathcal{O}_T^*(U|S) \otimes \pi^{-1} \text{Gr}(\mathcal{D}_{U|S}) \pi^{-1} \text{Gr}(\mathcal{M}|_U))$$

est indépendant de la bonne filtration choisie sur $\mathcal{M}|_U$. On peut alors définir la **variété caractéristique de \mathcal{M}** par la formule

$$\text{Car}_{X|Y}(\mathcal{M}) = \bigcup_{U \in \mathcal{X}} C_U$$

car cet ensemble ne dépend évidemment que de \mathcal{M} . On vérifie aisément que la variété caractéristique de \mathcal{M} est une sous-variété analytique conique et fermée de $T^*(X|S)$. ■

PROPOSITION 0.3.6. Si $f : X \rightarrow Y$ est une submersion analytique relative à S et si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|Y}$ -module cohérent alors on a la formule

$$\varphi^{-1} \text{Car}_{X|Y}(\mathcal{M}) = \text{Car}_{X|S}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|S})$$

où $\varphi : T^*(X|S) \rightarrow T^*(X|Y)$ est la projection canonique.

Preuve : Il suffit de reproduire la preuve de la proposition III.1.3.2 de [26] en remplaçant \mathcal{D}_X par $\mathcal{D}_{X|S}$. ■

PROPOSITION 0.3.7. Si $f : X \rightarrow Y$ est une submersion analytique relative à S , si \mathcal{M} est $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent et si $\mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0$ sont deux sous $\mathcal{D}_{X|Y}$ -modules de \mathcal{M} qui l'engendrent en tant que $\mathcal{D}_{X|S}$ -module alors

$$\text{Car}_{X|Y}(\mathcal{M}_0) = \text{Car}_{X|Y}(\mathcal{N}_0)$$

Preuve : Il suffit de reproduire la preuve de lemme III.1.3.3 de [26] en remplaçant \mathcal{D}_X par $\mathcal{D}_{X|S}$. ■

DEFINITION 0.3.8. Soit $f : X \rightarrow Y$ une submersion analytique relative à S . Pour tout $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent \mathcal{M} , on note $\text{Car}_{f|S}^1(\mathcal{M})$ la partie de $T^*(X|Y)$ qui coïncide avec $\text{Car}_{U|Y}(\mathcal{M}_0)$ sur $T^*(U|Y)$ pour tout ouvert U et tout sous $\mathcal{D}_{U|Y}$ -module cohérent \mathcal{M}_0 de $\mathcal{M}|_U$ qui l'engendre en tant que $\mathcal{D}_{U|S}$ -module. Il est clair que $\text{Car}_{f|S}^1(\mathcal{M})$ est une sous-variété analytique fermée et conique de $T^*(X|Y)$.

PROPOSITION 0.3.9. Si $f : X \rightarrow Y$ est une submersion analytique relative à S et si

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules cohérents alors on a

$$\text{Car}_{f|S}^1(\mathcal{M}) = \text{Car}_{f|S}^1(\mathcal{L}) \cup \text{Car}_{f|S}^1(\mathcal{N})$$

Preuve : Il suffit de procéder comme dans la preuve du théorème II.1.3.5 de [26]. ■

Complexes solutions

DEFINITION 0.3.10. Soit X une variété analytique relative à S . Pour tout complexe d'amplitude finie \mathcal{M} de $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à gauche, on pose

$$\mathbb{S}\text{ol}_{X|S}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\epsilon_{X*}(\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$$

$$\mathbb{S}\text{ol}_{X|S, c}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\epsilon_{X!}(\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$$

Le complexe $\mathbb{S}\text{ol}_{X|S}(\mathcal{M})$ (resp. $\mathbb{S}\text{ol}_{X|S, c}(\mathcal{M})$) constitue le complexe des solutions relatives (resp. relatives à support propre) de \mathcal{M} . Par économie d'écriture, nous noterons $\mathbb{S}\text{ol}_X(\mathcal{M})$ (resp. $\mathbb{S}\text{ol}_{X, c}(\mathcal{M})$) ces mêmes complexes lorsque la variété S est réduite à un point.

Construction de $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules

REMARQUE 0.3.11. Dans ce travail, nous noterons $\mathcal{O}_{X|S}$ le faisceau des champs de vecteurs verticaux sur X . Il est clair qu'un germe de champ de

vecteur θ en un point x de X est vertical si et seulement si $\theta.(h_0 \varepsilon_X) = 0$ pour tout germe $h \in (\mathcal{O}_S)_{\varepsilon_X(x)}$. Ainsi, le crochet de deux champs de vecteurs verticaux est également vertical.

PROPOSITION 0.3.12. Si \mathcal{M} est un \mathcal{O}_X -module et si

$$\cdot : \Theta_{X|S} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

est un morphisme de faisceaux abéliens tel que

- a) $[\theta, h] = (\theta h)$.
- b) $[\theta, \psi] = [\theta, \psi]$.
- c) $h.\theta = (h\theta)$.

pour tout $\theta, \psi \in (\Theta_{X|S})_x$ et tout $h \in (\mathcal{O}_X)_x$ alors il existe une et une seule action à gauche de $\mathcal{D}_{X|S}$ sur \mathcal{M} qui étende à la fois le morphisme donné et la structure de \mathcal{O}_X -module de \mathcal{M} .

Preuve : L'unicité de l'action cherchée est évidente puisque $\Theta_{X|S} \cup \mathcal{O}_X$ engendre $\mathcal{D}_{X|S}$, il suffit donc de résoudre le problème localement; or, dans ce cas, la structure explicite de $\mathcal{D}_{X|S}$ rend le problème immédiat. ■

REMARQUE 0.3.13. On a bien sûr une propriété analogue à la précédente pour les modules à droite. ■

0.4 Produits de $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules

DEFINITION 0.4.1. Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite et si \mathcal{N} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à gauche alors le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ est muni d'une **structure canonique de $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite**. En effet, pour définir une telle

structure, il suffit, en vertu de la version droite de la proposition 0.3.12., de définir canoniquement les flèches

$$.\theta : \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)$$

$$.f : \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)$$

pour tout ouvert U de X , tout champ de vecteur vertical θ défini sur U et toute fonction $h \in \mathcal{O}_X(U)$ en posant :

$$(m \otimes n).\theta = m\theta \otimes n - m \otimes \theta n$$

$$(m \otimes n).f = mf \otimes n = m \otimes fn$$

si $m \in \mathcal{M}(U)$, $n \in \mathcal{N}(U)$ et de constater que les relations

$$.f.\theta = .(f\theta)$$

$$.\theta.f = .f.\theta + .(\theta f)$$

$$.\theta.\psi - .\psi.\theta = .[\theta, \psi]$$

$$.\theta + .\psi = .(\theta + \psi)$$

$$.\theta|_V .r_V U = .r_V U .\theta \quad (V \text{ ouvert, } V \subset U)$$

sont vérifiées.

De même, si \mathcal{M}, \mathcal{N} sont des $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à gauche, le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ est muni d'une **structure canonique de \mathcal{D}_X -module à gauche**. En effet, les flèches canoniques

$$\theta : \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)$$

$$h : \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)$$

définies pour tout ouvert U de X , tout champ de vecteurs vertical θ sur U et toute fonction $h \in \mathcal{O}_X(U)$ en posant

$$\theta.(m \otimes n) = \theta.m \otimes n + m \otimes \theta.n$$

$$h.(m \otimes n) = h.m \otimes n = m \otimes h.n$$

si $m \in \mathcal{M}(U)$, $n \in \mathcal{N}(U)$ vérifient évidemment les relations

$$\begin{aligned} f.\theta &= (f\theta). \\ \theta.f &= (\theta f). + f.\theta. \\ \theta.\psi - \psi.\theta &= [\theta,\psi]. \\ \theta. + \psi. &= (\theta+\psi). \\ \theta|_V . r_{VU} &= r_{VU}.\theta. \quad (V \text{ ouvert, } V \subset U) \end{aligned}$$

ce qui suffit. ■

PROPOSITION 0.4.2. Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite et si \mathcal{N}, \mathcal{P} sont des $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à gauche alors on peut définir canoniquement l'isomorphisme suivant:

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{P}$$

Preuve : Pour tout ouvert U de X et tout ouvert V de U , considérons la flèche

$$a_{UV} : \mathcal{M}(U) \times (\mathcal{N}(V) \times \mathcal{P}(V)) \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{P}(V)$$

définie en posant

$$a_{UV}(m, (n, p)) = (m|_V \otimes n) \otimes p$$

pour tout $m \in \mathcal{M}(U)$, $n \in \mathcal{N}(U)$, $p \in \mathcal{P}(U)$. Si θ est un champ de vecteurs vertical sur U , il résulte des définitions précédentes que pour tout $h \in \mathcal{O}_X(V)$ on a successivement

$$\begin{aligned} a_{UV}(m, (h.n, p)) &= (m|_V \otimes h.n) \otimes p \\ &= (m|_V \otimes n). h \otimes p \\ &= (m|_V \otimes n) \otimes h.p \\ &= a_{UV}(m, (n, h.p)) \end{aligned}$$

Ces relations montrent que l'on peut factoriser a_{UV} par la flèche

$$a'_{UV} : \mathcal{M}(U) \times (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})(V) \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{P}(V)$$

Si l'on pose $b_U = a'_{UU}$, on obtient d'une part

$$\begin{aligned} b_U(m, \theta, n \otimes p) &= (m, \theta \otimes n) \otimes p \\ &= (m \otimes n), \theta \otimes p + (m \otimes \theta, n) \otimes p \\ &= (m \otimes n) \otimes \theta, p + (m \otimes \theta, n) \otimes p \\ &= b_U(m, n \otimes \theta, p) + b_U(m, \theta, n \otimes p) \\ &= b_U(m, \theta, (n \otimes p)) \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs vertical θ sur U et d'autre part

$$\begin{aligned} b_U(m, h, n \otimes p) &= (m, h \otimes n) \otimes p \\ &= (m \otimes h, n) \otimes p \\ &= b_U(m, h, (n \otimes p)) \end{aligned}$$

pour toute fonction $h \in \mathcal{O}_X(U)$. Il résulte alors des relations précédentes que la flèche b_U se factorise par une flèche

$$c_U : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})(U) \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{P}(U)$$

La construction ci-dessous nous fournit donc la flèche canonique

$$c : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{P}$$

En procédant comme ci-dessus, on peut construire une flèche

$$\gamma : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})$$

à partir des flèches

$$\alpha_{UV} : (\mathcal{M}(V) \times \mathcal{N}(V)) \times \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})(V)$$

définies par

$$\alpha_{UV}((m, n), p) = m \otimes (n \otimes p)$$

La conclusion résulte alors de ce que $\gamma \circ c = c \circ \gamma = \text{id}$. ■

0.5 Images directes de $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules

Le faisceau $\mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S$

DEFINITION 0.5.1. Soit X une variété analytique relative à S . Pour tout système de coordonnées $s : B \rightarrow \mathbb{C}^b$ sur S , un **système de coordonnées locales relatives** sur X au-dessus de s est la donnée d'un système de coordonnées locales $x : U \rightarrow \mathbb{C}^u$ de X tel que $\epsilon_X(U) = B$ et pour lequel $s_j \circ \epsilon_X = x_j$ lorsque $1 \leq j \leq b$. ■

DEFINITION 0.5.2. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés analytiques relatives à S alors on définit le faisceau abélien $\mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S$ par la formule

$$\mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S = \mathcal{O}_X \otimes f^{-1} \mathcal{O}_Y^{-1} \mathcal{D}_{Y|S}$$

La structure de $f^{-1} \mathcal{D}_{Y|S}$ -module à droite de $f^{-1} \mathcal{D}_{Y|S}$ induit par tensorisation une structure naturelle de $f^{-1} \mathcal{D}_{Y|S}$ -module à droite sur le faisceau $\mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S$. Ce faisceau possède également une structure naturelle de $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à gauche. Pour la construire, on peut procéder comme suit. Si $y : V \rightarrow \mathbb{C}^v$ est un système de coordonnées locales relatives sur Y au-dessus d'un système de coordonnées locales $s : B \rightarrow \mathbb{C}^b$ de S et si U est un ouvert de X tel que $f(U) \subset V$ alors on associe à tout champ de vecteur vertical θ sur X le morphisme

$$\theta \cdot U : \mathcal{D}_{U|S} \rightarrow Y|S \rightarrow \mathcal{D}_{U|S} \rightarrow Y|S$$

définit au niveau des préfaisceaux correspondants par la formule

$$\theta_U(h \circ f^{-1}P) = (\theta_U h) \circ f^{-1}P + \sum_{j=b+1}^v h(\theta_U f_j) \circ f^{-1}(D_{y_j} P) \quad (*)$$

Un calcul rapide montre que le morphisme θ_U est indépendant du système de coordonnées locales relatives y choisi sur V . Comme on a

$$\mathcal{D}_{U|S \rightarrow V|S} = \mathcal{D}_{U|S \rightarrow Y|S}$$

et que de plus $\theta_U|_{U \cap W} = \theta_W|_{U \cap W}$ pour tout couple U, W d'ouverts de X , les morphismes θ_U donnent par recollement un morphisme

$$\theta : \mathcal{D}_{X|S \rightarrow Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{X|S \rightarrow Y|S}$$

Si U est un ouvert de X , ce qui précède fournit un morphisme

$$\theta_U : \mathcal{O}_{X|S}^{(U)} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{D}_{X|S \rightarrow Y|S}^{(U)} \rightarrow \mathcal{D}_{X|S \rightarrow Y|S}^{(U)}$$

compatible avec les restrictions aux sous ouverts. On en tire aussitôt le morphisme de faisceaux

$$\theta : \mathcal{O}_{X|S} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{D}_{X|S \rightarrow Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{X|S \rightarrow Y|S}$$

La formule (*) montre que ce morphisme vérifie les hypothèses de la proposition 0.3.12. ce qui nous fournit aussitôt la structure à gauche cherchée.

Les structures à droite et à gauche définies ci-dessus sont évidemment compatibles et nous considérons donc dans la suite le faisceau $\mathcal{D}_{X|S \rightarrow Y|S}$ comme un $(\mathcal{D}_{X|S}, f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S})$ -bimodule. ■

REMARQUE 0.5.3. La définition précédente n'utilise pas le fait que l'application $\epsilon_X : X \rightarrow S$ est une submersion analytique nous nous accordons donc le droit d'utiliser le symbole $\mathcal{D}_{X|Z \rightarrow Y|Z}$ lorsque nous disposerons d'un

diagramme commutatif du type

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & Y \\
 \searrow f & & \swarrow g \\
 & Z &
 \end{array}$$

où toutes les applications sont analytiques, g étant une submersion. ■

PROPOSITION 0.5.4. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des morphismes de variétés analytiques relatives à S alors il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S} \otimes^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{D}_{Y|S} \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Z|S} \xrightarrow{g} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Z|S} \simeq \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Z|S}$$

valable au sens des $(\mathcal{D}_{X|S}, g \circ f^{-1} \mathcal{D}_{Z|S})$ -bimodules.

Preuve : Pour obtenir l'isomorphisme au sens des faisceaux abéliens, il suffit de considérer les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S} \otimes^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{D}_{Y|S} \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Z|S} \\
 \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Z|S} \\
 \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{O}_Y (f^{-1} \mathcal{O}_Y \otimes^{\mathbb{L}} f^{-1} g^{-1} \mathcal{O}_Z \xrightarrow{f^{-1} g^{-1}} \mathcal{D}_{Z|S}) \\
 \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}} g \circ f^{-1} \mathcal{O}_Z \xrightarrow{g \circ f^{-1}} \mathcal{D}_{Z|S}
 \end{aligned}$$

Une vérification rapide tenant compte des définitions adoptées ci-dessus permet alors de montrer que l'isomorphisme que l'on vient de construire est en fait compatible avec les structures de $(\mathcal{D}_{X|S}, g \circ f^{-1} \mathcal{D}_{Z|S})$ -bimodules des deux membres. ■

Images directes

DEFINITION 0.5.5. Soient S une variété analytique et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés analytiques relatives à S . A tout $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite \mathcal{M} on associe son image directe ordinaire définie par la formule

$$f_{|S*}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S)$$

et on définit son image directe extraordinaire par la formule

$$f_{|S!}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}f_!(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S)$$

De même, pour tout $(\mathcal{D}_{X|S}, \mathcal{D}_{X|S})$ -bimodule à droite \mathcal{M} , on pose :

$$f_{|S*}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}f_*((\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S)$$

$$f_{|S!}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}f_!((\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S)$$

PROPOSITION 0.5.6. Si $f : X \rightarrow Y$ et $h : Y \rightarrow Z$ sont deux morphismes de variétés analytiques relatives à S alors on a l'isomorphisme fonctoriel suivant :

$$\underline{h}_! \circ \underline{f}_! \simeq \underline{h}_! \circ \underline{f}_!$$

au niveau des catégories dérivées. Si de plus f est propre alors on a également l'isomorphisme

$$\underline{h}_* \circ \underline{f}_* \simeq \underline{h}_* \circ \underline{f}_*$$

Preuve : Pour obtenir le premier isomorphisme, il suffit de remarquer

que pour tout $\mathcal{D}_{X|S}$ -module \mathcal{M} on a successivement

$$\underline{h}_1(f_1, \mathcal{M}) \simeq \text{Rh}_1((\text{Rf}_1(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S)) \otimes_{\mathcal{D}_{Y|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{Z}|S) \quad (*)$$

$$\simeq \text{Rh}_1 \text{Rf}_1((\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S) \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{Z}|S) \quad (**)$$

$$\simeq \text{R}(h \circ f)_1(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Z}|S) \quad (***)$$

$$\simeq \underline{h \circ f}_1(\mathcal{M})$$

Précisons que pour passer de (*) à (**), nous avons utilisé la formule de projection et que pour passer de (**) à (***), nous avons utilisé la proposition 0.5.4. Le second isomorphisme s'obtient de manière entièrement analogue. ■

REMARQUE 0.5.7. Il est clair que l'on a une proposition analogue à la précédente dans le cas des bimodules différentiels. ■

Relations entre images directes de modules et de bimodules

PROPOSITION 0.5.8. On a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} [(\mathcal{D}_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S] \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S \\ \simeq \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \end{aligned}$$

compatible tant avec la structure de $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à gauche des deux membres qu'avec leurs structures de $f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}$ -modules à droite.

Preuve : On a successivement

$$\begin{aligned}
 & [(\mathcal{D}_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S}] \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \\
 & \quad \simeq [\mathcal{D}_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S}] \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \\
 & [\mathcal{D}_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S}] \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \\
 & \quad \simeq \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \quad (*) \\
 & \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \\
 & \quad \simeq \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \\
 & \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \\
 & \quad \simeq \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}} (f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}) \quad (**) \\
 & \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \\
 & \quad \simeq \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y|S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}} (f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}) \quad (***)
 \end{aligned}$$

Précisons qu'en (*) on a utilisé la proposition 0.4.2., qu'en (**) le dernier produit tensoriel utilise la structure de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module à gauche de $f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}$ et qu'en (***) le dernier produit tensoriel utilise la structure de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module à droite du premier facteur et la structure $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module à gauche du second, le passage de l'avant dernière ligne à la dernière étant justifié par la proposition 0.4.2. ■

PROPOSITION 0.5.9. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite et soit $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S}$ le $\mathcal{D}_{X|S}$ -bimodule à droite qui lui est canoniquement associé. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés relatives à S alors on a l'isomorphisme suivant :

$$\underline{f}_{|S|}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S}) \simeq \underline{f}_{|S|}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y|S}$$

dans la catégorie dérivée $D(\text{Mod}-(\mathcal{D}_{Y|S} \mathcal{D}_{Y|S}))$.

Preuve : Cela résulte immédiatement de la proposition précédente. ■

Complexe dualisant

RAPPEL 0.5.10. A toute variété analytique X relative à S on associe le faisceau $\Omega_{X|S}$ des formes différentielles holomorphes relatives de degré $\dim X - \dim S$. Ce faisceau est muni canoniquement d'une structure de $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite compatible avec sa structure de \mathcal{O}_X -module et caractérisée par le fait que, pour tout ouvert U de X , on a $\omega \cdot \theta = -L_\theta \omega$ si $\omega \in \Omega_{X|S}(U)$ et si θ est un champ de vecteurs vertical défini sur U .

DEFINITION 0.5.11. La définition 0.4.1. montre que le faisceau $\Omega_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X|S}$ est muni naturellement d'une structure de $\mathcal{D}_{X|S}$ bimodule à droite. Il en résulte que le complexe

$$K_{X|S} = \Omega_{X|S}[x-s] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X|S}$$

est un complexe de $\mathcal{D}_{X|S}$ bimodules à droite. Posons

$$\mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, K_{X|S})$$

pour tout complexe \mathcal{M} d'amplitude finie constitué de $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à droite. Ce qui précède montre que $\mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M})$ est un objet de la catégorie dérivée $\mathbf{D}^+(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{D}_{X|S})$. De plus, pour tout $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent \mathcal{M} , la flèche canonique

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, K_{X|S}), K_{X|S})$$

est un isomorphisme au niveau des catégories dérivées car \mathcal{M} admet localement une résolution projective de longueur finie par des modules

libres de type fini. Cette relation montre qu'il est naturel de dire, par analogie avec ce qui est fait en géométrie algébrique (cf: [7]), que $K_{X|S}$ est le **complexe dualisant** pour les $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à droite. De même, nous dirons que $\mathbb{D}_{X|S}$ est le **foncteur dualisant** pour les $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à droite.

PROPOSITION 0.5.12. Si \mathcal{M} est un objet de la catégorie dérivée $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\text{Mod-}\mathcal{D}_{X|S})$ alors on a

$$\text{Car}_{X|S}(\mathcal{M}) = \text{Car}_{X|S}(\mathbb{D}_{X|S} \mathcal{M})$$

Preuve : Cela résulte, par exemple, de la proposition 2.6.10. de [2]. ■

REMARQUE 0.5.13. La loi qui associe à un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à gauche \mathcal{M} le $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite $\Omega_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ définit une correspondance biunivoque entre la catégorie des $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à gauche et celle des $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules à droite. En utilisant cette correspondance, on adaptera, sans problème, ce qui a été fait ci-dessus pour les modules à droite au cas des modules à gauche. ■

CHAPITRE I

LA TRACE RELATIVE POUR LES MODULES DIFFERENTIELS

1.1. Rappel sur les distributions

Distributions sur une variété différentielle réelle

Soit M une variété différentielle de dimension m , pure, orientée.

DEFINITION 1.1.1. Le \mathbb{C} -vectoriel des p -distributions sur l'ouvert U de M est le dual topologique du \mathbb{C} -vectoriel topologique des $(m-p)$ formes différentielles à support compact inclus dans U . On a donc

$$\mathcal{D}_M^p(U) = \Gamma_c(U, \mathcal{E}_{\infty, M}^{m-p})$$

On note \mathcal{D}_M^p , le faisceau obtenu en associant à chaque ouvert U de M le \mathbb{C} -vectoriel $\mathcal{D}_M^p(U)$. Clairement, \mathcal{D}_M^0 est muni d'une structure de $\mathcal{D}_{\infty, M}$ -module à gauche (où $\mathcal{D}_{\infty, M}$ est le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients de classe C_{∞}). Cette structure est obtenue en transposant la structure de $\mathcal{D}_{\infty, M}$ -module à droite de $\mathcal{E}_{\infty, M}^m$.

On définit la différentielle extérieure :

$$d_M^p : \mathcal{D}_M^p(U) \rightarrow \mathcal{D}_M^{p+1}(U)$$

par transposition en posant :

$$\langle \omega, d_M^p u \rangle = (-1)^{m-p} \langle d_M^{m-p-1} \omega, u \rangle$$

pour tout $u \in \mathcal{D}_M^p(U)$ et tout $\omega \in \Gamma_c(U, \mathcal{E}_{\infty, M}^{m-(p+1)})$.

On définit un produit

$$\Delta : \mathcal{E}_{\infty, M}^q \times \mathcal{D}_M^p \rightarrow \mathcal{D}_M^{q+p}$$

par transposition en posant :

$$\langle \omega', \omega \Delta u \rangle = \langle \omega' \Delta \omega, u \rangle$$

pour tout $u \in \mathcal{D}_M^p$, $\omega \in \mathcal{E}_{\infty, M}^q$, $\omega' \in \Gamma_c(U, \mathcal{E}_{\infty, M}^{m-p-q})$.

Une vérification rapide montre que

$$d_M(\omega \Delta u) = d_M \omega \Delta u + (-1)^p \omega \Delta d_M u$$

si $\omega \in \mathcal{E}_{\infty, M}^p(U)$.

Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable entre variétés pures orientées. A toute distribution u sur M de support f -propre, on peut associer une image directe $f_* u$ définie par transposition en posant :

$$\langle \omega, f_* u \rangle = \langle 1, f^* \omega \Delta u \rangle$$

pour tout $u \in \mathcal{D}_M^{p+m}(M)$, $\omega \in \Gamma_c(N, \mathcal{E}_{\infty, N}^{-p})$. Cette définition montre que $f_* u$ est un élément de $\mathcal{D}_N^{p+n}(N)$. De plus, on a :

$$d_N(f_* u) = f_*(d_M u)$$

En effet, si $u \in \mathcal{D}_M^{p+m}(M)$ et si $\omega \in \Gamma_c(N, \mathcal{E}_{\infty, N}^{-p-1})$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle \omega, d_N f_* u \rangle &= (-1)^p \langle d_N \omega, f_* u \rangle \\
&= (-1)^p \langle 1, [f^* d_N \omega] \Delta u \rangle \\
&= (-1)^p \langle 1, [d_M f^* \omega] \Delta u \rangle \\
&= (-1)^p \langle 1, [d_M (f^* \omega \Delta u) - (-1)^{p-1} f^* \omega \Delta d_M u] \rangle \\
&= (-1)^{p-p} \langle 1, f^* \omega \Delta d_M u \rangle.
\end{aligned}$$

Ce qui précède montre que l'on a, en fait, construit un morphisme de complexes :

$$f_* : f_! \mathcal{D}_M^p[m] \rightarrow \mathcal{D}_N^p[n].$$

Distributions sur une variété analytique complexe

Soient M, N des variétés analytiques complexes de dimensions respectives m, n . La décomposition de Dolbeault de $\mathcal{E}_{\infty, M}^p$ par bitypes peut se représenter par l'isomorphisme:

$$\mathcal{E}_{\infty, M}^n \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{E}_{\infty, M}^{p, q}$$

Cet isomorphisme induit par dualité la décomposition suivante :

$$\mathcal{D}_M^n \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{D}_M^{p, q}$$

Les opérateurs $\partial_M, \bar{\partial}_M$ usuels s'étendent à $\mathcal{D}_M^{p, q}$ par transposition en posant :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \partial_M u \rangle &= (-1)^{p+q} \langle \partial_M \alpha, u \rangle \\
\langle \beta, \bar{\partial}_M u \rangle &= (-1)^{p+q} \langle \bar{\partial}_M \beta, u \rangle
\end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathcal{D}_M^{p,q}$, tout $\alpha \in \Gamma_c(M, \mathcal{E}_{\infty, M}^{m-p-1, m-q})$, $\beta \in \Gamma_c(M, \mathcal{E}_{\infty, M}^{m-p, m-q-1})$.
 Il résulte de la définition précédente que $d_M = \partial_M + \bar{\partial}_M$.

Si $f : M \rightarrow N$ est une application holomorphe, il est clair que f_* préserve la décomposition en bitypes de \mathcal{D}_M^n car f^* préserve la décomposition en bitypes de $\mathcal{E}_{\infty, M}^n$. Cela entraîne en particulier que :

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_N \circ f_* &= f_* \circ \bar{\partial}_M \\ \partial_N \circ f_* &= f_* \circ \partial_M\end{aligned}$$

Ainsi f_* induit le morphisme de complexes doubles suivant :

$$f_* : f_! \mathcal{D}_M''[(m, m)] \rightarrow \mathcal{D}_N''[(n, n)]$$

1.2. Le complexe de Dolbeault d'un \mathcal{D}_X -module

DEFINITION 1.2.1. Le complexe de Dolbeault d'un \mathcal{D}_X -module à droite \mathcal{M} est le complexe double $DB_X''(\mathcal{M})$ défini par

$$DB_X^{p,q}(\mathcal{M}) = \mathcal{D}_X^{p,q} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

La différentielle

$$\partial^{p,q} : DB_X^{p,q}(\mathcal{M}) \rightarrow DB_X^{p+1,q}(\mathcal{M})$$

étant déduite des morphismes

$$\begin{aligned}\partial^{p,q}(U) : \mathcal{D}_X^{p,q}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}(U) &\rightarrow \mathcal{D}_X^{p+1,q}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}(U) \\ u \otimes P &\rightarrow \partial^{p,q} u \otimes P + \sum_{i=1}^x dz_i \wedge u \otimes D_{z_i} P\end{aligned}$$

où $z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un système de coordonnées analytiques.

La différentielle

$$\bar{\partial}^{p,q} : DB_X^{p,q}(\mathcal{M}) \rightarrow DB_X^{p,q+1}(\mathcal{M})$$

étant quant à elle déduite des morphismes

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^{p,q}(U) : \mathcal{D}\ell_X^{p,q}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}(U) &\rightarrow \mathcal{D}\ell_X^{p,q+1}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}(U) \\ u \otimes P &\rightarrow \bar{\partial}^{p,q} u \otimes P \end{aligned}$$

où $z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un système de coordonnées analytiques. On vérifie aisément en utilisant les propriétés usuelles des (p,q) -distributions sur les variétés analytiques que les définitions ci-dessus sont licites.

PROPOSITION 1.2.2.

a) On peut munir naturellement $DB_X^{\prime\prime}(\mathcal{D}_X)$ d'une structure de complexe de \mathcal{D}_X -modules à droite.

b) On a le quasi-isomorphisme canonique suivant:

$$s DB_X^{\prime\prime}(\mathcal{D}_X)[x] \simeq_{\text{Qis}} \Omega_X$$

Preuve:

a) est évident de par les définitions des différentielles de $DB_X^{\prime\prime}(\mathcal{D}_X)$.

b) Il est clair que l'on a l'isomorphisme de complexes :

$$DB_X^{p,\cdot}(\mathcal{D}_X) \rightarrow \mathcal{D}\ell_X^{p,\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$$

Or, on sait que la flèche naturelle :

$$\Omega_X^p \rightarrow \mathcal{D}\ell_X^{p,\cdot}$$

est un quasi-isomorphisme. Il en résulte que l'on a le quasi-isomorphisme suivant :

$$\Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \simeq DB_X^{p,\cdot}(\mathcal{D}_X)$$

Cela montre que la flèche naturelle

$$DR_X^{\cdot}(\mathcal{D}_X) \simeq sDB_X^{\prime\prime}(\mathcal{D}_X)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes. Pour conclure, il suffit alors de tenir compte de l'isomorphisme classique

$$DR_X(\mathcal{D}_X) \simeq \Omega_X[-x]$$

PROPOSITION 1.2.3. A tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'une variété complexe de dimension x dans une variété complexe de dimension y on peut associer canoniquement la flèche de complexes doubles de \mathcal{D}_Y -modules suivante :

$$f_* : f_! DB_X''(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[(x, x)] \rightarrow DB_Y''(\mathcal{D}_Y)[(y, y)]$$

Preuve : Au niveau des composantes la flèche s'obtient en composant les flèches suivantes :

$$\begin{aligned} f_! DB_X^{p+x, q+x}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y}) &\simeq f_!(\mathcal{D}\ell_X^{p+x, q+x} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) \\ f_!(\mathcal{D}\ell_X^{p+x, q+x} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) &\simeq f_!\mathcal{D}\ell_X^{p+x, q+x} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y \quad (*) \\ f_!\mathcal{D}\ell_X^{p+x, q+x} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y &\simeq \mathcal{D}\ell_Y^{p+y, q+y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y \quad (**) \\ \mathcal{D}\ell_Y^{p+y, q+y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y &\simeq DB_Y^{p+y, q+y}(\mathcal{D}_Y) \end{aligned}$$

La flèche (*) résulte de la formule de projection, de la mollesse de $\mathcal{D}\ell_X$ et de la liberté de \mathcal{D}_Y sur \mathcal{O}_Y . Quant à la flèche (**) elle se déduit directement du morphisme d'intégration des distributions le long des fibres de f . Pour nous assurer que la flèche ainsi définie est bien un morphisme de complexes doubles, il suffit de procéder comme suit .

Considérons un système de coordonnées locales $z' : U \rightarrow \mathbb{C}^y$ de Y et

une section σ de $f_! \text{DB}^{p+q, q+x}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})$ de la forme $\sigma = u \otimes f^{-1}P$ où $u \in f_!(\mathcal{D}_X^{p+q, q+x})$, $P \in \mathcal{D}_Y(U)$. L'image de cette section par la flèche qui nous préoccupe est évidemment $f_*u \otimes P$. Calculons $\partial(f_*u \otimes P)$; on a successivement :

$$\begin{aligned} \partial(f_*u \otimes P) &= (\partial f_*u) \otimes P + \sum_{i=1}^y dz'_i \wedge f_*u \otimes D_{z'_i} P \\ &= (f_*\partial u) \otimes P + \sum_{i=1}^y f_*(df'_i \wedge u) \otimes D_{z'_i} P \end{aligned}$$

Or si $z: V \rightarrow \mathbb{C}^x$ est un système de coordonnées locales sur $f^{-1}U$ et si on tient compte de la définition de la différentielle du complexe de Dolbeault de $\mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ on voit que :

$$\begin{aligned} \partial(u \otimes f^{-1}P)|_V &= (\partial u \otimes f^{-1}P)|_V + \sum_{j=1}^x \sum_{i=1}^y (D_{z_j} f'_i) dz_j \wedge u \otimes f^{-1}(D_{z'_i} P)|_V \\ &= (\partial u \otimes f^{-1}P)|_V + \sum_{i=1}^y df'_i \wedge u \otimes f^{-1}(D_{z'_i} P)|_V \end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que

$$\partial(f_*u \otimes P) = f_* (\partial(u \otimes f^{-1}P)|_{f^{-1}U})$$

d'où l'on déduit que la flèche étudiée est compatible avec la première différentielle. Calculons maintenant $\bar{\partial}(f_*u \otimes P)$; on a successivement :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(f_*u \otimes P) &= (\bar{\partial} f_*u) \otimes P \\ &= (f_*\bar{\partial}u) \otimes P \\ &= f_*(\bar{\partial}u \otimes f^{-1}P) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité achève la preuve puisqu'elle établit la compatibilité de notre flèche avec la seconde différentielle de Dolbeault. ■

PROPOSITION 1.2.4. Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont des flèches de variétés analytiques complexes de dimensions respectives x, y, z alors on a

le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 f_! DB_X^{\prime\prime}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[(x,x)] \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow Z} & \xrightarrow{1} & DB_Y^{\prime\prime}(\mathcal{D}_Y)[(y,y)] \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow Z} \\
 \downarrow 4 & & \downarrow 2 \\
 f_! DB_X^{\prime\prime}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Z})[(x,x)] & \xrightarrow{3} & DB_Z^{\prime\prime}(\mathcal{D}_Z)[(z,z)]
 \end{array}$$

où la flèche (1) se déduit par produit tensoriel de la flèche f_* , où la flèche (2) est la flèche g_* , où la flèche (3) est la flèche $f_* g_*$ et où la flèche (4) est l'isomorphisme résultant de la formule de projection.

Preuve: Cela résulte directement des définitions et de la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 g_! f_! \mathcal{D} \ell_X^{\prime\prime}[(x,x)] & \rightarrow & g_! \mathcal{D} \ell_Y^{\prime\prime}[(y,y)] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g_* f_! \mathcal{D} \ell_X^{\prime\prime}[(x,x)] & \rightarrow & \mathcal{D} \ell_Z^{\prime\prime}[(z,z)]
 \end{array}$$

où les flèches s'obtiennent à partir des morphismes d'intégration le long des fibres. ■

1.3. La trace relative pour les modules différentiels

PROPOSITION 1.3.1. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés analytiques de dimensions respectives x, y alors on peut définir canoniquement la flèche de $\mathbf{D}^+(\text{Mod-}\mathcal{D}_Y)$ suivante:

$$f_! (\Omega_X[x]) \rightarrow \Omega_Y[y]$$

Preuve: On obtient la flèche annoncée en composant les flèches suivantes :

$$\begin{aligned}
\underline{r}_1(\Omega_X[x]) &\simeq \mathbb{R}f_1(\Omega_X[x] \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}) \\
\mathbb{R}f_1(\Omega_X[x] \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}) &\simeq \mathbb{R}f_1(\text{sDB}_X^{\vee\vee}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[2x]) \quad (*) \\
\mathbb{R}f_1(\text{sDB}_X^{\vee\vee}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[2x]) &\simeq r_1(\text{sDB}_X^{\vee\vee}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[2x]) \quad (**) \\
r_1(\text{sDB}_X^{\vee\vee}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[2x]) &\rightarrow \text{sDB}_Y^{\vee\vee}(\mathcal{D}_Y)[2y] \quad (***) \\
\text{sDB}_Y^{\vee\vee}(\mathcal{D}_Y)[2y] &\simeq \Omega_Y[y] \quad (*)
\end{aligned}$$

Précisons que les quasi-isomorphismes (*) résultent de la Proposition 1.2.2., que le quasi-isomorphisme (**) s'obtient en remarquant que $\text{DB}_X^{p,q}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})$ est c-mou et que la flèche (***) est fournie par la Proposition 1.2.3. ■

REMARQUE 1.3.2. Comme $\mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ possède la section canonique $1_{X \rightarrow Y}$, on a une flèche canonique :

$$\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$$

On en déduit aussitôt une flèche canonique :

$$\Omega_X \rightarrow \Omega_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \quad (2)$$

Tenant compte de la flèche que nous venons de construire, on obtient la flèche suivante :

$$\mathbb{R}f_1(\Omega_X[x]) \rightarrow \Omega_Y[y]$$

Montrons que cette flèche coïncide avec le morphisme analogue construit dans la théorie de la dualité en géométrie analytique. Pour ce faire, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}\ell_X^{X, \bullet}[x] & \xrightarrow{1} & \text{sDB}_X^{\bullet, \bullet}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[2x] \\
 \downarrow \text{Qis} & & \downarrow \text{Qis} \\
 \Omega_X & \xrightarrow{2} & \Omega_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}
 \end{array}$$

Précisons que la flèche 1 est définie au niveau des complexes doubles par

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}\ell_X^{X, \bullet} & \rightarrow & \text{DB}_X^{\bullet, \bullet}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[(x, 0)] \\
 u & \rightarrow & u \otimes 1_{X \rightarrow Y}
 \end{array}$$

que la flèche 2 est la flèche définie ci-dessus, que la première flèche verticale est la flèche usuelle alors que la seconde est fournie par la Proposition I.2.2. . On a également le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 f_! \mathcal{D}\ell_X^{X, \bullet}[x] & \xrightarrow{3} & f_! \text{sDB}_X^{\bullet, \bullet}(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y})[2x] \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
 \mathcal{D}\ell_Y^{Y, \bullet}[y] & \xrightarrow{4} & \text{sDB}_Y^{\bullet, \bullet}(\mathcal{D}_Y)[2y]
 \end{array}$$

où la flèche 3 est l'image par le foncteur $f_!$ de la flèche 2 ci-dessus et où la flèche 4 est définie au niveau des complexes doubles par

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}\ell_Y^{Y, \bullet} & \rightarrow & \text{DB}_Y^{\bullet, \bullet}(\mathcal{D}_Y)[(y, 0)] \\
 u & \rightarrow & u \otimes 1_Y
 \end{array}$$

Pour conclure, il suffit maintenant de se souvenir de la construction de la trace en géométrie analytique et de considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}e_Y^y[y] & \xrightarrow{4} & \text{sDB}_Y^y(\mathcal{D}_Y)[2y] \\
 \uparrow \text{Qis} & & \uparrow \text{Qis} \\
 \Omega_Y[y] & = & \Omega_Y[y] \quad \blacksquare
 \end{array}$$

DEFINITION 1.3.3 La **trace relative** (au sens des modules différentiels) associée à une application analytique $f : X \rightarrow Y$ est définie comme étant la flèche

$$f_! K_X \rightarrow K_Y$$

de la catégorie dérivée $D(\text{Mod}-(\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_Y))$ obtenue en composant les flèches suivantes :

$$f_! K_X \simeq f_!(\Omega_X[x] \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X) \quad (1)$$

$$f_!(\Omega_X[x] \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X) \simeq (f_! \Omega_X[x]) \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_Y \quad (2)$$

$$(f_! \Omega_X[x]) \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_Y \simeq \Omega_Y[y] \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_Y \quad (3)$$

où (1) provient de la définition de K_X , où (2) résulte de la proposition 0.5.9. et où (3) se déduit par tensorisation de la flèche fondamentale construite dans la Proposition 1.3.1. . ■

1.4. La trace relative pour les modules différentiels relatifs

PROPOSITION 1.4.1. Si $g : X \rightarrow S$ et $h : Y \rightarrow S$ sont deux variétés analytiques relatives à S et si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme au-dessus de S alors on peut construire la flèche canonique suivante:

$$f_{!S}(\Omega_{X|S}[x-s]) \rightarrow \Omega_{Y|S}[y-s]$$

où x (resp. y, s) est la dimension de X (resp. Y, S).

Preuve : Il est clair que l'on a le quasi-isomorphisme suivant :

$$\Omega_{X|S}^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S \simeq (\Omega_X^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S)^{\otimes g^{-1} \mathcal{O}_S} \otimes (g^{-1} \Omega_S^{\otimes -1})$$

La formule de projection fournit alors le quasi-isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}f_! (\Omega_{X|S}^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S) \\ \simeq [\mathbb{R}f_! (\Omega_X^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S)]^{\otimes h^{-1} \mathcal{O}_S} \otimes (h^{-1} \Omega_S^{\otimes -1}) \end{aligned}$$

puisque $g = h \circ f$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{Y|S}} (\mathbb{R}f_! (\Omega_{X|S}[x-s]^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S), \Omega_{Y|S}[y-s]) \\ \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{Y|S}} (\mathbb{R}f_! (\Omega_X[x]^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S), \Omega_Y[y]) \end{aligned}$$

puisque $h^{-1} \Omega_S^{\otimes -1}$ est un $h^{-1} \mathcal{O}_S$ -module inversible. On a alors successivement

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{Y|S}} (f_{|S|} \Omega_{X|S}[x-s], \Omega_{Y|S}[y-s]) \\ \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y} (\mathbb{R}f_! (\Omega_X[x]^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S)^{\otimes L} \mathcal{D}_{Y|S} \mathcal{D}_Y, \Omega_Y[y]) \\ \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y} (\mathbb{R}f_! [(\Omega_X[x]^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_X)^{\otimes L} \mathcal{D}_X \mathcal{D}_X \rightarrow Y], \Omega_Y[y]) \end{aligned}$$

Comme on dispose évidemment d'une flèche canonique

$$\Omega_X^{\otimes L} \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_X \rightarrow \Omega_X$$

l'isomorphisme précédent fournit la flèche suivante:

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{Y|S}} (f_{|S|} \Omega_{X|S}[x-s], \Omega_{Y|S}[y-s]) \leftarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y} (f_{|} \Omega_X[x], \Omega_Y[y])$$

Le morphisme cherché est alors l'image par cette flèche du morphisme canonique

$$f_! \Omega_X[x] \rightarrow \Omega_Y[y]$$

construit au paragraphe précédent. ■

REMARQUE 1.4.2. En procédant comme au paragraphe précédent, on voit que la section canonique $\Gamma_{X|S} \rightarrow \Gamma_{Y|S}$ de $\mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S}$ induit la flèche naturelle suivante :

$$Rf_! \Omega_{X|S} \rightarrow f_! \Omega_{X|S}$$

On obtient donc un morphisme naturel

$$Rf_! \Omega_{X|S}[x-s] \rightarrow \Omega_{Y|S}[y-s]$$

On vérifie aisément que cette dernière flèche coïncide avec la trace relative définie en géométrie analytique. ■

DEFINITION 1.4.3 La **trace relative** (au sens des modules différentiels relatifs) associée à un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de variétés analytiques relatives à S est définie comme étant la flèche

$$f_{|S|} K_{X|S} \rightarrow K_{Y|S}$$

de la catégorie dérivée $D(\text{Mod}-(\mathcal{D}_{Y|S}, \mathcal{D}_{Y|S}))$ obtenue en composant les flèches suivantes :

$$f_{|S|} K_{X|S} \simeq f_{|S|} (\Omega_{X|S}[x-s] \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{D}_{X|S}) \quad (1)$$

$$f_{|S|} (\Omega_{X|S}[x-s] \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{D}_{X|S}) \simeq (f_{|S|} \Omega_{X|S}[x-s]) \otimes_{\mathcal{O}_Y}^L \mathcal{D}_{Y|S} \quad (2)$$

$$(f_{|S|} \Omega_{X|S}[x-s]) \otimes_{\mathcal{O}_Y}^L \mathcal{D}_{Y|S} \simeq \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes_{\mathcal{O}_Y}^L \mathcal{D}_{Y|S} \quad (3)$$

où (1) provient de la définition de $K_{X|S}$, où (2) résulte de la proposition 0.5.9 et où (3) se déduit par tensorisation de la flèche fondamentale construite dans la Proposition 1.4.1. ■

1.5. Construction de la trace par le réel

Dans ce paragraphe, nous allons donner une construction de la trace pour les modules différentiels sur des variétés analytiques complexes en utilisant les structures réelles sous-jacentes. Chemin faisant nous construirons une trace valable sur toutes les variétés analytiques réelles.

Trace pour les variétés analytiques réelles

DEFINITION 1.5.1. Si M est une variété analytique réelle orientée de dimension m et si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_M -module à gauche alors on note $DB_M^p(\mathcal{M})$ le complexe dont les composantes sont définies par

$$DB_M^p(\mathcal{M}) = \mathcal{D}\mathcal{L}_M^p \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{M}$$

et dont la différentielle est définie dans chaque système de coordonnées locales $x:U \rightarrow \mathbb{R}^m$ en posant

$$d_M^p(u \otimes P) = d_M^p u \otimes P + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge u) \otimes D_{x_i} P. \blacksquare$$

PROPOSITION 1.5.2. Le complexe $DB_M^p(\mathcal{M})$ est isomorphe au complexe de De Rham du \mathcal{D}_M -module à gauche $\mathcal{D}\mathcal{L}_M^p \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{M}$.

Preuve : D'une part, il est clair que l'on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 DR_M^p(\mathcal{D}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & \mathcal{D}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{M} \\
 \searrow \text{iso} & & \nearrow \text{iso} \\
 \Omega_M^p \otimes_{\mathcal{A}_M} (\mathcal{D}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{M}) & &
 \end{array}$$

D'autre part, si $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un système de coordonnées locales, alors pour tout $\omega \in \Omega_M^p(U)$, tout $u \in \mathcal{D}_M(U)$ et tout $P \in \mathcal{M}(U)$ on a

$$\begin{aligned}
 d_{DR}^p(\omega \otimes (u \otimes P)) & \\
 &= d^p \omega \otimes (u \otimes P) + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge \omega) \otimes D_{x_i}(u \otimes \omega) \\
 &= d^p \omega \otimes (u \otimes P) + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge \omega) \otimes (D_{x_i} u \otimes P) + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge \omega) \otimes (u \otimes D_{x_i} P)
 \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
 i(d_{DR}^p(\omega \otimes (u \otimes P))) & \\
 &= (d^p \omega \wedge u) \otimes P + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge \omega \wedge D_{x_i} u) \otimes P + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge \omega \wedge u) \otimes D_{x_i} P \\
 &= d^p(\omega \wedge u) \otimes P + \sum_{i=1}^n dx_i \wedge (\omega \wedge u) \otimes D_{x_i} P \\
 &= d_{DB}^p i(\omega \otimes (u \otimes P))
 \end{aligned}$$

Cette dernière relation conclut la preuve. ■

PROPOSITION 1.5.3. Le complexe de \mathcal{D}_M -modules à droite $DB_M(\mathcal{D}_M)[m]$ est quasi-isomorphe au faisceau \mathcal{D}_M^m muni de sa structure naturelle de \mathcal{D}_M -module à droite.

Preuve : De par la proposition précédente, on a l'isomorphisme

$$DB_M(\mathcal{D}_M) \simeq DR_M(\mathcal{D}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}_M)$$

Comme on a évidemment

$$DR_M(\mathcal{D}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}_M) \simeq DR_M(\mathcal{D}_M) \otimes_{\mathcal{D}_M} (\mathcal{D}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}_M)$$

On déduit de la proposition 0.4.2. que l'on a l'isomorphisme suivant

$$DR_M(\mathcal{D}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}_M) \simeq DR_M(\mathcal{D}_M) \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}_M$$

La conclusion résulte alors de ce qu'on a le quasi-isomorphisme canonique

$$DR_M(\mathcal{D}_M) \simeq \Omega_M[-m]$$

et de ce que l'isomorphisme canonique

$$\Omega_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}_M \simeq \mathcal{D}_M^m$$

est compatible avec les structures de \mathcal{D}_M -module à droite des deux membres. ■

PROPOSITION 1.5.4. A tout morphisme $f: M \rightarrow N$ de variétés analytiques réelles orientées de dimensions respectives m et n est associée une flèche canonique d'intégration

$$f_! DB_M(\mathcal{D}_{M \rightarrow N}[m]) \rightarrow DB_N(\mathcal{D}_N[n])$$

compatible avec les structures de \mathcal{D}_N -modules des deux membres.

Preuve : Il est clair que l'on dispose des isomorphismes suivants

$$f_! DB_M^p(\mathcal{D}_{M \rightarrow N}) \simeq f_!(\mathcal{D}_M^p \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}_N} f^{-1}\mathcal{D}_N) \simeq f_!(\mathcal{D}_M^p) \otimes_{\mathcal{A}_N} \mathcal{D}_N$$

Par conséquent, la flèche canonique d'intégration des distributions le long des fibres de f fournit par tensorisation sur \mathcal{A}_N avec \mathcal{D}_N la flèche canonique

$$f_! \mathcal{D}B_M^{p+m}(\mathcal{D}_{M \rightarrow N}) \rightarrow \mathcal{D}B_N^{p+n}(\mathcal{D}_N)$$

En procédant comme dans 1.2.3. , on montre que le morphisme du faisceau gradué $f_! \mathcal{D}B_M(\mathcal{D}_{M \rightarrow N}[m])$ dans le faisceau gradué $\mathcal{D}B_N(\mathcal{D}_N[n])$ est en fait un morphisme de complexes de \mathcal{D}_N -modules à droite. ■

PROPOSITION 1.5.5. A tout morphisme $f : M \rightarrow N$ de variétés analytiques réelles orientées de dimension respectives m et n est associée la trace relative réelle canonique suivante

$$\mathbb{R}f_!(\mathcal{D}\ell_M^m \otimes_{\mathcal{D}_M}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{M \rightarrow N}) \rightarrow \mathcal{D}\ell_N^n$$

Preuve : Il suffit de composer les flèches suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}f_!(\mathcal{D}\ell_M^m \otimes_{\mathcal{D}_M}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{M \rightarrow N}) &\simeq \mathbb{R}f_!(\mathcal{D}B_M(\mathcal{D}_M) \otimes_{\mathcal{D}_M}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{M \rightarrow N}) \\ \mathbb{R}f_!(\mathcal{D}B_M(\mathcal{D}_M[m]) \otimes_{\mathcal{D}_M}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{M \rightarrow N}) &\simeq f_! \mathcal{D}R_M(\mathcal{D}_{M \rightarrow N}[m]) \\ f_! \mathcal{D}R_M(\mathcal{D}_{M \rightarrow N}[m]) &\rightarrow \mathcal{D}B_N(\mathcal{D}_N[n]) \\ \mathcal{D}B_N(\mathcal{D}_N[n]) &\simeq \mathcal{D}\ell_N^n \end{aligned}$$

Relations entre $\mathcal{D}_X^{\mathbb{R}}$, \mathcal{D}_X et $\mathcal{D}_{\bar{X}}$

RAPPEL 1.5.6. A toute variété analytique complexe X , on associe sa variété analytique réelle sous-jacente, notée $X^{\mathbb{R}}$ et sa variété conjuguée, notée \bar{X} . Par définition, un système de coordonnées locales sur \bar{X} est simplement le conjugué d'un système de coordonnées locales sur X .

Comme d'habitude, $TX^{\mathbb{R}}$ désigne la complexification triviale du fibré tangent réel de $X^{\mathbb{R}}$ et nous considérons le fibré tangent holomorphe TX comme un sous fibré vectoriel de $TX^{\mathbb{R}}$. On vérifie aisément que le fibré $T\bar{X}$ est le conjugué de TX dans $TX^{\mathbb{R}}$.

Ce qui précède montre que l'on peut considérer les anneaux \mathcal{D}_X et $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ comme des sous anneaux de $\mathcal{D}_X^{\mathbb{R}}$. De plus, si X est un ouvert de \mathbb{C}^n alors l'image de $\mathcal{D}_X(X)$ (resp. $\mathcal{D}_{\bar{X}}(X)$) dans $\mathcal{D}_X^{\mathbb{R}}(X)$ est donnée par la formule

$$\mathcal{D}_X(X) = \left\{ \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) D_z^{\alpha} : a_{\alpha} \in \mathcal{O}_X(X) \right\}$$

$$\text{(resp. } \mathcal{D}_{\bar{X}}(X) = \left\{ \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) D_{\bar{z}}^{\alpha} : a_{\alpha} \in \mathcal{O}_{\bar{X}}(X) \right\})$$

De ces formules on déduit aussitôt que $[\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{\bar{X}}] = 0$. Cette dernière relation montre en particulier que tout $\mathcal{D}_X^{\mathbb{R}}$ -module à gauche (resp. à droite) est muni naturellement d'une structure de $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{\bar{X}})$ -bimodule à gauche (resp. à droite). ■

PROPOSITION 1.5.7. Si X est une variété analytique complexe de dimension x alors on a l'isomorphisme canonique de \mathcal{D}_X -modules à droite suivant :

$$\mathcal{D}_X^{x,x} \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}} \mathcal{O}_{\bar{X}} \simeq \Omega_X[x]$$

Preuve : Il est clair que l'isomorphisme canonique

$$\Omega_{\bar{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} (\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{x,x}) \simeq \mathcal{D}_X^{x,x}$$

est compatible avec les structures de $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{\bar{X}})$ -bimodule à droite des deux membres car il en est trivialement ainsi localement. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'on a successivement:

$$\begin{aligned}
& [\Omega_{\bar{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} (\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}\ell_X)] \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\bar{X}} \\
& \simeq \Omega_{\bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^{\mathbb{L}} [(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}\ell_X) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\bar{X}}] \quad (*) \\
& \simeq \Omega_{\bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}\ell_X^{x,0} \\
& \simeq DR_{\bar{X}}(\mathcal{D}_{\bar{X}})[x] \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}\ell_X^{x,0} \quad (**) \\
& \simeq \mathcal{D}\ell_X^{x,0}[x] \quad (***) \\
& \simeq \Omega_X[x]
\end{aligned}$$

Précisons que les isomorphismes considérés ont lieu au sens des catégories dérivées. Précisons également qu'en (*) on a utilisé la proposition 0.4.2. et qu'en (***) $\mathcal{D}\ell_X^{x,0}$ désigne la $x^{\text{ème}}$ ligne du complexe de Dolbeault des distributions. ■

PROPOSITION 1.5.8. Si X est une variété analytique complexe alors on a l'isomorphisme canonique de $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{\bar{X}})$ -bimodules à droite suivant:

$$(\mathcal{A}_X \mathbb{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathcal{D}_{\bar{X}} \simeq \mathcal{D}_X \mathbb{R}$$

Preuve : Considérons la flèche

$$\alpha : (\mathcal{A}_X \mathbb{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathcal{D}_{\bar{X}} \rightarrow \mathcal{D}_X \mathbb{R}$$

définie au niveau du produit tensoriel des préfaisceaux correspondants par

$$\alpha_U((f \otimes P) \otimes Q) = f.1_X.P.Q$$

pour tout $f \in \mathcal{A}_X \mathbb{R}(U)$, $P \in \mathcal{D}_X(U)$, $Q \in \mathcal{D}_{\bar{X}}(U)$. Par construction, il est clair que cette flèche est un morphisme de $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{\bar{X}})$ -bimodules à droite. Enfin, la

structure locale des faisceaux \mathcal{D}_X , $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ et $\mathcal{D}_X \mathbb{R}$ montre que $\underline{\alpha}$ est localement un isomorphisme, ce qui permet de conclure. ■

PROPOSITION 1.5.9. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés analytiques complexes alors au niveau de la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathcal{D}_X \mathbb{R}\text{-Mod}-(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{\bar{X}}))$ on a l'isomorphisme canonique suivant :

$$(\mathcal{D}_X \mathbb{R} \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}) \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\bar{X}} \mathcal{D}_{\bar{X} \rightarrow \bar{Y}} \simeq \mathcal{D}_X \mathbb{R} \rightarrow_Y \mathbb{R}$$

Preuve : Au niveau des $(f^{-1}\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{D}_{\bar{Y}})$ -bimodules à droite, on a successivement:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}_X \mathbb{R} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}) \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}} \mathcal{D}_{\bar{X}} \mathcal{D}_{\bar{X} \rightarrow \bar{Y}} \\ & \simeq (\mathcal{A}_X \mathbb{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathcal{D}_{\bar{X} \rightarrow \bar{Y}} \quad (*) \\ & \simeq (\mathcal{A}_X \mathbb{R} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\bar{Y}}} f^{-1}\mathcal{D}_{\bar{Y}} \\ & \simeq \mathcal{A}_X \mathbb{R} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}_Y \mathbb{R}} [(f^{-1}\mathcal{A}_Y \mathbb{R} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\bar{Y}}} f^{-1}\mathcal{D}_{\bar{Y}}] \\ & \simeq \mathcal{A}_X \mathbb{R} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}_Y \mathbb{R}} f^{-1}\mathcal{D}_Y \mathbb{R} \quad (**) \\ & \simeq \mathcal{D}_X \mathbb{R} \rightarrow_Y \mathbb{R} \end{aligned}$$

où en (*) (resp. (**)) on a utilisé la proposition précédente sur X (resp. Y). La compatibilité de l'isomorphisme obtenu avec la structure de $\mathcal{D}_X \mathbb{R}$ -module à gauche des deux membres se vérifie alors par un calcul direct. ■

Trace pour les modules différentiels complexes

PROPOSITION 1.5.10. On peut déduire la trace pour les modules différentiels sur les variétés analytiques complexes de la trace pour les variétés analytiques réelles.

Preuve : Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés analytiques complexes. La trace réelle associée au morphisme de variétés analytiques réelles sous-jacent à f induit par tensorisation la flèche

$$Rf_! (\mathcal{D}_X^{x,x} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X \mathbb{R} \mathcal{D}_X \mathbb{R} \rightarrow Y \mathbb{R}) \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\bar{Y}} \mathcal{O}_{\bar{Y}} \rightarrow \mathcal{D}_Y^{y,y} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\bar{Y}} \mathcal{O}_{\bar{Y}}$$

Si l'on tient compte de la proposition précédente et de la formule de projection, on obtient la flèche

$$Rf_! (\mathcal{D}_X^{x,x} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X \mathbb{R} [(\mathcal{D}_X \mathbb{R} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X \mathcal{D}_X \rightarrow Y) \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\bar{X}} \mathcal{D}_{\bar{X}} \rightarrow \bar{Y}]) \otimes^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{D}_{\bar{Y}} f^{-1} \mathcal{O}_{\bar{Y}} \rightarrow \mathcal{D}_Y^{y,y} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\bar{Y}} \mathcal{O}_{\bar{Y}}$$

Après simplification du premier membre, cette flèche devient le morphisme

$$Rf_! ([\mathcal{D}_X^{x,x} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\bar{X}} \mathcal{O}_{\bar{X}}] \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X \mathcal{D}_X \rightarrow Y) \rightarrow \mathcal{D}_Y^{y,y} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\bar{Y}} \mathcal{O}_{\bar{Y}}$$

La proposition 1.5.7. montre alors que cette flèche induit le morphisme

$$Rf_! (\Omega_X[x] \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_X \mathcal{D}_X \rightarrow Y) \rightarrow \Omega_Y[y]$$

ce qui permet de conclure. ■

CHAPITRE II

DUALITE POUR LES IMMERSIONS

PROPOSITION II.1. Si $f : X \rightarrow Y$ est une immersion fermée de variétés analytiques relatives à S alors la flèche canonique

$$\begin{aligned}
 f_*((\Omega_{X|S}[x-s] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{X|S}) \\
 \rightarrow \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(f_* \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S}, \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y|S})
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

déduite de la trace relative est un isomorphisme dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\text{Mod}-(f_* \mathcal{D}_{X|S}, \mathcal{D}_{Y|S}))$.

Preuve : Il est clair que l'on a l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(f_* \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S}, \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y|S}) \\
 \simeq \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(f_* \mathcal{O}_X, \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y|S})
 \end{aligned}$$

dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\text{Mod}-\mathcal{D}_{Y|S})$. En la composant avec la flèche (*) cela donne la flèche (**) suivante

$$f_*((\Omega_{X|S}[x-s] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S) \\ \rightarrow \underline{\mathrm{RHom}}_{\mathcal{O}_Y}(f_* \mathcal{O}_X, \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y|S})$$

Cette dernière correspond par adjonction à la flèche (**)' ci-dessous

$$f_*((\Omega_{X|S}[x-s] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y|S}$$

Il résulte des définitions adoptées et de la Remarque 1.4.2. que l'on a le diagramme commutatif suivant où la flèche (1) est déduite de la trace de la géométrie analytique par la formule de projection :

$$\begin{array}{ccc}
 f_*(\Omega_{X|S}[x-s] \otimes f^{-1}\mathcal{O}_Y) \otimes f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S} \otimes f_*\mathcal{O}_X \otimes f_*\mathcal{O}_X & \xrightarrow{(1)} & \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes \mathcal{O}_Y \mathcal{D}_{Y|S} \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\
 f_*((\Omega_{X|S}[x-s] \otimes \mathcal{O}_X \mathcal{D}_{X|S}) \otimes \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S) \otimes f_*\mathcal{O}_X \otimes f_*\mathcal{O}_X & \xrightarrow{(**)} & \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes \mathcal{O}_Y \mathcal{D}_{Y|S} \\
 \downarrow & & \downarrow \tau \\
 f_*[(\Omega_{X|S}[x-s] \otimes \mathcal{O}_X \mathcal{D}_{X|S}) \otimes \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S] \otimes \mathcal{D}_{X|S} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{Y}|S & \xrightarrow{(*)} & \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes \mathcal{O}_Y \mathcal{D}_{Y|S}
 \end{array}$$

Comme la flèche (1) induit par adjonction l'isomorphisme

$$f_*(\Omega_{X|S}[x-s] \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y|S}) \simeq \underline{\mathrm{RHom}}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \Omega_{Y|S}[y-s] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y|S})$$

la commutativité du diagramme précédent montre que la flèche (***) est un isomorphisme, ce qui permet de conclure. ■

PROPOSITION II.2. Si X, Y sont des variétés relatives à S et si $i: X \rightarrow Y$ est une immersion fermée au dessus de S alors la flèche canonique

$$i_{|S!} \mathcal{D}_{X|S}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S}(i_{|S*}\mathcal{M})$$

est un isomorphisme de la catégorie dérivée $D(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{D}_{Y|S})$ pour tout $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent \mathcal{M} .

Preuve : Le résultat est une conséquence des isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} i_{|S!} \mathcal{D}_{X|S}(\mathcal{M}) &\simeq \mathrm{R}i_!(\underline{\mathrm{RHom}}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, K_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S) \\ &\simeq \mathrm{R}i_!(\underline{\mathrm{RHom}}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, K_{X|S} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S) \quad (1) \\ &\simeq \underline{\mathrm{RHom}}_{i_! \mathcal{D}_{X|S}}(\mathrm{R}i_! \mathcal{M}, \underline{\mathrm{RHom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(i_! \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S, K_{Y|S})) \quad (2) \\ &\simeq \underline{\mathrm{RHom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(\mathrm{R}i_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S), K_{Y|S}) \\ &\simeq \mathcal{D}_{Y|S}(i_{|S*}(\mathcal{M})) \end{aligned}$$

Précisons qu'en (1) on a utilisé la cohérence de \mathcal{M} et qu'en (2) on a utilisé le fait que i est une immersion fermée et la proposition précédente. ■

CHAPITRE III

DUALITE POUR LES SUBMERSIONS

III.1. Δ -Systèmes

Δ -systèmes et faisceaux associés

DEFINITION III.1.1.

Notons Δ_+ la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés $\{0, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) et dont les morphismes sont les applications strictement croissantes.

La catégorie des **Δ -systèmes relatifs à la variété analytique complexe** S est la catégorie des foncteurs contravariants R de Δ_+ dans la catégorie des variétés analytiques relatives à S tels que $R_n = \emptyset$ pour n suffisamment grand et pour lesquels chaque transition

$$R_f: R_m \rightarrow R_n$$

associée à chaque application strictement croissante

$$f: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

est une somme d'inclusions ouvertes.

Le **Δ -système constant relatif à S** associé à la variété relative X est le foncteur contravariant prenant sur Δ_+ la valeur constante X , on le

notera parfois X par abus de langage.

Si R est un Δ -système relatif à S alors :

1° un **faisceau sur R** est défini par la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un faisceau \mathcal{F}_n sur la variété analytique R_n . Un **morphisme de faisceaux sur R** , $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est simplement la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme de faisceaux $f_n: \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$.

2° un **faisceau à liaisons covariantes sur R** est défini par la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un faisceau \mathcal{F}_n et pour chaque application croissante

$$f: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

d'un morphisme

$$\mathcal{F}_f: R_f^{-1}\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_m$$

de sorte que si

$$f: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}, \quad g: \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, p\}$$

sont des applications strictement croissantes alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & R_g^{-1}\mathcal{F}_f & \\ R_g^{-1}R_f^{-1}\mathcal{F}_n & \rightarrow & R_g^{-1}\mathcal{F}_m \\ & \downarrow \text{id} & \downarrow \mathcal{F}_g \\ R_{g \circ f}^{-1}\mathcal{F}_n & \rightarrow & \mathcal{F}_p \\ & \mathcal{F}_{g \circ f} & \end{array}$$

Un **morphisme $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de faisceaux à liaisons covariantes sur R** , est alors la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme $h_n: \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$ de sorte que si

$$f: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

est une application strictement croissante alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 R_f^{-1}\mathcal{F}_n & \rightarrow & \mathcal{F}_m \\
 R_f^{-1}h_n \downarrow & & \downarrow h_m \\
 R_f^{-1}\mathcal{G}_n & \rightarrow & \mathcal{G}_m
 \end{array}$$

3° un **faisceau à liaisons contravariantes sur R** est défini par la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un faisceau \mathcal{F}_n et pour chaque application croissante

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

d'un morphisme

$$\mathcal{F}_f : \mathcal{F}_m \rightarrow R_f^{-1}\mathcal{F}_n$$

de sorte que si

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}, \quad g : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, p\}$$

sont des applications strictement croissantes alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\mathcal{F}_{g \circ f}} & R_{g \circ f}^{-1}\mathcal{F}_n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R_g^{-1}\mathcal{F}_m & \xrightarrow{R_g^{-1}\mathcal{F}_f} & R_g^{-1}R_f^{-1}\mathcal{F}_n
 \end{array}$$

Un **morphisme de faisceaux à liaisons contravariantes sur R**,

$h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est alors la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme $h_n : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$

de sorte que si

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

est une application strictement croissante alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_m & \rightarrow & R_f^{-1}\mathcal{F}_n \\ h_m \downarrow & & \downarrow R_f^{-1}h_n \\ \mathcal{G}_m & \rightarrow & R_f^{-1}\mathcal{G}_n \end{array}$$

L'**image inverse** d'un faisceau \mathcal{F} à liaisons covariantes (resp. contravariantes) sur R' par le morphisme $u : R \rightarrow R'$ de Δ -systèmes relatifs à S est le faisceau à liaisons covariantes (resp. contravariantes) $u^{-1}(\mathcal{F})$ défini sur R par

$$u^{-1}(\mathcal{F})_n = u_n^{-1}(\mathcal{F}_n)$$

le morphisme de transition

$$u^{-1}(\mathcal{F})_f : R_f^{-1}u^{-1}(\mathcal{F})_n \rightarrow u^{-1}(\mathcal{F})_m$$

$$\text{(resp. } u^{-1}(\mathcal{F})_f : u^{-1}(\mathcal{F})_m \rightarrow R_f^{-1}u^{-1}(\mathcal{F})_n \text{)}$$

associé à une application strictement croissante

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

se déduisant de la formule $R_f \circ u_n = u_m \circ R_f$, et du morphisme de transition correspondant pour \mathcal{F} .

L'**image directe ordinaire** d'un faisceau \mathcal{F} à liaisons covariantes sur le Δ -système R par le morphisme $u : R \rightarrow R'$ est le faisceau à liaisons covariantes $u_*(\mathcal{F})$ défini sur R' par

$$u_*(\mathcal{F})_n = (u_n)_*(\mathcal{F}_n)$$

le morphisme de transition

$$u_*(\mathcal{F})_f : R_f^{-1}u_*(\mathcal{F})_n \rightarrow u_*(\mathcal{F})_m$$

associé à une application strictement croissante

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

se déduisant par adjonction de la flèche

$$(u_n)_*(\mathcal{F}_n) \rightarrow R_f^*(u_m)_*(\mathcal{F}_m)$$

que l'on obtient en tenant compte de l'égalité $R'_f \circ u_m = u_n \circ R_f$ et de la flèche de transition

$$\mathcal{F}_n \rightarrow R_f^* \mathcal{F}_m$$

L'**image directe extraordinaire** d'un faisceau \mathcal{F} à liaisons contravariantes sur le Δ -système R par le morphisme $u : R \rightarrow R'$ est le faisceau à liaisons contravariantes $u_! (\mathcal{F})$ défini sur R' par

$$u_! (\mathcal{F})_n = (u_n)_! (\mathcal{F}_n)$$

le morphisme de transition

$$u_! (\mathcal{F})_f : u_! (\mathcal{F})_m \rightarrow R_f^{-1} u_! (\mathcal{F})_n$$

associé à une application strictement croissante

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

se déduisant par adjonction de la flèche

$$R_f^! (u_m)_! (\mathcal{F}_m) \rightarrow (u_n)_! (\mathcal{F}_n)$$

que l'on obtient en tenant compte de l'égalité $R'_f \circ u_m = u_n \circ R_f$ et de la flèche de transition

$$R_f^! \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$$

L'utilisation de la résolution canonique de R . Godement montre que les foncteurs d'image directe ordinaire et extraordinaire sont dérivables à droite.

Un **anneau sur le Δ -système** R est simplement la donnée d'un faisceau \mathcal{A} à liaisons covariantes sur R et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'une structure de faisceau d'anneau sur \mathcal{A}_n de telle sorte que les morphismes de liaison soient des isomorphismes de faisceaux d'anneaux.

Soit \mathcal{A} un anneau sur R . Un **\mathcal{A} -module à droite sur R** est la donnée d'un faisceau \mathcal{M} sur R et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'une structure de \mathcal{A}_n -module à droite sur \mathcal{M}_n . Un **\mathcal{A} -module à droite à liaisons covariantes sur R** est la donnée d'un faisceau \mathcal{M} à liaisons covariantes sur R et pour chaque $n \in \mathbb{N}$

d'une structure de \mathcal{A}_n -module à droite sur \mathcal{M}_n de telle sorte que les morphismes de liaison soient des morphismes de faisceaux de modules. On définit de manière analogue la notion de **\mathcal{A} -module à liaisons contravariantes sur R** . On étendra, sans problème, les définitions précédentes au cas des modules à gauche et des bimodules.

Toute l'étude classique des produits tensoriels de faisceaux s'étend sans problème au cas des modules à liaisons covariantes ou contravariantes sur R , y compris les questions de dérivabilité, comme on le vérifiera aisément.

Un **recouvrement ouvert** \mathcal{U} . de R est la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un recouvrement ouvert \mathcal{U}_n de R_n de sorte que $R_f \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}_n$ pour chaque application strictement croissante $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$.

Si \mathcal{U} . est un recouvrement ouvert de R alors un **\mathcal{A} -module (libre) de type fini sur \mathcal{U} .** est un \mathcal{A} -module \mathcal{M} pour lequel les faisceaux \mathcal{M}_n sont (libres) de type fini sur chaque ouvert U de \mathcal{U}_n .

Si \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) est un \mathcal{A} -module à droite (resp. un bimodule à droite) à liaisons covariantes (resp. contravariantes) sur R alors on note $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ le \mathcal{A} -module à droite à liaisons contravariantes défini sur R par

$$[\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})]_n = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n)$$

la transition relative à l'application strictement croissante

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

étant donnée par la composition des flèches

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{A}_m}(\mathcal{F}_m, \mathcal{G}_m) &\rightarrow \underline{\text{Hom}}_{R_f^{-1}\mathcal{A}_n}(\mathcal{R}_f^{-1}\mathcal{F}_n, \mathcal{R}_f^{-1}\mathcal{G}_n) \\ \underline{\text{Hom}}_{R_f^{-1}\mathcal{A}_n}(\mathcal{R}_f^{-1}\mathcal{F}_n, \mathcal{R}_f^{-1}\mathcal{G}_n) &\simeq R_f^{-1}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n) \end{aligned}$$

obtenues en tenant compte de ce que R_f est une somme d'inclusions ouvertes

et de ce que l'on dispose des flèches de liaison

$$\mathcal{F}_f : R_f^{-1}\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_m$$

$$\mathcal{G}_f : \mathcal{G}_m \rightarrow R_f^{-1}\mathcal{G}_n$$

Si R est le Δ -système constant associé à une variété analytique X relative à S , il est clair que la donnée d'un faisceau \mathcal{F} à liaisons covariantes (resp. contravariantes) revient à la donnée pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'un faisceau \mathcal{F}_n sur X et pour chaque application strictement croissante

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

d'un morphisme de faisceau

$$\mathcal{F}_f : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_m$$

$$(\text{resp. } \mathcal{F}_f : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n)$$

de sorte que si

$$g : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, p\}$$

est une autre application croissante alors

$$\mathcal{F}_{g \circ f} = \mathcal{F}_g \circ \mathcal{F}_f$$

$$(\text{resp. } \mathcal{F}_f \circ \mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{g \circ f})$$

Dans le cas des liaisons covariantes, on associe à \mathcal{F} le complexe de faisceau $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ défini sur X par

$$\mathcal{C}^n(\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathcal{F}_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

$$d^n = \begin{cases} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mathcal{F}_{\sigma_i}^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

où σ_i^n désigne la seule application strictement croissante de $\{0, \dots, n\}$ dans $\{0, \dots, i, \dots, n+1\}$. De manière analogue, dans le cas des liaisons contravariantes on associe à \mathcal{F} le complexe de faisceaux $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ défini sur X par

$$\mathcal{E}^{-n}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathcal{F}_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

$$d^{-n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mathcal{F}_{\sigma_i}^{n-1} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Comme d'habitude, l'usage des complexes doubles permet d'étendre les foncteurs \mathcal{E} définis ci-dessus à la catégorie des complexes de faisceaux à liaisons covariantes ou contravariantes et il est aisé de constater qu'il transforme alors les complexes acycliques en complexes acycliques. Ceci nous permet de considérer \mathcal{E} comme défini sur la catégorie dérivée des faisceaux à liaisons covariantes (ou contravariantes). On étendra sans problème la définition de \mathcal{E} au cas des modules à liaisons covariantes ou contravariantes. ■

Système de Čech associé à un recouvrement ouvert de dimension finie

DEFINITION Si \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de dimension finie d'une variété analytique X relative à S alors on note $SC(\mathcal{U})$ le Δ -système relatif à S obtenu en associant à chaque naturel n la variété analytique relative à S

$$SC_n(\mathcal{U}) := \bigsqcup_{\substack{(U_0, \dots, U_n) \in \mathcal{U}^n \\ U_i \neq U_j \text{ si } i \neq j}} U_0 \cap \dots \cap U_n$$

le morphisme de transition

$$SC_f(\mathcal{U}) : SC_m(\mathcal{U}) \rightarrow SC_n(\mathcal{U})$$

associé à l'application strictement croissante

$$f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

étant obtenu en sommant les inclusions naturelles

$$U_0 \cap \dots \cap U_m \rightarrow U_{f(0)} \cap \dots \cap U_{f(n)}$$

Le Δ -système $SC(\mathcal{U})$ est le système de Čech du recouvrement \mathcal{U} . La loi qui associe à chaque naturel n l'ensemble

$$\{U_0 \cap \dots \cap U_n : (U_0, \dots, U_n) \in \mathcal{U}^n, U_i \neq U_j \text{ si } i \neq j\}$$

définit un recouvrement canonique $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ de $SC(\mathcal{U})$. Dans la suite de ce travail nous dirons qu'un faisceau sur $SC(\mathcal{U})$ est de type fini (resp. libre de type fini) s'il est de type fini (resp. libre de type fini) sur le recouvrement $\mathcal{R}(\mathcal{U})$. A tout faisceau \mathcal{F} de base X , on associe canoniquement le faisceau à liaisons covariantes $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ défini sur $SC(\mathcal{U})$ par la formule

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{U}})_n = \bigsqcup_{\substack{(U_0, \dots, U_n) \in \mathcal{U}^n \\ U_i \neq U_j \text{ si } i \neq j}} \mathcal{F}|_{U_0 \cap \dots \cap U_n}$$

les morphismes de transition étant déduits des restrictions de \mathcal{F} .

Modules différentiels et Δ -systèmes

DEFINITION III.1.2. L'anneau des opérateurs différentiels relatifs sur le Δ -système R est défini par

$$[\mathcal{D}_{R|S}]_n = \mathcal{D}_{R_n|S}$$

les morphismes de liaison étant les morphismes de restriction. A tout Δ -système R relatif à S est également associé le complexe de $\mathcal{D}_{R|S}$ -bimodules à liaisons contravariantes $K_{R|S}$ défini par

$$[K_{R|S}]_n = K_{R_n|S}$$

les transitions étant obtenues par l'inversion des isomorphismes de restriction

$$R_f^{-1} K_{R_n|S} \rightarrow K_{R_m|S}$$

Le dual d'un complexe de $\mathcal{D}_{R|S}$ -modules à droite à liaisons covariantes \mathcal{F} est le complexe de $\mathcal{D}_{R|S}$ -modules à liaisons contravariantes

$$\underline{\text{RHom}}_{\mathcal{D}_{R|S}}(\mathcal{F}, K_{R|S})$$

Nous le noterons $\mathbb{D}_{R|S}(\mathcal{F})$.

On définit les images directes ordinaire et extraordinaire d'un $\mathcal{D}_{R|S}$ -module à droite \mathcal{M} par un morphisme $p : R \rightarrow R'$ par les relations

$$p_{|S*}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}p_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{R|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{R|S} \rightarrow R'|S)$$

$$p_{|S!}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}p_!(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{R|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{R|S} \rightarrow R'|S)$$

où $\mathcal{D}_{R|S} \rightarrow R'|S$ est un $(\mathcal{D}_{R|S}, p^{-1}\mathcal{D}_{R'|S})$ déduit de son équivalent pour les

variétés relatives.

Pour terminer remarquons que le morphisme de dualité obtenu en 1.4.3. donne un morphisme analogue pour les modules à liaisons covariantes sur les Δ -systèmes. ■

III.2 Quelques Lemmes

Lemme de liaison

LEMME III.2.1. Soient R un Δ -système relatif à S et \mathcal{U} . un recouvrement de R . Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{R|S}$ -module à liaisons covariantes, si \mathcal{L} est un $\mathcal{D}_{R|S}$ -module libre de type fini sur \mathcal{U} . et si $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ est un morphisme de $\mathcal{D}_{R|S}$ -modules alors il existe un $\mathcal{D}_{R|S}$ -module à liaisons covariantes \mathcal{L}' , libre de type fini sur \mathcal{U} . et un morphisme $g : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{M}$ pour lequel $\text{im } g \supset \text{im } h$.

Preuve : Notons $[m]$ l'ensemble $\{0, \dots, m\}$ pour tout naturel m . Posons

$$\mathcal{L}'_n = \bigoplus_{\substack{\sigma : [m] \rightarrow [n] \\ \sigma \text{ strict. croissant}}} R_{\sigma}^{-1} \mathcal{L}'_m$$

et pour chaque application strictement croissante

$$f : [n] \rightarrow [k]$$

définissons le morphisme

$$\mathcal{L}'_f : R_f^{-1} \mathcal{L}'_n \rightarrow \mathcal{L}'_k$$

comme étant le morphisme déduit des isomorphismes évidents

$$R_f^{-1} R_{\sigma}^{-1} \mathcal{L}'_m \xrightarrow{\cong} R_{f \circ \sigma}^{-1} \mathcal{L}'_m$$

Le faisceau à liaisons covariantes \mathcal{L}' construit ci-dessus est évidemment muni d'une structure de $\mathcal{D}_{R|S}$ -module à liaisons covariantes. De plus, il est libre de type fini sur \mathcal{U} . Pour chaque application strictement croissante

$$f : [m] \rightarrow [n]$$

la flèche

$$h_m : \mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{M}_m$$

associée au morphisme h donné fournit la flèche

$$R_f^{-1}h_m : R_f^{-1}\mathcal{L}_m \rightarrow R_f^{-1}\mathcal{M}_m$$

Comme \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{R|S}$ -module à liaisons covariantes, on dispose également de la flèche

$$R_f^{-1}\mathcal{M}_m \rightarrow \mathcal{M}_n$$

Par composition, nous obtenons donc une flèche

$$R_f^{-1}\mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{M}_m$$

En tenant compte de la définition de \mathcal{L}' on en déduit alors par sommation un morphisme de $\mathcal{D}_{R|S}$ -modules

$$g : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{M}$$

Une vérification immédiate montre que c'est en fait un morphisme de $\mathcal{D}_{R|S}$ -modules à liaisons covariantes. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\text{im } g_n \supset \text{im } f_n$ puisque la flèche

$$\text{id} : [n] \rightarrow [n]$$

est strictement croissante. ■

Lemme de génération

LEMME III.2.2. Si $f : X \rightarrow Y$ est une submersion analytique, si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|Y}$ -module cohérent muni d'une bonne filtration $(\mathcal{M}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et si K est un compact holomorphiquement convexe de X alors il existe un entier l et un épimorphisme

$$(\mathcal{D}_{X|Y}^l)_{|K} \rightarrow \mathcal{M}_{|K}$$

Preuve : Comme la filtration de \mathcal{M} est bonne, il existe k_0 tel que

$$\mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{D}_{X|Y, 1} \cdot \mathcal{M}_k$$

si $k \geq k_0$. Ceci entraîne que

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_{X|Y} \cdot \mathcal{M}_{k_0}$$

Comme \mathcal{M}_{k_0} est un \mathcal{O}_X -module cohérent, le théorème A de Cartan montre qu'il existe un entier l et des sections m_1, \dots, m_l de \mathcal{M}_{k_0} sur K de sorte que la flèche

$$(\mathcal{O}_X^l)_{|K} \xrightarrow{(m_1, \dots, m_l)} (\mathcal{M}_{k_0})_{|K}$$

soit un épimorphisme. Il est alors clair que

$$(\mathcal{D}_{X|Y}^l)_{|K} \xrightarrow{(m_1, \dots, m_l)} \mathcal{M}_{|K}$$

est un épimorphisme de $\mathcal{D}_{X|Y}$ -modules, ce qui achève la preuve. ■

Recouvrements de Stein de dimension finie

RAPPEL III.2.3. : Comme d'habitude, un **polydisque ouvert** D de **centre** x **d'une variété analytique** X est un ouvert de X pour lequel il existe un diholomorphisme $\varphi : D \rightarrow P$ où P est un polydisque de \mathbb{C}^n de centre

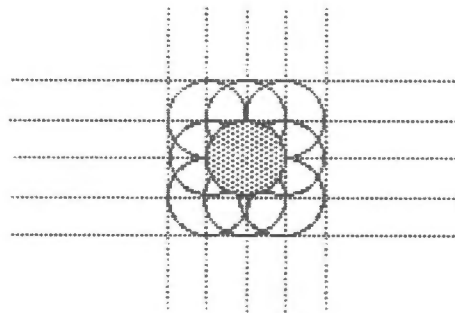
$\varphi(x)$. Un **sous polydisque de** D est quant à lui un ouvert D' de D pour lequel il existe un diholomorphisme $\varphi : D \rightarrow P$ où P est un polydisque de \mathbb{C}^n et où $\varphi(D')$ est un polydisque P' de même centre que P .

LEMME III.2.4. Dans tout recouvrement ouvert d'une variété analytique complexe X on peut loger un recouvrement ouvert de dimension finie constitué de polydisques ouverts de X .

Preuve : Au quadrillage d'équidistance ϵ de \mathbb{C} associons l'ensemble \mathcal{U}_ϵ défini par

$$\mathcal{U}_\epsilon = \{ B((m\epsilon, n\epsilon), \epsilon) : (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \}$$

où $B((m\epsilon, n\epsilon), \epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre $(m\epsilon, n\epsilon)$ et de rayon ϵ . Il est clair que \mathcal{U}_ϵ recouvre \mathbb{C} et que tout ensemble de plus de 5 éléments de \mathcal{U}_ϵ a une intersection vide car les seules boules de \mathcal{U}_ϵ rencontrant une boule donnée sont les 8 boules adjacentes (cf: Figure ci-dessous).



On en déduit aussitôt que pour tout $\epsilon > 0$, \mathbb{C} admet un recouvrement par des disques de rayon ϵ dont la dimension de Lebesgue est inférieure à 4. Une récurrence permet alors de montrer que \mathcal{U}_ϵ^n est un recouvrement de \mathbb{C}^n dont la dimension de Lebesgue est inférieure à 4^n . En effet, il est évident que si \mathcal{U} (resp. \mathcal{V}) est un recouvrement de l'espace topologique X (resp. Y) alors

$$\dim \mathcal{U} \times \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V}$$

Remarquons maintenant que tout compact K d'un ouvert U de \mathbb{C}^n possède un recouvrement composé de polydisques dont la dimension de Lebesgue est inférieure à 4^n . En effet, si ϵ est si petit que tout polydisque de polyrayon $(\epsilon, \dots, \epsilon)$ qui rencontre K est inclus dans U alors l'ensemble des polydisques de \mathcal{U}_ϵ qui rencontrent K est un recouvrement de K ayant les propriétés annoncées.

Considérons enfin un recouvrement ouvert \mathcal{V} de la variété analytique complexe X et posons $\dim X = n$. Il est clair que l'on peut loger dans \mathcal{V} un recouvrement \mathcal{V}' composé d'ouverts coordonnés relativement compacts. Comme la dimension de Lebesgue de X est $2n$, on peut loger dans \mathcal{V}' un recouvrement \mathcal{V}'' localement fini de \dim de Lebesgue inférieure ou égale à $2n$. Comme X est un espace normal, il existe une famille $(F_V)_{V \in \mathcal{V}''}$ de fermés de X qui le recouvre et telle que $F_V \subset V$ pour tout $V \in \mathcal{V}''$. Ce qui précède montre alors qu'il existe pour tout $V \in \mathcal{V}''$ un recouvrement \mathcal{U}_V du compact F_V dont les éléments sont des ouverts de V diholomorphiquement équivalents à des polydisques de \mathbb{C}^n et dont la dimension de Lebesgue est inférieure ou égale à 4^n . L'ensemble $\mathcal{W} := \bigcup_{V \in \mathcal{V}''} \mathcal{U}_V$ est alors un recouvrement de X vérifiant les conditions de l'énoncé. En effet, d'une part \mathcal{W} est trivialement logé dans \mathcal{U} et se compose de polydisques de X . D'autre part, si W_1, \dots, W_m sont des éléments de \mathcal{W} et si $m > 2n4^n$ alors $W_1 \cap \dots \cap W_m = \emptyset$. Pour justifier ce dernier point procédons par l'absurde et supposons donc que $W_1 \cap \dots \cap W_m \neq \emptyset$. Il existe alors $V \in \mathcal{V}''$ tel que l'ensemble $\{W_i : W_i \in \mathcal{U}_V\}$ possède plus de 4^n éléments puisque si ce n'est pas le cas l'ensemble $\{V : \exists i (V \supset W_i)\}$ possède plus de $2n$ éléments et $W_1 \cap \dots \cap W_m = \emptyset$. Mais comme la dimension de Lebesgue de \mathcal{U}_V est inférieure ou égale à 4^n , on déduit de ce qui précède que $W_1 \cap \dots \cap W_m = \emptyset$ ce qui nous fournit la contradiction cherchée. ■

Résolution libre

LEMME III.2.5. : Si $f: X \rightarrow Y$ est une submersion analytique et si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|Y}$ -module cohérent alors pour tout point y de Y il existe un polydisque ouvert D de Y centré en y , un recouvrement \mathcal{X} de dimension finie de $f^{-1}(D)$ par des ouverts de Stein de sorte que si $i_{\mathcal{X}}: SC(\mathcal{X}) \rightarrow SC(\mathcal{X} \times D)$ désigne l'application déduite du morphisme graphe de f alors $i_{\mathcal{X}|D}^*(\mathcal{M}|_{\mathcal{X}})$ est quasi-isomorphe à un complexe borné supérieurement de $\mathcal{D}_{SC(\mathcal{X} \times D)|D}$ -modules à liaisons covariantes libres de type fini.

Preuve : Choisissons un polydisque ouvert D de Y centré en y et choisissons également un sous polydisque relativement compact D' de D . Soit $\mathcal{X}=(D_i)_{i \in I}$ un recouvrement localement fini de dimension de Lebesgue finie de $f^{-1}(D')$ par des polydisques de $f^{-1}(D')$ au dessus desquels \mathcal{M} est de type fini. Comme X est un espace normal, il existe un recouvrement $\mathcal{X}'=(D'_i)_{i \in I}$ de $f^{-1}(D')$ pour lequel D'_i est un sous polydisque relativement compact de D_i lorsque $i \in I$. Par construction, il existe un $\mathcal{D}_{SC(\mathcal{X} \times D)|D}$ -module \mathcal{L}' , libre localement de type fini et un épimorphisme

$$\mathcal{L}' \rightarrow i_{\mathcal{X}|D}^*(\mathcal{M}|_{\mathcal{X}})$$

Le lemme de liaison fournit alors un $\mathcal{D}_{SC(\mathcal{X} \times D)|D}$ -module à liaisons covariantes libre localement de type fini \mathcal{L} et un épimorphisme

$$\mathcal{L} \rightarrow i_{\mathcal{X}|D}^*(\mathcal{M}|_{\mathcal{X}})$$

Posons $D^0=D$, $\mathcal{X}^0=\mathcal{X}$ et $\mathcal{L}^0=\mathcal{L}$. On peut alors déterminer par récurrence sur n un polydisque D^n tel que $D' \subset D^n \subset D^{n-1}$, un recouvrement $\mathcal{X}^n=(D_i^n)_{i \in I}$ de $f^{-1}(D')$ par des polydisques de $f^{-1}(D')$ tels que $D'_i \subset D_i^n \subset D_i^{n-1}$, un $\mathcal{D}_{SC(\mathcal{X}^n \times D^n)|D^n}$ -module à liaisons covariantes \mathcal{L}^n libre localement de type fini et un morphisme

$$u^n: \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}^{n-1} |_{SC(\mathcal{X}^n \times D^n)|D^n}$$

rendant la suite

$$\mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^{n-1} |_{SC(\mathbb{K}^n \times D^n)} | D^n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}^0 |_{SC(\mathbb{K}^n \times D^n)} | D^n \rightarrow \mathbb{K} |_{D^*} (\mathcal{M} | \mathbb{K}) |_{SC(\mathbb{K}^n \times D^n)} | D^n$$

exacte. En effet, c'est possible si $n=0$ vu ce qui précède et si la construction a été possible jusqu'à l'étape n , on obtient l'étape $n+1$ en procédant comme suit. On choisit un polydisque D^{n+1} de sorte que $D' \subset \subset D^{n+1} \subset \subset D^n$ et pour chaque $i \in I$, on choisit un polydisque D_i^{n+1} tel que $D_i \subset \subset D_i^{n+1} \subset \subset D_i^n$. Il est clair que $\mathbb{K}^{n+1} = (D_i^{n+1})_{i \in I}$ est un recouvrement de $f^{-1}(D')$ par des polydisques de $f^{-1}(D')$. Posons $\mathcal{X}^n = \ker u^n$, fixons $(i_0, \dots, i_k) \in I^k$. Comme

$$\mathcal{E}_{k|(D_{i_0}^n \cap \dots \cap D_{i_k}^n) \times D^n}^n$$

est un $\mathcal{D}_{(D_{i_0}^n \cap \dots \cap D_{i_k}^n) \times D^n | D^n}$ libre de type fini il admet une bonne filtration, il en est donc de même de

$$\mathcal{X}_{k|(D_{i_0}^n \cap \dots \cap D_{i_k}^n) \times D^n}^n$$

Par construction, $D_{i_0}^{n+1} \cap \dots \cap D_{i_k}^{n+1} \times D^{n+1}$ est inclus dans un compact holomorphiquement convexe de $D_{i_0}^n \cap \dots \cap D_{i_k}^n \times D^n$ et le lemme de génération montre que

$$\mathcal{X}_{k|(D_{i_0}^{n+1} \cap \dots \cap D_{i_k}^{n+1}) \times D^{n+1}}^n$$

est de type fini. On construit alors aisément un $\mathcal{D}_{SC(\mathbb{K}^{n+1} \times D^{n+1}) | D^{n+1}}$ -module libre de type fini \mathcal{E}^{n+1} et un épimorphisme

$$\mathcal{E}^{n+1} \xrightarrow{v^{n+1}} \mathcal{X}_{SC(\mathbb{K}^{n+1} \times D^{n+1}) | D^{n+1}}^n$$

Le lemme de liaison nous fournit alors un $\mathcal{D}_{SC(\mathbb{K}^{n+1} \times D^{n+1}) | D^{n+1}}$ -module à liaisons covariantes, libre de type fini, \mathcal{E}^{n+1} et un épimorphisme

$$\mathcal{L}^{n+1} \xrightarrow{u_{n+1}} \mathcal{L}^n |_{SC(\mathcal{X}^{n+1} \times D^{n+1})|D^{n+1}}$$

ce qui achève la construction pour l'étape $n+1$.

La restriction des suites exactes obtenues à $SC(\mathcal{X} \times D')|D'$ fournit la suite exacte

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}^n |_{SC(\mathcal{X} \times D')|D'} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}^0 |_{SC(\mathcal{X} \times D')|D'} \rightarrow i_{\mathcal{X}}|D'^*(\mathcal{M}_{\mathcal{X}}) \rightarrow 0$$

qui est une résolution de $i_{\mathcal{X}}|D'^*(\mathcal{M}_{\mathcal{X}})$ par des $\mathcal{D}_{SC(\mathcal{X} \times D')|D'}$ -modules à liaisons covariantes libres de type fini. ■

III.3. Modules f -Cohérents

DEFINITION III.3.1. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés analytiques relatives à S . Nous dirons qu'un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite cohérent \mathcal{M} vérifie les **conditions de Houzel-Schapira** relativement à f s'il existe un sous $\mathcal{D}_{X|Y}$ -module \mathcal{M}_0 de \mathcal{M} et une famille croissante $(X_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ d'ouverts de X à bord de classe C_1 de sorte que :

- a) on a $X = \bigcup_{s>0} X_s$, $X_s = \bigcup_{s'<s} X_{s'}$, $\bar{X}_s = \bigcap_{s'>s} X_{s'}$, quel que soit $s > 0$
- b) pour tout $s > 0$, f est propre sur $\bar{X}_s \cap \text{supp}(\mathcal{M})$
- c) le module \mathcal{M}_0 est localement de type fini et engendre \mathcal{M} en tant que $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite
- d) le \mathcal{D}_X -module $\mathcal{M}_0^e = \mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_X$ est cohérent
- e) la relation $T_{\partial X_s}^* X \cap \text{Car}(\mathcal{M}_0^e) \subset T_X^* X$ a lieu pour tout $s > 0$

Un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite \mathcal{M} est **f-cohérent** si tout point de Y possède un voisinage ouvert V tel que le module $\mathcal{M}|_{f^{-1}(V)}$ vérifie les conditions de Houzel-Schapira relativement à $f|_{f^{-1}(V)}$.

LEMME III.3.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés analytiques relatives à S . Notons $i : X \rightarrow X \times_S Y$ le morphisme graphe associé à f et $p : X \times_S Y \rightarrow Y$ la seconde projection. Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite f-cohérent alors $i_{|S*}(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_{X \times_S Y|S}$ -module p-cohérent.

Preuve : La question étant locale sur Y , on peut supposer que \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite vérifiant les conditions de Houzel-Schapira relativement à f . Conservons les notations de la définition précédente. Posons

$$\mathcal{M}_1 = i_*(\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|Y \rightarrow X \times_S Y|Y})$$

et notons \mathcal{M}_2 son image dans $i_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_{X|S \rightarrow X \times_S Y|S})$ par le morphisme

$$i_*(\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|Y \rightarrow X \times_S Y|Y}) \rightarrow i_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_{X|S \rightarrow X \times_S Y|S})$$

déduit de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|Y \rightarrow X \times_S Y|Y}) \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{X \times_S Y|Y}} i^{-1}\mathcal{D}_{X \times_S Y|S} \\ = (\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_{X|S \rightarrow X \times_S Y|S} \end{aligned}$$

Par construction, \mathcal{M}_2 engendre $i_{|S*}\mathcal{M}$ en tant que $\mathcal{D}_{X \times_S Y}$ -module à droite et comme \mathcal{M}_2 est un sous $\mathcal{D}_{X \times_S Y|Y}$ -module localement de type fini du $\mathcal{D}_{X \times_S Y}$ -module cohérent $i_{|S*}\mathcal{M}$, c'est un $\mathcal{D}_{X \times_S Y|Y}$ -module cohérent. Il en résulte que \mathcal{M}_2^e est un $\mathcal{D}_{X \times_S Y}$ -module cohérent et puisque c'est un quotient

de \mathcal{M}_1^e on a

$$\text{Car}(\mathcal{M}_2^e) \subset \text{Car}(\mathcal{M}_1^e)$$

On a l'isomorphisme $\mathcal{M}_1^e \simeq \underline{i}_* \mathcal{M}_0^e$ et la Proposition 4.1.1. de [8] fournit l'inclusion

$$\text{Car}(\underline{i}_* \mathcal{M}_0^e) \subset \omega \rho^{-1} \text{Car}(\mathcal{M}_0^e)$$

où $\rho: X \times (X \times_S Y)[T^*(X \times_S Y)] \rightarrow T^*X$ et $\omega: X \times (X \times_S Y)[T^*(X \times_S Y)] \rightarrow T^*(X \times_S Y)$ sont les applications usuelles. On a donc l'inclusion

$$\text{Car}(\mathcal{M}_2^e) \subset \omega \rho^{-1} \text{Car}(\mathcal{M}_0^e)$$

Pour établir que $\underline{i}_{|S} * \mathcal{M}$ vérifie les conditions de Houzel-Schapira relativement à p , il suffit alors de prendre pour ouverts X_S les ouverts $X_S \times_S Y$ de $X \times_S Y$ et pour module \mathcal{M}_0 le module \mathcal{M}_2 construit ci-dessus. ■

III.4. Le théorème de dualité

PROPOSITION III.4.1. Soient U un ouvert de Stein de \mathbb{C}^U et D un polydisque de \mathbb{C}^d . Si $p: U \times D \rightarrow D$ est la seconde projection et si \mathcal{M} est un complexe de $\mathcal{D}_{U \times D|D}$ -modules libres de type fini alors $p_*(\mathcal{M})$ est canoniquement isomorphe à un complexe de \mathcal{O}_D -modules dont les composantes sont des sommes directes de faisceaux égaux à $p_*(\mathcal{O}_{U \times D})$. De plus, on a la factorisation suivante du morphisme canonique de dualité :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}p_1^* \Omega_{U \times D|D}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(p_* \mathcal{M}, \mathcal{O}_D) \\
 \searrow \text{Qis} & & \nearrow \\
 \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(p_*(\mathcal{M}), \mathcal{O}_D) & &
 \end{array}$$

Preuve : On a successivement

$$\begin{aligned}
 p_*(\mathcal{M}) &\simeq \mathbb{R}p_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{U \times D|D}}^L \mathcal{O}_{U \times D|D}) \\
 &\simeq \mathbb{R}p_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{U \times D|D}} \mathcal{O}_{U \times D|D}) \quad (*) \\
 &\simeq p_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{U \times D|D}} \mathcal{O}_{U \times D|D}) \quad (**)
 \end{aligned}$$

en (*) on remarque que \mathcal{M} est à composantes libres et en (**), on utilise le fait que $\mathbb{R}^k p_*(\mathcal{O}_{U \times D|D}) = 0$ si $k \neq 0$. On en déduit aussitôt la première partie de l'énoncé. Pour obtenir la seconde, il suffit de remarquer que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}p_1^* \Omega_{U \times D|D}[u] & \xrightarrow{(2)} & \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(p_* \mathcal{O}_{U \times D|D}, \mathcal{O}_D) \\
 \uparrow (1) & & \uparrow (3) \\
 \mathbb{R}^u p_1^* \Omega_{U \times D|D} & \xrightarrow{(4)} & \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(p_* \mathcal{O}_{U \times D|D}, \mathcal{O}_D)
 \end{array}$$

où (1) est le quasi-isomorphisme naturel, où (2) est déduit du morphisme étudié précédemment, où (4) est déduit du morphisme trace de la géométrie analytique et où (3) est déduit de l'inclusion évidente

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(p_* \mathcal{O}_{U \times D|D}, \mathcal{O}_D) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(p_* \mathcal{O}_{U \times D|D}, \mathcal{O}_D) \blacksquare$$

PROPOSITION III.4.2. Soit X une variété relative à S et $\epsilon : X \rightarrow S$ la flèche canonique qui lui est associée. Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent et si le complexe $\epsilon_{|S}^*(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathcal{O}_S -cohérente alors le morphisme de dualité

$$\epsilon_{|S}! \mathcal{D}_{X|S}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}_{S|S}(\epsilon_{|S}^* \mathcal{M})$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve : La question étant locale sur S , le Lemme III.2.5. nous permet de supposer que S est un polydisque, qu'il existe un recouvrement \mathcal{U} de dimension finie de X par des polydisques ouverts de X ainsi qu'une résolution \mathcal{L}^\bullet de $i_{\mathcal{U}*}(\mathcal{M}|_{\mathcal{U}})$ par des $\mathcal{D}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}$ -modules à liaisons covariantes, libres de type fini. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\epsilon} & S \\
 \uparrow j_{\mathcal{U}} & \nearrow \epsilon_{SC(\mathcal{U})} & \uparrow \epsilon_{SC(\mathcal{U} \times S)|S} \\
 SC(\mathcal{U}) & \xrightarrow{i_{\mathcal{U}}} & SC(\mathcal{U} \times S)|S
 \end{array}$$

où $j_{\mathcal{U}} : SC(\mathcal{U}) \rightarrow X$ désigne le morphisme construit à partir des inclusions naturelles des ouverts $U_0 \cap \dots \cap U_n$ dans X . On en déduit successivement que

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}^* [i_{\mathcal{U}|S}^*(\mathcal{M}|_{\mathcal{U}})] & \simeq \epsilon_{R|S}^* [i_{\mathcal{U}|S}^*(\mathcal{M}|_{\mathcal{U}})] \\
 \mathcal{E}(\epsilon_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}^* [i_{\mathcal{U}|S}^*(\mathcal{M}|_{\mathcal{U}})]) & \simeq \epsilon_{|S}^* \mathcal{E}(i_{\mathcal{U}|S}^*(\mathcal{M}|_{\mathcal{U}})) \\
 \mathcal{E}(\epsilon_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}^*(\mathcal{L}^\bullet)) & \simeq \epsilon_{|S}^*(\mathcal{M})
 \end{aligned}$$

où R désigne le Δ_+ -système constant associé à X . Dans la dernière formule ci-dessus, le premier membre est naturellement muni d'une structure de complexe de \mathcal{O}_S -modules topologiques. La Proposition III.4.1. montre alors que l'on a également le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}(\underline{\epsilon}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}! \mathcal{D}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}(\mathcal{L} \cdot)) & \xrightarrow{(1)} & \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}(\underline{\epsilon}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S^*}(\mathcal{L} \cdot)), \mathcal{O}_S) \\
 \searrow \text{Qis} & & \nearrow (2) \\
 & & \text{Hom}_{\text{top}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}(\underline{\epsilon}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S^*}(\mathcal{L} \cdot)), \mathcal{O}_S)
 \end{array}$$

où (1) est induite par la flèche naturelle de dualité et où (2) se déduit de l'inclusion naturelle

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}(\underline{\epsilon}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S^*}(\mathcal{L} \cdot)), \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}(\underline{\epsilon}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S^*}(\mathcal{L} \cdot)), \mathcal{O}_S)$$

Comme $\underline{\epsilon}_{|S^*}(\mathcal{M})$ est un complexe à cohomologie \mathcal{O}_S -cohérente, il résulte du Lemme 22 de [21] que (2) est un quasi-isomorphisme. Remarquons maintenant que l'on a successivement :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}(\mathcal{L} \cdot) & \simeq \mathcal{D}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}(i_{\mathcal{U}|S^*}(\mathcal{M})) \\
 \mathcal{D}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}(i_{\mathcal{U}|S^*}(\mathcal{M})) & \simeq i_{\mathcal{U}|S}! \mathcal{D}_{SC(\mathcal{U})|S}(\mathcal{M}) \\
 i_{\mathcal{U}|S}! \mathcal{D}_{SC(\mathcal{U})|S}(\mathcal{M}) & \simeq i_{\mathcal{U}|S}! [\mathcal{D}_X(\mathcal{M})]_{|\mathcal{U}}
 \end{aligned}$$

où la seconde flèche résulte de la Proposition II.2. . Enfin, on a successivement

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\underline{\epsilon}_{SC(\mathcal{U} \times S)|S}! i_{\mathcal{U}|S}! [\mathcal{D}_X(\mathcal{M})]_{|\mathcal{U}}) \\
 \simeq \mathcal{E}(\underline{\epsilon}_{R|S}! i_{\mathcal{U}|S}! [\mathcal{D}_X(\mathcal{M})]_{|\mathcal{U}})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\varepsilon_{R|S} \circ \varepsilon_{\mathbb{K}|S}[\mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M})|_{\mathbb{K}}]) \\
 \simeq \varepsilon_{|S} \mathcal{E}(\varepsilon_{\mathbb{K}|S}[\mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M})|_{\mathbb{K}}]) \\
 \simeq \varepsilon_{|S} \mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M}) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

PROPOSITION III.4.3. Si $f : X|S \rightarrow Y|S$ est une submersion analytique relative à S alors la flèche canonique de dualité

$$f_{|S} \mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{D}_{Y|S}(f_{|S*} \mathcal{M})$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $\mathbb{D}_{X|S}$ -module f -cohérent \mathcal{M} .

Preuve : Supposons d'abord qu'il existe un $\mathbb{D}_{X|Y}$ -module cohérent \mathcal{M}_0 tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \otimes_{\mathbb{D}_{X|Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{D}_{X|S}$ et qu'il existe une famille croissante $(X_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ d'ouverts de X à bord de classe C_1 pour laquelle

- a) on a $X = \bigcup_{s>0} X_s$, $X_s = \bigcup_{s'<s} X_{s'}$, $\bar{X}_s = \bigcap_{s'>s} X_{s'}$, quel que soit $s > 0$
- b) f est propre sur $\bar{X}_s \cap \text{supp}(\mathcal{M})$ pour tout $s > 0$
- c) la relation $T_{\partial X_s}^* X \cap \text{Car}_X(\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathbb{D}_X) \subset T_X^* X$ a lieu pour tout $s > 0$.

On sait alors par le théorème d'image directe de Houzel-Schapira (cf: [9]) que le complexe $f_{|Y*}(\mathcal{M}_0)$ est à cohomologie cohérente. On a alors successivement :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathbb{D}_Y}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathbb{D}_{X|S} \rightarrow Y|S), K_{Y|S}) \\
 \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathbb{D}_{Y|S}}(\mathbb{R}f_*((\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathbb{D}_{X|Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{D}_{X|S}) \otimes_{\mathbb{D}_{X|S}}^{\mathbb{L}} \mathbb{D}_{X|S} \rightarrow Y|S), K_{Y|S}) \\
 \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathbb{D}_{Y|S}}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathbb{D}_{X|Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{D}_{X|S} \rightarrow Y|S), K_{Y|S})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S), K_{Y|S}) \\
 \Rightarrow & \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}([\mathbb{R}f_*(\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X)] \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y|S}, K_{Y|S}) \quad (*) \\
 \Rightarrow & \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(f_{|Y*}(\mathcal{M}_0), \mathcal{O}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} K_{Y|S} \quad (**) \\
 \Rightarrow & \mathbb{R}f_!(\mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}_{X|Y}}(\mathcal{M}_0, K_{X|Y}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}K_{Y|S}) \quad (***) \\
 \Rightarrow & \mathbb{R}f_!(\mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}_{X|Y}}(\mathcal{M}_0, K_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow Y|S) \\
 \Rightarrow & \mathbb{R}f_!(\mathbb{R}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X|S}, K_{X|S})) \\
 \Rightarrow & \mathbb{R}f_! \mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M})
 \end{aligned}$$

En (*) on a utilisé le lemme III.4.4, ci-après, en (**) on a utilisé la cohérence de $f_{|Y*}(\mathcal{M}_0)$ sur \mathcal{O}_Y et en (***) on a utilisé la Proposition III.4.2.

Plaçons nous maintenant dans le cas général. La question étant locale sur Y , nous pouvons supposer que \mathcal{M} vérifie les conditions de Houzel-Schapira relativement à f . Il existe donc un sous $\mathcal{D}_{X|Y}$ -module \mathcal{M}^0 de \mathcal{M} et une famille croissante $(X_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ d'ouverts de X à bord de classe C_1 pour laquelle

- a) on a $X = \bigcup_{s > 0} X_s$, $X_s = \bigcup_{s' < s} X_{s'}$, $\bar{X}_s = \bigcap_{s' > s} X_{s'}$, quel que soit $s > 0$
- b) f est propre sur $\bar{X}_s \cap \text{supp}(\mathcal{M})$ pour tout $s > 0$
- c) la relation $T_{\partial X_s}^* X \cap \text{Car}_X(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_X) \subset T_X^* X$ a lieu pour tout $s > 0$
- d) \mathcal{M}^0 est de type fini et engendre \mathcal{M} en tant que $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite.

Montrons d'abord, en raisonnant comme dans [9], que pour tout ouvert relativement compact ω de Y , il existe un complexe \mathcal{M}^i de \mathcal{D}_X -modules nul en degrés positifs, quasi-isomorphe à \mathcal{M} sur $\bar{X}_s \cap f^{-1}(\omega)$ et tel que, pour chaque i , \mathcal{M}^i soit du type traité ci-dessus. Construisons les modules \mathcal{M}^i et

les différentielles d^i du complexe \mathcal{M} par récurrence sur i . Choisissons \mathcal{M}^0 comme étant le module $\mathcal{N}^0 \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|S}$ et prenons d^0 l'épimorphisme canonique de \mathcal{M}^0 dans \mathcal{M} . Supposons maintenant avoir déterminé pour $i \leq r$ des $\mathcal{D}_{X|Y}$ -modules \mathcal{N}^i , des $\mathcal{D}_{X|S}$ -modules \mathcal{M}^i et des différentielles d^i de sorte que f soit propre sur $\bar{X}_s \cap \text{supp}(\mathcal{M}^i)$ pour tout $s > 0$, que

$$T_{\partial X_s}^* X \cap \varphi^{-1}(\text{Car}_{X|Y}(\mathcal{N}^i)) \subset T_X^* X$$

si $\varphi : T^* X \rightarrow T^*(X|Y)$ est la projection canonique, que la suite

$$\mathcal{M}^r \xrightarrow{d^r} \mathcal{M}^{r-1} \xrightarrow{d^{r-1}} \dots \rightarrow \mathcal{M}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{M} \rightarrow 0$$

soit exacte et que $\mathcal{M}^i = \mathcal{N}^i \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|S}$. Posons

$$F_k^{X|Y} \mathcal{D}_{X|S} = F_k^{X|Y} \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X|S}$$

$$\mathcal{N}_k^{r+1} = \mathcal{N}^r \cdot (F_k^{X|Y} \mathcal{D}_{X|S}) \cap (\ker d^r)$$

pour tout entier k . En généralisant légèrement le point d) de la proposition 0.3.4. on voit que \mathcal{N}_k^{r+1} est un $\mathcal{D}_{X|Y}$ -module cohérent quelque soit l'entier k . De plus, comme on a

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}_k^{r+1} = \ker d^r$$

il est clair que \mathcal{N}_k^{r+1} engendre $\ker d^r$ sur le compact

$$(\bar{X}_s \cap f^{-1}(\bar{\omega})) \cap (\text{supp } \mathcal{M}^r)$$

lorsque $k=k_0$ est suffisamment grand. Posons

$$\mathcal{N}^{r+1} = \mathcal{N}_{k_0}^{r+1}$$

$$\mathcal{M}^{r+1} = \mathcal{N}^{r+1} \otimes_{\mathcal{D}_{X|Y}} \mathcal{D}_{X|S}$$

et prenons pour différentielle d^{r+1} la flèche déduite par tensorisation de l'inclusion de \mathcal{A}^{r+1} dans \mathcal{A}^r . Comme \mathcal{A}^{r+1} engendre $\ker d^r$, il résulte de la définition 0.3.8. que

$$\text{Car}_{f|S}^1(\ker d^r) = \text{Car}_{X|Y}(\mathcal{A}^{r+1})$$

Or la proposition 0.3.9. montre que

$$\text{Car}_{f|S}^1(\ker d^r) \subset \text{Car}_{f|S}^1(\mathcal{A}^r) \subset \text{Car}_{X|Y}(\mathcal{A}^r)$$

On en déduit que

$$T_{\partial X_S}^* X \cap \varphi^{-1}(\text{Car}_{X|Y}(\mathcal{A}^{r+1})) \subset T_X^* X$$

Nous avons donc construit des modules $\mathcal{M}^{r+1}, \mathcal{N}^{r+1}$ répondant aux conditions requises.

Si l'on tient compte des résultats obtenus en début de preuve et de ce que le foncteur f_* est de dimension cohomologique finie on voit que le morphisme de dualité

$$f_{-s|S}! \mathbb{D}_{X_S|S}(\mathcal{M}|_{X_S}) \rightarrow \mathbb{D}_Y|S(f_{-s|S}^* \mathcal{M}|_{X_S})$$

est un quasi-isomorphisme. On déduit de cette relation que

$$f_{-s|S}! \mathbb{D}_{X_S|S}(\mathcal{M}|_{X_S}) \rightarrow \mathbb{D}_Y|S(f_{-s|S}^* \mathcal{M}|_{X_S})$$

est aussi un quasi-isomorphisme. Comme on dispose, par [9], de l'isomorphisme

$$f_{-s|S}^*(\mathcal{M}) \simeq f_{-s|S}^*(\mathcal{M}|_{X_S})$$

il est clair que

$$f_{s|S!} \mathbb{D}_{X_s|S}(\mathcal{M}|_{X_s}) \simeq \mathbb{D}_{Y|S}(f_{|S*} \mathcal{M})$$

Cette relation entraîne en particulier que

$$f_{s|S!} \mathbb{D}_{X_s|S}(\mathcal{M}|_{X_s}) \simeq f_{s'|S!} \mathbb{D}_{X_s|S}(\mathcal{M}|_{X_s})$$

pour tout $s < s'$. On en déduit aussitôt que la flèche naturelle

$$f_{s|S!} \mathbb{D}_{X_s|S}(\mathcal{M}|_{X_s}) \rightarrow f_{|S!} \mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M})$$

est un quasi-isomorphisme. En combinant les relations précédentes, on montre que la flèche de dualité

$$f_{|S!} \mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{D}_{Y|S}(f_{|S*} \mathcal{M})$$

est un quasi-isomorphisme, ce qui achève la preuve. ■

LEMME III.4.4 Soit $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces annelés. Pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} et tout \mathcal{O}_Y -module \mathcal{G} de Tor dimension finie on a

$$Rf_*(\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}) \simeq (Rf_*\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}$$

s'il existe une famille croissante $(X_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ d'ouverts de X pour laquelle

- a) $f|_{\overline{X}_s}$ est propre
- b) $\bigcup_{s \in \mathbb{R}_+} X_s = X$
- c) $\overline{X}_{s'} \subset X_s$ si $s' < s$

d) on a les isomorphismes

$$\mathbb{R}f_{|X_s}^*(\mathcal{F}|_{X_s}) \simeq \mathbb{R}f_{|X_{s'}}^*(\mathcal{F}|_{X_{s'}})$$

pour chaque $s' \leq s$.

Preuve : Soient \mathcal{P} une résolution plate bornée de \mathcal{G} , \mathcal{L} la résolution canonique de Godement de \mathcal{F} et \mathcal{R} celle de $\mathcal{L} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{P}$. Posons

$$K_s = f_{|X_s}^*(\mathcal{R}|_{X_s})$$

$$\bar{K}_s = f_{|\bar{X}_s}^*(\mathcal{R}|\bar{X}_s)$$

$$L_s = f_{|X_s}^*(\mathcal{L}|_{X_s}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{P}$$

$$\bar{L}_s = f_{|\bar{X}_s}^*(\mathcal{L}|\bar{X}_s) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{P}$$

Ceci étant, on dispose des flèches de Künneth

$$L_s \rightarrow K_s \quad (*)$$

$$\bar{L}_s \rightarrow \bar{K}_s \quad (**)$$

La formule de projection montre de plus que la flèche (**) est un quasi-isomorphisme. Notons N_s le mapping-cône de (*) et \bar{N}_s celui de (**).

Il résulte de ce qui précède que la flèche canonique de restriction

$$N_s \rightarrow N_{s'}$$

est nulle au sens des catégories dérivées si $s' < s$ puisqu'elle se factorise par \bar{N}_s , qui est quasi-isomorphe au complexe nul. Il est également clair que

$$(L_m)_{m \in \mathbb{N}}, \quad (K_m)_{m \in \mathbb{N}}, \quad (N_m)_{m \in \mathbb{N}}$$

sont trois systèmes projectifs dont les composantes vérifient les conditions de Mittag-Leffler. On obtient alors le triangle distingué suivant

$$\varprojlim_{m \in \mathbb{N}_0} L_m \rightarrow \varprojlim_{m \in \mathbb{N}_0} K_m \rightarrow \varprojlim_{m \in \mathbb{N}_0} N_m \rightarrow [1]$$

On sait que les systèmes projectifs $(H^i N_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont à transitions nulles et qu'ils vérifient par conséquent les conditions de Mittag-Leffler. On en déduit aussitôt que le complexe

$$\varprojlim_{m \in \mathbb{N}_0} N_m$$

est à cohomologie nulle. On obtient ainsi le quasi-isomorphisme

$$\varprojlim_{m \in \mathbb{N}_0} L_m \rightarrow K$$

Pour conclure, il suffit de constater que la flèche canonique

$$L \rightarrow \varprojlim_{m \in \mathbb{N}_0} L_m$$

est un quasi-isomorphisme. En effet, les systèmes projectifs

$$(H^i L_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

ont des isomorphismes pour transitions et vérifient par conséquent les conditions de Mittag-Leffler. ■

CHAPITRE IV

DUALITE DANS LE CAS GENERAL

IV.1. Le théorème de dualité

THEOREME IV.1.1. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés analytiques relatives à S et si \mathcal{M} est un objet de $\mathbf{D}^b(\text{Mod-}\mathcal{D}_{X|S})$ à cohomologie f -cohérente alors la flèche canonique

$$f_{|S!} \mathbf{D}_{X|S}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}_{Y|S}(f_{|S*} \mathcal{M})$$

est un isomorphisme et le complexe $f_{|S*} \mathcal{M}$ est un objet à cohomologie cohérente de $\mathbf{D}^b(\text{Mod-}\mathcal{D}_{Y|S})$.

Preuve: Dans le cas où \mathcal{M} est réduit à sa composante de degré 0, le théorème s'obtient en décomposant f par son graphe et en tenant compte des propositions II.2., III.4.3. et du lemme III.3.2. Le cas général résulte directement du cas précédent puisque le foncteur $f_{|S*}$ est de dimension cohomologique finie. ■

PROPOSITION IV.1.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés analytiques relatives à S . Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à droite f -cohérent et si \mathcal{N} est un $\mathcal{D}_{Y|S}$ -module à droite alors on a l'isomorphisme canonique suivant:

$$\mathbb{R}f_! \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, f_{|S}^* \mathcal{N}) \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(f_{|S}^* \mathcal{M}, \mathcal{N})$$

où $f_{|S}^* \mathcal{N} = f^{-1}(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}_{Y|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S} \leftarrow \mathcal{D}_{X|S} [x-y])$.

Preuve : Une vérification rapide montre que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}_{Y|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S} \leftarrow \mathcal{D}_{X|S} [x-y]) \\ \simeq (\Omega_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X|S} [x-y]) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{X|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S} \otimes_{\mathcal{D}_{Y|S}} f^{-1}(\Omega_{Y|S}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}) \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}f_! \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, f_{|S}^* \mathcal{N}) \\ \simeq \mathbb{R}f_! \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, f^{-1}(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}_{Y|S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y|S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y|S} \leftarrow \mathcal{D}_{X|S} [x-y])) \\ \simeq f_{|S}! (\mathbb{D}_{X|S}(\mathcal{M}))[-y] \otimes_{\mathcal{D}_{Y|S}} (\Omega_{Y|S}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}) \\ \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(f_{|S}^* \mathcal{M}, \Omega_{Y|S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{Y|S}} (\Omega_{Y|S}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}) \\ \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{Y|S}}(f_{|S}^* \mathcal{M}, \mathcal{N}) \end{aligned}$$

et la conclusion résulte du dernier isomorphisme. ■

COROLLAIRE IV.1.3. Si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module à gauche f -cohérent alors on a l'isomorphisme suivant:

$$\underline{\mathrm{Sol}}_Y(f_* \mathcal{M})[y] \simeq \mathbb{R}f_! \underline{\mathrm{Sol}}_X(\mathcal{M})[x]$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition IV.1.2. en remplaçant \mathcal{M} par $\Omega_Y[y]$ et \mathcal{M} par $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ tout en remarquant que $f^* \Omega_Y[y] = \Omega_X[x]$. ■

COROLLAIRE IV.1.4. Si X est une variété analytique relative à S et si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X|S}$ -module à gauche cohérent pour lequel il existe une famille croissante $(X_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ d'ouverts de X à bord de classe C_1 pour laquelle

- a) on a $X = \bigcup_{s > 0} X_s$, $X_s = \bigcup_{s' < s} X_{s'}$, $\bar{X}_s = \bigcap_{s' > s} X_{s'}$ quel que soit $s > 0$
- b) ϵ est propre sur $\bar{X}_s \cap \text{supp}(\mathcal{M})$ pour tout $s > 0$
- c) la relation $T_{\partial X_s}^* X \cap \text{Car}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_X) \subset T_X^* X$ a lieu pour tout $s > 0$.

alors

- a) $\mathcal{S}ol_{X|S}(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathcal{O}_S cohérente
- b) $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{S}ol_{X|S}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_S) \simeq \mathcal{S}ol_{X|S, c}(\mathcal{D}_{X|S}(\mathcal{M}))[2(x-s)]$

Preuve : Le théorème IV.1.1. appliqué au complexe

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X|S})$$

montre que l'on a l'isomorphisme suivant

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\epsilon_{|S}^*(\mathcal{M}), \mathcal{O}_S) \simeq \mathbb{R}\epsilon_! \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, \Omega_{X|S}[x-s])$$

et que $\epsilon_{|S}^*(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathcal{O}_S -cohérente. De plus, on a successivement

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{D}_{X|S}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X) \\ & \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega_{X|S})^{\otimes -1}[x-s], \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{D}_{X|S}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X) \\ & \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X|S}), \Omega_{X|S})[-(x-s)] \end{aligned}$$

Pour conclure il suffit alors de tenir compte de l'isomorphisme

$$\mathbb{E}_{|S*}(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}\mathbb{E}_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X|S}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X|S}) \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{O}_X)$$

et des définitions des foncteurs $\mathbb{S}\mathrm{ol}_{X|S}$ et $\mathbb{S}\mathrm{ol}_{X|S,c}$. ■

Le corollaire suivant montre comment on peut obtenir un cas particulier important de la dualité de SERRE-GROTHENDIECK à partir du théorème de dualité pour les modules différentiels.

COROLLAIRE IV.1.5. Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module cohérent et si $f : X \rightarrow Y$ est une application analytique propre sur $\mathrm{supp} \mathcal{F}$ alors pour tout \mathcal{O}_Y -module cohérent \mathcal{G} on a l'isomorphisme suivant

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{R}f_*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathbb{R}f_! \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \Omega_{X|Y}[x-y]) \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G}$$

où $\mathbb{R}f_*\mathcal{F}$ est un complexe de \mathcal{O}_Y -modules, d'amplitude finie et à cohomologie cohérente.

Preuve : Notons \mathcal{M} le \mathcal{D}_X -module à droite cohérent $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$. Le module \mathcal{M} est f -cohérent, comme on le voit en considérant la famille constante $(X)_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ d'ouverts de X . Par conséquent, on peut appliquer la proposition IV.1.2. et obtenir de la sorte l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X), \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y) \simeq \mathbb{R}f_! \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X, f^*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y))$$

où $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X)$ est un complexe de \mathcal{D}_Y -modules à droite, d'amplitude finie

et à cohomologie cohérente. L'isomorphisme canonique

$$f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X) \simeq \mathbb{R}f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y$$

combiné au lemme 0.1.4. montre alors que $\mathbb{R}f_*(\mathcal{F})$ est un complexe de \mathcal{O}_Y -modules, d'amplitude finie, à cohomologie cohérente. L'isomorphisme de dualité se transforme alors en l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{F}), \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y) \simeq \mathbb{R}f_! \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f^*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y))$$

Tenant compte de la définition de f^* , et des propriétés de cohérence de \mathcal{F} et de $\mathbb{R}f_*(\mathcal{F})$, la relation précédente devient l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y \simeq [\mathbb{R}f_! \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f^* \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X|Y}[x-y])] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y$$

Une vérification rapide montre que cet isomorphisme coïncide avec le produit tensoriel par \mathcal{D}_Y du morphisme de dualité de la géométrie analytique

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}f_! \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f^* \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X|Y}[x-y])$$

Pour conclure, il suffit alors d'utiliser le fait que \mathcal{D}_X est un \mathcal{O}_X -module fidèlement plat. ■

IV.2. Quelques Applications

Avant de considérer les applications que nous avons en vue, il est indispensable d'établir le lemme suivant.

Lemme de déformation

Pour appliquer le théorème de dualité aux cas particuliers traités dans

ce paragraphe, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME IV.2.1. Si N est une sous variété différentielle fermée de la variété différentielle M et si V est un voisinage ouvert conique de $T_N^*M - T_M^*M$ dans T^*M alors il existe une famille à un paramètre $(U_\epsilon)_{\epsilon \in]0, 1[}$ de voisinages ouverts à bord de classe C_∞ de N dans M telle que $T_{\partial U_\epsilon}^*M \subset V \cup T_M^*M$ pour tout $\epsilon \in]0, 1[$ et pour laquelle $\bigcap_{\epsilon \in]0, 1[} U_\epsilon = N$.

Preuve : Par le théorème du voisinage tubulaire, rappelé ci-après, on peut supposer que M est l'espace total d'un fibré vectoriel E de base B dont N est la section nulle et que V est un voisinage conique de T_N^*E . Munissons E d'une structure de fibré vectoriel euclidien. Le lemme IV.2.3. montre que pour tout ouvert relativement compact U de B il existe un réel strictement positif ϵ tel que

$$T_{\partial \Omega|_U}^*E|_U \subset V \cup T_{E|_U}^*E|_U$$

si $\Omega_g = \{x : x \in E, |x|_E < g(b)\}$ et si g est une fonction de classe C_∞ sur B telle que $|g|_{\bar{U}} < \epsilon$, $|\text{grad } g|_{\bar{U}} < \epsilon$. Considérons alors un recouvrement localement fini \mathcal{U} de B par des ouverts relativement compacts et notons ϵ_U le nombre réel associé à un élément U de \mathcal{U} en procédant comme ci-dessus. Définissons la fonction h sur B par la formule

$$h(x) = \inf_{\substack{U \ni x \\ U \in \mathcal{U}}} \epsilon_U$$

Cette fonction vérifie évidemment l'hypothèse du lemme IV.2.4. On en déduit qu'il existe une fonction g de classe C_∞ pour laquelle on a $0 < |g| < h$ et $|\text{grad } g| < h$. Ces majorations montrent que $|\epsilon.g|_U < \epsilon_U$ et que $|\text{grad } \epsilon.g| < \epsilon_U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$ et tout $\epsilon \in]0, 1[$. Il en résulte que

$$T_{\partial\Omega_{\epsilon,g}}^* E \subset V \cup T_E^* E$$

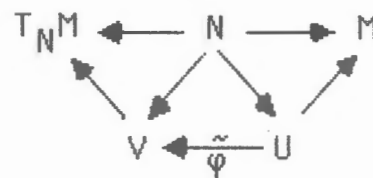
pour tout $\epsilon \in]0, 1[$. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\epsilon \in]0, 1[\quad \Omega_{\epsilon,g} = N$$

et de poser $U_\epsilon = \Omega_{\epsilon,g}$. ■

RAPPEL IV.2.2. (Théorème du voisinage tubulaire)

Si N est une sous-variété fermée de la variété différentielle M alors il existe un voisinage ouvert U de N dans M , un voisinage V de la section nulle de $T_N M$ et un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :



les flèches non annotées étant les inclusions naturelles.

LEMME IV.2.3. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et W un ouvert relativement compact de U . Pour tout voisinage ouvert conique V de $T_{U \times \{0\}}^*(U \times \mathbb{R}^e) - T_{U \times \mathbb{R}^e}^*(U \times \mathbb{R}^e)$ dans $T_{U \times \mathbb{R}^e}^*$, il existe un réel strictement positif ϵ tel que

$$T_{\partial\Omega}^*(W \times \mathbb{R}^e) \subset V \cup T_{W \times \mathbb{R}^e}^*(W \times \mathbb{R}^e)$$

si $\Omega = \{(w, y) : w \in W, y \in \mathbb{R}^e, |y| < g(w)\}$ ou g est une fonction de classe C_1 sur U telle que $0 < |g(w)| < \epsilon, |D_w g| < \epsilon$ si $w \in W$.

Preuve : Si l'on tient compte de l'identification

$$T^*(W \times \mathbb{R}^e) = \{(w, y, \xi, \eta) : w \in W, y \in \mathbb{R}^e, \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^e\}$$

on voit que Ω est un ouvert à bord de $W \times \mathbb{R}^e$ et que

$$T_{\partial\Omega}^* W \times \mathbb{R}^e = \{(w, y, -2gD_w g, 2y) : w \in W, y \in \mathbb{R}^e, |y| = g(w)\}$$

pour toute fonction g de classe C_∞ et strictement positive en tout point de W . Comme, par hypothèse, l'ensemble

$$\{(w, 0, 0, \eta) : w \in (W)^-, |\eta| = 1\}$$

est un compact de V , il existe un réel strictement positif ϵ tel que

$$\{(w, y, \xi, \eta) : w \in (W)^-, |y| < \epsilon, |\xi| < \epsilon, |\eta| = 1\} \subset V$$

L'ouvert V étant conique, cette relation montre que

$$\{(w, y, \xi, \eta) : w \in W, |y| < \epsilon, |\xi| < \epsilon|\eta|\} \subset V \cup T_{W \times \mathbb{R}^e}^*(W \times \mathbb{R}^e)$$

d'où la conclusion. ■

LEMME IV.2.4. Si M est une variété Riemannienne et si h est une fonction sur M minorée sur tout compact par un réel strictement positif alors il existe une fonction g de classe C_∞ sur M pour laquelle on a $0 < |g(x)| < h(x)$ et $|\text{grad } g(x)| < h(x)$ en tout point x de M .

Preuve : Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité sur M . Pour chaque $i \in I$, notons n_i le nombre des j tels que $(\text{supp } \alpha_j) \cap (\text{supp } \alpha_i) \neq \emptyset$ et posons

$$c_i = \inf \left(\frac{1}{1 + n_i \|\text{grad } \alpha_i\|_\infty}, 1 \right) \inf_{x \in \text{supp } \alpha_i} h(x)$$

Considérons la fonction $g = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i$. D'une part, de la formule

$$g(x) = \sum_{\substack{i \in I \\ x \in \text{supp } \alpha_i}} c_i \alpha_i(x)$$

on déduit que $0 < g(x) \leq \sum_{i \in I} \alpha_i(x) h(x)$, ce qui montre que $0 < g(x) \leq h(x)$.

D'autre part, on a $\text{grad } g = \sum_{i \in I} c_i \text{grad } \alpha_i$ et cette formule montre que

$$|\text{grad } g(x)| \leq \sum_{\substack{i \in I \\ \text{supp } \alpha_i \ni x}} c_i \|\text{grad } \alpha_i\|_\infty$$

Or, par construction, on a $c_i \|\text{grad } \alpha_i\|_\infty n_i \leq h(x)$ si $x \in \text{supp } \alpha_i$ donc

$$|\text{grad } g(x)| \leq h(x) \sum_{i \in I} (n_i)^{-1}$$

La conclusion découle alors de l'inégalité

$$\sum_{i \in I} (n_i)^{-1} \leq \text{Card}(\{i: \text{supp } \alpha_i \ni x\}) / \inf_{\text{supp } \alpha_i \ni x} n_i$$

car le second membre est majoré par 1. ■

Le cas des bords non caractéristiques

La proposition suivante est à comparer à la proposition 5.1. de Bony-Schapira [3].

PROPOSITION IV.2.5. Si $\epsilon : X \rightarrow S$ est une submersion analytique complexe, si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X/S}$ -module cohérent et si Ω est un ouvert à bord de classe C_∞ de X d'adhérence propre pour ϵ et tel que

$$T_{\partial\Omega}^* X \cap \text{Car}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X/S}} \mathcal{D}_X) \subset T_X^* X$$

alors 1° $\mathbb{S}ol_{X|S}(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathcal{O}_S cohérente

$$2° \text{RHom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{S}ol_{X|S}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_S) \simeq \mathbb{S}ol_{X|S, \mathbb{C}}(\mathcal{D}_{X|S} \mathcal{M})[2(x-s)]$$

Preuve : En vertu du lemme de déformation, il existe une famille à un paramètre $(U_r)_{r \in]0, 1[}$ de voisinages ouverts à bord de classe C_∞ de $\partial\Omega$ dans X telle que

$$T_{\partial U_r}^* X \subset T_X^* X \cup [T_X^* X - \text{Car}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_X)] \quad (*)$$

Pour tout $s \in]0, +\infty[$, posons $\Omega_s = \Omega \cap (X - \bar{U}_{\varphi(s)})$ avec $\varphi(s) = 1/1+s$. Comme $\partial\Omega$ est inclus dans U_r , il est clair que $(\Omega_r)^- \subset \Omega$. Il en résulte que Ω_s est un ouvert à bord de X et que $(\Omega_s)^-$ est un fermé ϵ -propre. Comme on a l'égalité $\partial\Omega_s = \Omega \cap \partial U_{\varphi(s)}$, la relation (*) montre que

$$T_{\partial\Omega_s}^* X \cap \text{Car}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{X|S}} \mathcal{D}_X) \subset T_X^* X$$

La conclusion résulte alors immédiatement du corollaire IV.1.4. ■

Le cas des systèmes elliptiques

Le résultat suivant est à rapprocher de ceux de KAWAI [16].

PROPOSITION IV.2.6. Si M est une variété analytique réelle compacte de dimension m et si \mathcal{M} est un système elliptique sur M alors

1° $\mathbb{S}ol_M(\mathcal{M})$ est à cohomologie de type fini

$$2° \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}ol_M(\mathcal{M}), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}ol_M(\mathcal{D}_M(\mathcal{M})) \otimes \omega_M[m]$$

Preuve : Soit X un voisinage de Stein de M pour lequel il existe un

\mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{N} tel que $\mathcal{N}|_M = \mathcal{M}$. Par hypothèse, on a l'inclusion

$$T_M^* X \cap \subset T_X^* X \cup (T_X^* X - \text{Car}(\mathcal{N}))$$

Le lemme de déformation nous fournit alors une famille à un paramètre $(U_\epsilon)_{\epsilon \in]0, 1[}$ de voisinages relativement compact de M à bord de classe C_∞ telle que $\bigcap_{\epsilon \in]0, 1[} U_\epsilon = M$ et pour laquelle on a la relation

$$T_{U_\epsilon}^* X \cap \subset T_X^* X \cup (T_X^* X - \text{Car}(\mathcal{N}))$$

Pour chaque $\epsilon \in]0, 1[$ et pour chaque $\epsilon' \in]0, +\infty[$, posons $\Omega_{\epsilon'} = U_{\epsilon'/1+\epsilon'}$. Le corollaire IV.1.4. appliqué au module \mathcal{N} et à la famille $(\Omega_{\epsilon'})_{\epsilon' \in]0, +\infty[}$ montre que

- 1° $R\Gamma(\Omega_{\epsilon'}, \underline{\text{Sol}}_X(\mathcal{N})) \simeq R\Gamma(\Omega_{\epsilon''}, \underline{\text{Sol}}_X(\mathcal{N}))$ si $\epsilon'' < \epsilon'$
- 2° $\text{Sol}_{U_\epsilon}(\mathcal{N})$ est à cohomologie de type fini
- 3° $R\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{Sol}_{U_\epsilon}(\mathcal{N}), \mathbb{C}) \simeq \text{Sol}_{U_\epsilon, \mathbb{C}}(\mathcal{D}_X(\mathcal{N}))[2m]$

Le lemme IV.2.7, ci-après, montre alors que l'on dispose des deux isomorphismes suivants :

$$R\Gamma(U_\epsilon, \underline{\text{Sol}}_X(\mathcal{N})) \simeq R\Gamma(M, \underline{\text{Sol}}_X(\mathcal{N})|_M)$$

$$R\Gamma_M(\underline{\text{Sol}}_X(\mathcal{N})) \simeq R\Gamma_{\mathbb{C}}(U_\epsilon, \underline{\text{Sol}}_X(\mathcal{N}))$$

Comme \mathcal{N} est cohérent, il est clair que l'on a

$$R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_X)|_M \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M)$$

$$R\Gamma_M R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_X) \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, R\Gamma_M(\mathcal{O}_X))$$

Ce qui précède montre alors que $\mathcal{S}ol_M(\mathcal{M})$ est à cohomologie de type fini et que l'on a l'isomorphisme

$$\mathbb{R}Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}ol_M(\mathcal{M}), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}Hom_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{D}_M(\mathcal{M}), \mathcal{B}_M \otimes \omega_M)[m]$$

Comme $\mathcal{D}_M(\mathcal{M})$ est elliptique, on a l'isomorphisme

$$\mathbb{R}Hom_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{D}_M(\mathcal{M}), \mathcal{A}_M) \simeq \mathbb{R}Hom_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{D}_M(\mathcal{M}), \mathcal{B}_M)$$

ce qui permet de conclure. ■

LEMME IV.2.7. Si X est un espace topologique localement compact alors pour toute famille croissante $(U_\epsilon)_{\epsilon \in]0, 1[}$ de voisinages relativement compacts d'un compact K de X et pour tout complexe de faisceaux borné inférieurement \mathcal{F} tel que

$$\mathbb{R}\Gamma(U_\epsilon, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\Gamma(U_{\epsilon'}, \mathcal{F}) \quad [\text{resp. } \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{C}}(U_\epsilon, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{C}}(U_{\epsilon'}, \mathcal{F})]$$

pour tout $\epsilon' \in]0, \epsilon[$, la flèche canonique

$$\mathbb{R}\Gamma(U_\epsilon, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\Gamma(K, \mathcal{F}) \quad [\text{resp. } \mathbb{R}\Gamma_K(X, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{C}}(U_\epsilon, \mathcal{F})]$$

est un isomorphisme au niveau des catégories dérivées.

Preuve : Pour établir le lemme, on peut supposer que \mathcal{F} est à composantes flasques. Dans ce cas, la première partie du lemme résulte immédiatement de la relation

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(U_\epsilon, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(K, \mathcal{F})$$

que l'on obtient grâce à la raideur de K . Établissons à présent la seconde partie du lemme. Pour chaque $\epsilon \in]0, 1[$, posons $K_m = \bar{U}_\epsilon - U_{\epsilon/m}$ et

considérons le système projectif $(\Gamma(K_m, \mathcal{F}'))_{m \in \mathbb{N}_0}$. D'une part, il est clair que les composantes de ce système projectif de complexe vérifient les conditions de Mittag-Leffler et que sa limite projective est $\Gamma(\bar{U}_\epsilon - K, \mathcal{F}')$. D'autre part, on dispose du morphisme de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Gamma_C(U_{\epsilon/m}, \mathcal{F}') & \rightarrow & \Gamma(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & \Gamma(K_m, \mathcal{F}') \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_K(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & \Gamma(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & \Gamma(\bar{U}_\epsilon - K, \mathcal{F}') \rightarrow 0 \end{array}$$

Au niveau de la cohomologie, cela nous fournit le diagramme commutatif à lignes exactes (*) suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{i-1}(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^{i-1}(K_m, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^i_C(U_{\epsilon/m}, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^i(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^i(K_m, \mathcal{F}') \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H^{i-1}(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^{i-1}(\bar{U}_\epsilon - K, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^i_K(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^i(\bar{U}_\epsilon, \mathcal{F}') & \rightarrow & H^i(\bar{U}_\epsilon - K, \mathcal{F}') \end{array}$$

Les hypothèses montrent que $H^i_C(U_{\epsilon/m}, \mathcal{F}') \simeq H^i_C(U_{\epsilon/m'}, \mathcal{F}')$ si $m' > m$ et une application du lemme des cinq montre que $H^i(K_{m'}, \mathcal{F}') \simeq H^i(K_m, \mathcal{F}')$. Une application immédiate du théorème de Mittag-Leffler pour les complexes montre alors que

$$H^i(\bar{U}_\epsilon - K, \mathcal{F}') \simeq \lim_{m \rightarrow +\infty} H^i(K_m, \mathcal{F}')$$

On en déduit aussitôt que $H^i(\bar{U}_\epsilon - K, \mathcal{F}') \simeq H^i(K_m, \mathcal{F}')$ et une application du lemme des cinq au diagramme (*) permet de conclure. ■

Bibliographie

- [1] J. BERNSTEIN, *Notes Miméographiées* .
- [2] J.E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators* , North-Holland Mathematical Library 21 North-Holland Publishing Company, 1979.
- [3] J.M. BONY et P.SCHAPIRA, *Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles* , Inventiones Math. 17 (1972), p.95-105.
- [4] O. FORSTER et K. KNORR, *Ein Beweis des Grauert'schen BildGarben-Satz nach Ideen von B. Malgrange* , Manuscripta Math. 5 (1971), p.19-44.
- [5] A. GROTHENDIECK, *Théorèmes de Dualité pour les faisceaux algébriques cohérents*, Séminaire Bourbaki 1957, Exposé 149, p.1-25.
- [6] W. GUILLEMIN, M. KASHIWARA et T. KAWAI, *Seminar on Microlocal Analysis* , Annals of Mathematics Studies 93, Princeton University Press (1979).
- [7] R. HARSHORNE, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Math. 20 , Springer , 1966.
- [8] C. HOUZEL, *Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude* , Math. Ann. 205 (1973), p.13-54.
- [9] C. HOUZEL et P. SCHAPIRA, *Images directes de modules différentiels* , C.R. Acad. Sc. Paris, Série I 298 (1984), p. 461-464.
- [10] M. KASHIWARA, *Algebraic Study of Systems of Partial Differential Equations* , Master Thesis, Kyoto Univ., 1971, (en japonais).
- [11] M. KASHIWARA, *B-Functions and Holonomic Systems* , Inventiones Math. 38 (1976).
- [12] M. KASHIWARA, *Systems of Microdifferential Equations* (Cours Univ. Paris-Nord ; rédigé par T. Monteiro-Fernandès), Progress in Mathematics 34, Birkhäuser, 1983.

- [13] M. KASHIWARA, *The Riemann-Hilbert problem for Holonomic Systems* , Publ. RIMS Kyoto Univ. **20** (1984), p. 319-365.
- [14] M. KASHIWARA et P.SCHAPIRA, *An Introduction to Microlocal Analysis* , Notes de cours Univ. Fed. Pernambuco, Brésil 1984.
- [15] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Microlocal Study of Sheaves* , Astérisque **128** (1985).
- [16] T. KAWAI, *Finite dimensionality of cohomology groups attached to systems of linear differential Equations* , J. Math. Kyoto Univ. **13-1** (1973), p. 73-95.
- [17] Z. MEBKHOUT, *Thèse*.
- [18] Z. MEBKHOUT, *Une autre équivalence de catégories* , Compositio Mathematica **51** (1984), p.63-88.
- [19] F. PHAM, *Singularités des Systèmes différentiels de Gauss-Manin* , Progress in Math. **2**, Birkhäuser, 1979.
- [20] J.P. RAMIS et G. RUGET, *Complexes dualisants et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe* , Publ. Math. I.H.E.S. **38** (1971), p. 77-91.
- [21] J.P. RAMIS et G. RUGET, *Résidus et Dualité* , Inventiones Math. **26** (1974), p. 89-131.
- [22] J.P. RAMIS, G. RUGET et J.L. VERDIER, *Dualité relative en géométrie analytique complexe* Inventiones Math. **13** (1971), p. 261-283.
- [23] M. SATO, T.KAWAI et M. KASHIWARA, *Microfunctions and Pseudo-differential Equations* , in Lecture Notes in Math. **287**, Springer, 1973.
- [24] P. SCHAPIRA, *Théorie des hyperfonctions* , Lecture Notes in Math. **126**, Springer, (1970).
- [25] P. SCHAPIRA, *Utilisation des hyperfonctions dans les théorèmes de dualité de la géométrie analytique* , Séminaire P. Lelong 10^{ème} année, 1970, p. 166-182.

- [26] P. SCHAPIRA, *Microdifferential Systems in the Complex Domain* , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **269**, Springer,1985.
- [27] J.P. SCHNEIDERS, *Un théorème de dualité relative pour les modules différentiels* , C.R. Acad. Sc. Paris, t. **303**, Série I, n° 6,1986.
- [28] J.P. SERRE, *Un théorème de dualité* , Comment . Math. Helv. **29-1** (1954), p. 9-26.
- [29] J.P. SERRE, *Prolongements de faisceaux analytiques cohérents* , Ann. Inst. Fourier Grenoble **16 -1** (1966), p. 363-374.

Table des Matières

Introduction

CHAPITRE 0 Modules différentiels relatifs	1
1. Faisceaux noethériens	1
2. Faisceaux d'anneaux et de modules filtrés	6
3. Le faisceau $\mathcal{D}_{X S}$	12
4. Produit de $\mathcal{D}_{X S}$ -modules	19
5. Images directes de $\mathcal{D}_{X S}$ -modules	23
CHAPITRE I La Trace Relative pour les Modules Différentiels	31
1. Rappel sur les distributions	31
2. Le complexe de Dolbeault d'un \mathcal{D}_X -modules	34
3. La trace relative pour les modules différentiels	38
4. La trace relative pour les modules différentiels relatifs	41
5. Construction de la trace par le réel	44
CHAPITRE II Dualité pour les immersions	52
CHAPITRE III Dualité pour les submersions	56
1. Δ -systèmes	56
2. Quelques lemmes	66
3. Modules f -cohérents	73
4. Le théorème de dualité	75
CHAPITRE IV Dualité dans le cas général	86
1. Le théorème de dualité	86
2. Quelques Applications	90
Bibliographie	99



Octobre 1986

Réalisé sur
Macintosh™
avec le logiciel
MathWriter

