UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES

ETUDE COHOMOLOGIQUE DES VARIETES DE STEIN

Mémoire présenté par
Jean-Pierre SCHNEIDERS
pour l'obtention du titre de
Licencié en Sciences Mathématiques

Année académique 1982-1983

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES

ETUDE COHOMOLOGIQUE DES VARIETES DE STEIN

Mémoire présenté par
Jean-Pierre SCHNEIDERS
pour l'obtention du titre de
Licencié en Sciences Mathématiques

Année académique 1982-1983

INTRODUCTION

La géométrie différentielle complexe prend une importance croissante en analyse car elle permet de résoudre de nombreux problèmes dans leur cadre intrinsèque naturel.

Le but de ce travail est d'étudier les variétés quasi-holomorphes d'une manière générale et d'établir les résultats principaux de la théorie des variétés de Stein.

Afin d'éviter des lourdeurs inutiles, nous nous sommes abondamment servis de la géométrie différentielle réelle et de la théorie des distributions. A partir du chapitre III, nous avons suivi assez largement le livre "An introduction to complex analysis in several variables" de L. Hörmander.

Décrivons brièvement le contenu de ce mémoire.

Dans les préliminaires nous établissons quelques résultats d'algèbre élémentaire ainsi que quelques théorèmes importants concernant les opérateurs non partout définis et à graphe fermé entre espaces d'Hilbert.

Le chapitre I est consacré à la définition des variétés quasi-holomorphes et à l'étude de leurs propriétés fondamentales. On y introduit également l'opérateur $\bar{\partial}_E$ associé à un fibré vectoriel quasi-holomorphe E et on définit la cohomologie de Dolbeault à valeur dans E.

Dans le chapitre II on définit les métriques hermitiennes et on étudie quelques espaces vectoriels topologiques utilisés dans chapitre III. Il s'agit tout d'abord de l'espace d'Hilbert $L_2(M,E)$ puis des espaces de Sobolev locaux $\mathcal{W}_s(M,E)$.

Au chapitre III, nous exposons la théorie de la L_2-estimation de L.Hörmander sur une variété pseudo-convexe M. Nous en déduisons la valeur de la cohomologie de Dolbeault de tout fibré vectoriel quasi-holomorphe de base M. Finalement nous prouvons que toute variété quasi-holomorphe intégrable est holomorphe.

Le chapitre IV est consacré aux variétés de Stein. Nous montrons que les notions de variété pseudo-convexe et de variété de Stein sont identiques. Nous utilisons ce résultat pour transporter aux variétés de Stein les théorèmes du chapitre III. Enfin nous prouvons que toute variété de Stein de dimension n se plonge proprement dans $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur J.Schmets de nous avoir permis de réaliser ce mémoire en analyse fonctionnelle. Il nous a apporté une aide constante et efficace lors de l'élaboration de ce travail.

PRELIMINAIRES

P.1. Espaces vectoriels complexes de dimension finies

DEFINITION P.1.1. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. On note $E_{[\mathbb{R}]}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent à E et $E_{(\mathbb{C})}$ l'espace vectoriel $E_{[\mathbb{R}]}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.
La conjugaison complexe est l'application $id_{E_{[\mathbb{R}]}}\otimes\bar{\ }$ de $E_{(\mathbb{C})}$ dans $E_{(\mathbb{C})}$, on la note $\bar{\cdot}$.
On note J_E le complexifié de l'endomorphisme de $E_{[\mathbb{R}]}$ défini par $J(x) = i\cdot x$. On a $J_E^2 = -1$.
On pose $P_E = \dfrac{I_{E_{(\mathbb{C})}}-iJ_E}{2}$, $E' = imP_E$, $E'' = im\overline{P_E}$

PROPOSITION P.1.2. Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors on a

a) $P_E + \overline{P_E} = id_{E_{(\mathbb{C})}}$, $P_E o P_{\overline{E}} = 0$

b) $imP_E \oplus \overline{imP_E} = E_{(\mathbb{C})}$, $imP_E = \ker(J_E-iI_{E_{(\mathbb{C})}})$

c) $\dim E = \dim(imP_E)$

d) $(P_{E|E}:E \to imP_E)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-vectoriels.

<u>Preuve</u>:

a) On a $P_E + \overline{P_E} = \dfrac{I-iJ_E}{2} + \dfrac{I+iJ_E}{2} = I$

et $P_E o \overline{P}_E = \dfrac{I-iJ_E}{2} \; o \; \dfrac{I+iJ_E}{2} = \frac{1}{4}(I+J_E^2) = 0$

b) C'est une conséquence de (a)

c) Cela découle de (b) car 2dimE = dim $E_{[\mathbb{R}]}$.

d) Il est clair que $P_{E|E}$ est injectif car un élément de E annulé par P_E est annulé par $\overline{P_E}$. De plus $P_{E|E}$ est $\mathbb{C}$-linéaire car $P_E oJ = i \, P_E$ et $P_{E|E}$ est surjectif car dim E=dim(imP_E). ///

PROPOSITION P.1.3. Soient E,F deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) $(f:E \rightarrow F)$ est $\mathbb{C}$-linéaire

b) $(f_{(\mathbb{C})}:E_{(\mathbb{C})} \rightarrow F_{(\mathbb{C})})$ est tel que $J_F o f_{(\mathbb{C})} = f_{(\mathbb{C})} o J_E$

c) $(f_{(\mathbb{C})}:E_{(\mathbb{C})} \rightarrow F_{(\mathbb{C})})$est tel que $f_{(\mathbb{C})}(E') \subset F'$.

<u>Preuve</u>: Il est évident que (a)$\Leftrightarrow$(b). On sait que $E' = \mathrm{im}P_E$ et que $F' = \ker\overline{P}_F$, par conséquent (c) est vrai si et seulement si $\overline{P}_F o f_{(\mathbb{C})} o P_E = 0$. Or on a

$$\begin{aligned} 4(\overline{P}_E o f_{(\mathbb{C})} o P_E) &= (I+iJ_F) o f_{(\mathbb{C})} o (I-iJ_E) \\ &= (I+iJ_F) o (f_{(\mathbb{C})} - i f_{(\mathbb{C})} o J_E) \\ &= f_{(\mathbb{C})} - i f_{(\mathbb{C})} o J_E + i J_F o f_{(\mathbb{C})} + J_F o f_{(\mathbb{C})} o J_E \text{ et} \end{aligned}$$

$$4\mathfrak{I}(\overline{P}_E o f_{(\mathbb{C})} o P_E) = -f_{(\mathbb{C})} o J_E + J_F o f_{(\mathbb{C})}$$

On en déduit aussitôt que (b) est équivalent à (c).///

PROPOSITION P.1.4. Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie et si A est un endomorphisme de E alors:

a) $P_{E|E}^{-1} o A_{(\mathbb{C})} o P_{E|E} = A$ b) $\det A_{[\mathbb{R}]} = |\det A|^2$

<u>Preuve</u>: a) Il suffit de constater que $A_{(\mathbb{C})}$ commute avec P_E;

b) On sait que $\det A_{[\mathbb{R}]} = \det A_{(\mathbb{C})}$. Notons A' l'endomorphisme $(A_{\mathbb{C}|E'}: E' \to E')$ et A" l'endomorphisme $(A_{(\mathbb{C})|E''}: E'' \to E'')$. Les propositions P.1.2 et P.1.3. montrent que $A_{(\mathbb{C})} = A' \oplus A''$. De plus le point (a) montre que $\det A' = \det A$ et que $\det A'' = \overline{\det A}$. La conclusion résulte alors de ce que $\det A_{(\mathbb{C})} = \det A' \cdot \det A''$.///

DEFINITION P.1.5. Une orientation d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est une orientation de l'espace vectoriel réel sous-jacent.
On munit $\mathbb{C}$ de l'orientation déduite de celle de $\mathbb{R}^2$.
On munit $\mathbb{C}^n$ de l'orientation somme de celles des espaces $\mathbb{C}$.
Soit V un $\mathbb{C}$-vectoriel et $(\varphi: V \to \mathbb{C}^n)$ un isomorphisme.
L'image inverse par φ de l'orientation de $\mathbb{C}^n$ est indépendante de φ. On l'appelle l'orientation naturelle de V.

PROPOSITION P.1.6. Soient E,F deux espaces vectoriels complexes de dimension finie:

a) Tout isomorphisme de E dans F est orienté
b) La somme des orientations naturelles de E et F est l'orientation naturelle de $E \oplus_{\mathbb{C}} F$
c) Si E est un sous $\mathbb{C}$-vectoriel de F alors l'orientation quotient de E/F coïncide avec l'orientation naturelle.

<u>Preuve</u>: Tout découle de la proposition P.1.4. et de la définition P.1.5.///

DEFINITION P.1.7. Soit E un espace vectoriel complexe. Posons $\overset{p,q}{\Lambda} E = \{u \wedge v : u \in \overset{p}{\Lambda} E',\ v \in \overset{q}{\Lambda} E''\}$.
Il est clair que $\overset{p,q}{\Lambda} E$ est un sous-vectoriel de $\Lambda E_{(\mathbb{C})}$ et que $\Lambda E_{(\mathbb{C})} \simeq \bigoplus_{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} \overset{p,q}{\Lambda} E_{(\mathbb{C})}$. La décomposition de $E_{(\mathbb{C})}$ en somme directe de E' et de E" induit une décomposition de $E^*_{(\mathbb{C})}$ en somme directe de E'^* et de E''^*.
On identifiera E'^* avec son image par la première injection associée à cette décomposition.

Un élément de $\overset{p,p}{\Lambda} E$ est positif si $i^{p(p+2)}\langle y \wedge \overline{y}, x\rangle \geq 0$ pour tout $y \in \overset{p}{\Lambda} E'^*$.

Un élément de $\overset{p,p}{\Lambda} E$ est strictement positif si $i^{p(p+2)}\langle y \wedge \overline{y}, x\rangle > 0$ pour tout $y \in (\overset{p}{\Lambda} E'^*)\setminus\{0\}$.

P.2. Espaces vectoriels euclidiens

DEFINITION P.2.1. Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel est une forme bilinéaire symétrique positive.

Un espace euclidien E est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Le produit scalaire de E est noté $(\cdot,\cdot)_E$ ou g_E. La norme d'un élément x de E est le nombre réel $\sqrt{(x,x)_E}$, on la note $\|x\|_E$.

DEFINITION P.2.2.

a) On munit $\mathbb{R}$ du produit scalaire $g_{\mathbb{R}}$ caractérisé par $g_{\mathbb{R}}(r,r') = rr'$

b) Soit F un sous espace vectoriel d'un espace euclidien E. On munit F du produit scalaire g_F caractérisé par $g_F(x,y) = g_E(x,y)$ pour tout $x,y \in F$.

c) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie d'espaces euclidiens. On munit $\underset{i\in I}{\oplus} E_i$ du produit scalaire $\underset{i\in I}{\oplus} g_{E_i}$ caractérisé par $(\underset{i\in I}{\oplus} g_{E_i})(\underset{i\in I}{\oplus} x_i, \underset{i\in I}{\oplus} y_i) = \underset{i\in I}{\oplus} g_{E_i}(x_i,y_i)$ pour tout $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, et $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$.

d) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie d'espaces euclidiens. On munit $\underset{i\in I}{\otimes} E_i$ du produit scalaire $\underset{i\in I}{\otimes} g_{E_i}$ caractérisé par $(\underset{i\in I}{\otimes} g_{E_i})(\underset{i\in I}{\otimes} x_i, \underset{i\in I}{\otimes} y_i) = \prod_{i\in I} g_{E_i}(x_i,y_i)$ pour tout $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, et $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$.

e) Soit E un espace euclidien. On munit $\Lambda^n E$ du produit scalaire $\Lambda^n g_E$ caractérisé par

$$\Lambda^n g_E(x_1\wedge\ldots\wedge x_n, y_1\wedge\ldots\wedge y_n)$$
$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\sigma\, g_E(x_1,y_{\sigma(1)})\ldots g_E(x_n,y_{\sigma(n)})$$

On munit ΛE du produit scalaire $\Lambda g_E = \bigoplus_{n=0}^{\dim E} \Lambda^n g_E$.

f) Soit E un espace euclidien et x un élément de E. On note $\#x$ l'élément de E^* défini par $\#x(y) = (y,x)_E$. L'application $(\#_E : E \to E^*)$ est un isomorphisme car c'est une injection d'un espace vectoriel de dim finie dans un espace vectoriel de même dimension.

g) Soit E un espace euclidien. On munit E^* du produit scalaire g_E^* caractérisé par $g_E^*(\#_E x, \#_E y) = g_E(x,y)$.

h) La forme de volume d'un espace euclidien orienté de dim n est la seule n-forme positive de norme 1.

PROPOSITION P.2.3.

a) $(a\omega, a\omega')_{\otimes^p E} = p!(\omega,\omega')_{\Lambda^p E}$ si $\omega,\omega'\in\Lambda^p E$

b) $(\sigma\cdot T, T')_{\otimes^p E} = (T, \sigma^{-1}T')_{\otimes^p E}$ si $T,T'\in\otimes^p E$

c) $\|AT\|_{\otimes^p E} \leq \|T\|_{\otimes^p E}$ si $T\in\otimes^p E$

d) $\|\omega\wedge\omega'\|_{\Lambda^{p+q}E} \leq \sqrt{\dfrac{(p+q)!}{p!q!}}\,\|\omega\|_{\Lambda^p E}\|\omega'\|_{\Lambda^q E}$ si $\omega\in\Lambda^p E$, $\omega'\in\Lambda^q E$.

<u>Preuve</u>:

a) Supposons que $x_1,\ldots,x_p\in E$ et que $y_1,\ldots,y_p\in E$. On sait que $a(x_1\wedge\ldots\wedge x_p) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \operatorname{sign}\sigma\, x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(p)}$.

On en déduit que

$$(a(x_1\wedge\ldots\wedge x_p),a(y_1\wedge\ldots\wedge y_p))_{\otimes^p E}$$

$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\ \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p} \operatorname{sign}\sigma'\sigma^{-1}(x_{\sigma(1)},y_{\sigma'(1)})\ldots(x_{\sigma(n)},y_{\sigma'(n)})$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\ \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p} \operatorname{sign}\sigma'\sigma^{-1}(x_1,y_{\sigma'\sigma^{-1}(1)})\ldots(x_n,y_{\sigma'\sigma^{-1}(n)})$$

$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(x_1\wedge\ldots\wedge x_p,y_1\wedge\ldots\wedge y_p)_{\Lambda^p E}.$$

La formule se déduit directement de cette dernière égalité.

b) Supposons que $x_1,\ldots x_p\in E$, que $y_1,\ldots,y_p\in E$ et que $\sigma\in\mathfrak{S}_p$. On a

$$(\sigma.\,x_1\otimes\ldots\otimes x_p,y_1\otimes\ldots\otimes y_p)_{p_E}=(x_{\sigma(1)},y_1),\ldots,(x_{\sigma(n)},y_n)$$

$$=(x_1,y_{\sigma^{-1}(1)})\ldots(x_n,y_{\sigma^{-1}(n)})$$

$$=(x_1\otimes\ldots\otimes x_p,\sigma^{-1}(y_1\otimes\ldots\otimes y_p))_{p_E}$$

c) Supposons que $T\in\otimes^p E$ on a

$$AT=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\frac{\operatorname{sign}\sigma}{p!}\sigma.T$$

$$\|AT\|_{\otimes^p E}\leq\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\frac{1}{p!}\|\sigma T\|_{\otimes^p E}$$

$$\|AT\|_{\otimes^p E}\leq\|T\|_{\otimes^p E}$$

d) Supposons que $\omega\in\Lambda^p E$ et que $\omega'\in\Lambda^q E$. On a

$$a(\omega\wedge\omega')=\frac{(p+q)!}{p!q!}A(a\omega\otimes a\omega')\text{ donc}$$

$$\|\omega\wedge\omega'\|_{\Lambda^{p+q}E}\leq\sqrt{\frac{(p+q)!}{p!q!}}\|\omega\|_{\Lambda^p E}\|\omega'\|_{\Lambda^q E}\quad .///$$

P.3. Opérateur de Hodge

REMARQUE P.3.1. Dans ce paragraphe E est un espace euclidien orienté de dim n dont la forme de volume est notée v. On note p l'isomorphisme de $\Lambda^n E$ sur $\mathbb{R}$ associé à la base $\{v\}$. On pose $N=\{1,\dots,n\}$.

PROPOSITION P.3.2. L'application de $\Lambda^p E \times \Lambda^{n-p} E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathcal{B}(\alpha,\beta) = p(\alpha\wedge\beta)$ est une dualité biséparante.

Preuve: Soit $e_1,\dots,e_n$ une base orthonormée orientée de E. On a $\mathcal{B}(e_I, \rho_{J,N\setminus J} e_{N\setminus J}) = \delta_{I,J}$. Cela montre que $\mathcal{B}$ est biséparante et que $(\rho_{J,n\setminus J}\, e_{n\setminus J})_{(J)=p}$ est la base duale de $(e_I)_{(I)=p}$ pour cette dualité. ///

DEFINITION P.3.3. De la proposition précédente, on déduit un isomorphisme i entre $(\Lambda^p E)^*$ et $\Lambda^{n-p} E$.
On pose $*_p = i \circ \#_{\Lambda^p E}$. $(*_p : \Lambda^p E \to \Lambda^{n-p} E)$ est appelé opérateur de Hodge de degré p.
On pose $*_E = \bigoplus_{p=o}^{n} *_p$. $(*_E : \Lambda E \to \Lambda E)$ est l'opérateur de Hodge associé à E. Il résulte de ce qui précède que $\beta\wedge *\alpha = (\beta,\alpha)_E v$, pour tout $\beta,\alpha\in\Lambda E$. On voit immédiatement que $*$ est le seul opérateur vérifiant cette relation.

PROPOSITION P.3.4.

a) Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée orientée de E, alors $*e_I = \rho_{I,N\setminus I}\, e_{N\setminus I}$.

b) $*1 = v$

c) $**\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha$ si $\alpha \in \Lambda^p E$

d) $(*\alpha, *\beta)_E = (\alpha, \beta)_E$ si $\alpha, \beta \in \Lambda^p E$

Preuve:

a) se déduit de la proposition P.3.2.

b) On a $*1 = e_N$ donc $*1 = v$

c) On a $**e_I = \rho_{I,N\setminus I}\, \rho_{N\setminus I,I}\, e_I$ donc $**e_I = (-1)^{p(n-p)} e_I$

d) On a $(*\alpha, *\beta)_E v = (-1)^{p(n-p)} *\alpha \wedge \beta$ et $(-1)^{p(n-p)} *\alpha \wedge \beta = \beta \wedge *\alpha$.

donc $(*\alpha, *\beta)_E = (\beta, \alpha)_E$.///

REMARQUE P.3.5. Ce qui a été fait dans le § P.2 peut être transposé de manière naturelle au cas des espaces vectoriels complexes de dimension finie munis d'un produit scalaire hermitien.

Le § P.3 sera adapté au cas des variétés quasi-hermitiennes dans le § II.3.5.

P.4. Suites exactes d'espaces d'Hilbert

DEFINITION P.4.1. Un opérateur linéaire fermé à domaine dense d'un espace d'Hilbert H_1 dans un espace d'Hilbert H_2 est une application linéaire f d'un sous espace linéaire dense de H_1 dans H_2 dont le graphe est un sous espace fermé de $H_1 x H_2$. En abrégé, on dira que f est un o.f.d.d..

DEFINITION P.4.2. Soit T un o.f.d.d. de l'espace d'Hilbert H_1 dans l'espace d'Hilbert H_2. On appelle adjointe de T, et on note T^*, la relation dont le graphe est l'ensemble $\bigcap_{f \in \mathrm{dom}T} \{(g,h):(g,h) \in H_2 x H_1 \ , \ (Tf,g)_{H_2} = (f,h)_{H_1}\}$. Il est clair que $(T^*:\mathrm{dom}T^* \to H_1)$ est une application linéaire.

PROPOSITION P.4.3. Si T est un o.f.d.d. de H_1 dans H_2 alors T^* est un o.f.d.d. de H_2 dans H_1. De plus $\ker T^* = (\mathrm{im}T)^{\perp}$ et $T^{**} = T$.

<u>Preuve</u>: Notons J l'isométrie de $H_1 x H_2$ dans $H_2 x H_1$ définie par $J(x,y) = (-y,x)$. Il résulte de la définition P.4.2. que $G_{T*}=(J(G_T))^{\perp}$. On en déduit que G_{T*} est un sous espace fermé de $H_2 x H_1$ et que $\ker T^* = (\mathrm{im}T)^{\perp}$. De plus $G_T = J^{-1}(G_{T*}^{\perp})$ car G_T est un sous espace fermé de $H_1 x H_2$. Soit h un élément de $(\mathrm{dom}T^*)^{\perp}$. Il est clair que $(h,o) \in (G_{T*})^{\perp}$. Il en résulte que $(h,o) \in J(G_T)$ et que $(o,h) \in G_T$. Or cela entraine l'annulation de h donc $(\mathrm{dom}T^*)^{\perp} = \{o\}$ et $\overline{\mathrm{dom}T^*} = H_2$. Enfin il est évident que $G_T = (J^{-1}(G_{T*}))^{\perp}$ donc $T^{**} = T$.///

PROPOSITION P.4.4. Un o.f.d.d. T d'un espace d'Hilbert H_1 dans un espace d'Hilbert H_2 est surjectif si et seulement si il existe une constante $C>0$ telle que $\|f\|_{H_2} \leq C\|T^*f\|_{H_1}$ pour tout $f \in \mathrm{dom}T^*$. De plus, dans ce cas $\mathrm{im}T^*=(\ker T)^{\perp}$ et $T((CB_{H_1}) \cap \mathrm{im}T^*) \supset B_{H_2}$.

Preuve:

a) Supposons que $\mathrm{im}T=H_2$ et montrons que
$A=\{f : f \in \mathrm{dom}T^*, \|T^*f\|_{H_1} \leq 1\}$ est borné dans H_2.
Si $f \in A$ et si $g \in \mathrm{dom}T$ alors $(f,Tg)_{H_2} = (T^*f,g)_{H_1}$ et $|(f,Tg)_{H_2}| \leq \|g\|_{H_1}$. Cette dernière majoration montre que A est faiblement borné car $\mathrm{im}T=H_2$. Le théorème de Mackey établit alors que A est borné, ce qui suffit.

b) Supposons que $\|f\|_{H_2} \leq C\|T^*f\|_{H_1}$ pour tout $f \in \mathrm{dom}T^*$.
On munit $\mathrm{dom}T^*$ d'une structure d'espace préhilbertien en prenant pour produit scalaire hermitien la forme bilinéaire $(\ ,\ )_{\mathrm{dom}T^*}$ définie par $(f,g)_{\mathrm{dom}T^*}=(T^*f,T^*g)_{H_1}$. Il est clair que $\mathrm{dom}T^*$ est un espace vectoriel topologique isomorphe à l'espace complet G_{T^*}. On en déduit que $\mathrm{dom}T^*$ est un espace d'Hilbert. Soit g un élément de H_2. La forme linéaire $(\ ,g)_{H_2}$ restreinte à $\mathrm{dom}T^*$ est continue et sa norme est majorée par $C\|g\|_{H_2}$. En effet, $|(f,g)_{H_2}| \leq C\|T^*f\|_{H_1} \|g\|_{H_2}$ pour tout $f \in \mathrm{dom}T^*$. On en déduit qu'il existe $h \in \mathrm{dom}T^*$ tel que $(f,g)_{H_2}=(T^*f,T^*h)$ pour tout $f \in \mathrm{dom}T^*$. Il en résulte que $g=T(T^*h)$ et que $\|T^*h\|_{H_1} \leq C\|g\|_{H_2}$. Cela montre que $T((CB_{H_1}) \cap \mathrm{im}T^*) \supset B_{H_2}$ et que $\mathrm{im}T=H_2$. De plus, il est clair que l'application $(T^*:\mathrm{dom}T^* \to \mathrm{im}T^*)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques. Mais $\mathrm{dom}T^*$ est un espace d'Hilbert donc $\mathrm{im}T^*$ est fermé et $\mathrm{im}T^*=(\mathrm{im}T^*)^{\perp\perp}=(\ker T)^{\perp}$. ///

COROLLAIRE P.4.5. Soient T un o.f.d.d. de l'espace d'Hilbert H_1 dans l'espace d'Hilbert H_2 et S un o.f.d.d. de l'espace d'Hilbert H_2 dans l'espace d'Hilbert H_3. Si $\operatorname{im} T \subset \ker S$ et si $\|f\|_{H_2} \leq \|T^*f\|_{H_1} + \|Sf\|_{H_2}$ pour tout $f \in \operatorname{dom} T^* \cap \operatorname{dom} S$ alors $T(\operatorname{im} T^* \cap B_{H_1}) \supset \ker S \cap B_{H_2}$ et $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^{\perp}$.

<u>Preuve</u>: Notons T' l'application $(T : \operatorname{dom} T \rightarrow \ker S)$. Il est clair que $\ker S$ est un sous espace d'Hilbert de H_2 et que T' est un o.f.d.d. de H_1 dans $\ker S$. De plus, l'adjoint de T' est la restriction à $\operatorname{dom} T^* \cap \ker S$ de l'adjoint de T.
La proposition P.4.4. montre alors que $T(\operatorname{im} T^* \cap B_{H_1}) \supset B_{\ker S}$ et que $\operatorname{im} T'^* = (\ker T)^{\perp}$. Mais $\operatorname{im} T'^* = T^*(\ker S \cap \operatorname{dom} T^*)$ donc $\operatorname{im} T'^* = \operatorname{im} T^*$ car $(\ker S)^{\perp} = \ker T^*$. Pour conclure il suffit de remarquer que $B_{\ker S} = B_{H_2} \cap \ker S$. ///

CHAPITRE I

VARIETES QUASI-HOLOMORPHES

I.1. Définitions, algèbre extérieure

DEFINITION I.1.1. Une variété quasi-holomorphe de dimension n est une variété différentielle réelle de classe C_∞ dont le fibré tangent est muni d'une structure de fibré vectoriel complexe de rang n. Une application f d'une variété quasi-holomorphe M dans une variété quasi-holomorphe N est quasi-holomorphe si l'application $(f_{*\,\mathbb{R}}: T_{\mathbb{R}}M \to T_{\mathbb{R}}N)$ est un morphisme de fibrés vectoriels complexes.

PROPOSITION I.1.2. Soit M une variété quasi-holomorphe. Si (x,ξ) appartient à $T_{\mathbb{R}}M$, on pose $J_M(x,\xi)=(x,i\xi)$ L'application $(J_M:T_{\mathbb{R}}M \to T_{\mathbb{R}}M)$ ainsi définie est un endomorphisme de carré $-1_{T_{\mathbb{R}}M}$.

Preuve: Il est évident que $J_M^2 = -1_{T_{\mathbb{R}}M}$. Soit U un ouvert de M au-dessus duquel le fibré complexe $T_{\mathbb{R}}M$ est trivialisable et $(\varphi:T_{\mathbb{R}}U \to U\times\mathbb{C}^n)$ une trivialisation de $T_{\mathbb{R}}U$. Si (x,ξ) $U\times\mathbb{C}^n$ on a

$\varphi \circ J_{M\, T_R U} \circ \varphi^{-1}(x,\xi) = (x,i\xi)$. Ainsi $\varphi \circ J_{M\, T_R U} \circ \varphi^{-1}$ est une application de classe C_∞ de $U \times \mathbb{C}^n$ dans $U \times \mathbb{C}^n$. ///

PROPOSITION I.1.3. Si M est une variété différentielle de classe C_∞ et si J un endomorphisme de $T_{\mathbb{R}}M$ de carré $-1_{T_{\mathbb{R}}M}$. Alors il existe une et une seule structure quasi-holomorphe sur M telle que $J_M = J$.

<u>Preuve</u>: Notons $T_{\mathbb{C}}M$ le fibré $T_{\mathbb{R}}M \otimes_M \mathbb{C}$ et $J_{\mathbb{C}}$ l'endomorphisme $J \otimes_M \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. On a $J_{\mathbb{C}}^2 = -1_{T_{\mathbb{C}}M}$. Notons P l'endomorphisme $\frac{1-iJ_{\mathbb{C}}}{2}$ de $T_{\mathbb{C}}M$. On vérifie immédiatement que $P+\overline{P} = 1$, $P \circ \overline{P} = 0$ et $P^2 = P$.
Soit x un point de M, ce qui précède montre que
$\mathrm{im}\, P_x \oplus \mathrm{im}\, \overline{P}_x = (T_{\mathbb{C}}M)_x$. Or $\mathrm{im}\, \overline{P}_x = \overline{\mathrm{im}\, P_x}$ donc
$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{im}\, \overline{P}_x) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{im}\, P_x)$ et $2\, \mathrm{rg}_x P = \dim_x P$. Le rang de l'endomorphisme P est par conséquent localement constant et son image est un sous-fibré vectoriel complexe de $T_{\mathbb{C}}M$.
En raisonnant de même pour $\overline{P}$ on voit que $\mathrm{im}\, \overline{P}$ est un sous-fibré vectoriel complexe de $T_{\mathbb{C}}M$. Ce qui précède montre alors que $\mathrm{im}\, P \oplus \mathrm{im}\, \overline{P} = T_{\mathbb{C}}M$. On a $\mathrm{im}\, \overline{P} \cap T_{\mathbb{R}}M = \{o\}$ car un élément de $\mathrm{im}\, \overline{P} \cap T_{\mathbb{R}}M$ est un élément de $\mathrm{im}\, P \cap T_{\mathbb{R}}M$. On en déduit que l'application $(P_{|T_{\mathbb{R}}M} : T_{\mathbb{R}}M \to (\mathrm{im}\, P)_{[\mathbb{R}]})$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels réels. De plus, on a $P_{|T_{\mathbb{R}}M} \circ J = iP_{|T_{\mathbb{R}}M}$.
En transportant la structure de fibré vectoriel complexe de $\mathrm{im}\, P$ à $T_{\mathbb{R}}M$ au moyen de cet isomorphisme on obtient une structure de variété quasi-holomorphe sur M pour laquelle $J_M = J$. L'unicité d'une telle structure est évidente car la donnée de J fixe la structure de $\mathbb{C}$ vectoriel de $(T_{\mathbb{R}}M)_x$. ///

DEFINITION I.1.4.

Si M est une variété quasi-holomorphe, on pose $P_M = \dfrac{I - iJ_M}{2}$.

Le fibré tangent complexe de M est le fibré $T_{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$. On le note TM.

Le fibré tangent holomorphe de M est le fibré $\operatorname{im} P_M$. On le note T'M.

Le fibré tangent anti-holomorphe de M est le fibré $\operatorname{im} \overline{P}_M$. On le note T"M.

On note $\overline{\cdot}^M$ l'involution $\mathbb{C}$ antilinéaire de TM définie par $\overline{(x,\xi)}^M = (x,\overline{\xi})$. Le conjugué du morphisme $(u\colon TM \to TN)$ est le morphisme $(\overline{u} : TM \to TN)$ défini par $\overline{u} = \overline{\cdot}^N \circ u \circ \overline{\cdot}^M$. On note également $\overline{\cdot}^M$ l'involution naturelle de $(TM)^*$

PROPOSITION I.1.5. Si M est une variété quasi-holomorphe, alors :

a) $TM = T'M \oplus T''M$ et $T''M = \overline{T'M}$

b) Les morphismes P et $\overline{P}$ sont les projecteurs associés à cette décomposition de TM en somme directe.

c) $\dim_x M = 2\, \mathrm{rg}_x(T'M)$

d) Les projecteurs associés à la décomposition duale de a) sont les M-morphismes $(P_M^*, \overline{P}_M^*)$.

<u>Preuve</u> : Cela résulte de la preuve de la proposition I.1.3.///

DEFINITION I.1.6. Soit M une variété quasi-holomorphe. La décomposition du fibré cotangent en somme directe de $(T'M)^*$ et de $(T''M)^*$ induit un bigraduation du fibré $\Lambda(TM)^*$.

On a $\Lambda(TM)^* = \bigoplus_{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} \overset{p,q}{\Lambda}(TM)^*$ où $\overset{p,q}{\Lambda}(TM)^*$ est le sous-fibré de $\Lambda(TM)^*$ dont l'ensemble sous-jacent est

$$\bigcup_{x\in M} (\{x\} \times \{u \wedge v : u \in (\overset{p}{\Lambda}(T'M)^*)_x,\ v \in (\overset{q}{\Lambda}(T''M)^*)_x\}).$$

<u>Preuve</u>: Cela résulte de la théorie élémentaire des espaces fibrés vectoriels.///

DEFINITION I.1.7. On note $P_{p,q}$ la projection de $\Lambda(TM)^*$ sur $\overset{p,q}{\Lambda}(TM)^*$. Le M-morphisme $\Lambda\bar{\cdot}^M$ est noté $\bar{\cdot}$ par abus de langage. Le conjugué d'un M-endomorphisme f de $\Lambda(TM)^*$ est l'endomorphisme $\bar{\cdot} \circ f \circ \bar{\cdot}$, on le note $\bar{f}$.

PROPOSITION I.1.8. Si M est une variété quasi-holomorphe alors,

a) $(P_{p,q} : \Lambda(TM)^* \to \Lambda(TM)^*)$ est un endomorphisme

b) $\sum_{(p,q)\in N\times N} P_{p,q} = I_{\Lambda(TM)^*}$

c) $P_{p,q} \circ P_{p',q'} = \delta_{pp'}\, \delta_{qq'}\, I_{\Lambda(TM)^*}$

d) $\overline{P_{p,q}} = P_{q,p}$.

<u>Preuve</u>: Cela résulte immédiatement de ce qui précède.///

DEFINITION I.1.9. Un champ tensoriel complexe de type $\binom{p}{q}$ est une section de classe C_∞ du fibré vectoriel complexe $T^p_q(TM)$. On pose $\mathcal{T}^p_q(M) = \Gamma(M, T^p_q(TM))$.

Un champ de vecteurs est un champ tensoriel de type $\binom{1}{o}$.

Un champ de vecteurs de type (1,o) est une section de C_∞ du fibré T'M.

Un champ de vecteurs de type (o,1) est une section de C_∞ du fibré T"M.

Une forme différentielle de type (p,q) sur M est une section C_∞ de $\overset{p,q}{\Lambda}(TM)^*$ au-dessus de M.

On pose $A^{p,q}(M) = \Gamma(M, \overset{p,q}{\Lambda}(TM)^*)$.

$A^{p,q}(M)$ est donc canoniquement muni d'une structure de $C_\infty(M)$-module. On pose ,

$$A(M) = \bigoplus_{(p,q)\in Z\times Z} A^{p,q}(M) \quad \text{et} \quad A^n(M) = \bigoplus_{\substack{(p,q)\in Z\times Z\\ p+q=n}} A^{p,q}(M).$$

On note $P_{p,q}$ le projecteur de $A(M)$ sur $A^{p,q}(M)$ et P_n le projecteur de $A(M)$ sur $A^n(M)$. $A(M)$ est canoniquement muni d'une structure de $C_\infty(M)$-algèbre graduée anticommutative car il existe un isomorphisme canonique entre $A(M)$ et $\Gamma(M,\Lambda(TM)^*)$. De plus $A(M)$ est canoniquement isomorphe en tant que $\mathbb{C}$-algèbre à la $\mathbb{C}$-algèbre $A_{\mathbb{R}}(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ car il existe un isomorphisme canonique entre les fibrés vectoriels complexes $\Lambda_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{R}}M\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ et $(\Lambda_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}} M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

PROPOSITION I.1.10. Soient M et N deux variétés quasi-holomorphes et $(f:M \to N)$ une application de classe C_1. L'application tangente de f est la complexifiée de $(f_{*\mathbb{R}}: T_{\mathbb{R}}M \to T_{\mathbb{R}}N)$, on la note f_*. On note $(f^*:A(N) \to A(M))$ l'application déduite de l'application $(f^{*\mathbb{R}}\otimes id_{\mathbb{C}}:A_{\mathbb{R}}(N)\otimes \mathbb{C} \to A_{\mathbb{R}}(M)\otimes\mathbb{C})$ au moyen des isomorphismes canoniques entre $A(N)$ et $A_{\mathbb{R}}(N)\otimes\mathbb{C}$ et entre $A(M)$ et $A_{\mathbb{R}}(M)\otimes\mathbb{C}$. Vu ce qui précède il est évident que $(f^*:A(N)\to A(M))$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres.

La différentielle extérieure complexe de M est l'application $(d:A(M)\to A(M))$ obtenue en complexifiant l'application $(d_{\mathbb{R}}:A_{\mathbb{R}}(M)\to A_{\mathbb{R}}(M))$. On en déduit que $f_*\circ d = d\circ f_*$.

PROPOSITION I.1.11. Si M est une variéte quasi-holomorphe, alors

a) $(d : A(M) \to A(M))$ est $\mathbb{C}$-linéaire et graduée de degré $+1$.

b) $d \circ P_n = P_{n+1} \circ d$.

c) $d(\omega \wedge \omega') = \omega \wedge d\omega' + (-1)^p d\omega \wedge \omega'$ si $\omega \in A^p(M)$ et si $\omega' \in A(M)$

d) $d^2 = o$

e) ker d est une sous algèbre graduée de $A(M)$ et im d est un idéal-bilatère gradué de ker d.

<u>Preuve</u>: a),b),c),d) résultent de la définition I.1.9 et des propriétés analogues dans le cas des variétés réelles.
L'énoncé b) montre que ker d et im d sont des sous $\mathbb{C}$-vectoriel gradués de $A(M)$.
L'énoncé c) montre immédiatement que ker d est une sous-algèbre de $A(M)$ et que im d est un idéal bilatère de ker d .///

DEFINITION I.1.12. Soit M une variété quasi-holomorphe. L'algèbre graduée ker d / im d est appelée algèbre de cohomologie de de Rahm complexe de M, on la note $H_d(M,\mathbb{C})$. Il résulte immédiatement des définitions que $(H_d(M,\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H_d(M,\mathbb{C})$.

PROPOSITION 1.1.13. Si M et N sont des variétés quasi-holomorphes, alors les conditions suivantes sont équivalentes.

a) $(f : M \to N)$ est quasi-holomorphe

b) $f \in C_\infty(M,N)$, $J_N \circ f_* = f_* \circ J_M$

c) $f \in C_\infty(M,N)$, $f_*(T'M) \subset T'N$

d) $f \in C_\infty(M,N)$, $f_*(T''M) \subset T''N$

e) $f \in C_\infty(M,N)$, $f^*(A^{p,q}(N)) \subset A^{p,q}(M)$

<u>Preuve</u>: L'équivalence entre a),b),c),d), résulte des définitions et de la proposition P.1.3

d) $\Rightarrow$ e) Soient ω un élément de $A^{(p,q)}(N)$ et x un point de M. On a $(f^*(\omega))_x = \Lambda(f_{*x})^*(\omega_{f(x)})$ et $\omega_{f(x)} \in (\overset{p,q}{\Lambda}(TN^*))_{f(x)}$.

Mais on a $f_{*x}(T'_xM) \subset T'_{f(x)}N$ et $f_{*x}(T''_xM) \subset T''_{f(x)}N$ donc $(f_{*x})^*(T'_{f(x)}N)^* \subset (T'_xM)^*$ et $(f_{*x})^*(T''_{f(x)}N)^* \subset (T''_xM)$. On en déduit aussitôt que $\Lambda(f_{*x})^*(\omega_{f(x)}) \in (\overset{p,q}{\Lambda}(TM^*))_x$ ainsi $f^*(\omega) \in A^{p,q}(M)$.

e) $\Rightarrow$ d) Soit x un point de M, l'énoncé e) entraine que l'on a $(f_{*x})^*\ (T''_{f(x)}N)^* \subset (T''_xM)^*$ et $(f_{*x})^*\ (T'_{f(x)}N)^* \subset (T'_xM)^*$.

On en déduit que $f_{*x}\ (T''_xM) \subset (T''_{f(x)}N)$, ce qui prouve l'énoncé d).///

PROPOSITION I.1.14. Soit M,N,P trois variétés quasi-holomorphes.

a) Si $(f:M \rightarrow N)$ et $(g:N \rightarrow P)$ sont des applications quasi-holomorphes, alors $(g \circ f:M \rightarrow P)$ est une application quasi-holomorphe.

b) Si $(f:M \rightarrow N)$ est un difféomorphisme quasi-holomorphe alors $(f^{-1}:N \rightarrow M)$ est une application quasi-holomorphe.

<u>Preuve</u>: Cela résulte immédiatement des définitions.///

PROPOSITION I.1.15. Toute variété quasi-holomorphe est orientable.

<u>Preuve</u>: Soit x un point de M. Le plan tangent $(T_{\mathbb{R}}M)_x$ est muni d'une structure de C-vectoriel, munissons le de l'orientation naturelle. Soit U un ouvert de M au-dessus duquel

$T_{\mathbb{R}}M$ est trivialisable et soit $(\varphi : T_{\mathbb{R}}U \to U\times\mathbb{C}^n)$ une trivialisation complexe. L'application $(\varphi_x : (T_{\mathbb{R}}U)_x \to \mathbb{C}^n)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-vectoriels, c'est donc un isomorphisme orienté de $\mathbb{R}$-vectoriels.

Ceci prouve que les orientations naturelles des plans tangents réels de M sont cohérentes, on en déduit que M est orientable. On appelle orientation naturelle de M , l'orientation construite ci-dessus.///

I.2. Sous-variétés, variétés produits, variétés des orbites, variétés conjuguées

DEFINITION I.2.1. Soient M,N deux variétés quasi-holomorphes. N est une sous variété quasi-holomorphe de M si N est une sous variété réelle de M et si le fibré $T_{\mathbb{R}}N$ est un sous fibré vectoriel complexe de $i^*(T_{\mathbb{R}}M)$.

PROPOSITION I.2.2. Soit M une variété quasi-holomorphe. Si N est une sous variété réelle de M telle que $i^*(J_M)(T_{\mathbb{R}}N) \subset T_{\mathbb{R}}N$, alors il existe une et une seule structure de variété quasi-holomorphe sur N pour laquelle N est une sous variété quasi-holomorphe de M.

Preuve: Le fibré vectoriel réel $T_{\mathbb{R}}N$ est un sous fibré vectoriel réel de $i^*(T_{\mathbb{R}}M)$ car $(i:N \to M)$ est une immersion. L'endomorphisme $i^*(J_M)$ de $i^*(T_{\mathbb{R}}M)$ induit un endomorphisme J sur $T_{\mathbb{R}}N$. Il est évident que $J^2=-1_{T_{\mathbb{R}}N}$. Munissons N de la structure quasi-holomorphe associée à J . L'injection canonique de $T_{\mathbb{R}}N$ dans $i^*(T_{\mathbb{R}}M)$ devient $\mathbb{C}$-linéaire, par conséquent $T_{\mathbb{R}}N$ est sous-fibré complexe de $i^*(T_{\mathbb{R}}M)$.

On en déduit que N est une sous variété quasi-holomorphe de M. Si N est muni d'une structure de variété quasi-holomorphe pour laquelle N est une sous variété holomorphe de M alors la définition I.2.1 montre que $J_N=J$ et la structure quasi-holomorphe de N coïncide avec celle définie ci-dessus.///

PROPOSITION I.2.3. Soient M,N deux variétés quasi-holomorphes et P une sous variété quasi-holomorphe de N.

a) Si $(j:M \to N)$ est une immersion quasi-holomorphe relativement ouverte, alors $j(M)$ est une sous variété quasi-holomorphe de N.

b) Si $(j:M \to N)$ est une application quasi-holomorphe telle que $j_{*x}(T_xM)+T_{j(x)}P = T_{j(x)}N$ pour tout $x \in j^{-1}(P)$ alors $j^{-1}(P)$ est une sous variété quasi-holomorphe de M et $T_x(j^{-1}(P)) = j_{*x}^{-1}(T_{j(x)}P)$ pour tout $x \in j^{-1}(P)$. De plus $(\mathrm{codim}_M f^{-1}(P))_x = (\mathrm{codim}_N(P))_{j(x)}$ pour tout $x \in j^{-1}(P)$.

Preuve: La proposition se déduit immédiatement de son analogue dans le cas réel en utilisant la proposition I.2.2.///

COROLLAIRE I.2.4.

a) Si $(j:M \to N)$ est une submersion quasi-holomorphe d'une variété quasi-holomorphe M dans une variété quasi-holomorphe N alors l'image inverse par j d'une sous variété quasi-holomorphe de N est une sous variété quasi-holomorphe de M.

b) Soit M une variété quasi-holomorphe. Si P,Q sont deux sous variétés quasi-holomorphes de M telle que

$T_xP+T_xQ = T_xM$ pour tout $x \in P \cap Q$ alors $P \cap Q$ est une sous variété quasi-holomorphe de M et

$\dim_x M = \dim_x P + \dim_x Q - \dim_x P \cap Q$ en tout point x de $P \cap Q$.

Preuve:

a) se déduit de la proposition I.2.3b car $j_{*x}(T_xM)=T_{j(x)}N$ pour tout $x \in M$.

b) Notons $(i:P \to M)$ l'immersion quasi-holomorphe canonique de P dans M.

L'hypothèse nous assure que $i_{*x}(T_xP)+T_xQ = T_xM$ pour tout $x \in i^{-1}(Q)$. La proposition I.2.3b montre alors que $i^{-1}(Q)$ est une sous variété quasi-holomorphe de P de codimension $(\mathrm{codim}_M Q)_x$.

La proposition I.2.3a montre alors que $i^{-1}(Q)$ est une sous variété quasi-holomorphe de M. De plus, on a $\dim_x P - \dim_x i^{-1}(Q) = \dim_x M - \dim_x Q$ si $x \in i^{-1}(Q)$. On en déduit immédiatement que $P \cap Q$ est une sous variété quasi-holomorphe de M et que $\dim_x M = \dim_x P + \dim_x Q - \dim_x (P \cap Q)$ si $x \in P \cap Q$.///

DEFINITION I.2.5. Soient M,N deux variétés quasi-holomorphes. On fait de $M \times N$ une variété quasi-holomorphe en munissant son fibré tangent de la structure de fibré vectoriel complexe déduite de celle de $p_M^*(T_{\mathbb{R}}M) \oplus p_N^*(T_{\mathbb{R}}N)$. La variété quasi-holomorphe ainsi construite s'appelle la variété produit de M et de N. On la note également $N \times N$.

PROPOSITION I.2.6. Soient M,N,P trois variétés quasi-holomorphes.

a) $(p_M : M\times N \to M)$ et $(p_N : M\times N \to N)$ sont deux submersions quasi-holomorphes.

b) une application $(f : P \to M\times N)$ est quasi-holomorphe si et seulement si les applications $(p_M \circ f : P \to M)$ et $(p_N \circ f : P \to N)$ le sont.

c) Si l'on note q_M (resp. q_N) le morphisme de $T(M\times N)$ dans $p_M^*(TM)$,(respectivement $p_N^*(TN)$) qui factorise le morphisme $((p_M)_* : T(M\times N) \to TM)$,(resp. $((p_N)_* : T(M\times N) \to TN)$) alors l'application $((q_M,q_N) : T(M\times N) \to p_M^*(TM)\oplus p_N^*(TN))$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels complexes.

Preuve:

a),b) sont des conséquences immédiates de la définition I.2.5

c) se déduit de son analogue réel en complexifiant.///

DEFINITION I.2.7. Un groupe G opère quasi holomorphiquement à droite sur une variété quasi-holomorphe M si G opère à droite sur l'ensemble M et si l'application $(\cdot\, g : M \to N)$ est quasi-holomorphe pour tout $g \in G$.

La relation d'équivalence associée à l'opération de G sur M a pour graphe l'ensemble $R=\{(x,y) : x \in M, y \in M, \exists g (g \in G, xg=y)\}$.

La classe d'équivalence d'un élément de M pour R se note $x.G$ et s'appelle l'orbite de x dans M. L'ensemble quotient de M par R se note M/G.

PROPOSITION I.2.8. Si G opère quasi-holomorphiquement sur M et si le graphe de la relation d'équivalence associée à cette opération est une sous variété quasi-holomorphe fermée de $M\times M$ alors il existe une et une seule structure de variété quasi-holomorphe sur l'ensemble M/G pour laquelle la projection canonique est une submersion quasi-holomorphe.

<u>Preuve</u>: L'unicité de la structure est évidente, montrons son existence. On sait déjà que M/G admet une structure de variété différentielle réelle et que $x\cdot G$ est une sous variété réelle de M.
L'application $(\sigma_x : M \to M\times M)$ définie par $\sigma_x(y)=(x,y)$ est quasi-holomorphe et $(\sigma_x)_{*x}(T_xM)+T_{(x,x)}R = T_{(x,x)}(M\times M)$.
En effet, si on identifie canoniquement $T_{(x,x)}(M\times M)$ à $T_xM\times T_xM$ on voit que $(\sigma_x)_{*x}\ (T_xM) = \{o\}\times T_xM$ alors que $T_{(x,x)}R \supset T_{(x,x)}\Delta$.
On en déduit que $T_x(x\ G) = (\sigma_x)^{-1}_{*x}(T_{(x,x)}R)$ ce qui montre que $(J_M)_x(T_x(x\ G)) \subset T_x(x\ G)$. Si $y \in xG$ on a $yG = xG$ et par conséquent $(J_M)_y(T_y(xG)) \subset T_y(xG)$. Cette dernière inclusion montre que xG est une sous variété quasi-holomorphe de M.
On sait que le plan tangent à xG en x est le noyau de l'application $(p_{*x}: T_xM \to T_{p(x)}(M/G))$ donc il existe un $\mathbb{R}$-isomorphisme canonique h_x de $(T_xM/T_x(xG))$ dans $T_{p(x)}(M/G)$.
Si x,y sont des points de M tels que $p(x)=p(y)$ alors il existe $g \in G$ tel que $xg=y$.
On a $p_{*x}=p_{*y}\circ(\cdot g)_{*x}$, par conséquent $h_y^{-1}\circ h_x$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire de $T_xM/T_x(xG)$ dans $T_yM/T_y(yG)$.
On en déduit que l'image directe de la structure de $\mathbb{C}$-vectoriel de $T_xM/T_x(xG)$ ne dépend que de $p(x)$, munissons $T_{p(x)}(M/G)$ de cette structure. La multiplication par i dans

$T_y(M/G)$ défini un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire J_y de carré -1. Pour conclure, il suffit de montrer que l'application $(J:T(M/G) \to T(M/G))$ définie par ces endomorphismes est de classe C_∞. Soit y un point de M/G et x un point de M tel que $p(x)=y$. Comme p est une submersion en x, il existe une carte locale réelle (U,φ) en x et une carte locale réelle (V,ψ) en y telles que $p(u) \subset V$, $\varphi(x)=o$, $\psi(y)=o$, $\psi \circ p \circ \varphi^{-1}(x_1,\dots,x_{2n}) = (x_1,\dots,x_{2m})$ lorsque $(x_1,\dots,x_{2n}) \in \varphi(U)$. Si on calcule la forme locale de J relativement à (V,ψ) on voit que $J_i^j(x_1,\dots,x_{2m}) = (J_M)_i^j(x_1,\dots,x_{2m},o,\dots,o)$ si i,j sont compris entre 1 et $2n$, ce qui montre que $(J:T(M/G) \to T(M/G)$ est un endomorphisme de classe C_∞.///

DEFINITION I.2.9. La variété conjuguée d'une variété quasi-holomorphe M est la variété quasi-holomorphe associée à la variété différentielle réelle M et à l'endomorphisme $(-J_M:T_{\mathbb{R}}M \to T_{\mathbb{R}}M)$. On la note $\overline{M}$.

DEFINITION I.2.10. Soient M,N deux variétés quasi-holomorphes. On note $\mathcal{O}(M,N)$ l'ensemble des applications quasi-holomorphes de M dans N. On note $\mathcal{O}(M)$ l'ensemble $\mathcal{O}(M,\mathbb{C})$ muni de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-algèbre.
Le préfaisceau $\mathcal{O}_M$ est défini en associant à tout ouvert V de M la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{O}(U)$ et en prenant pour opérateurs de restriction, les applications de restriction habituelles.
Il est clair que $\mathcal{O}_M$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres de base M.

I.3. Variétés quasi-holomorphes intégrables

PROPOSITION I.3.1. Soit M une variété quasi-holomorphe. L'application N de $\mathcal{T}^1_0(M)\times\mathcal{T}^1_0(M)$ dans $\mathcal{T}^1_0(M)$ définie par $N(X,Y) = [JX,JY]-[X,Y]- J[X,JY] - J[JX,Y]$ est alternée et bilinéaire pour la structure de $C_\infty(M)$ module de $\mathcal{T}^1_0(M)$.

Preuve: Si $X\in\mathcal{T}^1_0(M)$, $Y\in\mathcal{T}^1_0(M)$, $f\in C_\infty(M)$ alors

$$N(fX,Y) = [f\ JX,JY]-[fX,Y]- J[fX,JY] - J[f\ JX,Y]$$

$$\begin{aligned} N(fX,Y) &= f\ [JX,JY]- L_{JY}f\ JX - f[X,Y]+ L_Y f.X - fJ[X,JY]+ \\ &\quad L_{JY}fJX - fJ[JX,Y] - L_Y f\ X \\ &= f\ N(X,Y) \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $N(X,Y)=-N(Y,X)$.///

DEFINITION I.3.2. La torsion d'une variété quasi-holomorphe est le champ tensoriel de type $\binom{1}{2}$ défini par l'application N étudiée dans la proposition précédente, on la note encore N par abus de langage.

PROPOSITION I.3.3. Soient M une variété quasi-holomorphe de dimension n, z un point de M et x un système de coordonnées locales en z. Les composantes locales de N relativement à x sont données par la formule

$$N^i_{jk} = \sum_{h=1}^{2n} (J^h_j\ D_{x_h}\ J^i_k - J^h_k\ D_{x_h}\ J^i_j - J^i_h\ D_{x_j}\ J^h_k + J^i_h\ D_{x_k}\ J^h_j)$$

Preuve: Il suffit de calculer la kème composante de $N(D_{x_i},D_{x_j})$. En remarquant que

$([X,Y])^k = \sum_{i=1}^{n}(X^i\ D_{x_i}\ Y^k - Y^i\ D_{x_i}\ X^k)$ on obtient successivement

$$N^i_{jk} = [JD_{x_j}, JD_{x_k}]^i - (J[D_{x_j}, JD_{x_k}])^i - (J[JD_{x_j}, D_{x_k}])^i$$

$$N^i_{jk} = \sum_{k=1}^{2n} J^h_j \, D_{x_h} \, J^i_k - J^h_k \, D_{x_h} \, J^i_j - J^i_h \, D_{x_j} \, J^h_k + J^i_h \, D_{x_k} \, J^h_j \ .///$$

DEFINITION I.3.4.. Une variété quasi-holomorphe est intégrable lorsque sa torsion est nulle.

PROPOSITION I.3.5.. Si M est une variété quasi-holomorphe alors les conditions suivantes sont équivalentes.

a) M est intégrable,

b) Si X, Y sont des champs de vecteurs de type $(1,0)$ alors $[X,Y]$ est un champ de vecteurs de type $(1,0)$,

c) Si X, Y sont des champs de vecteurs de type $(0,1)$ alors $[X,Y]$ est un champ de vecteurs de type $(0,1)$,

d) $dA^{1,0} \subset A^{2,0} + A^{1,1}$,

e) $dA^{p,q} \subset A^{p,q+1} + A^{p+1,q}$; $p,q \in Z \times Z$

<u>Preuve</u>:

a) $\Leftrightarrow$ b) si X, Y sont des champs de vecteurs de type $(1,0)$ alors on a $N(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]$

$$N(X,Y) = -2[X,Y] - 2i\, J[X,Y]$$

$$N(X,Y) = 2i(i[X,Y] - J[X,Y])$$

L'équivalence de a) et de b) s'en déduit immédiatement.

b) $\Leftrightarrow$ c) L'énoncé c) se déduit de b) par conjugaison et réciproquement.

c) $\Leftrightarrow$ d) Une 2-forme ω appartient à $A^{(2,0)} + A^{(1,1)}$ si et seulement si on a $\langle \omega, X \wedge Y \rangle = 0$ pour tous les champs de vecteurs X, Y de type $(0,1)$.

Si ω est une 1-forme de type (1,0) et si X,Y sont des champs de vecteurs de type (0,1) on a

$$\langle d\omega, X\wedge Y\rangle = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) - \omega([X,Y])$$

$$\langle d\omega, X\wedge Y\rangle = -\omega([X,Y]).$$

L'équivalence de c) et de d) résulte immédiatement des deux remarques précédentes.

d) $\Rightarrow$ e) Comme d est un opérateur local on peut supposer que T'M est trivialisable. Dans ce cas il existe un repère global $\{e_1,\dots,e_n\}$ de T'M. Soit I une partie de cardinal p de $\{1,\dots,n\}$. Une récurrence immédiate sur p montre que $d(e^I)\in A^{(p+1,0)} + A^{(p,1)}$. Une forme quelconque ω de type (p,q) admet une décomposition de la forme $\sum_{(I,J)} \omega_{I,J}\, e^I\wedge\bar{e}^J$ où $\omega_{I,J}\in C_\infty(M)$.

On en déduit que $d\omega = \sum_{(I,J)} d\,\omega_{I,J}\wedge e^I\wedge\bar{e}^J +$

$$\sum_{(I,J)}\omega_{I,J}(de^I)\wedge\bar{e}^J + \sum_{(I,J)}(-1)^p\omega_{I,J}\, e^I\wedge(d\bar{e}^J).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que chacun des termes de la somme figurant dans le second membre de l'égalité ci-dessus appartient à $A^{p+1,q} + A^{p,q+1}$.

e) $\Rightarrow$ d) C'est évident.///

DEFINITION 1.3.6.. Soit M une variété quasi-holomorphe intégrable. On définit l'application $(\partial : A(M) \to A(M))$ par la formule $\partial = \sum_{(p,q)\in Z\times Z} P_{p+1,q}\circ d\circ P_{p,q}$.

On vérifie immédiatement que ∂ est un opérateur différentiel linéaire du fibré ΛTM dans le fibré ΛTM.

PROPOSITION I.3.7.. Si M est une variété quasi-holomorphe intégrable on a

a) $\bar{\partial} = \sum_{(p,q)\in Z\times Z} P_{p,q+1} \circ d \circ P_{p,q}$

b) $\partial + \bar{\partial} = d$

c) $\partial^2=0,\ \bar{\partial}^2=0, \partial\bar{\partial}=-\bar{\partial}\partial$

d) $\bar{\partial}(\omega\wedge\omega') = \bar{\partial}\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\bar{\partial}\omega'$ si $\omega\in A^{p,q}(M), \omega'\in A^{p',q'}(M)$.

Preuve:

a) On a $\partial = \sum_{(p,q)\in Z\times Z} P_{p+1,q} \circ d \circ P_{p,q}$ par conséquent

$$\bar{\partial} = \sum_{(p,q)\in Z\times Z} P_{q,p+1} \circ d \circ P_{q,p}$$

b) On a $\partial + \bar{\partial} = \sum_{(p,q)\in Z\times Z} (P_{p,q+1}+P_{p+1,q}) \circ d \circ P_{p,q}$ or la proposition I.3.5 montre que

$(P_{p,q+1} + P_{p+1,q})\circ d \circ P_{p,q} = d \circ P_{p,q}$ donc

$\partial + \bar{\partial} = d \circ \sum_{(p,q)\in Z\times Z} P_{p,q}$. On en déduit que $\partial+\bar{\partial}=d$.

c) On a $d^2 = \partial^2+\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial+ \bar{\partial}^2$. Or $d^2=0$ donc $\partial^2+(\partial\bar{\partial}+\bar{\partial}\partial)+ \bar{\partial}^2= 0$.
Si ω est une forme de type (p,q), alors $\partial^2\omega$ est du type $(p+2,q)$, $(\partial\bar{\partial}+\bar{\partial}\partial)(\omega)$ est de type $(p+1,q+1)$ et $\bar{\partial}^2\omega$ est de type $(p,q+2)$, par conséquent on a
$\partial^2\omega = 0$, $\bar{\partial}^2\omega=0$, $(\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)(\omega) = 0$.

d) Si $\omega\in A^{p,q}(M)$ et si $\omega'\in A^{p',q'}(M)$, alors $\omega\wedge\omega'\in A^{p+p',q+q'}(M)$.
Par conséquent on a $\bar{\partial}(\omega\wedge\omega')=P_{p+p',q+q'+1}(d(\omega\wedge\omega'))$.

Mais on a $d(\omega\wedge\omega') = d\omega\wedge\omega'+(-1)^{p+q}\omega\wedge d\omega'$,
donc $\bar{\partial}(\omega\wedge\omega') = \bar{\partial}\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\bar{\partial}\omega'$. ///

DEFINITION I.3.8. Soit M une variété quasi-holomorphe intégrable. Le $\mathbb{C}$-vectoriel de cohomologie de Dolbeault d'indice (p,q) de M se note $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ et est défini par $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = \ker \bar\partial_{|A^{p,q}(M)} / \operatorname{im}\bar\partial_{|A^{p,q-1}(M)}$. On pose $\Omega^p(M) = \{\omega : \omega \in A^{p,o}(M), \bar\partial\omega = 0\}$ et $\Omega(M) = \bigoplus_{p\in \mathbb{N}} \Omega^p(M)$.
Il est clair que $\Omega(M)$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-vectoriel gradué et que l'application $(\partial : \Omega(M) \to \Omega(M))$ est un homomorphisme gradué de degré 1 et de carré nul. On note $H(M,hol)$ le $\mathbb{C}$-vectoriel gradué $[\ker (\partial : \Omega(M) \to \Omega(M)] / [\operatorname{im}(\partial : \Omega(M) \to \Omega(M)]$.
Un ∂-cycle est un élément de $\ker(\partial : \Omega(M) \to \Omega(M))$.
Un ∂-bord est un élément de $\operatorname{im}(\partial : \Omega(M) \to \Omega(M))$
Deux éléments de $\Omega(M)$ sont ∂-homologues s'ils ont même image dans $H(M,hol)$.

PROPOSITION I.3.9. Une sous variété holomorphe P d'une variété quasi-holomorphe intégrable M est intégrable.

Preuve: Soient x_o un point de P et (U,x) une carte locale de M en x_o telle que $x(U) = \mathbb{R}^n$, $x(U\cap P) = \mathbb{R}^m \times \{o\}$, $x(x_o)=0$.
Si $(J^k_j)_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,n}}$ sont les composantes locales de J_M relativement à (U,x), alors $(J^k_{j|U\cap P})_{\substack{j=1,\dots,m\\ k=1,\dots,m}}$ sont les composantes locales de J_P relativement à $(U\cap P, x_{|U\cap P})$. De plus, $J^k_{j|U\cap P}=0$ si $j=1,\dots,m$, si $k=m+1,\dots,n$. La proposition I.3.3 montre que la torsion de P est nulle en x_o. ///

PROPOSITION I.3.10. Le produit de deux variétés quasi-holomorphes intégrables est une variété quasi-holomorphe intégrable.

Preuve: Cela découle immédiatement de la proposition I.3.3.///

PROPOSITION I.3.11. Si le groupe G opère quasi-holomorphiquement sur la variété quasi-holomorphe intégrable M et si la variété des orbites existe alors M/G est une variété quasi-holomorphe intégrable.

Preuve: Soit x un point de M. Il existe une carte locale réelle (U,φ) de M en x et une carte locale réelle (V,ψ) de M/G en p(x) telles que

$\varphi(x) = 0$, $\psi(p(x)) = 0$, $\psi o f o \varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_{2n}) = (x_1,\ldots,x_{2m})$ si $(x_1,\ldots,x_{2n}) \in \varphi(U)$. La forme locale de $J_{M/G}$ relativement à (V,ψ) est telle que

$(J_{M/G})_i^j(x_1,\ldots,x_{2m}) = (J_M)_i^j(x_1,\ldots,x_{2m},y_1,\ldots,y_{2n-2m})$ si i,j sont compris entre 1 et 2m et si

$(x_1,\ldots,x_{2m},y_1,\ldots,y_{2n-2m}) \in \varphi(U)$. Pour montrer que la torsion de M/G est nulle il suffit alors d'utiliser la proposition I.3.3. ///

PROPOSITION I.3.12. Toute variété quasi-holomorphe de dimension 1 est intégrable.

Preuve: Soit e un repère complexe de $T_R M$ au-dessus de U.

$$\begin{aligned} \text{On a } N(e,Je) &= [Je,JJe] - [e,Je] - J[Je,Je] - J[e,JJe] \\ &= -[Je,e] + [Je,e] \\ &= 0 \end{aligned}$$

or $N(e,e) = 0$ et $N(Je,Je) = 0$ donc $N = 0$.///

I.4. Variétés holomorphes

DEFINITION I.4.1. Le fibré tangent à la variété différentielle $\mathbb{R}^2$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}_{[\mathbb{R}]}$, par conséquent il existe une structure quasi-holomorphe naturelle sur $\mathbb{R}^2$. On note $\mathbb{C}$ la variété quasi-holomorphe obtenue en munissant $\mathbb{R}^2$ de sa structure quasi-holomorphe naturelle. On identifiera le fibré tangent de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ au moyen de l'isomorphisme canonique. Il résulte de cette définition que la variété quasi-holomorphe $\mathbb{C}$ est intégrable.

PROPOSITION I.4.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Le fibré tangent à U est canoniquement trivialisable en tant que fibré vectoriel complexe.

Preuve: Il suffit de remarquer que l'application $(\varphi : TU \to U \times \mathbb{C}^n)$ définie par $\varphi(x,\xi) = (x,(p_{1*x}(\xi),..,p_{n*x}(\xi)))$ est une trivialisation complexe de $T\mathbb{C}^n$.///

PROPOSITION I.4.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Une application $(f : U \to V)$ est quasi-holomorphe si et seulement si elle est holomorphe.

Preuve: Si l'application $(f : U \to V)$ est quasi-holomorphe alors l'application $(f_{*x} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $x \in U$. On en déduit que f est $\mathbb{C}$-dérivable et par conséquent que f est holomorphe. Réciproquement si $(f : U \to V)$ est holomorphe alors $(f : U \to V)$ est de classe C_∞ et $(f_{*x} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $x \in U$ ce qui montre que $(f : U \to V)$ est quasi-holomorphe.///

DEFINITION I.4.4. Une variété holomorphe est une variété quasi-holomorphe M dont tous les points admettent un voisinage quasi-holomorphiquement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Un couple (U,z) est une carte locale holomorphe en un point z_o de M si U est un ouvert contenant z_o , si $z(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et si $(z:U \to z(U))$ est un difféomorphisme quasi-holomorphe. Lorsque (U,z) est une carte locale de M en z_o, on note

z_j l'application $p_j \circ z$ de U dans $\mathbb{C}$,

x_j l'application $\mathfrak{R} p_j \circ z$ de U dans $\mathbb{R}$,

y_j l'application $\mathfrak{I} p_j \circ z$ de U dans $\mathbb{R}$.

On vérifie immédiatement que $dz_j = P_M^*(dx_j)$ et que $d\bar{z}_j = \bar{P}_M^*(dx_j)$. Ainsi $(dz_1,\dots,dz_n)$ est un repère de $T'M$ au-dessus de U et

$(d\bar{z}_1,\dots,d\bar{z}_m)$ est un repère de $T''M$ au-dessus de U.

Une surface de Riemann est une variété holomorphe de dimension 1. Quand on travaille avec des variétés holomorphes, on supprime le préfixe "quasi" dans la terminologie adoptée précédemment.

DEFINITION I.4.5 Un atlas holomorphe sur un espace topologique séparé M est une famille $(\varphi_j : U_j \to M_j)_{j \in I}$ d'homéomorphismes telle que:

a) $(U_j)_{j \in I}$ est recouvrement ouvert de M,

b) M_j est une variété holomorphe pour tout $j \in I$

c) L'application $(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_k \cap U_j) \to \varphi_k(U_k \cap U_j))$ est holomorphe pour tout $j,k \in I$.

PROPOSITION I.4.6. Si $(\varphi_j : U_j \to M_j)_{j \in I}$ est un atlas holomorphe sur l'espace topologiquement séparé M, alors il existe une et une seule structure de variété holomorphe sur M pour laquelle les applications $(\varphi_j : U_j \to M_j)$ sont des difféomorphismes holomorphes.

Preuve: L'unicité d'une structure répondant aux conditions de l'énoncé est triviale, montrons son existence.

On sait qu'il existe une et une seule structure de variété différentielle sur M pour laquelle les applications $(\varphi_j : U_j \to M_j)$ sont des difféomorphismes.

Pour tout $j \in I$ notons J_j l'endomorphisme de TU_j, image réciproque par φ_{j*} de l'endomorphisme J_{M_j} de TM_j.

On sait que $J_j|_{U_j \cap U_k} = J_k|_{U_j \cap U_k}$ car l'atlas $(\varphi_j : U_j \to M_j)_{j \in I}$ vérifie la condition c) de la définition I.4.5.

On en déduit qu'il existe un endomorphisme $(J : TM \to TM)$ tel que $J|_{U_j} = J_j$ pour tout $j \in I$.

Munissons M de la structure quasi-holomorphe associée à J.

Les applications $(\varphi_j : U_j \to M_j)$ sont des difféomorphismes quasi-holomorphes et par conséquent les ouverts U_j sont des variétés holomorphes. On en déduit que M répond aux conditions demandées. ///

PROPOSITION I.4.7. Si M et N sont deux variétés holomorphes et si $(f : M \to N)$ est une application holomorphe de rang constant r au voisinage du point z_0 de M, alors

il existe une carte locale holomorphe (U,φ) de M en z_0 et une carte locale holomorphe (V,ψ) de N en $f(z_0)$ telles que $\varphi(z_0)=0$, $\psi(f(z_0))=0$, $f(U)\subset V$ et que
$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(z_1,\ldots,z_m) = (z_1,\ldots,z_r,0,\ldots,0)$ si $(z_1,\ldots,z_m)\in\varphi(U)$.

Preuve: Le raisonnement est essentiellement identique à celui utilisé pour prouver le théorème du rang constant réel, aussi nous ne le répéterons pas.///

PROPOSITION I.4.8. Une sous variété quasi-holomorphe N d'une variété holomorphe M est holomorphe.

Preuve: Il suffit de prouver qu'un point quelconque z_0 de N admet un voisinage quasi-holomorphiquement difféomorphe à un ouvert de C^n.
Soit (U,z) une carte locale holomorphe de M en z_0.
L'application $(z_{|U\cap N}:U\cap N \to \mathbb{C}^m)$ est une immersion quasi-holomorphe. Par conséquent $(z_{|U\cap N})_{*z_0}((T_{\mathbb{R}}(U\cap N))_{z_0})$ est un sous $\mathbb{C}$-vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ de dimension $\dim_{z_0} N$. Soit $(p:\mathbb{C}^n \to V)$ une projection $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$ sur V.
L'application $(p\circ z_{|U\cap N}:U\cap N \to V)$ est holomorphe et étale en z_0. On en déduit immédiatement qu'il existe une carte locale holomorphe de N en z_0, ce qui suffit.///

PROPOSITION I.4.9. Le produit de deux variétés holomorphes est une variété holomorphe.

Preuve: Soient M et N deux variétés holomorphes. Si (U,φ) est une carte locale holomorphe en un point z de M et si (V,ψ) est une carte locale holomorphe en un point z' de N alors il est évident que $(U\times V,\varphi\times\psi)$ est une carte locale holomorphe de $M\times N$ en (z,z'). On en déduit directement que la variété $M\times N$ est holomorphe. ///

PROPOSITION I.4.10. Soient M et N deux variétés holomorphes. Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{O}(M,N)$, alors $\{x : x \in M, f(x)=g(x)\}^{\circ}$ est fermé.

<u>Preuve</u>: Posons $A = \{x : x \in M,\ f(x)=g(x)\}$. Soit z un point de A. Il existe un voisinage coordonné (V,ψ) de z dans M et un voisinage coordonné (U,φ) de $f(z)$ dans N, tels que $f(V) \subset U$, $g(V) \subset U$. On sait que $A \cap V = \{x : x \in V, f_{|V}(x)=g_{|V}(x)\}$. Ainsi $A \cap V = \psi^{-1}\{x : x \in \psi(V), \varphi o f_{|V} \circ \psi^{-1}(x) = \varphi o\, g_{|V} \circ \psi^{-1}(x)\}$. On en déduit que $(A \cap V)^{\circ}$ est fermé dans V. Cela montre que $\overset{\circ}{A} \cap V$ est fermé dans V car $\overset{\circ}{A} \cap V = (A \cap V)^{\circ}$. Il en résulte que $\overset{\circ}{A}$ est fermé dans A. Pour conclure il suffit de remarquer que A est fermé dans M.

PROPOSITION I.4.11. Soient M une variété holomorphe connexe et f une fonction holomorphe sur M. Si la fonction $|f|$ admet un maximum local alors f est une fonction constante.

<u>Preuve</u>: Cela résulte du théorème du maximum du module classique et de la proposition précédente.

PROPOSITION I.4.12. Si M est une variété holomorphe connexe, alors l'anneau $\mathcal{O}(M)$ est intègre.

<u>Preuve</u>: C'est une conséquence directe de la proposition I.4.10.

DEFINITION I.4.13. Un groupe de Lie complexe est un groupe algébrique muni d'une structure de variété holomorphe pour laquelle l'application $(m : G \times G \longrightarrow G)$ définie par $m(x,y) = x.y^{-1}$ est holomorphe.

I.5. Fibrés vectoriels quasi-holomorphes

DEFINITION I.5.1. Un fibré vectoriel quasi-holomorphe est un fibré vectoriel complexe dont l'espace total E et la base M sont munis chacun d'une structure de variété quasi-holomorphe de sorte que pour tout point x de M, il existe un ouvert U de M contenant x et une trivialisation φ de E au-dessus de U pour laquelle l'application $(\varphi : E_{|U} \to U \times \mathbb{C}^m)$ est quasi-holomorphe.

Il résulte de la définition précédente que la projection $(p_E : E \to M)$ est quasi-holomorphe.

Pour tout ouvert U de M, on munit $E_{|U}$ de la structure de fibré vectoriel quasi-holomorphe déduite des structures quasi-holomorphes canoniques de $\overline{p}^1(U)$ et de U.

Une section quasi-holomorphe de E au-dessus de M est une section σ de E au-dessus de M pour laquelle l'application $(\sigma : M \to E)$ est quasi-holomorphe. Un repère quasi-holomorphe de E au-dessus de U est un repère de E au-dessus de U composé de sections quasi-holomorphes. On note $\Omega(M,E)$ l'ensemble des sections quasi-holomorphes de E au-dessus de M. $\Omega(M,E)$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathcal{O}(M)$-module. Le préfaisceau Ω_E est défini en associant à tout ouvert U de M le $\mathcal{O}(U)$-module $\Omega(U, E_{|U})$ et en prenant pour opérateurs de restrictions les applications habituelles. On vérifie immédiatement que Ω_E est un $\mathcal{O}_M$-module.

Un morphisme du fibré vectoriel quasi-holomorphe E de base M dans le fibré vectoriel quasi-holomorphe F de base N est un morphisme (f,g) du fibré vectoriel complexe E

dans le fibré vectoriel complexe F pour lequel les applications $(f:M \to N)$ et $(g:E \to F)$ sont quasi-holomorphes.

Un fibré vectoriel quasi-holomorphe est trivial s'il est du type $M\times\mathbb{C}^m$ où M est une variété quasi-holomorphe.

Un fibré vectoriel quasi-holomorphe est intégrable si sa base est une variété quasi-holomorphe intégrable. On constate alors que l'espace total est une variété quasi-holomorphe intégrable.

DEFINITION I.5.2. Soit E un fibré vectoriel complexe dont la base est quasi-holomorphe. On note $A^{p,q}(M,E)$ le $C_\infty(M)$-module $\Gamma(M,E\otimes_{\mathbb{C}} \overset{p,q}{\Lambda} T^*M)$. On note $A(M,E)$ le $C_\infty(M)$-module $\Gamma(M,E\otimes_{\mathbb{C}} \Lambda T^*M)$. $A(M,E)$ est canoniquement muni d'une structure de $A(M)$-module à droite.
Il est clair que $A(M,E)\cong \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A^{p,q}(M,E)$.

DEFINITION I.5.3. Soit E un fibré vectoriel complexe dont la base est une variété quasi-holomorphe. Une $\bar\partial$-connexion sur E est un o.d.l. D de E dans $E\otimes(T''M)^*$ tel que $D(\sigma.f) = D(\sigma)f + \sigma\otimes \bar\partial f$ pour tout $\sigma\in\Gamma(M,E), f\in C_\infty(M)$.

PROPOSITION I.5.4.

a) La restriction d'une $\bar\partial$-connexion sur E à un ouvert U de M est une $\bar\partial$-connexion sur $E_{|U}$.

b) Une $\bar\partial$-connexion sur E est un o.d.l. d'ordre ≤ 1.

Preuve:

a) Soit U un ouvert de M, σ un élément de $\Gamma(U,E_{|U})$ et f un élément de $C_\infty(U)$. Fixons un point x dans U et choisissons une fonction $\alpha \in D(U)$ valant 1 au voisinage de x. On sait que $D_{|U}(\sigma f)(x) = D(\alpha\sigma\alpha f)(x)$. Mais puisque D est une $\bar{\partial}$-connexion, on a

$$D_{|U}(\sigma f)(x) = D(\alpha\sigma)(x)\ f(x) + \sigma(x) \otimes \bar{\partial}_{|U} f(x)$$

On en déduit que

$$D_{|U}(\sigma f)(x) = D_{|U}(\sigma)(x)\ f(x) + \sigma(x) \otimes \bar{\partial}_{|U} f(x).$$

Comme x est un point arbitraire de U on a, en fait, prouvé que $D_{|U}(\sigma f) = D_{|U}(\sigma)\ f + \sigma \otimes \bar{\partial}_{|U} f$. Il en résulte immédiatement que $D_{|U}$ est une $\bar{\partial}$-connexion sur $E_{|U}$.

b) Vu a), on peut supposer que E est trivialisable. Soient $(e_1, \dots e_n)$ un repère de E au-dessus de M et σ une section de E. Il existe des fonctions $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ de claase C_∞ telles que $\sigma = \sum_{i=1}^{n} e_i \sigma^i$. On en déduit que

$$D\sigma = \sum_{i=1}^{n} De_i\, \sigma^i + \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \bar{\partial}\sigma^i$$

et la thèse est alors évidente.///

PROPOSITION I.5.5. Soient E un fibré vectoriel dont la base est une variété quasi-holomorphe intégrable, et D une $\bar{\partial}$-connexion sur E. Il existe une et une seule application additive D' de A(M,E) dans A(M,E) prolongeant D et telle que $D'(\omega\wedge\omega') = D'\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\bar{\partial}\omega'$ pour tout $\omega \in A^{p,q}(M,E)$, $\omega' \in A^{p',q'}(M)$.

<u>Preuve</u>:

a) Supposons d'abord que les fibrés vectoriels E et TM sont trivialisables. Notons $\mathcal{B}$ l'application de $\Gamma(M,E) \times A(M)$ dans $A(M,E)$ définie par

$$\mathcal{B}(\sigma,\omega) = D\sigma\wedge\omega + \sigma\wedge\bar{\partial}\omega.$$

$\mathcal{B}$ est biadditive et $\mathcal{B}(\sigma f,\omega) = \mathcal{B}(\sigma, f\omega)$ pour tout $\sigma\in\Gamma(M,E), \omega\in A(M)$, $f\in C_\infty(M)$. Par conséquent, il existe une application additive D_0 de $\Gamma(M,E)\otimes_{C_\infty(M)}A(M)$ dans $A(M,E)$ telle que $D_0'\circ\otimes = \mathcal{B}$. Notons D' l'application de $A(M,E)$ dans $A(M,E)$ déduite de D_0 au moyen de l'isomorphisme canonique entre $A(M,E)$ et $\Gamma(M,E)\otimes_{C_\infty(M)}A(M)$.
Il est clair que $D'(\sigma\wedge\omega) = D\sigma\wedge\omega + \sigma\wedge\bar\partial\omega$ pour tout $\sigma\in A^{0,0}(M,E)$ et pour tout $\omega\in A(M)$. Soit ω' un élément de $A^{p,q}(M,E)$ et ω un élément de $A^{p',q'}(M)$.
On sait qu'il existe des sections $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ de E au-dessus de M et des éléments $\omega_1',\dots,\omega_n'$ de $A^{p,q}(M)$ tels que $\omega' = \sum_{i=1}^n \sigma_i\wedge\omega_i'$. On en déduit que

$$D'(\omega'\wedge\omega) = \sum_{i=1}^n (D'\sigma_i)\wedge\omega_i'\wedge\omega + \sum_{i=1}^n \sigma_i\wedge\bar\partial(\omega_i'\wedge\omega)$$

$$D'(\omega'\wedge\omega) = \sum_{i=1}^n (D'(\sigma_i\wedge\omega'_i))\wedge\omega + (-1)^{p+q}\sum_{i=1}^n \sigma_i\wedge\omega'_i\wedge\bar\partial\omega.$$

$$D'(\omega'\wedge\omega) = D'\omega'\wedge\omega + (-1)^{p+q}\omega'\wedge\bar\partial\omega.$$

Ainsi D' répond aux conditions demandées. Toute autre application vérifiant les conditions de l'énoncé coïncide avec D sur enveloppe additive de $\{\sigma\wedge\omega : \sigma\in\Gamma(M,E), \omega\in A(M)\}$ c'est à dire sur $A(M,E)$.

b) Une application qui vérifie les conditions de l'énoncé relativement à D et E est évidemment locale et sa restriction à un ouvert U de M vérifie les conditions de l'énoncé relativement à $D_{|U}$, $E_{|U}$. Ainsi la proposition générale se déduit immédiatement de (a).///

PROPOSITION I.5.6. Si E est un fibré vectoriel quasi-holomorphe, alors il existe une et une seule $\bar{\partial}$-connexion D telle que $D_{|U}(\sigma) = 0$ lorsque $\sigma \in \Omega(U, E_{|U})$.

Preuve:

a) Supposons d'abord que E est quasi-holomorphiquement trivialisable. Soit φ une trivialisation quasi-holomorphe de E au-dessus de M et $(e_1, \dots, e_n)$ le repère de E qui lui est associé. Pour toute section σ de E au-dessus de M, on note $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ les composantes de σ relativement au repère $(e_1, \dots, e_n)$.

Posons $D\sigma = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \bar{\partial}\sigma^i$. Il est clair que D est une $\bar{\partial}$-connexion répondant à la condition de l'énoncé.

De plus, si D' est une telle $\bar{\partial}$-connexion, on sait que $D'\sigma = \sum_{i=1}^{n} D'(e_i \sigma^i)$ pour tout $\sigma \in \Omega(M, E)$. On en déduit que $D'\sigma = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \bar{\partial}\sigma^i = D\sigma$ pour tout $\sigma \in \Omega(M, E)$, ce qui achève de prouver la proposition dans le cas envisagé.

b) On prouve la proposition, dans le cas général, en utilisant a) et en remarquant que la restriction à un ouvert U de M d'une $\bar{\partial}$-connexion vérifiant la condition de l'énoncé relativement à E est une $\bar{\partial}$-connexion vérifiant la condition de l'énoncé relativement à $E_{|U}$.///

DEFINITION I.5.7. La $\bar{\partial}$-connexion D dont il est question dans la proposition précédente se note $\bar{\partial}_E$, on omet l'indice E lorsque cela n'engendre pas de confusion.

DEFINITION I.5.8. Soit E un fibré vectoriel complexe sur la variété quasi-holomorphe M. Notons m l'unique morphisme de $(E\otimes_{\mathbb{C}} \Lambda TM) \otimes_{\mathbb{C}} (E^*\otimes_{\mathbb{C}} \Lambda TM)$ dans ΛTM tel que $m((x\otimes\omega) \otimes (x^*\otimes\omega')) = \langle x,x^*\rangle\omega\wedge\omega'$ pour tout $x\in \Gamma(M,E)$, $x^*\in\Gamma(M,E^*)$, $\omega\in A(M)$, $\omega'\in A(M)$. On note $\wedge$ l'application $m\circ\otimes$ de $A(M,E) \times A(M,E^*)$ dans $A(M)$.

PROPOSITION I.5.9. Soit E un fibré vectoriel quasi-holomorphe intégrable de base M. Si $\omega\in A^{p,q}(M,E)$ et si $\omega'\in A^{p',q'}(M,E^*)$ alors $\omega\wedge\omega'\in A^{p+p',q+q'}(M)$ et

$$\bar\partial(\omega\wedge\omega') = \bar\partial_E\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\bar\partial_{E^*}\omega'.$$

<u>Preuve</u>: Il suffit de prouver la formule dans le cas où $\omega=\sigma\wedge\alpha$, $\omega'=\sigma'\wedge\beta$, $\sigma\in\Gamma(M,E)$, $\sigma'\in\Gamma(M,E^*)$, $\alpha\in A^{p,q}(M)$, $\beta\in A^{p',q'}(M)$. Dans ce cas, on a $\omega\wedge\omega' = \langle\sigma,\sigma'\rangle\wedge\alpha\wedge\beta$ donc $\omega\wedge\omega'\in A^{p+p',q+q'}(M)$. De plus,

$\bar\partial(\omega\wedge\omega') = (\bar\partial\langle\sigma,\sigma'\rangle)\wedge\alpha\wedge\beta + \langle\sigma,\sigma'\rangle\wedge\bar\partial(\alpha\wedge\beta)$. On en déduit

$$\bar\partial(\omega\wedge\omega') = \bar\partial_E\sigma\wedge\sigma'\wedge\alpha\wedge\beta + \sigma\wedge\bar\partial_{E^*}\sigma'\wedge\alpha\wedge\beta + (\sigma\wedge\bar\partial\alpha)\wedge(\sigma'\wedge\beta).$$
$$+ (-1)^{p+q}(\sigma\wedge\alpha)\wedge(\sigma'\wedge\bar\partial\beta)$$ ainsi

$$\bar\partial(\omega\wedge\omega') = ((\bar\partial_E\sigma\wedge\alpha)+(\sigma\wedge\bar\partial\alpha))\wedge(\sigma'\wedge\beta)$$
$$+(-1)^{p+q}(\sigma\wedge\alpha)\wedge((\bar\partial_{E^*}\sigma'\wedge\beta)+(\sigma'\wedge\bar\partial\beta))$$

Il en résulte que

$$\bar\partial(\omega\wedge\omega') = \bar\partial_E\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\bar\partial_{E^*}\omega'.///$$

DEFINITION I.5.10. Si E est un fibré vectoriel quasi-holomorphe, intégrable de base M, alors on pose $H^{p,q}(M,E) = \ker\bar\partial_E^{p,q}/\operatorname{im}\bar\partial_E^{p,q-1}$.

I.6 Exemples

LE GROUPE DE LIE COMPLEXE $GL(n,\mathbb{C})$ I.6.1

DEFINITION I.6.1.1 Le groupe de Lie complexe $G\,L(n,\mathbb{C})$ est le groupe des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^n$ muni de la structure de variété holomorphe déduite de sa structure de $\mathbb{C}$-vectoriel.

LA GRASSMANNIENNE COMPLEXE $G_{n,p}(\mathbb{C})$ I.6.2

DEFINITION I.6.2.1. On note $G_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des sous $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension p de $\mathbb{C}^n$. L'application de $GL(n,\mathbb{C}) \times G_{n,p}(\mathbb{C})$ dans $G_{n,p}(\mathbb{C})$ définie par $A.V = A(V)$ est une opération algébrique transitive de $GL(n,\mathbb{C})$ sur $G_{n,p}(\mathbb{C})$. Le stabilisateur S de $\mathbb{R}^p \times \{o\}$ dans $GL(n,\mathbb{C})$ est le sous groupe algébrique de $GL(n,\mathbb{C})$ formé des matrices du type $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in GL(p,\mathbb{C})$, $C \in GL(n-p,\mathbb{C})$, $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{C})$.

On en déduit que S est un sous groupe de Lie complexe de $GL(n,\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe sur $G_{n,p}(\mathbb{C})$ une et une seule structure de variété holomorphe telle que le groupe de Lie $GL(n,\mathbb{C})$ opère holomorphiquement dans $G_{n,p}(\mathbb{C})$.
La variété holomorphe $G_{n,p}(\mathbb{C})$ est l'ensemble $G_{n,p}(\mathbb{C})$ muni de cette structure. On a $G_{n,p}(\mathbb{C}) \simeq GL(n,\mathbb{C})/S$.

CONSTRUCTION DE L'ATLAS CANONIQUE I.6.2.2. Notons R l'équivalence associée à l'opération de S sur $GL(n,\mathbb{C})$.

Si I est une partie de $N=\{1,\ldots,n\}$ de cardinal p, on note $(p_I : M_{n,p}(\mathbb{C}) \to M_{p,p}(\mathbb{C}))$ l'application définie par

$$p_I(A) = (A_{j\,k})_{\substack{j\in I\\ k\in\{1,\ldots,p\}}} .$$

Posons $V_I=\left\{A : A\in GL(n,\mathbb{C}),\ p_I(A\binom{I_p}{o})\in GL(p,\mathbb{C})\right\}$

V_I est un ouvert de $GL(n,\mathbb{C})$ stable pour l'opération de S dans $GL(n,\mathbb{C})$ et $\bigcup_{(I)=p} V_I=GL(n,\mathbb{C})$. Notons $(q_I : V_I\to M_{n-p,p})$ l'application définie par $q_I(A)= p_{N\setminus I}(A\binom{I_p}{o})(p_I(A\binom{I_p}{o}))^{-1})$ et posons $U_I=p(V_I)$. L'application $(q_I : V_I \to M_{n-p,p})$ est une submersion holomorphe et

$$\{(A,B) : A\in V_I, B\in V_I, q_I(A) = q_I(B)\} = R\cap(V_I \times V_I).$$

Par conséquent l'application $(C_I : U_I \to M_{n-p,p})$ déduite de $(q_I : V_I \to M_{n-p,p})$ par passage au quotient est un difféomorphisme holomorphe.

L'atlas $(C_I : U_I \to M_{n-p,p})_{\substack{I\subset N\\(I)=p}}$ est l'atlas canonique de $G_{n,p}(\mathbb{C})$. On a dim $G_{n,p}(\mathbb{C}) = p(n-p)$.

COMPACITE I.6.2.3. La restriction à $U(n,\mathbb{C})$ de l'opération de $GL(n,\mathbb{C})$ sur $G_{n,p}(\mathbb{C})$ définie ci-dessus est une opération transitive du groupe de Lie $U(n,\mathbb{C})$ sur la variété différentielle $G_{n,p}(\mathbb{C})$. Le stabilisateur S' de $\mathbb{R}^p\times\{o\}$ dans $U(n,\mathbb{C})$ est le sous groupe de Lie de $U(n,\mathbb{C})$ formé des matrices du type $\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ où $A\in U(p,\mathbb{C})$, $B\in U(n-p,\mathbb{C})$

S' est canoniquement isomorphe au groupe de Lie $U(p,\mathbb{C}) \times U(n-p,\mathbb{C})$. Par conséquent on a un isomorphisme canonique entre $G_{n,p}(\mathbb{C})$ et $U(n,\mathbb{C})/U(p,\mathbb{C}) \times U(n-p,\mathbb{C})$. Ceci montre en particulier que $G_{n,p}(\mathbb{C})$ est une variété compacte.

ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES I.6.2.4. La variété $G_{n+1,1}(\mathbb{C})$ se note $P_n(\mathbb{C})$ et s'appelle l'espace projectif complexe de dimension n. Dans ce cas, on a

$V_j=\{(z_1,\ldots,z_{n+1}) : z_j\neq 0\}$ et $q_j(z_1,\ldots,z_{n+1})=(\frac{z_1}{z_j},\frac{\hat{z}_j}{z_j}\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_j})$

LES SURFACES RIEMANNIENNES ORIENTEES I.6.3.1. Soient M une surface riemannienne orientée et x un point de M. Si (e_1,e_2) est une base orthonormée orientée de T_xM, alors on note J_x^e l'endomorphisme de T_xM qui envoit e_1 sur e_2 et e_2 sur $-e_1$. Il est évident que J_x^e est une isométrie orientée de carré -1. De plus, $(h,J_x^e(h))$ est une base orientée orthogonale pour tout $h\in T_xM$. En effet, la matrice de passage de la base (e_1,e_2) à la base $(h,J_x^e(h))$ est $\begin{pmatrix} h^1 & -h^2 \\ h^2 & +h^1 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme J_x^e ne dépend donc pas de la base orthonormée orientée (e_1,e_2) choisie pour le définir Notons $(J:TM \to TM)$ l'application définie par $J(x,\xi)=(x,J_x(\xi))$. Si (e_1,e_2) est un repère tangent orienté orthonormé au-dessus de l'ouvert U de M, alors on a $Je_1=e_2$ et $Je_2=-e_1$, par conséquent J est un endomorphisme de TM. La structure quasi-holomorphe sur M associée à l'endomorphisme J s'appelle la structure quasi-holomorphe canonique de M. Sauf mention explicite du contraire M est supposé muni de cette structure.

LES TORES COMPLEXES I.6.4.

DEFINITION I.6.4.1. $(\mathbb{C}^n,+)$ est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie complexe. Si $\tau_1,\dots,\tau_{2n}$ sont 2n vecteurs $\mathbb{R}$-linéairement indépendants de $\mathbb{C}^n$, alors on note $D_{\tau_1,\dots,\tau_{2n}}$ le sous groupe additif de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(\tau_1,\dots,\tau_{2n})$. Le groupe de Lie complexe $\mathbb{C}^n/D_{\tau_1,\dots,\tau_{2n}}$ s'appelle le tore complexe associé à $(\tau_1,\dots,\tau_{2n})$.
On note $T_{\mathbb{C}}$ le tore $\mathbb{C}/D_{e_1,e_2}$.

PROPOSITION I.6.4.2. Un tore complexe est un groupe de Lie,complexe,connexe,compact.

Preuve: La connexité de $\mathbb{C}^n/D_{\tau_1,\dots,\tau_{2n}}$ découle de celle de $\mathbb{C}^n$. Si on note p la projection de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n/D_{\tau_1,\dots,\tau_{2n}}$ alors on a

$$p\left\{\lambda_1\tau_1+\dots+\lambda_n\tau_{2n} : (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n})\in[0,1]^{2n}\right\} = \mathbb{C}^n/D_{\tau_1,\dots,\tau_{2n}}$$

ce qui montre que $\mathbb{C}^n/D_{\tau_1,\dots,\tau_{2n}}$ est compact.///

PROPOSITION I.6.4.3. $T_{\mathbb{C}}$ est quasi-holomorphiquement difféomorphe à une surface riemannienne orientée de $\mathbb{R}^3$.

Preuve: Notons e_θ le point $(\cos\theta,\sin\theta,o)$ de $\mathbb{R}^3$.Définissons l'application p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par $p(\theta,\varphi)=2e_\theta+e_\theta\cos\varphi+\sin\varphi e_3$. On a $p(\theta,\varphi)=((2+\cos\varphi)\cos\theta,(2+\cos\varphi)\sin\theta,\sin\varphi)$ et on voit que p est de classe C_∞.

On en déduit que

$$D_{(\theta,\varphi)}p = \begin{pmatrix} -(2+\cos\varphi)\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ (2+\cos\varphi)\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (*)$$

On voit immédiatement que $D_{(\theta,\varphi)}p$ est injectif pour tout $(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$, ainsi p est une immersion de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

La définition de p montre que

$p(\theta,\varphi) = p(\theta',\varphi')$ si et seulement si $(\theta,\varphi) - (\theta',\varphi')\in D_{e_1\, e_2}$

Notons q l'application de $T_{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{R}^3$ déduite de p par passage au quotient. Ce qui précède montre que q est une immersion injective. Finalement la compacité de $T_{\mathbb{C}}$ prouve que q est un plongement propre. Notons Q la surface de $\mathbb{R}^3$ image de $T_{\mathbb{C}}$ par q . La formule (*) montre que l'application $(q:T_{\mathbb{C}} \to Q)$ peut-être rendue quasi-holomorphe en orientant convenablement Q.

On vérifiera que la surface Q correspond à ce qu'on appelle intuitivement un tore, ce qui justifie en quelque sorte le vocabulaire adopté précédemment. ///

LA SPHERE DE RIEMANN I.6.5.

RAPPEL I.6.5.1. Le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ muni de la topologie dont les ouverts sont ceux de $\mathbb{C}$ et les complémentaires dans $\tilde{\mathbb{C}}$ des compacts de $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ est dense dans $\tilde{\mathbb{C}}$ et $\tilde{\mathbb{C}}$ est un espace séparé et compact. On note z l'application identique de $\tilde{\mathbb{C}}$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$.
On prolonge l'application $(\bar{z}^1:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*)$ à $\tilde{\mathbb{C}}$ en posant $\bar{0}^1=\infty$ et $\bar{\infty}^1=0$. Cette prolongée est encore notée $\bar{z}^1$.
On vérifie immédiatement que $(\bar{z}^1:\tilde{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathbb{C}})$ est une application continue. D'autre part il est évident que $(\bar{z}^1)^{-1}=z$ pour tout $z\in\tilde{\mathbb{C}}$. Ainsi $(\bar{z}^1:\tilde{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathbb{C}})$ est un homéomorphisme involutif.
La translation $(z+a:\mathbb{C}\to\mathbb{C})$ est un homéomorphisme, elle admet par conséquent un unique prolongement continu à $\tilde{\mathbb{C}}$.
L'application prolongée se note $(z+a:\tilde{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathbb{C}})$, c'est un homéomorphisme et $\infty+a=\infty$.
On procède de même avec la multiplication par un élément de $\mathbb{C}^*$. L'application prolongée obtenue se note $(z.a.\tilde{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathbb{C}})$, c'est un homéomorphisme et $\infty.a=\infty$.
L'application $(z+\infty:\tilde{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathbb{C}})$ est par définition l'application constante ∞.
L'application $(z.0:\tilde{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathbb{C}})$ est par définition l'application constante 0.
L'application $(z.\infty:\tilde{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathbb{C}})$ est par définition l'application constante ∞.

DEFINITION I.6.5.2. On munit l'espace topologique $\widetilde{\mathbb{C}}$ de la structure de variété holomorphe définie par l'atlas $((id_{\mathbb{C}}:\mathbb{C} \to \mathbb{C}),(z^{-1}:\widetilde{\mathbb{C}}\setminus\{o\} \to \mathbb{C}))$. La variété holomorphe ainsi définie est une surface de Riemann compacte, on la nomme "sphère de Riemann".

PROPOSITION I.6.5.3.

a) Les applications $(z+a:\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}),(z.a:\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}),(z^{-1}:\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}})$ sont holomorphes.

b) $\mathcal{O}(\widetilde{\mathbb{C}},\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Preuve :

a) Les cas $a=0$ et $a=\infty$ sont évident, supposons donc que $a \neq o$ et que $a \neq \infty$.

Pour $(z+a:\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}})$ il suffit de remarquer que les applications $(z+a:\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ et $(\frac{z}{1+z.a}:\frac{1}{|a|}\mathring{D} \to \mathbb{C})$ sont holomorphes.

Pour $(z.a:\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}})$ il suffit de remarquer que les applications $(z.a:\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ et $(z.\,a^{-1}:\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ sont holomorphes.

Pour $(z^{-1}:\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}})$ il suffit de remarquer que l'application $(z:\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ est holomorphe.

b) Résulte de la compacité de $\widetilde{\mathbb{C}}$.///

PROPOSITION I.6.5.4.

a) $\widetilde{\mathbb{C}}$ est quasi-holomorphiquement difféomorphe à S_2

b) $\widetilde{\mathbb{C}}$ est holomorphiquement difféomorphe à $P_1(\mathbb{C})$.

Preuve:

a) Soient N le pôle nord de S_2 c'est à dire le point $(o,o,1)$ et P un point de $\mathbb{R}^2 \times \{o\}$ de coordonnées (x,y,o). Le point de percée de la droite $\overline{NP}$ dans la sphère S_2 qui diffère de N a pour coordonnées :

$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$ comme on le vérifie de suite.

Soit p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$p(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right).$$

La définition précédente montre que $(p: \mathbb{R}^2 \to S_2 \setminus \{N\})$ est une bijection. Il est par ailleurs évident que p est de classe C_∞. Un calcul simple montre que

$$\frac{(x^2+y^2+1)^2}{2}\, p_*(x,y) = \begin{pmatrix} y^2-x^2+1 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2+1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

On en déduit que $(f_{*(x,y)}(e_1), f_{*(x,y)}(e_2))$ est une base orthogonale orientée de $(T_{\mathbb{R}}S_2)_{(x,y)}$. La définition de la structure quasi-holomorphe de S_2 montre alors que $(p: \mathbb{C} \to S_2 \setminus \{N\})$ est une immersion quasi-holomorphe.

Prolongeons p à $\tilde{\mathbb{C}}$ en posant $p(\infty)=N$. La forme locale p' de p au voisinage de ∞ pour la carte $(\bar{z}^1 : \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{o\} \to \mathbb{C})$ est

telle que $p'(z) = \left(\frac{2\bar{z}^1}{|z|^{-2}+1}, \frac{|z|^{-2}-}{|z|^{-2}+1}\right)$ pour $z \neq o$

$$p'(o) = N$$

On en déduit que

$p'(z) = \left(\frac{2\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)$, par conséquent p est de classe C_∞ en ∞.

Un calcul simple montre alors que $p'_{*(o,o)}(e_1) = e_1$ et $p'_{*(o,o)}(e_2) = -e_2$. On peut alors affirmer que l'application $(p:\tilde{\mathbb{C}} \to S_2)$ est une immersion quasi-holomorphe bijective.

Comme les deux variétés quasi-holomorphes $\tilde{\mathbb{C}}$ et S_2 sont de dimension 1, on en déduit que $(p:\tilde{\mathbb{C}} \to S_2)$ est un difféomorphisme quasi-holomorphe.

b) Le difféomorphisme réciproque de la carte $(c_2:U_2 \to \mathbb{C})$ de $P_1(\mathbb{C})$ est l'application $(q:\mathbb{C} \to U_2)$ définie par $q(z) = [(z,1)]_{P_1(\mathbb{C})}$. Prolongeons la à $\tilde{\mathbb{C}}$ en posant $q(\infty) = [(1,o)]_{P_1(\mathbb{C})}$. La forme locale q' de q au voisinage de ∞ pour la carte $(z^{-1}:\tilde{\mathbb{C}}\setminus\{o\} \to \mathbb{C})$ est telle que

$q'(z) = [(z^{-1},1)]_{P_1(\mathbb{C})}$ si $z \neq o$

$q'(z) = [(1,o)]_{P_1(\mathbb{C})}$ si $z=o$

On en déduit que $q'(z) = [(1,z)]_{P_1(\mathbb{C})}$ pour tout $z \in C$.

Ainsi $(q':\mathbb{C} \to U_1)$ est le difféomorphisme réciproque de la carte $(c_1:U_1 \to \mathbb{C})$. Ce qui précède montre que $(q:\tilde{\mathbb{C}} \to P_1(\mathbb{C}))$ est holomorphe et étale. Pour conclure il suffit de remarquer qu'elle est aussi bijective.///

PROPOSITION I.6.5.5. Si M est une surface de Riemann connexe, alors $\mathcal{O}(M,\tilde{\mathbb{C}})\setminus\{\infty\} = \mathcal{M}(M)$.

<u>Preuve</u>: Soit f un élément de $\mathcal{O}(M,\tilde{\mathbb{C}})$ distinct de ∞.

On pose $m(f)_z = \dfrac{\text{germe}_z f}{1}$ si $f(z) \in \mathbb{C}$

et $m(f)_z = \dfrac{1}{\text{germe}_z \frac{1}{f}}$ si $f(z) = \infty$.

$m(f)$ est une fonction meromorphe. En effet, d'une part si $z \in M$ et si $f(z) \in \mathbb{C}$ alors il existe un voisinage U de z dans M tel que $f(U) \subset \mathbb{C}$ et l'holomorphie de $(f_{|U} : U \to \mathbb{C})$ montre que la section $m(f)$ de $\mathcal{M}$ est continue en z. D'autre part si $z \in M$ et si $f(z) = \infty$ alors il existe un voisinage U de z tel que $f(U \setminus \{z\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et l'holomorphie de $(\frac{1}{f}_{|U} : U \to \mathbb{C})$ prouve la continuité de $m(f)$ en z. On note m l'application de $\mathcal{O}(M, \tilde{\mathbb{C}})$ dans $\mathcal{M}(M)$ qui envoit f sur $m(f)$.

Soient g un élément de $\mathcal{M}(M)$ et z_0 un point de M. Il existe un voisinage coordonné (U, z) de z_0 dans M ,une fonction holomorphe f non nulle sur U et un entier p, tels que $g_{|U} = \dfrac{f}{(z - z(z_0))^p}$ On sait que $\dfrac{f(u)}{(z(u) - z(z_0))^p}$ admet une limite dans $\tilde{\mathbb{C}}$ pour u tendant vers z_0. On vérifie immédiatement que cette limite ne dépend que de g et de z_0, on la note $V(g)(z_0)$. L'application $(V(g) : M \to \tilde{\mathbb{C}})$ ainsi définie est bien sûre holomorphe et distincte de ∞ . On note V l'application de $\mathcal{M}(M)$ dans $\mathcal{O}(M, \tilde{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}$ qui envoit g sur $V(g)$.

La construction de V et de m montre que $m \circ V = id_{\mathcal{M}(M)}$ et que $V \circ m = id_{\mathcal{O}(M, \tilde{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}}$. Ainsi $(m : \mathcal{O}(M, \tilde{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\} \to \mathcal{M}(M))$ est une bijection.///

CHAPITRE II

VARIETES QUASI-HERMITIENNES

II.1. Métrique hermitienne sur un fibré vectoriel complexe

DEFINITION II.1.1. Une métrique hermitienne sur un fibré vectoriel complexe E de base M est une application h qui associe à tout point x de M un produit scalaire hermitien h_x dans la fibre E_x, de manière à ce que les applications $(h(e_j, e_k): U \to \mathbb{C})$ soient de classe C_∞ lorsque $(e_1, \ldots, e_n)$ est un repère de E au-dessus de U.
Le produit scalaire de 2 sections σ, σ' de E par rapport à la métrique h est l'application $h(\sigma, \sigma')$ de M dans $\mathbb{C}$, définie par $h(\sigma, \sigma')(x) = h_x(\sigma_x, \sigma'_x)$. Lorsque $(e_1, \ldots, e_n)$ est un repère de E au-dessus de U, on note h^e l'application de U dans $H^+(n, \mathbb{C})$ définie par $h^e_{jk}(x) = h_x((e_j)_x, (e_k)_x)$.
Un repère $(e_1, \ldots, e_n)$ de E au-dessus de U est unitaire pour la métrique hermitienne h si $h(e_j, e_k) = \delta_{jk}$.

PROPOSITION II.1.2. Si h est une métrique hermitienne sur E, alors tout point de M possède un voisinage au-dessus duquel il existe un repère unitaire.

Preuve: Soit x un point de M, U un voisinage ouvert de x et $(e_1,\ldots,e_n)$ un repère de E au-dessus de U. Nous allons créer un repère unitaire en utilisant la méthode de Gram Schmidt.

Construisons par récurrence les sections $v_1,\ldots,v_n$ de E au moyen de la formule $v_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h(e_k,v_j)}{h(v_j,v_j)} v_j$.

On vérifie immédiatement que l'on a $h(v_k,v_j) = 0$ si $k \neq j$. De plus, aucune des sections $v_1,\ldots,v_n$ ne s'annule dans U car $(e_1,\ldots,e_n)$ est un repère au-dessus de U.

Posons $u_j = \frac{v_j}{\sqrt{h(v_j,v_j)}}$ pour $j=1,\ldots,n$. On vérifie de suite que $(u_1,\ldots,u_n)$ est un repère unitaire pour h au-dessus de U.///

PROPOSITION II.1.3. Il existe une métrique hermitienne sur tout fibré vectoriel complexe dont la base est une variété paracompacte.

Preuve: Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement de M par les ouverts relativement compacts au-dessus desquels E est trivialisable. Pour chaque $U \in \mathcal{U}$ choisissons une trivialisation $(\varphi_U : E_{|U} \to U \times \mathbb{C}^n)$. On note h_U la métrique hermitienne sur $E_{|U}$ définie par $(h_U)_x(\xi,\eta) = ((\varphi_U)_x(\xi),(\varphi_U)_x(\eta))$.

Soit $(\Psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ une partition de l'unité, positive, C_∞, localement finie, subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$.

Notons h_x le produit scalaire hermitien sur E_x défini par $h_x = \sum_{\substack{U\in\mathcal{U}\\ U\ni x}} \psi_U(x)(h_U)_x$ et h l'application qui associe à tout point x de M le produit scalaire hermitien h_x sur E_x. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ un repère de E au-dessus de l'ouvert relativement compact V. Notons $g_U(e_j,e_k)$ l'application de V dans $\mathbb{R}$ obtenue en prolongeant $\psi_U h_U(e_j,e_k)_{|U\cap V}$ par 0 sur $V\setminus U$. On vérifie immédiatement que $g_U(e_j,e_k)$ est de classe C_∞ sur V. Posons $I=\{U : U\in\mathcal{U}, [\psi_U]\cap V \neq \emptyset\}$.
On sait que I est un ensemble fini et que $h(e_j,e_k) \underset{V}{=} \sum_{U\in I} g_U(e_j,e_k)$. Par conséquent $h(e_j,e_k)$ est de classe C_∞ sur V et h est une métrique hermitienne sur E.///

DEFINITION II.1.4 Soient E et F deux fibrés vectoriels complexes de base M, h_E une métrique hermitienne sur E et h_F une métrique hermitienne sur F.

a) L'application qui à tout point x de M associe le produit scalaire hermitien $(h_E)_x \oplus (h_F)_x$ de $E_x \oplus F_x$ est une métrique hermitienne sur $E\oplus F$ que l'on note $h_E \oplus h_F$
b) L'application qui à tout point x de M associe le produit scalaire hermitien $(h_E)_x \otimes (h_F)_x$ de $E_x \otimes F_x$ est une métrique hermitienne sur $E \otimes F$ que l'on note $h_E \otimes h_F$.
c) L'application qui a tout point x de M associe le produit scalaire hermitien $(h_E)^*_x$ de E^*_x est une métrique hermitienne sur E^* que l'on note h^*_E.
d) L'application qui a tout point x de M associe le produit scalaire hermitien $\Lambda(h_E)_x$ de ΛE_x est une métrique hermitienne sur ΛE que l'on note Λh_E.
e) On note $(\# : E \to E^*)$ l'anti-isomorphisme de E dans E^* défini par $\#(x,\xi) = (x, h(\cdot,\xi))$.

II.2. Espace $L_2(M,E)$

REMARQUE II.2.1. Dans ce paragraphe, E désigne un fibré vectoriel complexe muni d'une métrique hermitienne $(\ ,\ )$ et dont la base M est une variété riemannienne orientable à base dénombrable. La forme de volume de M est notée v. Pour simplifier l'écriture on note également v la mesure associée à v.

DEFINITION II.2.2. Une section mesurable de E au-dessus de M est une application $(\sigma : M \to E)$ telle que $p\circ\sigma = id_M$ et dont les composantes par rapport à un repère local quelconque sont v-mesurables. L'ensemble des sections mesurables de E au-dessus de M se note $\mathcal{M}(M,E)$, il est canoniquement muni d'une structure de $\mathbb{C}$ vectoriel.
Une section négligeable de E au-dessus de M est une section mesurable égale v-pp à zéro.
L'ensemble des sections négligeables de E au-dessus de M se note $\mathcal{N}(M,E)$, c'est un sous $\mathbb{C}$-vectoriel de $\mathcal{M}(M,E)$.
On note $L_2^!(M,E)$ l'ensemble des sections mesurables σ de E au-dessus de M pour lesquelles la fonction (σ,σ) est v-intégrable.

PROPOSITION II.2.3. Si $\sigma,\sigma' \in L_2^!(M,E)$ et si $c,d \in \mathbb{C}$ alors (σ,σ') est v-intégrable et $c\sigma + d\sigma' \in L_2^!(M,E)$.

Preuve: Il est clair que la fonction (σ,σ') est v-mesurable De plus, $|(\sigma,\sigma')| \leq \sqrt{(\sigma,\sigma)}\sqrt{(\sigma',\sigma')}$. On en déduit que $|(\sigma,\sigma')| \leq \frac{1}{2}(\sigma,\sigma)+\frac{1}{2}(\sigma',\sigma')$. Il en résulte aussitôt que la fonction $|(\sigma,\sigma')|$ est v-intégrable. Pour prouver que $c\sigma+d\sigma' \in L_2'(M,E)$ il suffit de remarquer que la section $c\sigma+d\sigma'$ est mesurable et que

$$(c\sigma+d\sigma', c\sigma+d\sigma') = |c|^2(\sigma,\sigma)+c\bar{d}(\sigma,\sigma')+d\bar{c}(\overline{\sigma,\sigma'}) + |d|^2(\sigma',\sigma'). ///$$

DEFINITION II.2.4. La proposition précédente montre que $L_2'(M,E)$ est un sous $\mathbb{C}$-vectoriel de $\mathcal{M}(M,E)$. Notons $(\ ,\ )_M'$ la forme hermitienne définie sur $L_2'(M,E)$ par $(\sigma,\sigma')_M' = \int (\sigma,\sigma')v$.

On constate que $\mathcal{N}(M,E) = \{\sigma : \sigma \in L_2'(M,E), (\sigma,\sigma)_M' = 0\}$.

La forme hermitienne $(\cdot,\cdot)_M'$ définit par passage au quotient, une forme hermitienne définie positive sur $L_2'(M,E) / \mathcal{N}(M,E)$ que l'on note $(\cdot,\cdot)_M$. L'espace préhilbertien obtenu en munissant $L_2'(M,E)/\mathcal{N}(M,E)$ de la forme $(\cdot,\cdot)_M$ est noté $L_2(M,E)$.

PROPOSITION II.2.5. L'espace $L_2(M,E)$ est un espace d'Hilbert.

<u>Preuve</u>:

a) Prouvons la proposition dans le cas où E est trivialisable. Soit r un repère unitaire de E au-dessus de M. Notons p l'application de $L_2'(M,E)$ dans $(v\text{-}L_2(M))^n$ qui associe à tout élément de $L_2'(M,E)$ les classes v-pp de ses composantes par rapport au repère r. Il est clair que $\mathcal{N}(M,E) \subset \ker p$. Notons q l'application de $L_2(M,E)$ dans $(v\text{-}L_2(M))^n$ déduite de p par passage au quotient. Il résulte immédiatement des définitions précédentes que q est un isomorphisme d'espace préhilbertien ce qui prouve la proposition.

b) Traitons à présent le cas général. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement dénombrable de M par des ouverts au-dessus desquels E est trivialisable. Soit $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L_2(M,E)$. Pour tout $U\in\mathcal{U}$ la suite $(\omega_{m|U})_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L_2(U,E_{|U})$, notons ω_U sa limite. Si U et U' sont deux éléments de $\mathcal{U}$ on a $\omega^U{}_{|U'\cap U} = \omega^{U'}{}_{|U\cap U'}$ car $(\omega_{m|U})_{|U\cap U'} = (\omega_{m|U'})_{|U\cap U'}$ $\forall m\in\mathbb{N}$. Pour tout $m\in\mathbb{N}$ choisissons une section mesurable ω'_m représentant ω_m Il résulte de ce qui précède qu'il existe une section mesurable ω' de E telle que $\omega'_{|U} \underset{v-pp}{=} \omega^U$. De plus, $\int_U(\omega'_m-\omega',\omega'_m-\omega')v \to 0$ si $m\to+\infty$ et si $U\in\mathcal{U}$.

Indexons $\mathcal{U}$ par $\mathbb{N}$ et posons $V_i = \bigcup_{j=0}^{i} U_j$. Il est clair que $(\omega'_m-\omega',\omega'_m-\omega')\chi_{V_i} \leq \sum_{j=0}^{i}(\omega'_m-\omega',\omega'_m-\omega')\chi_{U_j}$.

Par conséquent $(\omega'_m-\omega',\omega'_m-\omega')_{|V_i}$ est $v_{|V_i}$-intégrable et $\int_{V_i}(\omega'_m-\omega',\omega'_m-\omega')v \leq \sum_{j=0}^{i}\int_{U_j}(\omega'_m-\omega',\omega'_m-\omega')v$.

On en déduit que $\int_{V_i}(\omega'_m-\omega',\omega'_m-\omega')v \to 0$ si $m\to+\infty$.

Soit ε un réel positif. Comme la suite $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L_2(M,E)$, il existe $M>0$ tel que $p,q\geq M$ entraine $\int_M(\omega'_p-\omega'_q,\omega'_p-\omega'_q)v\leq\varepsilon$. On en déduit que

$\int_{V_i}(\omega'_p-\omega',\omega'_p-\omega')v\leq\varepsilon$ si $p\geq M$.

Comme la suite $(\chi_{V_i}(\omega'_p-\omega',\omega'_p-\omega'))_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante, le théorème de Levi montre que la fonction $(\omega'_p-\omega',\omega'_p-\omega')$ est v-intégrable et que $\int_M(\omega'_p-\omega',\omega'_p-\omega')v \leq\varepsilon$ si $p\geq M$.

On en déduit aussitôt que $\omega'\in L'_2(M,E)$ et que

$\omega_p \xrightarrow[L_2(M,E)]{} [\omega']_{v-pp}$ si $p\to+\infty$. Ainsi l'espace $L_2(M,E)$

est séquentiellement complet et la proposition est établie dans le cas général.///

DEFINITION II.2.6. Comme un élément de $L_2^{\prime}(M,E)$ est loc. intégrable, il existe une application naturelle de $L_2(M,E)$ dans $\mathcal{L}_1(M,E)$. De plus, une vérification immédiate montre que cette application est une injection linéaire continue. Il existe donc une injection continue de $L_2(M,E)$ dans $\mathfrak{D}(M,E)$. On identifiera l'espace vectoriel $L_2(M,E)$ avec son image dans $\mathfrak{D}(M,E)$.

II.3. Variétés quasi-hermitiennes

DEFINITION II.3.1. Une variété quasi-hermitienne est une variété quasi-holomorphe M dont le fibré T'M est muni d'une métrique hermitienne h_M. L'application h'_M de $\Gamma(M,TM) \times \Gamma(M,TM)$ dans $C_\infty(M)$ définie par
$h'_M(x,y) = h_M(P_{1,0}\,x, P_{1,0}\,\bar{y})$ est $C_\infty(M)$-bilinéaire.
Le champ tensoriel complexe de type $\binom{0}{2}$ associé à h'_M se note h'_M par abus de langage.
On note g_M la partie réelle de h'_M. Il est clair que g_M est le champ tensoriel complexe associé à une métrique riemannienne sur M que l'on note encore g_M par abus de langage. La variété riemannienne orientée sous-jacente à M est la variété réelle orientée sous-jacente à M munie de la métrique riemannienne g_M.
Un calcul simple montre que $-\frac{1}{2}\Im h'_M$ est un champ tensoriel alterné de type $\binom{0}{2}$. On note Φ_M la 2-forme différentielle associée à $-\frac{1}{2}\Im h'_M$. Φ_M est la forme fondamentale de M.
La forme de volume v_M de M est la forme complexe associée à la forme de volume de la variété riemannienne sous-jacente à M.

THEOREME DE VIRTINGER II.3.2.
a) La forme Φ_M est de type (1,1)

b) $v_M = \dfrac{\Phi_M^n}{n!}$

Preuve: Soient U un ouvert de M au-dessus duquel T'M est trivialisable et $(e_1,\ldots,e_n)$ un repère unitaire de T'M au-dessus de U. Notons $(e^1,\ldots,e^n)$ le repère dual de $(e_1,\ldots,e_n)$

Il est clair que $(e_1,\ldots,e_n,\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)$ est un repère de TM au-dessus de U dont le repère dual est $(e^1,\ldots,e^n,\bar{e}^1,\ldots\bar{e}^n)$.

Il résulte des définitions précédentes que $h'_M|_U = \sum_{i=1}^n e^i \otimes \bar{e}^i$.

On en déduit que $\mathfrak{I}h'_M|_U = \sum_{i=1}^n \frac{e^i \otimes \bar{e}^i - \bar{e}^i \otimes e^i}{2i}$ et que

et que $\mathfrak{R}h'_M|_U = \sum_{i=1}^n (\mathfrak{R}e_i \otimes \mathfrak{R}e_i + \mathfrak{I}e_i \otimes \mathfrak{I}e_i)$.

La première égalité montre que $\Phi_M|_U = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^n e^i \wedge \bar{e}^i$ ce qui prouve (a).

La seconde égalité montre que $r=(\mathfrak{R}e^1,\mathfrak{I}e^1,\ldots,\mathfrak{R}e^n,\mathfrak{I}e^n)$ est un repère orthonormé de $(T_{\mathbb{R}}M)^*$. Ce repère est orienté car il est le dual du repère réel orienté

$(2\mathfrak{R}e^1,-2\mathfrak{I}e^1,\ldots,2\mathfrak{R}e^n,-2\mathfrak{I}e^n)$. On en déduit que

$v_M = \mathfrak{R}e^1 \wedge \mathfrak{I}e^1 \wedge \ldots\ldots \wedge \mathfrak{R}e^n \wedge \mathfrak{I}e^n$. Or $\Phi_M|_U = \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}e^i \wedge \mathfrak{I}e^i$, donc

$$\Phi_M^n = \sum_{i_1=1}^n \ldots\ldots \sum_{i_n=1}^n \mathfrak{R}e^{i_1} \wedge \mathfrak{I}e^{i_1} \wedge \ldots\ldots \wedge \mathfrak{R}e^{i_n} \wedge \mathfrak{I}e^{i_n}.$$

En tenant compte des propriétés du produit extérieur, on voit que $\Phi_M^n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathfrak{R}e^{\sigma_1} \wedge \mathfrak{I}e^{\sigma_1} \wedge \ldots\ldots \wedge \mathfrak{R}e^{\sigma_n} \wedge \mathfrak{I}e^{\sigma_n}$.

On en déduit que

$\Phi^n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathfrak{R}e^1 \wedge \mathfrak{I}e^1 \wedge \ldots\ldots \wedge \mathfrak{R}e^n \wedge \mathfrak{I}e^n$. Mais cela montre que

$\Phi^n = n!\, v_M$, ce qui prouve (b).///

DEFINITION II.3.3. Soit M une variété quasi-hermitienne.

On note $(\cdot,\cdot)_{TM}$ l'application qui associe à tout x de M le produit scalaire hermitien $[g_M(\cdot,\bar{\cdot})]_x$ sur $(TM)_x$.

Il est clair que $(\cdot,\cdot)_{TM}$ est une métrique hermitienne sur TM. La métrique $(\cdot,\cdot)_{TM}$ induit canoniquement une metrique hermitienne sur chacun des fibrés construits à partir de TM au moyen des opérations élémentaires. Ces métriques sont notées au moyen du symbole $(\cdot,\cdot)$ indexé par le symbole du fibré que l'on considère. Par exemple, on notera $(\cdot,\cdot)_{T^*M}$ la métrique duale de $(\cdot,\cdot)_{TM}$.

PROPOSITION II.3.4. Si M est une variété quasi-hermitienne alors les $\mathbb{C}$-vectoriels $(\overset{p,q}{\Lambda} T^*M)_x$ et $(\overset{p',q'}{\Lambda} T^*M)_x$ sont orthogonaux dans $(\Lambda T^*M)_x$ si $(p,q) \neq (p',q')$ et si $x \in M$.

Preuve: Il suffit d'établir que $(T'M)_x$ est orthogonal à $(T''M)_x$ dans $(TM)_x$. Soit X un élément de $(T'M)_x$ et Y un élément de $(T''M)_x$. Par définition on a

$((X,Y)_{TM})_x=(g_M)_x(X,\overline{Y})= \frac{1}{2}((h'_M)_x(X,\overline{Y}) + (h'_M)_x(\overline{X},Y))$. Or

$(h'_M)_x(X,\overline{Y}) = (h_M)_x\ (P_{1,0}X,\ P_{1,0}Y)$ et

$(h'_M)_x(\overline{X},Y) = (h_M)_x\ (P_{1,0}\overline{X},\ P_{1,0}\overline{Y})$ donc $((X,Y)_{TM})_x = 0$.///

DEFINITION II.3.5. Le plan cotangent réel en x est muni d'une structure d'espace euclidien orienté, on notera $*_x$ l'opérateur de Hodge qui lui est associé. $*_x$ est un endomorphisme de $(\Lambda T^*_{\mathbb{R}}M)_x$ et on vérifie immédiatement qu'il existe un unique endomorphisme $*_{\mathbb{R}}$ de $\Lambda T^*_{\mathbb{R}}M$ tel que $*|_{(\Lambda T^*M)_x} = *_x$ pour tout $x \in M$. L'opérateur de Hodge de M est l'endomorphisme de $\Lambda T^* M$ obtenu en complexifiant $*_{\mathbb{R}}$.

PROPOSITION II.3.6. L'opérateur de Hodge d'une variété quasi-hermitienne de dimension n jouit des propriétés suivantes:

a) $\omega' \wedge * \bar{\omega} = (\omega', \omega)_{\wedge T^*M}\, v_M$ si $\omega', \omega \in A(M)$

b) $* \omega \in A^{n-q,n-p}(M)$ si $\omega \in A^{p,q}(M)$

c) $** \omega = (-1)^{p+q} \omega$ si $\omega \in A^{p,q}(M)$

d) $(*\omega', *\omega)_{\wedge T^*M} = (\omega', \omega)_{\wedge T^*M}$ si $\omega', \omega \in A(M)$.

Preuve:

a) En utilisant les propriétés de linéarité des deux membres de la formule à démontrer, on voit qu'il suffit de traiter le cas où les formes ω', ω sont réelles. Mais dans ce cas, la formule résulte immédiatement des propriétés de l'opérateur de Hodge euclidien.

b) La formule précédente montre $\omega' \wedge * \bar{\omega} = 0$ lorsque $\omega' \in A^{p',q'}(M), \omega \in A^{p,q}(M)$, $(p',q') \neq (p,q)$. On en déduit que $* \bar{\omega}$ est de type $(n-p, n-q)$. Mais $\overline{*\bar{\omega}} = *\omega$ donc $*\omega$ est de type $(n-q, n-p)$.

c) Les propriétés de l'opérateur de Hodge euclidien montrent que $**\omega = (-1)^{(2n-p-q)(p+q)}\omega$. Mais $(-1)^{2n(p+q)} = 1$ et $(-1)^{(p+q)^2} = (-1)^{p+q}$ car $(-1)^{n(n+1)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) La formule résulte immédiatement de son analogue euclidienne. ///

II.4. Fibrés vectoriels quasi-hermitiens

DEFINITION II.4.1. Un fibré vectoriel quasi-hermitien est un fibré vectoriel quasi-holomorphe muni d'une métrique hermitienne. Les opérations élémentaires entre fibrés vectoriels complexes se transportent de manière naturelle au cas des fibrés vectoriels quasi-hermitiens.

DEFINITION II.4.2. Soit E un fibré vectoriel quasi-hermitien dont la base M est quasi-hermitienne. On note $\#_E$ le morphisme $\# \otimes \bar{\cdot}$ de $E \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda TM$ dans $\overline{E^* \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda TM}$. On note $*_E$ le morphisme $id_E \otimes *$ de $E \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda TM$ dans $E \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda TM$. Par abus de langage on note encore $\#_E$ l'application de $A(M,E)$ dans $A(M,E^*)$ déduite du morphisme $\#_E$. De même, on note $*_E$ l'application de $A(M,E)$ dans $A(M,E)$ déduite du morphisme $*_E$. Il résulte clairement des définitions ci-dessus que $\#_E \circ *_E = *_{E^*} \circ \#_E$.

PROPOSITION II.4.3. Soit E un fibré vectoriel quasi-hermitien dont la base M est quasi-hermitienne. On a $\omega \wedge \# * \omega' = (\omega, \omega')_{E \otimes \Lambda TM}\, v_M$ si $\omega \in A(M,E)$, $\omega' \in A(M,E)$.

Preuve: Il est clair qu'il suffit de prouver la proposition lorsque $\omega = \sigma \otimes \alpha$, $\omega' = \sigma' \otimes \beta$, $\sigma \in \Gamma(M,E)$, $\sigma' \in \Gamma(M,E)$ $\alpha \in A(M)$, $\beta \in A(M)$. Or dans ce cas $\omega \wedge (\# * \omega') = \langle \sigma, \# \sigma' \rangle \alpha \wedge * \bar{\beta}$

On en déduit que
$$\begin{aligned} \omega \wedge (\# * \omega') &= (\sigma, \sigma')_E (\alpha, \beta)_{\Lambda TM}\, v_M \\ \omega \wedge (\# * \omega') &= (\sigma \otimes \alpha, \sigma' \otimes \beta)_{E \otimes \Lambda TM}\, v_M \\ \omega \wedge (\# * \omega') &= (\omega, \omega')_{E \otimes \Lambda TM}\, v_M . /// \end{aligned}$$

PROPOSITION II.4.4. Soit E un fibré vectoriel quasi-hermitien dont la base M est quasi-hermitienne, intégrable et de dimension n.

On a $\int_M (\bar{\partial}_E \omega, \omega')\, v_M = \int_M (\omega, -* \#^{-1} \bar{\partial}_{E^*} \# * \omega')\, v_M$

si $\omega \in A_c(M,E)$, $\omega' \in A(M,E)$.

Preuve: Supposons d'abord que $\omega \in A_c^{p,q-1}(M,E)$ et que $\omega' \in A^{p,q}(M,E)$. On a

$$(\bar{\partial}_E \omega, \omega')\, v_M = \bar{\partial}_E \omega \wedge \# * \omega' = \bar{\partial}(\omega \wedge \# * \omega') - (-1)^{p+q-1} \omega \wedge \bar{\partial}_{E^*} \# * \omega'$$

On en déduit que

$$\int_M (\bar\partial_E \omega, \omega') v_M = (-1)^{p+q} \int_M (\omega, *^{-1} \#^{-1} \bar\partial_{E*} \# * \omega') v_M$$

Mais $*^{-1}\omega'' = (-1)^{p+q} * \omega''$ si $\omega'' \in A^{p,q}(M,E)$.

Donc $\int_M (\bar\partial_E \omega, \omega') v_M = \int_M (\omega, -* \#^{-1} \bar\partial_{E*} \# * \omega') v_M$

Le cas général se déduit du cas précédent par linéarité.///

DEFINITION II.4.5. Soit E un fibré vectoriel quasi-hermitien dont la base M est quasi-hermitienne et intégrable. On pose $\bar\partial_E^* = - * \#^{-1} \bar\partial_{E*} \# *$.

$\bar\partial_E$ est un o.d.l. d'ordre ≤ 1, $E \otimes \Lambda TM$ dans $E \otimes \Lambda TM$ et $\bar\partial_E^*(A^{p,q}(M,E)) \subset A^{p,q-1}(M,E)$ si $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$.

La proposition précédente montre que $\bar\partial_E^*$ est l'adjoint métrique de $\bar\partial_E$.

II.5. Espace $\mathcal{L}_2(M,E)$

DEFINITION II.5.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ le sous vectoriel de $\mathfrak{D}(U,U\times\mathbb{C}^m)$ formé des sections-distributions T telles que $\alpha T\in L_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ pour tout $\alpha\in D(U)$. Si $\alpha\in D(U)$ et si $T\in\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$, alors on pose $p_{\alpha,U}(T)=\|\alpha T\|_{2,U}$. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ de la topologie définie par les seminormes $(p_{\alpha,U})_{\alpha\in D(U)}$. Notons r_{VU} l'application de restriction de $\mathfrak{D}(U,U\times\mathbb{C}^n)$ dans $\mathfrak{D}(V,V\times\mathbb{C}^n)$. Il résulte des définitions précédentes que $r_{VU}(\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m))\subset\mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^m)$.

PROPOSITION II.5.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

a) Un élément de $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ est associé à une section loc. intégrable de $U\times\mathbb{C}^n$,

b) $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ est un espace de Fréchet,

c) L'injection canonique de $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ dans $\mathfrak{D}(U,U\times\mathbb{C}^m)$ est continue,

d) Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de U, alors la topologie de $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ est initiale pour la famille d'applications $((r_{VU}:\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)\to\mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^n)))_{V\in\mathcal{U}}$,

e) Si U,V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et si (φ,ψ) est un isomorphisme entre le fibré $U\times\mathbb{C}^m$ et le fibré $V\times\mathbb{C}^m$ alors l'application $((\varphi,\psi):\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)\to\mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^m))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

<u>Preuve</u>:

a) C'est immédiat.

b) Soit $(\alpha_m)_{m\in N}$ une partition localement finie de l'unité par des fonctions positives de $D(U)$.

Il est évident que $p_{\alpha,U} \leq \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ [\alpha_m]\cap[\alpha]\neq\emptyset}} p_{\alpha_m,U}$. Par conséquent le système semi-normes $(p_{\alpha,U})_{\alpha\in D(U)}$ est équivalent au système de semi-normes $(p_{\alpha_m,U})_{m\in\mathbb{N}}$. Pour conclure, il suffit de prouver que $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ est séquentiellement complet. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$. Pour tout $j\in\mathbb{N}$ la suite $(\alpha_j f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$, et y converge vers un élément g_j. Comme $\alpha_j f_m$ converge vers g_j dans $\mathfrak{D}(U,U\times\mathbb{C}^m)$, on sait que $[g_j]\subset[\alpha_j]$. La famille $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est donc localement finie. Posons $g=\sum_{j\in\mathbb{N}} g_j$, ce qui précède montre que $f_m \xrightarrow[\mathfrak{D}(U,U\times\mathbb{C}^m)]{} g$

Soit α un élément de $D(U)$. On sait que $\alpha g=\sum_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ [\alpha]\cap[\alpha_j]\neq\emptyset}} \alpha g_j$.

Par conséquent $g\in\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^n)$. De plus $\alpha_j f_m \xrightarrow[\mathfrak{D}(U,U\times\mathbb{C}^m)]{} \alpha_j g$

donc $\alpha_j g=g_j$ et $\alpha_j f_m \xrightarrow[L_2(U,U\times\mathbb{C}^m)]{} \alpha_j g$. Ainsi $f_m \xrightarrow[\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)]{} g$.

c) Cela résulte immédiatement de la preuve de b).

d) Il est évident que l'application

$$(r_{VU}:\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m) \to \mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^m))$$

est continue lorsque $V\in\mathcal{U}$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que le système de semi-normes initial pour la famille $((r_{VU}:\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m) \to \mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^n)))_{V\in\mathcal{U}}$ est plus fort que celui de $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$.

Soit $(\varphi_V)_{V\in\mathcal{U}}$ une partition de l'unité de classe C_∞ localement finie, subordonnée à $\mathcal{U}$. On sait que

$$\alpha = \sum_{\substack{V\in\mathcal{U} \\ [\varphi_V]\cap[\alpha]\neq\emptyset}} \varphi_V\alpha \quad \text{par conséquent} \quad p_{\alpha,U} = \sum_{\substack{V\in\mathcal{U} \\ [\varphi_V]\cap[\alpha]\neq\emptyset}} p_{\varphi_V\alpha,U}.$$

Or $p_{\varphi_V\alpha,U} = p_{\varphi_V\alpha,V} \circ r_{VU}$ donc $p_{\alpha,U} \leq \sum_{\substack{V\in\mathcal{U} \\ [\varphi_V]\cap[\alpha]\neq\emptyset}} p_{\varphi_V\alpha,V} \circ r_{VU}$

Cela prouve b) car $\varphi_V\alpha\in D(V)$.

e) Soient T un élément de $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$ et α un élément de $D(V)$. Choisissons une section loc-intégrable σ à laquelle T est associé. La distribution (Ψ,φ) T est associée à la section $\Psi\circ\sigma\circ\bar{\varphi}^1$ de $V\times\mathbb{C}^m$.

On sait que $(\alpha\Psi\circ\sigma\circ\bar{\varphi}^1)_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha\Psi_{ji}\circ\bar{\varphi}^1\ \sigma_i\circ\bar{\varphi}^1$.

L'inégalité de Schwartz montre alors que

$$\sum_{j=1}^{m}|(\alpha\Psi\circ\sigma\circ\bar{\varphi}^1)_j|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}|\alpha\Psi_{ji}\circ\bar{\varphi}^1|^2\right).\left(\sum_{i=1}^{m}|\sigma_i\circ\bar{\varphi}^1|^2\right)$$

Le théorème d'intégration par changement de variable montre alors que $\alpha(\Psi\circ\sigma\circ\bar{\varphi}^1)\in L_2(V,V\times\mathbb{C}^m)$ et que

$$\|\alpha(\Psi\circ\sigma\circ\bar{\varphi}^1)\|_{2,V}^2 \leq \sup_{\bar{\varphi}^1([\alpha])}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\Psi_{ji}|^2.|\det D\varphi|\right)\|\alpha\circ\varphi.\sigma\|_{2,U}$$

On en déduit que pour tout $\alpha\in D(V)$ il existe $C>0$ et $\beta\in D(U)$ tel que $p_{\alpha,V}((\Psi,\varphi)\ T) \leq C\ p_{\beta,U}(T)$ pour tout $T\in\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$. Cela prouve que l'application

$((\Psi,\varphi) : \mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)\to\mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^m))$ est continue.

Pour conclure, il suffit de remarquer que la réciproque de cette application est l'application

$(\bar{\Psi}^1,\varphi^{-1})$ de $\mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^m)$ dans $\mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m)$.///

DEFINITION II.5.3. Soit E un fibré vectoriel complexe de base M et de rang n complètement trivialisable. Choisissons une trivialisation complète (φ,Ψ) de E. On note $\mathcal{L}_2(M,E)$ le sous-vectoriel de $\mathcal{D}(M,E)$ formé des sections

distributions T pour lesquelles $(\varphi,\psi)\, T \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m)$.
On munit $\mathcal{L}_2(M,E)$ de la topologie loc convexe déduite de celle de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m)$ au moyen de la bijection linéaire (φ,ψ) .
La partie e) de la proposition II. .2 nous assure que la structure d'espace vectoriel topologique de $\mathcal{L}_2(M,E)$ ne dépend pas de la trivialisation complète choisie pour la définir.

DEFINITION II.5.4. Soit E un fibré vectoriel complexe de base M. Notons $\mathcal{U}$ le recouvrement de M par les ouverts au-dessus desquels E est complètement trivialisable.
On note $\mathcal{L}_2(M,E)$ le sous vectoriel de $\mathcal{D}(M,E)$ formé des sections distributions T telle que $r_{UM}(T) \in \mathcal{L}_2(U, E_{|U})$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. On munit $\mathcal{L}_2(M,E)$ de la topologie initiale pour la famille d'applications $((r_{UM} : \mathcal{L}_2(M,E) \to \mathcal{L}_2(U,E_{|U})))_{U\in\mathcal{U}}$.
La partie d) de la proposition II.5.2 montre que cette définition coïncide avec la définition II.5.3 lorsque E est complètement trivialisable.

PROPOSITION II.5.5. Soit E un fibré vectoriel complexe de base M.

a) L'injection canonique de $\mathcal{L}_2(M,E)$ dans $\mathcal{D}(M,E)$ est continue
b) Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de M, alors la topologie de $\mathcal{L}_2(M,E)$ est initiale pour la famille d'applications $(r_{UM} : \mathcal{L}_2(M,E) \to \mathcal{L}_2(U,E_{|U}))_{U\in\mathcal{U}}$.
c) $\mathcal{L}_2(M,E)$ est de Fréchet,

Preuve:

a) résulte de II.5.2c et de la théorie des distributions

b) résulte immédiatement de II.5.2d et de la définition II.5.4

c) Soit $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de M par des ouverts au-dessus desquels E est complètement trivialisable. Notons r l'application de $\mathcal{L}_2(M,E)$ dans $\prod_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_2(U_m,E_{|U_m})$ définie par $r(T) = (r_{U_m M}(T))_{m\in\mathbb{N}}$.

La partie b) de cette proposition montre que r est une application continue relativement ouverte.

Il résulte de la théorie des distributions que r est injective et que

$$\operatorname{im} r = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Big\{T = T \in \prod_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_2(U_p,E_{|U_p}),$$

$$r_{U_m\cap U_n,U_m} \circ p_m(T) = r_{U_n\cap U_m,U_n} \circ p_n(T)\Big\}$$

Ainsi $\operatorname{im} r$ est fermé dans $\prod_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_2(U_p,E_{|U_p})$. On en déduit aussitôt la thèse car les espaces $\mathcal{L}_2(U_p,E_{|U_p})$ sont de Fréchet.///

II.6. Espace $\mathcal{W}_s(M,E)$

DEFINITION II.6.1. Soient E un fibré vectoriel complexe dont la base M est de Lindelöf et s un naturel. On note $\mathcal{W}_s(M,E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(M,E)$. sections-distributions T telles que $P(T) \in \mathcal{L}_2(M,F)$ pour tout fibré vectoriel complexe F de base M et pour tout opérateur différentiel linéaire P de E dans F, d'ordre inférieur ou égal à s.

On munit $\mathcal{W}_s(M,E)$ de la topologie la moins fine rendant continue les applications de la forme $(P:\mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{L}_2(M,F))$ où F est un vibré vectoriel complexe et où P est un opérateur différentiel linéaire de E dans F d'ordre inférieur ou égal à s.

PROPOSITION II.6.2. Soit E un fibré vectoriel complexe de base M.

a) Si U est un ouvert de M alors $r_{UM}(\mathcal{W}_s(M,E)) \subset \mathcal{W}_s(U,E_{|U})$.

b) Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de M alors la topologie de $\mathcal{W}_s(M,E)$ est initiale pour la famille d'applications $((r_{UM}: \mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{W}_s(U,E_{|U})))_{U\in\mathcal{U}}$.

<u>Preuve:</u> a) Soient U un ouvert de M, F un fibré vectoriel de base U et P un o.d.l. de $E_{|U}$ dans F d'ordre $\leq s$. Soient V un ouvert de U au-dessus duquel F est trivialisable et $(\varphi : F_{|V} \to V\times\mathbb{C}^m)$ une trivialisation de $F_{|V}$. Pour tout $\alpha \in D(V)$ notons P_α l'o.d.l. de E dans $M\times\mathbb{C}^m$ définie par $P_\alpha(\sigma) = \alpha\varphi \circ P_{|V} \circ r_{VM}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma(M,E)$. Par définition l'application $(P_\alpha : \mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{L}_2(M,M\times\mathbb{C}^m))$ est continue.

Ainsi l'application (r_{VM} o $P_\alpha : \mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{L}_2(V,V\times\mathbb{C}^m)$) est continue. On en déduit que l'application

($\alpha\, r_{VU}$ o P o $r_{UM} : \mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{L}_2(V,F_{|V})$) est continue pour tout ouvert V de U au-dessus duquel F est trivialisable et pour tout $\alpha \in D(V)$. La proposition II.5.5b montre que l'application (P o $r_{UM} : \mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{L}_2(U,F)$) est continue.

On en déduit immédiatement que

$r_{UM}(\mathcal{W}_s(M,E)) \subset \mathcal{W}_s(U,E_{|U})$ et que l'application

($r_{UM} : \mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{W}_s(U,E_{|U})$) est continue.

b) est une conséquence immédiate de la proposition II.5.5b et de ce qui précède.///

PROPOSITION II.6.3. Si (φ,ψ) est un isomorphisme entre le fibré vectoriel complexe E de base M et le fibré vectoriel complexe F de base N alors l'application

$((\varphi,\psi) : \mathcal{W}_s(M,E) \to \mathcal{W}_s(N,E))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

<u>Preuve</u>: Cela résulte immédiatement de la définition II.6.1 et de la proposition II.5.2e.///

DEFINITION II.6.4. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors on pose $p_{\alpha,U,s}(T) = \sum_{|\beta|\le s} p_{\alpha,U}(D^\beta T)$, pour tout $T \in \mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m)$, $\alpha \in D(U)$.

PROPOSITION II.6.5. La topologie de $\mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m)$ est définie par le système de semi-normes $(p_{\alpha,U,s})_{\alpha\in D(U)}$.

Preuve: Notons $\mathcal{T}$ la topologie définie sur $\mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m)$ par le système de semi-normes $(p_{\alpha,U,s})_{\alpha\in D(U)}$.
La définition II.6.1. montre que l'application $(D^\beta : \mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m) \to \mathcal{L}_2(U,U\times\mathbb{C}^m))$ est continue pour tout n-indice β de longueur inférieure ou égale à s.
Par conséquent, la topologie $\mathcal{T}$ est moins fine que la topologie de $\mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m)$. Soit P un o.d.l. d'ordre $\leq s$ de $U\times\mathbb{C}^m$ dans un fibré vectoriel F de base U et de rang r.
Soient V un ouvert de U au-dessus duquel F est trivialisable φ un trivialisation de F au-dessus de V, α une fonction de D(V) et T une section distribution de $U\times\mathbb{C}^m$.
On a $[\varphi \circ r_{VU} \circ P(T)]_j = [\varphi \circ P_{|V}(T_{|V})]_j$

$$[\varphi \circ r_{VU} \circ P(T)]_j = \sum_{|\beta|\leq} \sum_{i=1}^{m} A_{ji}^{\beta} D^{\beta}(T_{|V})_i \quad \text{où } A_{ji}^{\beta} \in C_\infty(V).$$

Une majoration immédiate montre qu'il existe une constante C telle que $\|\alpha\varphi \circ r_{VU} \circ P(T)\|_{2,V} \leq C \sum_{|\beta|\leq s} \|\alpha D^\beta T_{|V}\|_{2,V}$.

On a donc l'inégalité suivante

$$\|\alpha\varphi \circ r_{VU} \circ P(T)\|_{2,V} \leq C\, p_{\alpha,U,s}(T).$$

La proposition II.5.5b montre alors que l'application $(P : \mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m) \to \mathcal{L}_2(U,F))$ est continue lorsque $\mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m)$ est muni de la topologie $\mathcal{T}$. Ainsi la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie de $\mathcal{W}_s(U,U\times\mathbb{C}^m)$.///

PROPOSITION II.6.6. L'espace $\mathcal{W}_s(M,E)$ est de Fréchet

Preuve:

a) Prouvons que $\mathcal{W}_s(M,E)$ est séparé et complet.

L'injection canonique I de $\mathcal{W}_s(M,E)$ dans $\mathcal{L}_2(M,E)$ est continue donc $\mathcal{W}_s(M,E)$ est séparé. Soient $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy de $\mathcal{W}_s(M,E)$ et P un o.d.l. de E dans F. $P(\mathfrak{F})$ est un filtre de Cauchy de $\mathcal{L}_2(M,F)$, notons x_p sa limite. La proposition II.5.5a montre que $P(\mathfrak{F})$ converge vers x_p dans $\mathfrak{D}(M,F)$. Comme $I(\mathfrak{F}) \xrightarrow[\mathfrak{D}(M,E)]{} x_I$ on sait que $P(\mathfrak{F}) \xrightarrow[\mathfrak{D}(M,F)]{} P(x_I)$. On en déduit que $x_p = P(x_I)$. Par conséquent $x_I \in \mathcal{W}_s(M,E)$ et $\mathfrak{F} \xrightarrow[\mathcal{W}_s(M,E)]{} x_I$. Ainsi tout filtre de Cauchy de $\mathcal{W}_s(M,E)$ est convergent.

b) Prouvons que $\mathcal{W}_s(M,E)$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages de zéro.
Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement dénombrable de M par des ouverts au-dessus desquels E est complètement trivialisable.
En combinant les propositions II.6.3 et II.6.5. on voit immédiatement que $\mathcal{W}_s(U,E_{|U})$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages de zéro lorsque $U\in\mathcal{U}$. La proposition II.6.2. permet alors de conclure.///

PROPOSITION II.6.7. Soient E et F deux fibrés vectoriels de base M et P un o.d.l. d'ordre r de E dans F. L'application $(P : \mathcal{W}_{s+r}(M,E) \to \mathcal{W}_s(M,F))$ est continue.

<u>Preuve</u>: Cela résulte immédiatement de la définition II.6.1.///

PROPOSITION II.6.8. L'injection canonique de $\Gamma(M,E)$ dans $\mathcal{W}_s(M,E)$ est continue.

<u>Preuve</u>: La proposition II.6.2 montre qu'il suffit de prouver la proposition lorsque E est complètement trivialisable. Mais dans ce cas, l'énoncé est évident.///

II.7. Espace $\mathcal{W}_s^c(M,E)$

DEFINITION II.7.1. Soient $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de M ordonné par inclusion et K un élément de $\mathcal{K}$. On note $\mathcal{W}_s^K(M,E)$ le sous espace vectoriel topologique fermé de $\mathcal{W}_s(M,E)$ formé des sections-distributions dont le support est inclus dans K. Si K,K' sont deux compacts de M tels que $K \subset K'$ alors $\mathcal{W}_s^K(M,E) \subset \mathcal{W}_s^{K'}(M,E)$ et l'injection canonique $i_{KK'}$ associée à cette inclusion est continue. Il est clair que $(\mathcal{W}_s^K(M,E), i_{KK'})$ est un système inductif d'espaces vectoriels topologiques localement convexes.
On note $\mathcal{W}_s^c(M,E)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{W}_s(M,E)$ formé des sections-distributions à support compact et i_K l'injection canonique de $\mathcal{W}_s^K(M,E)$ dans $\mathcal{W}_s^c(M,E)$. Munissons $\mathcal{W}_s^c(M,E)$ de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications i_K ,$K \in \mathcal{K}$. Une vérification triviale montre que $(\mathcal{W}_s^c(M,E), i_K)$ est une limite inductive du système inductif $(\mathcal{W}_s^K(M,E),\ i_{KK'})$.

PROPOSITION II.7.2. $\mathcal{W}_s^c(M,E)$ est un espace séparé complet.

<u>Preuve</u>: Soit $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite fondamentale de compacts de M. Posons $\mathcal{K}' = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{K_m\}$. $\mathcal{K}'$ est une partie cofinale de $\mathcal{K}$ par conséquent $\varinjlim_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_s^{K_m}(M,E) \cong \mathcal{W}_s^c(M,E)$. Ainsi $\mathcal{W}_s^c(M,E)$ est une limite inductive hyperstricte d'espaces de Fréchet, ce qui suffit.///

PROPOSITION II.7.3. Soient U un ouvert de M, K un compact de U et E un fibré vectoriel complexe de base M. Il y a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels topologiques entre $\mathcal{W}^K_s(U,E_{|U})$ et $\mathcal{W}^K_s(M,E)$.

Preuve: Notons j l'application de $\mathcal{W}^K_s(U,E_{|U})$ dans $\mathcal{W}^K_s(M,E)$ qui à tout élément de T de $\mathcal{W}^K_s(U,E_{|U})$ associe l'élément j(T) de $\mathcal{W}^K_s(M,E)$ obtenu en prolongeant T par zéro sur CK. Il est clair que j est une bijection linéaire de $\mathcal{W}^K_s(U,E_{|U})$ dans $\mathcal{W}^K_s(M,E)$ dont la réciproque est l'application $\tau_{UM} | \mathcal{W}^K_s(M,E)$. Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que l'application j est continue. Mais cela résulte immédiatement de la proposition II.6.2. en prenant pour recouvrement $\mathcal{U}$ le recouvrement ouvert $\{U,CK\}$ de M.///

PROPOSITION II.7.4. Si P est un o.d.l. d'ordre r du fibré E dans le fibré F alors l'application $(P: \mathcal{W}^c_{s+r}(M,E) \to \mathcal{W}^c_s(M,E))$ est continue.

Preuve: C'eet une conséquence immédiate de la proposition II.6.7 et de la définition II.7.1.///

PROPOSITION II.7.5. $\mathcal{W}^c_s(M,E)$ est dense dans $\mathcal{W}_s(M,E)$

Preuve: Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de M par des ouverts relativement compacts. Pour toute partie finie J de $\mathcal{U}$ il existe une fonction α de D(M) égale à 1 sur UJ. Si $\sigma \in \mathcal{W}_s(M,E)$ alors $\alpha\sigma \in \mathcal{W}^c_s(M,E)$ et $r_{UM}(\sigma - \alpha\sigma) = 0$ pour tout $U \in J$. Ainsi tout voisinage de σ dans $\mathcal{W}_s(M,E)$ contient un élément de $\mathcal{W}^c_s(M,E)$, ce qui suffit.///

PROPOSITION II.7.6. $D(M,E)$ est dense dans $\mathcal{W}_s^c(M,E)$

Preuve:

a) Envisageons d'abord le cas $M=\mathbb{R}^n$, $E=\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m$. Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et α un élément de $\mathcal{W}_s^K(M,E)$. Posons $J_\varepsilon(\alpha) = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i * \rho_\varepsilon)e_i$. Si β est n-indice de longueur inférieure ou égale à s alors

$D^\beta\alpha \in \mathcal{L}_2^K(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ et $J_\varepsilon(D^\beta\alpha) \xrightarrow[\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)]{} D^\beta\alpha$,

lorsque $\varepsilon \to 0$. Or, $[J_\varepsilon(\alpha)]\subset[\alpha]+\varepsilon B_n$ et $J_\varepsilon(D^\beta\alpha)=D^\beta(J_\varepsilon(\alpha))$.

Par conséquent, $J_\varepsilon(\alpha) \xrightarrow[\mathcal{W}_s^{K+B_n}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)]{} \alpha$ lorsque $\varepsilon \xrightarrow[]0,1[]{} 0$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que $J_\varepsilon(\alpha)\in D(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ pour tout $\varepsilon\in]0,1[$.

b) Passons au cas général. Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement de M formé des ouverts difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ au-dessus desquels E est trivialisable. Soit $(\varphi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ une partition de l'unité C_∞, localement finie, subordonnée à $\mathcal{U}$. Pour tout $\omega\in\mathcal{W}_s^c(M,E)$ et pour tout $U\in\mathcal{U}$, ${}_{UM}(\varphi_U\,\omega)\in\mathcal{W}_s^c(U,E_{|U})$ et il résulte de a) qu'il existe une suite $(\alpha_m^U)_{m\in\mathbb{N}}$ de $D(U,E_{|U})$ et un compact K_U de U, tels que $\alpha_m^U \xrightarrow[\mathcal{W}_s^{K_U}(U,E_{|U})]{} r_{UM}(\varphi_U\,\omega)$.

Notons β_m^U l'élément de $D(M,E)$ obtenu en prolongeant α_m^U par zéro sur CK_U. La proposition II.7.3. permet d'affirmer que $\beta_m^U \xrightarrow[\mathcal{W}_s^{K_U}(M,E)]{} \varphi_U\omega$. On en déduit que

$\sum_{[\varphi_U]\cap[\omega]\neq\emptyset} \beta_m^U \xrightarrow[\mathcal{W}_s^c(M,E)]{} \omega$ et que $\omega\in\overline{D(M,E)}^{\mathcal{W}_s^c(M,E)}$ .///

PROPOSITION II.7.7. L'injection canonique de $D(M,E)$ dans $\mathcal{W}_s^c(M,E)$ est continue.

Preuve: Cela résulte immédiatement de la proposition II.6 8 et de la définition II.7.1.///

II.8. Lemmes de régularité

PROPOSITION II.8.1. Si P est un o.d.l. de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s$ d'ordre 1 alors $(P \circ J_\varepsilon - J_\varepsilon \circ P)(f) \xrightarrow[\mathcal{L}_2^c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s)]{} 0$ si $\varepsilon \xrightarrow[]0,1[]{} 0$ et si $f \in \mathcal{L}_2^c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r)$

Preuve: a) Si P est d'ordre 0, la proposition est évidente car $PoJ_\varepsilon(\omega)$ et $J_\varepsilon oP(\omega)$ converge vers $P(\omega)$ dans $\mathcal{L}_2^c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s)$ Par linéarité on est aussitôt ramené à prouver la proposition lorsque P est de la forme AD_i où A est une application de classe C_∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $M_{s,r}(\mathbb{R})$.

b) Soit ω un élément de $\Gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r)$ tel que $[\omega] \subset K$. Posons $B = PoJ_\varepsilon(\omega) - J_\varepsilon oP(\omega)$, on a successivement:

$$B = AoJ_\varepsilon(D_i\omega) - J_\varepsilon(AD_i\omega)$$

$$B(x) = \int A(x) D_i\omega(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy - \int A(y)D_i\omega(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy$$

$$B(x) = \int (A(x)-A(y))\, D_i\omega(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy$$

$$B(x) = -\int D_i[(A(x)-A(y))\rho_\varepsilon(x-y)]\omega(y)dy$$

$$B(x) = +\int D_iA(y)\rho_\varepsilon(x-y)\omega(y)dy + \int (A(x)-A(y))D_i\rho_\varepsilon(x-y)\omega(y)dy$$

$$\|B(x)\| = \sqrt{1(K)}\Big(\sqrt{\int \|D_iA(y)\|^2|\rho_\varepsilon(x-y)|^2\|\omega(y)\|^2dy} + \sqrt{\int \|A(x)-A(y)\|^2|D_i\rho_\varepsilon(x-y)|^2\|\omega(y)\|^2dy}\Big)$$

$$\|B(x)\| = \sqrt{1(K)}\Big(\sup_K\|D_iA(y)\|\sqrt{\int\|\omega(x+\varepsilon z)\|^2|\rho(z)|^2dz} + \sup_{\substack{y\in K\\ |x-y|\le\varepsilon}}\frac{\|A(x)-A(y)\|}{\varepsilon}\sqrt{\int\|\omega(x+\varepsilon z)\|^2|D_i\rho(z)|^2dz}\Big)$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\|B(x)\| \leq C\sqrt{\int \|\omega(x+\varepsilon z)\|^2(|\rho(z)|^2+|D_i\,\rho(z)|^2)dz}$$

$$\|B\|_2^2 \leq C^2\int \|\omega(x)\|^2dx \int (|\rho(z)|^2+|D_i\rho(z)|^2)dz$$

Finalement il existe une constante C_K telle que

$$\|P \circ J_\varepsilon(\omega) - J_\varepsilon \circ P(\omega)\|_2 \leq C_K\|\omega\|_2.$$

c) Soit f un élément de $\mathcal{L}_2^K(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r)$. On sait qu'il existe un compact K' contenant K et une suite $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $D(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^r)$ telle que $\omega_m \xrightarrow[\mathcal{L}_2^{K'}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^r)]{} f$.

La partie b) montre que

$\|PoJ_\varepsilon(\omega_p-\omega_q) - J_\varepsilon oP(\omega_p-\omega_q)\| \leq C_K\|\omega_p-\omega_q\|$. Par conséquent la suite $(PoJ_\varepsilon(\omega_m) - J_\varepsilon oP(\omega_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}_2^{K'_\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^r)$ et sa limite coïncide avec sa limite faible. On en déduit que

$PoJ_\varepsilon(\omega_m) - J_\varepsilon oP(\omega_m) \xrightarrow[\mathcal{L}_2^{K'_\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^r)]{} PoJ_\varepsilon(f) - J_\varepsilon oP(f)$, puis

que $\|PoJ_\varepsilon(\omega_m-f) - J_\varepsilon oP(\omega_m-f)\| \leq C_K.\|\omega_m-f\|$ (1)

Fixons $\eta>0$. Choisissons N suffisamment grand pour que $\|\omega_N-f\| \leq \dfrac{\eta}{2C_K}$, puis choisissons ε_0 suffisamment petit pour que $\|PoJ_\varepsilon(\omega_N) - J_\varepsilon oP(\omega_N)\| \leq \dfrac{\eta}{2}$ lorsque $\varepsilon\leq\varepsilon_0$.

La majoration (1) montre que $\|PoJ_\varepsilon(f) - J_\varepsilon oP(f)\| \leq \eta$ lorsque $\varepsilon\leq\varepsilon_0$. La proposition se déduit immédiatement du raisonnement précédent.///

DEFINITION II.8.2. Soit M une variété différentielle et E,F deux fibrés vectoriels complexes de base M. Si P est un o.d.l. de E dans F, on note $D_{P,p}$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_2(M,E)$ formé des sections-distributions T pour lesquelles $P(T)\in \mathcal{W}_p(M,F)$. On munit $D_{P,p}$ de la topologie loc. convexe initiale pour les applications

$(id:D_{P,p}\to \mathcal{L}_2(M,E)),(P:D_{P,p}\to \mathcal{W}_p(M,F))$.

Si K est un compact de M, on note $D^K_{P,p}$ le sous espace vectoriel topologique fermé de $D_{P,p}$ formé des sections-distributions à support inclus dans K.
On note $D^c_{P,p}$ le sous espace vectoriel de $D_{P,p}$ formé des sections-distributions à support compact. On munit $D^c_{P,p}$ de la topologie loc. convexe la plus fine rendant continues les injections canoniques des espaces $D^K_{P,p}$ dans l'espace $D^c_{P,p}$.

PROPOSITION II.8.3. L'espace vectoriel topologique $D_{P,p}$ est de Fréchet.

<u>Preuve</u>: L'application $(P:\mathfrak{D}(M,E)\to \mathfrak{D}(M,F))$ est continue, donc son graphe G est fermé. On en déduit que $G\cap(\mathcal{L}_2(M,E)\times \mathcal{W}_p(M,F))$ est fermé dans $\mathcal{L}_2(M,E)\times\mathcal{W}_p(M,F)$. Ainsi le graphe G' de l'application $(P:D_{P,p}\to\mathcal{W}_p(M,F))$ est fermé dans $\mathcal{L}_2(M,E)\times\mathcal{W}_p(M,F)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'application $(Q:D_{P,p}\to G')$, définie par $Q(x) = (x,P(x))$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.///

PROPOSITION II.8.4. Soient E,F deux fibrés vectoriels complexes de base M.
Si P est un o.d.l. de E dans F d'ordre ≤ 1 alors $D(M,E)$ est un sous espace vectoriel dense de $D^c_{P,o}$.

<u>Preuve</u>:

a) Traitons d'abord le cas où $M = \mathbb{R}^n, E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r$, $F = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s$.
Soit ω un élément de $D^c_{P,o}$. La proposition II.8.1. montre que $P o J_\varepsilon(\omega) - J_\varepsilon o P(\omega) \xrightarrow[\mathcal{L}^c_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s)]{} 0$ lorsque $\varepsilon \xrightarrow[]0,1[]{} 0$. Or $P(\omega) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s)$ et $\omega \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r)$ donc $J_\varepsilon o P(\omega) \xrightarrow[\mathcal{L}^c_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s)]{} P(\omega)$ & $J_\varepsilon(\omega) \xrightarrow[\mathcal{L}^c_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r)]{} \omega$ lorsque $\varepsilon \xrightarrow[]0,1[]{} 0$. On en déduit que $J_\varepsilon(\omega) \xrightarrow[D^c_{P,o}]{} \omega$ lorsque $\varepsilon \xrightarrow[]0,1[]{} 0$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $J_\varepsilon(\omega) \in D(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^r)$.

b) Traitons le cas général. Soient ω un élément de $D^c_{P,o}$ et $\mathcal{U}$ un recouvrement de M par des ouverts au-dessus desquels E et F sont complètement trivialisables.
Choisissons une partition de l'unité $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ de classe C, loc. finie, subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Pour tout $U \in \mathcal{U}$ la section distribution $\omega\varphi_{U|U}$ appartient à $D^c_{P_{|U},o}$ car $P_{|U}$ est d'ordre ≤ 1. Le cas précédent montre qu'il existe une suite ω^U_m de $D(U, E_{|U})$ telle que $\omega^U_m \xrightarrow[D^c_{P_{|U},o}]{} \omega\varphi_{U|U}$.
Comme l'injection canonique i_U de $D^c_{P_{|U},o}$ dans $D^c_{P,o}$ est continue, on sait que $i_U(\omega^U_m) \xrightarrow[D^c_{P,o}]{} \omega\varphi_U$. On en déduit

que $\sum_{[\omega]\cap[\varphi_U]\neq\emptyset} i_U(\omega_m^U) \xrightarrow[D^c_{p,o}]{} \omega$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\sum_{[\omega]\cap[\varphi_U]\neq\emptyset} i_U(\omega_m^U) \in D(M,E)$.///

PROPOSITION II.8.5. Soit p un naturel. Si E et F sont deux fibrés vectoriels complexes de base M, si P est un o.d.l. d'ordre ≤ 1 de E dans F et si la topologie de $D_{P,o}$ est plus forte que celle de $\mathcal{W}_1(M,E)$ sur $D(M,E)$ alors l'injection canonique de $\mathcal{W}_{p+1}(M,E)$ dans $D_{P,p}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Preuve:

a) Traitons d'abord le cas p=o. La proposition II.8.4. montre que $D(M,E)$ est dense dans $D_{P,o}$, car il est évident que $D^c_{P,o}$ est dense dans $D_{P,o}$. Notons T l'application continue de $D_{P,o}$ dans $\mathcal{W}_1(M,E)$ obtenue en prolongeant par densité l'injection canonique de $D(M,E)$ dans $\mathcal{W}_1(M,E)$ et notons I l'injection continue canonique de $\mathcal{W}_1(M,E)$ dans $D_{P,o}$. On sait que $T \circ I \underset{D(M,E)}{=} id_{\mathcal{W}_1(M,E)}$ et que $I \circ T \underset{D(M,E)}{=} id_{D_{P,o}}$. On en déduit immédiatement que $(I: \mathcal{W}_1(M,E) \to D_{P,o})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel topologique.

b) Supposons la proposition exacte pour p=r et prouvons la pour p=r+1. Il est évident qu'on peut se limiter au cas où M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et où $E = M\times\mathbb{C}^l$, $F = M\times\mathbb{C}^s$. Soit σ un élément de $D_{P,r+1}$. Comme $\sigma\in D_{P,r}$, on sait que $\sigma\in\mathcal{W}_{r+1}(M,M\times\mathbb{C}^l)$. L'opérateur $P\circ D_i - D_i\circ P$ est d'ordre ≤ 1 donc $P\circ D_i\sigma\in\mathcal{W}_r(M,M\times\mathbb{C}^s)$.

Ainsi $D_i\sigma \in D_{P,r}$. On en déduit que $D_i\sigma \in \mathcal{W}_{r+1}(M, M\times\mathbb{C}^1)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Par conséquent $\sigma \in \mathcal{W}_{r+2}(M, M\times\mathbb{C}^1)$.
Pour prouver que l'injection canonique de $D_{P,r+1}$ dans $\mathcal{W}_{r+2}(M, M\times\mathbb{C}^1)$ est continue, il suffit de prouver que les applications $(D_i : D_{P,r+1} \longrightarrow \mathcal{W}_{r+1}(M, M\times\mathbb{C}^1))$, $i\in\{1,..,n\}$ sont continues. Or l'injection canonique de $\mathcal{W}_{r+1}(M, M\times\mathbb{C}^1)$ dans $D_{P,r}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques donc il suffit de montrer que les applications $(P\circ D_i : D_{P,r+1} \longrightarrow \mathcal{L}_2(M, M\times\mathbb{C}^1))$ sont continues pour $i\in\{1,\ldots,n\}$. Mais cela résulte immédiatement de ce que l'opérateur $P\circ D_i - D_i\circ P$ est d'ordre ≤ 1.
Pour conclure il suffit de remarquer que l'injection canonique de $D_{P,r+1}$ dans $\mathcal{W}_{r+2}(M, M\times\mathbb{C}^1)$ est l'application réciproque de l'injection canonique de $\mathcal{W}_{r+2}(M, M\times\mathbb{C}^1)$ dans $D_{P,r+1}$.

c) La proposition se déduit de a) et de b) en raisonnant par récurrence sur p. ///

DEFINITION II.8.6. Si $X \in \mathcal{T}^1_0(\mathbb{R}^{2n})$ et si $r \in \mathbb{R}^*$, on pose ${}^rX = r.(m_{\frac{1}{r}})_*(X)$

PROPOSITION II.8.7. Soit $(X_1,\ldots,X_n,\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n)$ une base de $\mathcal{T}^1_0(\mathbb{R}^{2n})$.
Pour tout compact K de $\mathbb{R}^{2n}$ il existe une constante $c>0$ telle que $\sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_2 \leq c\,(\|u\|_2 + \sum_{j=1}^{n} \|{}^rX_i\, u\|_2)$ pour tout $u \in D^K(\mathbb{R}^{2n})$ et pour tout $r \in]o,1[$.

<u>Preuve</u>:

a) Soit X un élément de $\mathcal{T}^1_o(\mathbb{R}^{2n})$. On sait que $X^*f=-\overline{X}f-\mathrm{div}\overline{X}f$

On en déduit que $X^*X-\overline{X}^*\overline{X}=[X,\overline{X}]+(\mathrm{div}\ X)\overline{X}-(\mathrm{div}\ \overline{X})X$. Ainsi $(X^*X-\overline{X}^*\overline{X})^k=\sum_{j=1}^{2n}(X^jD_j\overline{X}^k-\overline{X}^jD_jX^k+D_jX^j\overline{X}^k-D_j\overline{X}^jX^k)$. Or ${}^rX^k(x)=X^k(rx)$ donc il existe une constante C telle que

$$\|({}^rX^*\ {}^rX-{}^r\overline{X}^*\ {}^r\overline{X})(u)\|_2\leq C\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_2 \text{ pour tout } u\in D^K(\mathbb{R}^{2n})$$

Il est clair que $\|Xu\|_2^2-\|\overline{X}u\|_2^2=\int(X^*X-\overline{X}^*\overline{X})u\,\overline{u}\,dx$, donc

$\|{}^r\overline{X}u\|_2^2\leq\|{}^rXu\|_2^2+\frac{C}{\varepsilon}(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_2)\varepsilon\|u\|_2$ si $u\in D^K(\mathbb{R}^{2n})$ et si $\varepsilon>0$. On en déduit que

$\|{}^r\overline{X}u\|_2^2\leq\|{}^rXu\|_2^2+\varepsilon^2(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_2)^2+\frac{C^2}{\varepsilon^2}\|u\|^2$ si $u\in D^K(\mathbb{R}^{2n})$ et si $\varepsilon>0$. Finalement $\|{}^r\overline{X}u\|_2\leq\|{}^rXu\|_2+\varepsilon(\sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha u\|_2)+\frac{C}{\varepsilon}\|u\|_2$ pour tout $u\in D^K(\mathbb{R}^{2n})$, $\varepsilon>0$.

b) Soit $(X_1,\dots,X_n,\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_n)$ une base de $\mathcal{T}^1_o(\mathbb{R}^{2n})$. On sait que $D_j=\sum_{i=1}^n\alpha_j^i X_i+\sum_{i=1}^n\beta_j^i\overline{X}_i$, on en déduit que $(D_j)_x=\sum_{i=1}^n\alpha_j^i(rx)({}^rX_i)_x+\sum_{i=1}^n\beta_j^i(rx)({}^r\overline{X}_i)_x$. Il existe donc une constante C' telle que

$\sum_{j=1}^{2n}\|D_ju\|_2\leq C'\sum_{i=1}^n(\|{}^rX_iu\|_2+\|{}^r\overline{X}_iu\|_2)$ lorsque $r\in]0,1[$, $u\in D^K(\mathbb{R}^{2n})$. Ainsi il existe une constante C'' telle que

$\sum_{j=1}^{2n}\|D_ju\|_2\leq C'\sum_{i=1}^n(2\|{}^rX_iu\|_2+\varepsilon(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_2)+\frac{C''}{\varepsilon}\|u\|_2)$.

Choisissons ε suffisamment petit pour que $\varepsilon C'<1$, on voit qu'il existe une constante C''' telle que

$\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_2\leq C'''(\|u\|_2+\sum_{j=1}^n\|{}^rX_ju\|_2)$ pour tout $u\in D^K(\mathbb{R}^{2n})$,

et pour tout $r\in]0,1[$. ///

PROPOSITION II.8.8. Si nous conservons les hypothèses et les notations de la proposition précédente alors pour tout compact K de $\mathbb{R}^{2n}$, pour tout voisinage compact K' de K et pour tout entier s, il existe une constante C telle que $\sum_{|\alpha|\leq s+1}\int_K |D^\alpha u|^2 dx \leq C(\sum_{|\alpha|\leq s}\sum_{j=1}^{n}\int_{K'} |D^\alpha\, {}^rX_j u|^2 dx + \int_{K'} |u|^2 dx)$ pour tout $u\in D(\mathbb{R}^{2n})$, $s\in\mathbb{N}$, $r\in]0,1[$.

Preuve: Démontrons la proposition par récurrence sur s. Le cas s=o est une conséquence directe de la proposition précédente. Supposons donc la proposition exacte pour s=k et prouvons la pour s=k+1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^{2n}$ et K' un voisinage compact de K. Choisissons un voisinage compact K" de K inclus dans $\mathring{K}'$. L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{|\alpha|\leq k+1}\int_K |D^\alpha D_l u|^2 dx \leq C(\sum_{|\alpha|\leq k}\sum_{j=1}^{n}\int_{K''} |D^\alpha\, {}^rX_j D_l u|^2 dx + \int_{K''} |D_l u|^2 dx.$$

pour tout $u\in D(\mathbb{R}^{2n})$, $r\in]0,1[$, $l\in\{1,\dots,2n\}$.

Les opérateurs $[D^\alpha\, {}^rX_j, D_k]$ sont d'ordre $\leq k+1$ lorsque $|\alpha|\leq k$ et leurs coefficients sont bornés sur K" indépendamment de r si $r\in]0,1[$.

Il existe donc une constante C' telle que

$$\sum_{|\alpha|\leq k+2}\int_K |D^\alpha u|^2 dx \leq C'(\sum_{|\alpha|\leq k+1}\sum_{j=1}^{n}\int_{K''} |D^\alpha\, {}^rX_j u|^2 dx + \sum_{|\alpha|\leq k+1}\int_{K''} |D^\alpha u|^2 dx$$

pour tout $u\in D(\mathbb{R}^{2n})$, $r\in]0,1[$.

L'hypothèse de récurrence montre alors qu'il existe une constante C" telle que

$$\sum_{|\alpha|\leq k+2}\int_K |D^\alpha u|^2 dx \leq C''(\sum_{|\alpha|\leq k+1}\sum_{j=1}^{n}\int_{K'} |D^\alpha\, {}^rX_j u|^2 dx + \int_{K'} |u|^2 dx)$$

pour tout $u\in D(\mathbb{R}^{2n})$, $r\in]0,1[$. ///

PROPOSITION II.8.9. Si E est un fibré vectoriel complexe dont la base est une variété réelle orientable de dimension n alors $\mathcal{W}_{s+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(M,E)$ est inclus dans $\Gamma_s(M,E)$ et l'injection associée à cette inclusion est continue.

Preuve: Il est clair qu'il suffit de considérer le cas où $M=\mathbb{R}^n$, $E=\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m$.

Supposons que $\varphi\in[D(\mathbb{R}^n)]^m$. On sait que $(2\pi)^n\varphi=\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+(\varphi)$ on en déduit que $(2\pi)^n\|\varphi(x)\|_1\leq\int\|\mathcal{F}_x^+\varphi\|_1\,dx$. Or $\mathcal{F}_x^+(D^\alpha\varphi)=(-ix)^\alpha\mathcal{F}_x^+(\varphi)$ donc $\|\mathcal{F}_x^+(1-\Delta)^s\varphi)\|_1=(1+|x|^2)^s\|\mathcal{F}_x^+\varphi\|_1$ pour tout $s\in\mathbb{N}$. On en déduit que $\|\varphi(x)\|_1\leq\sqrt{\int(1+|x|^2)^{2s}\|\mathcal{F}_x^+\varphi\|_1^2dx}\sqrt{\int(1+|x|^2)^{-2s}\,dx}$ si $4s>n$. Ainsi pour tout $s>\frac{n}{4}$ il existe une constante C_s telle que $\|\varphi(x)\|_1\leq C_s\|\mathcal{F}^+((1-\Delta)^s\varphi)\|_2$. Il en résulte qu'il existe une constante C' telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|\varphi(x)\|_1\leq C'\sum_{|\alpha|\leq\left[\frac{n}{2}\right]+1}\|D^\alpha\varphi\|_2$ pour tout $\varphi\in[D(\mathbb{R}^n)]^m$.

Cette majoration montre que la topologie de $\Gamma_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ est moins forte que celle de $\mathcal{W}_{s+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ sur $D(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$.

On peut donc prolonger par densité l'injection canonique I de $D(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ dans $\Gamma_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ en une application continue T de $\mathcal{W}_{s+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ dans $\Gamma_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ convergent vers f dans $\mathcal{W}_{s+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$. On sait que $f_m\xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)]{}f$, on en déduit que $If_m\xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)]{}f$. Or $If_m\xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)]{}Tf$ donc $Tf=f$ et $f\in\Gamma_s(M,E)$. On en déduit aissitôt que $\mathcal{W}_{s+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)\subset\Gamma_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ et que T coïncide avec l'injection canonique associée à cette inclusion.///

CHAPITRE III

VARIETES PSEUDO-CONVEXES

III.1. Définitions, cohomologie

DEFINITION III.1.1. Une application f d'une variété quasi-holomorphe intégrable dans $\mathbb{R}$ est strictement pseudo-convexe (resp. pseudo-convexe) si elle est de classe C_∞ et si la (1,1) forme $i\partial\bar{\partial}f$ est strictement positive (resp. positive).

Une variété quasi-holomorphe intégrable M est pseudo-convexe s'il existe une fonction φ strict. pseudo-convexe sur M pour laquelle $\varphi^{-1}(]-\infty,r])$ est compact pour tout $r\in\mathbb{R}$. Il est clair qu'une variété pseudo-convexe est à base dénombrable.

REMARQUE III.1.2. Dans la suite de ce chapitre, M est une variété pseudo-convexe, φ est une fonction strict. pseudo-convexe sur M pour laquelle $\varphi^{-1}(]-\infty,r])$ est compact pour tout $r\in\mathbb{R}$ et E est un fibré vectoriel quasi-holomorphe de base M.

PROPOSITION III.1.3. Si $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $D(M)$ qui finit par valoir 1 sur tout compact de M, alors il existe une métrique hermitienne sur M telle que $\|\bar{\partial}\alpha_m\|_{T^*M} \leq 1$ pour tout $m\in\mathbb{N}$.

<u>Preuve</u>: L'hypothèse faite sur la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ montre que la famille $([\bar{\partial}\alpha_m])_{m\subset\mathbb{N}}$ est localement finie.
Munissons M d'une métrique hermitienne h. Soient un recouvrement de M par des ouverts relativement compacts et $(\varphi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ une partition de l'unité, C_∞, positive, subordonnée à $\mathcal{U}$. Si $U\in\mathcal{U}$, on pose $I_U = \{m : m\in\mathbb{N}, [\bar{\partial}\alpha_m]\cap[\varphi_U] \neq \emptyset\}$ et $C_U = \sup\limits_{m\in I_U} (\sup\limits_{M}\|\bar{\partial}\alpha_m\|_{T^*M})$. La fonction $\varphi = \sum\limits_{U\in\mathcal{U}} C_U\varphi_U$ est de classe C_∞ sur M et majore $\|\bar{\partial}\alpha_m\|_{T^*M}$ sur $[\bar{\partial}\alpha_m]$. En effet, si $x\in[\bar{\partial}\alpha_m]$ et si $\varphi_U(x) \neq 0$ alors $m\in I_U$ et $C_U \geq \|\bar{\partial}\alpha_m(x)\|_{T^*_xM}$.
Posons $M = \varphi+1$. Il résulte de la construction ci-dessus que M est une fonction strictement positive de classe C_∞ majorant $\|\bar{\partial}\alpha_m\|_{T^*M}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. La métrique M^2h répond aux conditions de l'énoncé.///

DEFINITION III.1.4. Soit $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite fondamentale de compacts de M. Choisissons une fonction η_m de classe C_∞ comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur K_m et à support inclus dans $\overset{\circ}{K}_{m+1}$. Munissons M d'une métrique hermitienne vérifiant la condition de la proposition IV.1.3. relativement à la suite $(\eta_m)_{m\in\mathbb{N}}$. M conservera cette structure quasi-hermitienne jusqu'à la fin de ce chapitre.
On munit également E d'une métrique hermitienne $(\cdot,\cdot)_E$.

Pour simplifier l'écriture nous noterons $\bar\partial_E^*$ et $\bar\partial_E^*$ les prolongations à $\mathfrak{D}(M,E\otimes\Lambda T^*M)$ des o.d.l. $\bar\partial_E$ et $\bar\partial_E^*$ définis précédemment. Si $p,q\in\mathbb{N}$, on pose $L_2^{p,q}(M,E) = L_2(M,E\otimes\overset{p,q}{\Lambda}T^*M)$

On note $D^{p,q}_{\bar\partial_E}$ l'espace vectoriel $\{f : f\in L_2^{p,q}(M,E), \bar\partial_E f\in L_2^{p,q+1}(M,E)\}$ muni de la topologie initiale pour les applications

$(\bar\partial_E : D^{p,q}_{\bar\partial_E} \to L_2^{p,q+1}(M,E)), (id : D^{p,q}_{\bar\partial_E} \to L_2^{p,q}(M,E))$.

On note $D^{p,q}_{\bar\partial_E^*}$ l'espace vectoriel $\{f : f\in L_2^{p,q}(M,E), \bar\partial_E^* f\in L_2^{p,q-1}(M,E)\}$ muni de la topologie initiale pour les applications

$(\bar\partial_E^* : D^{p,q}_{\bar\partial_E^*} \to L_2^{p,q-1}(M,E)), (id : D^{p,q}_{\bar\partial_E^*} \to L_2^{p,q}(M,E))$.

On note $D_E^{p,q}$ l'espace vectoriel $D^{p,q}_{\bar\partial_E}\cap D^{p,q}_{\bar\partial_E^*}$ muni de la topologie initiale pour les applications

$(\bar\partial_E : D_E^{p,q} \to L_2^{p,q+1}(M,E)), (id : D_E^{p,q} \to L_2^{p,q}(M,E))$,

$(\bar\partial_E^* : D_E^{p,q} \to L_2^{p,q-1}(M,E))$.

PROPOSITION III.1.5. Si $p,q\in\mathbb{N}$ alors $(\bar\partial_E : D^{p,q}_{\bar\partial_E} \to L_2^{p,q+1}(M,E))$ est un o.f.d.d. de $L_2^{p,q}(M,E)$ dans $L_2^{p,q+1}(M,E)$ dont $(\bar\partial_E^* : D^{p,q+1}_{\bar\partial_E^*} \to L_2^{p,q}(M,E))$ est l'adjoint. De plus $A_c^{p,q}(M,E)$ est dense dans $D_E^{p,q}$.

<u>Preuve</u>: a) <u>$\bar\partial_E$ est un o.f.d.d.</u>

Le graphe de $(\bar\partial_E : D^{p,q}_{\bar\partial_E} \to L_2^{p,q+1}(M,E))$ est fermé dans $L_2^{p,q}(M,E)\times L_2^{p,q+1}(M,E)$ car l'application $(\bar\partial_E : \mathfrak{D}(M,E\otimes\Lambda T^*M) \to \mathfrak{D}(M,E\otimes\Lambda T^*M))$ est continue. De plus $D^{p,q}_{\bar\partial_E}$ est dense dans $L_2^{p,q}(M,E)$ car $D^{p,q}_{\bar\partial_E}\supset A_c^{p,q}(M,E)$.

b) Si $f \in D^{p,q}_{\bar\partial_E}$ alors $\alpha_m f \to f$ dans $D^{p,q}_{\bar\partial_E}$.

Il est clair qu'il suffit de prouver que

$\bar\partial_E(f\alpha_m) - (\bar\partial_E f)\alpha_m \to 0$ dans $L_2^{p,q+1}(M,E)$.

Or $\bar\partial_E(f\alpha_m) - (\bar\partial_E f)\alpha_m = f\wedge\bar\partial\alpha_m$

donc $\bar\partial_E(f\alpha_m) - (\bar\partial_E f)\alpha_m \in \mathcal{L}_1(M,E\otimes\Lambda T^*M)$.

De plus la proposition P.2.3. montre que

$\|\bar\partial_E(f\alpha_m) - (\bar\partial_E f)\alpha_m\|_{E\otimes\Lambda T^*M} \leq \sqrt{p+q+1}\,\|f\|_{E\otimes\Lambda T^*M}\,\|\bar\partial\alpha_m\|_{\Lambda T^*M}$.

Etant donné le choix de la métrique de M on voit que

$\|\bar\partial_E(f\alpha_m) - (\bar\partial_E f)\alpha_m\|_{E\otimes\Lambda T^*M} \leq \sqrt{p+q+1}\,\|f\|_{E\otimes\Lambda T^*M}$. On en déduit que $\bar\partial(f\alpha_m) - (\bar\partial f)\alpha_m \in L_2^{p,q+1}(M,E)$ et le théorème de Lebesgue dans v_M-$L_2(M)$ montre que $\bar\partial(f\alpha_m) - (\bar\partial f)\alpha_m \to 0$ dans $L_2^{p,q+1}(M,E)$.

c) $A_c^{p,q}(M,E)$ est dense dans $D^{p,q}_{\bar\partial_E}$.

Cela résulte de (b) et de la proposition II.8.4.

d) $(\bar\partial_E^*: D^{p,q+1}_{\bar\partial_E^*} \longrightarrow L_2^{p,q}(M,E))$ est l'adjoint de $(\bar\partial_E: D^{p,q}_{\bar\partial_E} \longrightarrow L_2^{p,q+1}(M,E))$.

Supposons d'abord que $f \in D^{p,q+1}_{\bar\partial_E^*}$. Soit $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $A_c^{p,q}(M,E)$ convergent vers f dans $L_2^{p,q+1}(M,E)$. Il est clair que $\int(\bar\partial_E^*\varphi_m,\sigma)_{E\otimes\Lambda T^*M}\, v_M \to \int(\bar\partial_E^* f,\sigma)_{E\otimes\Lambda T^*M}\, v_M$ lorsque $\sigma\in A_c^{p,q}(M,E)$ car $\bar\partial_E^*\varphi_m \to \bar\partial_E^* f$ dans $\mathcal{D}(M,E\otimes\Lambda T^*M)$.

On en déduit que $\int(f,\bar\partial_E\sigma)\,v_M = \int(\bar\partial_E^* f,\sigma)\,v_M$. Mais cela signifie que le couple $(f,\bar\partial_E^* f)$ appartient au graphe de l'adjoint de $\bar\partial_E$.

Supposons maintenant que (f,g) appartient au graphe de l'adjoint de $(\bar{\partial}_E : D^{p,q}_{\bar{\partial}_E} \to L_2^{p,q+1}(M,E)$. Cela entraine que $\int (g,\sigma)_{E\otimes\Lambda T^*M} v_M = \int (f,\bar{\partial}_E\sigma)_{E\otimes\Lambda T^*M} v_M$ pour tout $\sigma \in A_c^{p,q}(M,E)$.
Si $(\Psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $A_c^{p,q+1}(M,E)$ qui converge vers f dans $L_2^{p,q+1}(M,E)$ alors $\int (g-\bar{\partial}_E^* \Psi_m,\sigma) v_M \to 0$ pour tout $\sigma\in A_c^{p,q}(M,E)$ et $\bar{\partial}_E^*\Psi_m \to g$ dans $\mathcal{D}(M, E\otimes \Lambda T^*M)$. On en déduit que $g = \bar{\partial}_E^* f$ et que $f\in D^{p,q+1}_{\bar{\partial}^*_E}$.

e) <u>Si</u> $f\in D_E^{p,q}$ <u>alors</u> $\alpha_m f \to f$ <u>dans</u> $D_E^{p,q}$.

On sait déjà que $\alpha_m f \to f$ dans $D^{p,q}_{\bar{\partial}_E}$.
De plus $\bar{\partial}_E^*(\alpha_m f) = -*\#^{-1}\bar{\partial}_E*(\alpha_m(\#*f))$. En utilisant la partie b) et les propriétés de $\#*$ on voit immédiatement que $\bar{\partial}_E^*(\alpha_m f) \to \bar{\partial}_E^* f$ dans $L_2^{p,q-1}(M,E)$. Ainsi $\alpha_m f \to f$ dans $D_E^{p,q}$.

f) $A_c^{p,q}(M,E)$ <u>est dense dans</u> $D_E^{p,q}$.

Cela découle directement de e) et de la proposition II.8.4. appliquée à l'o.d.l. $\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E^*$. ///

DEFINITION III.1.6. Soit Ψ une fonction de classe C_∞ sur M. On note λ_Ψ la fonction qui associe à tout point x de M le réel
$$\inf_{X\in (T'_x M)\setminus\{o\}} \frac{\langle (\partial\bar{\partial}\Psi)_x, X\wedge\bar{X}\rangle}{(X,X)_{T_x M}}.$$
Le lemme A.1.6 montre que l'application $(\lambda_\Psi : M \to \mathbb{R})$ est continue. De plus $\lambda_\Psi > 0$ (resp. ≥ 0) si Ψ est strict. pseudo-convexe (resp. pseudo-convexe).
On note E_Ψ le fibré vectoriel quasi-hermitien obtenu en munissant le fibré vectoriel quasi-holomorphe E de la métrique $e^{-\Psi}(\ ,\ )_E$. On note $(\ ,\ )_\Psi$ la forme hermitienne de $L_2(M, E_\Psi\otimes \Lambda T^*M)$.

PROPOSITION III.1.7. Si U est un ouvert de M, si $(u_1,\dots,u_n)$ est un repère unitaire de $T'U$ et si $(e_1,\dots,e_m)$ est un repère unitaire de $E_{|U}$, alors pour tout compact K de U, il existe une constante C_K telle que

$$(\lambda_\psi\omega,\omega)_\psi + \frac{1}{2}\sum_{\substack{(I)=p\\(J)=q}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left\|\bar{u}_k\omega^l_{I,J}\right\|^2_\psi$$

$$\leq 2\left(\left\|\bar\partial_{E_\psi}\omega\right\|^2_\psi + \left\|\bar\partial^*_{E_\psi}\omega\right\|^2_\psi\right) + \left\|\omega\right\|^2_\psi.$$

si $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}_0$, $\omega\in A^{p,q}(M;E)$, $[\omega]\subset K$ et si Ψ est une fonction pseudo-convexe sur M.

<u>Preuve</u>: Si $\omega\in A(U,E_{|U})$ et si X est un champ de vecteurs tangents sur U, on pose

$$m_k(\omega) = \omega\wedge\bar{u}^k \quad \text{et} \quad X(\omega) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{\substack{(I)=p\\(J)=q}} e_r\otimes u^I\wedge\bar{u}^J\; X\omega^r_{I,J}$$

On convient de noter m_k et X les o.d.l. de $E_{|U}\otimes\Lambda T^*U$ dans $E_{|U}\otimes\Lambda T^*U$ définis ci-dessus. Il est clair que $m_k \circ X = X\circ m_k$. Dans les calculs suivants, les adjoints sont pris au sens de la métrique canonique de $E_{\psi|U}\otimes\Lambda T^*U$.

a) <u>Calcul de</u> m_k^*

Comme m_k est d'ordre 0, on a :

$$m_k^*(e_r\otimes u^I\wedge\bar{u}^J) = \sum_{\substack{(K)=p\\(L)=q}}\sum_{l=1}^{m}(e_r\otimes u^I\wedge\bar{u}^J, e_l\otimes u^K\wedge\bar{u}^L\wedge\bar{u}^k)\,e_l\otimes u^K\wedge\bar{u}^L$$

$$\text{Ainsi } m_k^*(e_r\otimes u^I\wedge\bar{u}^J) = 0 \qquad \text{si } k\notin J$$

$$= \rho_{J\setminus\{k\},\{k\}}\, e_r\otimes u^I\wedge\bar{u}^{J\setminus\{k\}} \qquad \text{si } k\in J$$

Il résulte directement de ces relations que

$$\|\omega\|^2_{E\otimes\Lambda T^*M} \leq \sum_{k=1}^{n}\|m_k^*\omega\|^2_{E\otimes\Lambda T^*M} \quad \text{si } \omega\in A_c^{p,q}(U,E_{|U}) \text{ et si } q\neq 0.$$

b) Calcul de $m_l \circ m_k^* + m_k^* \circ m_l$

Si $k \notin J$ on a

$$m_l \circ m_k^*(e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^J) = 0$$

Si $k \in J$ on a

$$m_l \circ m_k^*(e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^J) = \rho_{J\setminus\{k\},\{k\}}\, \rho_{J\setminus\{k\},\{l\}}\, e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^{J\setminus\{k\}\cup\{l\}}$$

Si $k \neq l$ et si $k \notin J$ on a

$$m_k^* \circ m_l(e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^J) = 0$$

Si $k \neq l$ et si $k \in J$ on a

$$m_k^* \circ m_l(e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^J) = \rho_{J,\{l\}}\, \rho_{(J\setminus\{k\})\cup\{l\},\{k\}}\, e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^{(J\setminus\{k\})\cup\{l\}}$$

De plus $m_k^* \circ m_k(e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^J) = e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^J$ si $k \notin J$

$m_k^* \circ m_k(e_r \otimes u^I \wedge \bar{u}^J) = 0$ si $k \in J$

En remarquant que $\rho_{I\cup J,L} = \rho_{I,J}\, \rho_{J,L}\, \rho_{I,J\cup L}$ on voit que

$$m_l \circ m_k^* + m_k^* \circ m_l = \delta_{kl}\ .$$

c) Calcul de $\bar{u}_k^*$

La formule de Green montre immédiatement que

$$\bar{u}_k^*(\omega) = e^{+\Psi}(-u_k - \mathrm{div}\ u_k)e^{-\Psi}(\omega) \text{ lorsque } \omega \in A_c(M,E)\ , [\omega] \subset U.$$

On en déduit que $\bar{u}_k^*(\omega) = -u_k(\omega) + (u_k\Psi - \mathrm{div}\ u_k)(\omega)$.

On constate aussi que $\bar{u}_k^* \circ m_l = m_l \circ \bar{u}_k^*$. Ce qui entraine que $\bar{u}_k \circ m_l^* = m_l^* \circ \bar{u}_k$.

d) Calcul de $[\bar{u}_j, \bar{u}_l^*]$

Supposons que $f \in C_\infty(U)$.

On sait que $\bar{u}_l^* f = -u_l f + (u_l\Psi - \mathrm{div}\ u_l)f$

On en déduit que $[\bar{u}_j, \bar{u}_l^*]f = [u_l, \bar{u}_j]f + (\bar{u}_j u_l \Psi - \bar{u}_j \mathrm{div}\ u_l)f$.

Comme les formes $\bar{\partial} u^j$ sont de type (1,1) il existe des fonctions C^j_{kl} de classe C_∞ sur U telles que

$\bar{\partial} u^j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} C^j_{kl}\ u^k \wedge \bar{u}^l$. On en déduit que

$$\partial\bar{\partial} f = \partial\Big(\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j f \quad \bar{u}^j\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \bar{u}_j f\ u^k \wedge \bar{u}^j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{u}_j f\ \bar{C}^j_{kl}\ u^l \wedge \bar{u}^k$$

Ainsi $(\partial\bar{\partial} f)_{\{l\},\{k\}} = u_l \bar{u}_k f - \sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j f\ \bar{C}^j_{kl}$

Par conjugaison, on voit que

$$(\bar{\partial}\partial f)_{\{l\},\{k\}} = -\bar{u}_k u_l f + \sum_{j=1}^{n} u_j f\ C^j_{lk}$$

Mais $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$ donc

$$\left[u_l, \bar{u}_k\right] f = \sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j f\ \bar{C}^j_{kl} - \sum_{j=1}^{n} u_j f\ C^j_{lk}\ .$$

Ainsi

$$\left[\bar{u}_j, \bar{u}^*_l\right] f = \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_k f\ C^k_{jl} - \sum_{k=1}^{n} u_k f\ C^k_{lj} + \left(\bar{u}_j u_l \Psi - \bar{u}_j \operatorname{div} u_l \right) f$$

En remarquant que

$(\partial\bar{\partial}\Psi)_{\{l\},\{j\}} = \bar{u}_j u_l \Psi - \sum_{k=1}^{n} u_k \Psi\ C^k_{lj}$ on obtient

$$\left[\bar{u}_j, \bar{u}^*_l\right] f = \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_k f\ C^k_{jl} + \sum_{k=1}^{n} \bar{u}^*_k f\ C^k_{lj} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{div} u_k\ C^k_{lj} - \bar{u}_j \operatorname{div} u_l\Big) f$$
$$+ (\partial\bar{\partial}\Psi)_{\{l\},\{j\}} f.$$

e) Majoration

Posons $w = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n P_n$. Il est clair que

$\bar{\partial}_{E_\Psi | U} = \sum_{k=1}^{n} m_k \circ \bar{u}_k \circ w + C$ où C est un o.d.l. d'ordre 0 de $E_{|U} \otimes \Lambda T^*U$ dans $E_{|U} \otimes \Lambda T^*U$, indépendant de ψ.

Posons $B = \bar{\partial}_{E_\psi | U} - C$. On obtient successivement

$$B^* = \sum_{l=1}^{n} w \circ \bar{u}_l^* \circ m_l^*$$

$$BB^* + B^*B = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k \circ \bar{u}_k \circ \bar{u}_l^* \circ m_l^* + \bar{u}_l^* \circ m_l^* \circ m_k \circ \bar{u}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k \circ \bar{u}_k \circ \bar{u}_l^* \circ m_l^* + \bar{u}_l^* \circ \bar{u}_k \delta_{kl} - \bar{u}_l^* \circ m_k \circ m_l^* \circ \bar{u}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k \circ [\bar{u}_k, \bar{u}_l^*] \circ m_l^* + \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_k^* \circ \bar{u}_k$$

Supposons que K est un compact de U et que

$\omega \in A^{p,q}(M,E)$, $[\omega] \subset K$, $q \neq 0$. On déduit des égalités ci-dessus que

$$\|B\omega\|_\psi^2 + \|B^*\omega\|_\psi^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\bar{u}_k \omega\|_\psi^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (m_k^* \omega, [\bar{u}_k, \bar{u}_l^*]\, m_l^* \omega)_\psi$$

En tenant compte de d) et de ce qu'un o.d.l. d'ordre 0 définit une application continue de $\mathcal{L}_2(U, E_{|U})$ dans $\mathcal{L}_2(U, E_{|U})$ on voit qu'il existe une constante C indépendante de ψ, telle que

$$\left| \|B\omega\|_\psi^2 + \|B^*\omega\|_\psi^2 - \sum_{k=1}^{n} \|\bar{u}_k \omega\|_\psi^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (m_k^* \omega, (\partial\bar{\partial}\psi)_{\{k\},\{l\}}\, m_l^* \omega)_\psi \right|$$

$$\leq C' \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left[(m_k^* \omega, \bar{u}_r m_l^* \omega)_\psi + \|\omega\|_\psi^2 \right]$$

On en déduit aussitôt qu'il existe une constante C" indépendante de Ψ et telle que

$$(\lambda_\psi \omega, \omega)_\psi + \sum_{k=1}^{n} \|\bar{u}_k \omega\|_\psi^2 \leq \|B\omega\|_\psi^2 + \|B^*\omega\|_\psi^2 + C' \|\omega\|_\psi \|\bar{u}_r \omega\|_\psi + C \|\omega\|_\psi^2$$

Mais $a \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ lorsque $\varepsilon > 0$, $a, b \in [0, +\infty[$.

Donc il existe une constante C_K indépendante de Ψ et telle que

$$(\lambda_\psi \omega, \omega)_\psi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \|\bar{u}_k \omega\|_\psi^2 \leq 2(\|\bar{\partial}_{E_\psi} \omega\|_\psi^2 + \|\bar{\partial}_{E_\psi}^* \omega\|_\psi^2) + C_K \|\omega\|_\psi^2 ///$$

PROPOSITION III.1.8. Il existe une fonction C, positive, de classe C_∞, telle que

$$((\lambda_\psi - C)\omega,\omega)_\psi \leq 4\,(\|\bar{\partial}_{E_\psi}\omega\|^2 + \|\bar{\partial}^*_{E_\psi}\omega\|^2)$$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$, $\omega \in A_c^{p,q}(M,E)$.

<u>Preuve</u>: Soient $\mathcal{U}$ le recouvrement de M par les ouverts relativement compacts au-dessus desquels E et T'M sont trivialisables et $(\varphi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ une partition de l'unité, positive, C_∞, loc. finie, subordonnée à $\mathcal{U}$.

Posons $\beta_U = \dfrac{\varphi_U}{\sqrt{\sum_{i\in I}\varphi_U^2}}$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Il est clair que $[\beta_U] \subset [\varphi_U]$ et que $\sum_{U\in\mathcal{U}} \beta_U^2 = 1$.

Pour tout $U \in \mathcal{U}$ la proposition III.1.7. fournit une constante C_U telle que

$$(\lambda_\psi\omega',\omega')_\psi \leq 2(\|\bar{\partial}_{E_\psi}\omega'\|^2 + \|\bar{\partial}^*_{E_\psi}\omega'\|^2) + C_U\|\omega\|^2$$ lorsque $\omega' \in A^{p,q}(M,E)$, $[\omega'] \subset [\varphi_U]$, $q \neq 0$.

Soit ω un élément de $A_c^{p,q}(M,E)$. En appliquant la majoration précédente à $\omega\beta_U$ on voit que

$$(\lambda_\psi\omega\beta_U,\omega\beta_U) \leq 2(\|\bar{\partial}_{E_\psi}(\omega\beta_U)\|^2 + \|\bar{\partial}^*_{E_\psi}(\omega\beta_U)\|^2) + C_U\|\omega\beta_U\|^2$$

Mais $\bar{\partial}_{E_\psi}(\omega\beta_U) = (\bar{\partial}_{E_\psi}\omega)\beta_U + (-1)^{p+q}\omega\wedge\bar{\partial}\beta_U$ donc

$$\|\bar{\partial}_{E_\psi}(\omega\beta_U)\|^2_\psi \leq 2(\|(\bar{\partial}_{E_\psi}\omega)\beta_U\|^2_\psi + ((p+q+1)\|\bar{\partial}\beta_U\|^2_{E\otimes\Lambda T^*M}\omega,\omega)_\psi).$$

En utilisant une majoration analogue pour $\bar{\partial}^*_{E_\psi}$ on voit qu'il existe une fonction f_U positive, de classe C_∞, à support inclus dans $[\beta_U]$ et telle que

$$(\lambda_\psi\omega\beta_U,\omega\beta_U)_\psi \leq 4(\|(\bar{\partial}_{E_\psi}\omega)\beta_U\|^2_\psi + \|(\bar{\partial}^*_{E_\psi}\omega)\beta_U\|^2_\psi) + (f_U\omega,\omega)_\psi .$$

Posons $C = \sum_{U\in\mathcal{U}} f_U$. La construction précédente montre que C répond aux conditions de l'énoncé.///

PROPOSITION III.1.9. Il existe une application μ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C_∞, convexe, croissante et telle que $\|\omega\|^2_{\mu(\varphi)} \leq \|\bar\partial_{E_{\mu(\varphi)}}\omega\|^2_{\mu(\varphi)} + \|\bar\partial^*_{E_{\mu(\varphi)}}\omega\|^2_{\mu(\varphi)}$.
pour tout $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$, $\omega \in A_c^{p,q}(M,E)$ et pour toute application μ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C_∞, convexe, telle que $D\mu \geq D\mu_0$.

<u>Preuve</u>:

Soit χ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C_∞, convexe, croissante. On a $(\bar\partial \chi \circ \varphi)_x = D_{\varphi(x)}\chi\,(\bar\partial\varphi)_x$ et $(\partial\bar\partial\chi\circ\varphi)_x = D_{\varphi(x)}\chi\,(\partial\bar\partial\varphi)_x + D^2_{\varphi(x)}\chi\,(\partial\varphi)_x \wedge (\bar\partial\varphi)_x$. Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est un repère de $T'M$ au voisinage d'un point x_0 de M

$$(\partial\bar\partial\chi\circ\varphi)_{\{i\},\{j\}} = D_{\varphi(x)}\chi\,(\partial\bar\partial\varphi)_{\{i\},\{j\}} + D^2_{\varphi(x)}\chi \quad e_i\varphi\,\bar e_j\varphi\,.$$

Il en résulte que la fonction $\chi\circ\varphi$ est pseudo-convexe et que $\lambda_{\chi\circ\varphi} \geq D_\varphi\chi\,\lambda_\varphi$, (1).

Soit C la fonction qui intervient dans la proposition III.1.8. Posons $f(r) = \sup\limits_{\bar\varphi^1(]-\infty,r])} \dfrac{4+C}{\lambda_\varphi}$ lorsque $r \in \mathbb{R}$.
On sait que $f(r) \in \mathbb{R}$ car la fonction $\dfrac{4+C}{\lambda_\varphi}$ est continue sur le compact $\bar\varphi^1(]-\infty,r])$. Comme l'application $(f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R})$ est croissante le lemme A.1.1. nous fournit une application ν de classe C_∞, croissante, majorant f sur $\mathbb{R}$.
Posons $\mu_0(r) = \int_0^r \nu(t)\,dt$ lorsque $r \in \mathbb{R}$. L'application $(\mu_0\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R})$ est de classe C_∞, croissante, convexe.

Soit μ une application de classe C_∞, croissante, convexe, telle que $D\mu \geq D\mu_0$. La formule (1) montre que

$\lambda_{\mu\circ\varphi} \geq \nu\circ\varphi\ \lambda_\varphi$. Or

$\nu(\varphi(x)) \geq f(\varphi(x))$ et $f(\varphi(x)) \geq \dfrac{4+C(x)}{\lambda_{\varphi}(x)}$ pour tout $x\in M$ donc

$\lambda_{\mu\circ\varphi} \geq 4+C$. En utilisant la proposition III.1.8. on voit que $\|\omega\|^2_{\mu(\varphi)} \leq \|\bar\partial_{E_{\mu(\varphi)}}\omega\|^2 + \|\bar\partial^*_{E_{\mu(\varphi)}}\omega\|^2$, lorsque $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}_0$, $\omega\in A^{p,q}_c(M,E)$. La conclusion résulte aussitôt de cette dernière majoration.///

DEFINITION III.1.10. Dans la suite on note μ_0 une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions imposées à la fonction μ_0 de la proposition précédente. Une application μ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est adéquate si elle est de classe C_∞, convexe, croissante et si $D\mu \geq D\mu_0$.

PROPOSITION III.1.11. Soient μ une fonction adéquate et p,q deux naturels.

a) Si $\omega\in L^{p,q+1}_2(M,E_{\mu(\varphi)})$ et si $\bar\partial\omega = 0$ alors il existe

$\omega'\in L^{p,q}_2(M,E_{\mu(\varphi)})$ tel que $\bar\partial_{E_{\mu(\varphi)}}\omega' = \omega$, $\bar\partial^*_{E_{\mu(\varphi)}}\omega' = 0$,

$\|\omega'\|_{\mu(\varphi)} \leq \|\omega\|_{\mu(\varphi)}$.

b) Si $\omega\in L^{p,q}_2(M,E)_{\mu(\varphi)}$ et si $(\omega,u)_{\mu(\varphi)} = 0$ pour tout

$u\in L^{p,q}_2(M,E_{\mu(\varphi)})$ tel que $\bar\partial_{E_{\mu(\varphi)}} u = 0$ alors il existe

$\omega'\in L^{p,q+1}_2(M,E)$ tel que $\bar\partial^*_{E_{\mu(\varphi)}}\omega' = \omega$, $\bar\partial_{E_{\mu(\varphi)}}\omega' = 0$,

$\|\omega'\|_{\mu(\varphi)} \leq \|\omega\|_{\mu(\varphi)}$.

<u>Preuve</u>: Cela résulte de la proposition III.1.5., de la proposition III.1.9., du cotollaire P.4.5., et de ce que $\bar{\partial}_E \circ \bar{\partial}_E = 0$. ///

DEFINITION III.1.12.

On pose $\Omega^p(M,E) = \{\omega : \omega \in A^{p,o}(M,E),\ \bar{\partial}_E \omega = 0\}$. On munit $\Omega^p(M,E)$ de la trace de la topologie de $A^{p,o}(M,E)$.

Il est clair que $\Omega^p(M,E)$ est sous espace vectoriel topologique fermé de $A^{p,o}(M,E)$.

PROPOSITION III.1.13. Soient p,q deux naturels.

a) Si $\omega \in \mathcal{L}_2(M, E \otimes \overset{p,o}{\Lambda} T^*M)$ et si $\bar{\partial}_E \omega = 0$ alors $\omega \in \Omega^p(M,E)$. De plus, la topologie de $\Omega^p(M,E)$ est la trace de la topologie de $\mathcal{L}_2(M, E \otimes \overset{p,o}{\Lambda} T^*M)$.

b) Si $\omega \in W_s(M, E \otimes \overset{p,q+1}{\Lambda} T^*M)$ et si $\bar{\partial}_E \omega = 0$ alors il existe $\omega' \in W_{s+1}(M, E \otimes \overset{p,q}{\Lambda} T^*M)$ tel que $\bar{\partial}_E \omega' = \omega$.

c) Si $\omega \in A^{p,q+1}(M,E)$ et si $\bar{\partial}_E \omega = 0$ alors il existe $\omega' \in A^{p,q}(M,E)$ tel que $\bar{\partial}_E \omega' = \omega$.

<u>Preuve</u>: Soit U un ouvert de M, difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ au-dessus duquel T'M et E sont trivialisables. Soient $(u_1,\dots,u_n)$ un repère unitaire de T'U et $(e_1,\dots,e_m)$ un repère unitaire de $E_{|U}$. Pour toute forme $\omega \in A_c^{p,o}(U, E_{|U})$ il existe des fonctions ω_I^r de classe C_∞ sur U telles que

$\omega = \sum_{(I)=p} \sum_{r=1}^{m} \omega_I^r\, e_r \otimes u^I$. On sait que

$$\bar{\partial}_{E|U}(\omega) = \sum_{(I)=p} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\bar{u}_j \omega_I^r\, e_r \otimes \bar{u}^j \wedge u^J + \omega_I^r\, \bar{\partial}_E(e_r \otimes u^I)).$$

Ainsi pour tout compact K de U, il existe une constante C_K telle que $\sum_{j=1}^{n} \|\bar{u}_j \omega\|_\psi^2 = C_K(\|\bar{\partial}_E(\omega)\|_\psi^2 + \|\omega\|_\psi^2)$ si $\omega \in A^{p,o}(U, E_{|U})$, si $[\omega] \subset K$ et si ψ est une fonction pseudo-convexe.

En combinant cette majoration avec les majorations établies en III.1.7. p. et en II.8.8. p. on voit que l'opérateur différentiel $\bar\partial_{E_\psi} + \bar\partial^*_{E_\psi}$ de $E\otimes\Lambda T^*M$ dans $E\otimes\Lambda T^*M$ vérifie les hypothèses de la proposition II.8.5. p. pour toute fonction pseudo-convexe ψ. On en déduit que

$$D_{\bar\partial_E+\bar\partial^*_{E_\psi},r} = \mathcal{W}_{r+1}(M,E\otimes\Lambda T^*M).$$

Soit ω un élément de $\mathcal{L}_2(M,E\otimes \overset{p,q+1}{\Lambda} T^*M)$ pour lequel $\bar\partial_E\omega=0$.

Le lemme A. 1. 5. montre qu'il existe une fonction adéquate μ telle que $\omega\in L_2^{p,q+1}(M,E_{\mu(\varphi)})$.

La proposition III.1.11. fournit alors un élément $\omega'\in L_2^{p,q}(M,E_{\mu(\varphi)})$ tel que $\bar\partial_{E_{\mu(\varphi)}}\omega' = \omega$, $\bar\partial^*_{E_{\mu(\varphi)}}\omega' = 0$.

Pour conclure il suffit de remarquer que $\omega'\in \mathcal{W}_{s+1}(M,E\otimes \overset{p,q}{\Lambda} T^*M)$ si $\omega\in\mathcal{W}_s(M,E\otimes\overset{p,q+1}{\Lambda} T^*M)$ car la proposition II.8.9. p. montre alors que

$\omega'\in A^{p,q}(M,E)$ si $\omega\in A^{p,q+1}(M,E)$.///

PROPOSITION III.1.14. Supposons que $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}_0$.

a) Si $\omega\in L_2^{p,q}(M,E)$, si $[\omega]\subset\bar\varphi^1(]-\infty,0])$ et si $\bar\partial^*_E\omega=0$, alors il existe $\omega'\in L_2^{p,q+1}(M,E)$ tel que $[\omega']\subset\bar\varphi^1(]-\infty,0])$, $\bar\partial^*_E\omega'=\omega$.

b) Si $\omega\in L_2^{p,0}(M,E)$, si $[\omega]\subset\bar\varphi^1(]-\infty,0])$ et si $\int_M(\omega,\omega')_{E\otimes\Lambda T^*M}\, v_M = 0$ pour tout $\omega'\in\Omega^p(M,E)$ alors il existe $\omega'\in L_2^{p,1}(M,E)$ tel que $[\omega']\subset\bar\varphi^1(]-\infty,0])$, $\bar\partial^*_E\omega'=\omega$.

<u>Preuve</u>: Soit ω un élément de $L_2^{p,q}(M,E)$ vérifiant les hypothèses de (a) si $q\neq 0$ et celle de (b) si $q=0$.

Soit μ une fonction adéquate égale à μ_0 sur $]-\infty,0]$ et majorant μ_0 sur $]0,+\infty[$. On s'assure immédiatement que $(e^{\mu\circ\varphi}\omega,\omega')_{\mu\circ\varphi} = 0$ pour tout $\omega' \in L_2^{p,q}(M,E_{\mu\circ\varphi})$ tel que $\bar{\partial}_E\,\omega' = 0$. La proposition III.1.10 nous fournit alors un élément ω_μ de $L_2^{p,q+1}(M,E_{\mu\circ\varphi})$ tel que $\bar{\partial}^*_{E_{\mu\circ\varphi}}\omega_\mu = e^{\mu\circ\varphi}\omega$, et pour lequel $\|\omega_\mu\|_{\mu\circ\varphi} \leq \|\omega e^{\mu\circ\varphi}\|_{\mu\circ\varphi}$.

Or $\bar{\partial}^*_{E_{\mu\circ\varphi}}\omega_\mu = e^{\mu\circ\varphi}\,\bar{\partial}^*_E(e^{-\mu\circ\varphi}\omega_\mu)$ donc $\bar{\partial}^*_E(e^{-\mu\circ\varphi}\omega_\mu) = \omega$.

Posons $\omega'_\mu = e^{-\mu\circ\varphi}\omega_\mu$. Il est clair que $\omega'_\mu \in L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu\circ\varphi})$ et que $\|\omega'_\mu\|_{-\mu\circ\varphi} \leq \|\omega\|_{-\mu\circ\varphi}$. Posons $C^2 = e^{\mu_0(o)}\int_M(\omega,\omega)_{E\otimes\Lambda T^*M}\,v_M$; et $B_\mu = \{u : u \in L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu\circ\varphi}), \|u\|_{-\mu\circ\varphi} \leq C\}$. Il résulte de l'hypothèse faite sur le support de ω que $\omega \in B_\mu$.

Notons i_μ l'injection continue naturelle de $L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu\circ\varphi})$ dans $L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu_0\circ\varphi})$. L'ensemble $i_\mu(B_\mu)$ est a-compact dans $L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu_0\circ\varphi})$ car c'est l'image par une application a-continue d'un a-compact de l'espace d'Hilbert $L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu\circ\varphi})$

Posons $\Pi = \{u : u \in L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu_0\circ\varphi}),\ \bar{\partial}^*_E u = \omega\}$. Π est un a-fermé de $L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu_0\circ\varphi})$ car $\bar{\partial}^*_E$ est o.d.l.. Le raisonnement ci-dessus montre que $i_\mu(B_\mu)\cap\Pi \neq \emptyset$. Le lemme A.1.4.

nous fournit une suite croissante $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctions adéquates telle que $\mu_m|]-\infty,0] = \mu_0$, $\mu_m|]0,+\infty[\uparrow +\infty$.

La famille $(i_{\mu_m}(B_{\mu_m})\cap\Pi)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de a-compacts non vide de $L_2^{p,q+1}(M,E_{-\mu_0\circ\varphi})$.

Soit ω' un élément de $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (i_{\mu_m}(B_{\mu_m})\cap\Pi)$. Il est clair que $\bar\partial^*_E\ \omega' = \omega$ car $\omega'\in\Pi$. De plus $(\omega',\omega')_{E\otimes\Lambda T^*M}\ e^{\mu_m\circ\varphi} \in v_M\text{-}L\ (M)$. et $\int_M (\omega',\omega')_{E\otimes\Lambda T^*M}\ e^{\mu_m\circ\varphi}\ v_M \leq C^2$ pour tout $m\in\mathbb{N}$.

Le théorème de Levi montre que la suite $(\omega',\omega')_{E\otimes\Lambda T^*M}\ C^{\mu_m\circ\varphi}$ converge v_M-pp. Or $\mu_m|]0,+\infty[\uparrow +\infty$,

donc $[(\omega',\omega')]_{v_M\text{-pp}} \subset \bar\varphi^{1}(]-\infty,\ 0])$. Mais cela signifie que $[\omega'] \subset \bar\varphi^{1}(]-\infty,\ 0])$. On en déduit que la section ω' répond aux conditions de l'énoncé.///

PROPOSITION III.1.15. Supposons que $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$, $q\neq 0$, $q\neq n$.

a) Si $\omega\in L_2^{p,0}(M,E)$, si $[\omega]\subset\bar\varphi^{1}(]-\infty,0])$ et si $\bar\partial\omega = 0$ alors $\omega = 0$.

b) Si $\omega\in L_2^{p,q}(M,E)$, si $[\omega]\subset\bar\varphi^{1}(]-\infty,0])$ et si $\bar\partial\omega = 0$ alors il existe $\omega'\in L_2^{p,q-1}(M,E)$ tel que $[\omega']\subset\bar\varphi^{1}(]-\infty,0])$, $\bar\partial\omega' = \omega$.

c) Si $\omega\in L_2^{p,n}(M,E)$, si $[\omega]\subset\bar\varphi^{1}(]-\infty,0])$ et si $\int_M \omega\wedge\omega'' = 0$ pour tout $\omega''\in\Omega^{n-p}(M,E^*)$ alors il existe $\omega'\in L_2^{p,n-1}$ tel que $[\omega']\subset\bar\varphi^{1}(]-\infty,0])$, $\bar\partial\omega' = \omega$.

<u>Preuve</u>: Cela découle de la proposition III.1.14. si on remplace E par E^*, ω par $\#*\omega$ et si on tient compte des propriétés de $\#*$. ///

DEFINITION III.1.16. Soit A une partie de M. On pose $\Omega^p(M,E)_{|A} = \{f_{|A} : f \in \Omega^p(M,E)\}$. On munit $\Omega^p(M,E)_{|A}$ de la structure de $\mathbb{C}$-vectoriel déduite de celle de $\Omega^p(M,E)$.

PROPOSITION III.1.17. Si $M_o = \bar{\varphi}^1(]-\infty,0[)$ et si U est un voisinage ouvert de $\bar{\varphi}^1(]-\infty,0])$ alors
$$\overline{\Omega^p(M,E)_{|M_o}}^{\Omega^p(M_o,E_{|M_o})} \supset \Omega^p(U,E_{|U})_{|M_o}$$

Preuve: Posons $K_o = \bar{\varphi}^1(]-\infty,0])$ et notons $L_2^{p,q}(K_o,E)$ le sous espace de $L_2^{p,q}(M,E)$ formé des éléments à support dans K_o. Il est clair que $L_2^{p,q}(K_o,E)$ est un sous espace d'Hilbert de $L_2^{p,q}(M,E)$. Notons A^p le sous espace de $L_2^{p,o}(K_o,E)$ formé des sections du type $\chi_{K_o}\sigma$ où $\sigma \in \Omega^p(M,E)$. Notons B^p le sous espace de $L_2^{p,o}(K_o,E)$ formé des sections du type $\chi_{K_o}\sigma$ où $\sigma \in \Omega^p(U,E_{|U})$. Soit ω un élément de $(A^p)^{\perp L_2^{p,o}(K_o,E)}$. La proposition III.1.14 montre qu'il existe $\omega' \in L_2^{p,1}(K_o,E)$ tel que $\bar{\partial}_E^* \omega' = \omega$. Soit α un élément de $\Omega^p(U,E_{|U})$. Il est clair que
$(\chi_{K_o}\alpha\, ,\omega)_{L_2^{p,o}(K_o,E)} = \int_U (\alpha,\omega)_{E_{|U}\otimes\Lambda T^*U}\, v_U$. Soit β une fonc--tion de M dans $\mathbb{R}$ de classe C_∞ à support dans U et valant 1 au voisinage de K_o.

On déduit de ce qui précède que
$$\begin{aligned}(\chi_{K_o}\alpha, \omega)_{L_2^{p,o}(K_o,E)} &= \int_U (\alpha\beta\, , \bar{\partial}_E^*\omega')v_U \\ &= \int_U (\bar{\partial}_E(\alpha\beta), \omega')v_U \\ &= 0\end{aligned}$$

La dernière égalité montre que $\omega \in (B^p)^{\perp L_2^{p,o}(K_o,E)}$. Il en résulte que $(A^p)^{\perp L_2^{p,o}(K_o,E)} \subset (B^p)^{\perp L_2^{p,o}(K_o,E)}$ et que $\overline{A^p}^{L_2^{p,o}(K_o,E)} \supset B^p$. On vérifie aisément que la restriction à M_o d'un élément de $L_2^{p,o}(K_o,E)$ appartient à $\mathcal{L}_2(M_o,E_{|M_o} \otimes \Lambda T^*M_o)$ et que l'application $(r_{M_o} : L_2^{p,o}(K_o,E) \to \mathcal{L}_2(M_o,E_{|M_o} \otimes \Lambda T^*M_o)$ continue. On en déduit que $\overline{(r_{M_o}(A^p))}^{\mathcal{L}_2(M_o,E_{|M_o}\otimes\Lambda T^*M_o)} \supset r_{M_o}(B^p)$

Mais $r_{M_o}(A^p) \subset r_{M_o}(B^p) \subset \Omega^p(M_o,E_{|M_o})$ et la proposition III.1.13 montre que la trace sur $\Omega^p(M_o,E_{|M_o})$ de la topologie de $\mathcal{L}_2(M_o,E_{|M_o})$ coïncide avec la topologie naturelle de $\Omega^p(M_o,E_{|M_o})$. On en déduit que $\overline{r_{M_o}(A^p)}^{\Omega^p(M_o,E_{|M_o})} \supset r_{M_o}(B^p)$.

La proposition découle immédiatement de cette dernière inclusion. ///

PROPOSITION III.1.18. Une variété quasi-holomorphe intégrable est holomorphe.

<u>Preuve</u>: Soient M une variété quasi-holomorphe intégrable et x_o un point de M. Choisissons un voisinage ouvert U de x_o, difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ et au-dessus duquel T'M est trivialisable. Soit $(y : U \to \mathbb{R}^{2n})$ un difféomorphisme tel que $y(x_o) = 0$. Transportons la structure quasi-holomorphe de U à $\mathbb{R}^{2n}$ au moyen de ce difféomorphisme et choisissons un repère $(u_1,\dots,u_n)$ de $T'(\mathbb{R}^{2n})$. Un calcul simple montre que $[\partial\bar\partial(|x|^2)]_{\{i\},\{j\}}(o) = 2\sum_{k=1}^{2n} u_i x_k(o)\, \bar u_j x_k(o)$. On en déduit que $\lambda_{|x|^2}(o) > o$.

Soit rB_{2n} une boule ouverte de centre o telle que

$r\bar B_{2n} \subset \{z : z \in \mathbb{R}^{2n}, \lambda_{|x|^2}(z) > o\}$.

Posons $V = rB_{2n}$ et $\lambda = \inf\limits_{\overline{V}} \lambda_{|x|^2}$. Supposons que $\varepsilon \in]0,\frac{1}{2}[$. On note m_ε le difféomorphisme de V dans εV défini par $m_\varepsilon(x) = \varepsilon x$. On note V_ε la variété V munie de la structure quasi-holomorphe déduite de celle de εV au moyen du difféomorphisme m_ε .

Soient K_m une suite fondamentale de compacts de V et α_m une suite de $D(V)$ telle que $\alpha_m = 1$ sur K_m et que $[\alpha_m] \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Posons $c_m = \sup\limits_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,2n \\ j=1,\ldots,2n}} (\sup\limits_{\overline{V}} |u_i x_k| \ \sup\limits_{\overline{V}} |D_j \alpha_m|)$

En procédant comme en III.1.3 ,construisons une fonction M strictement positive de classe C_∞ sur V qui majore c_m sur $\bigcup\limits_{j=1}^{2n} [D_j \alpha_m]$. Posons $v_i = \frac{1}{M} u_i$ et munissons V de la métrique hermitienne pour laquelle le repère $(v_1,\ldots,v_n,\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_n)$ est unitaire. On note $(v^1,\ldots,v^n)$ le repère dual du repère $(v_1,\ldots,v_n)$. Munissons V_ε de la métrique quasi-hermitienne pour laquelle le repère $({}^\varepsilon v_1,\ldots,{}^\varepsilon v_n, {}^\varepsilon \overline{v}_1,\ldots,{}^\varepsilon \overline{v}_n)$ est unitaire. On note ${}^\varepsilon\bar\partial$ l'opérateur $\bar\partial$ associé à la variété quasi-holomorphe V_ε. Vu le choix de la métrique de V il existe une constante C telle que $\|{}^\varepsilon\bar\partial \alpha_m\|_{\Lambda T^* V_\varepsilon} \leq C$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Si on répète la preuve des propositions III.1.7 & III.1.8 dans le cas où $M = V_\varepsilon$, $E = V_\varepsilon \times \mathbb{C}$ on voit qu'il existe une fonction continue C indépendante de ε et telle que

$(({}^{\varepsilon}\lambda_\psi - C)\omega,\omega)_\psi \leq 4(({}^{\varepsilon}\bar\partial\omega, {}^{\varepsilon}\bar\partial\omega)_\psi + ({}^{\varepsilon}\bar\partial^*\omega, {}^{\varepsilon}\bar\partial^*\omega)_\psi)$ pour tout $\omega \in A^{o,1}(V_\varepsilon)$ et pour toute fonction pseudo-convexe ψ.

Posons $\varphi' = \dfrac{1}{r^2 - |x|^2}$. Il est clair que $\varphi'^{-1}(]-\infty,s])$ est compact dans V pour tout $s \in \mathbb{R}$ et un calcul rapide montre que ${}^{\varepsilon}\lambda_{\varphi'} \geq \dfrac{\lambda}{r^2}$. En raisonnant comme en III.1.9, on voit qu'il existe une application μ' de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C_∞, convexe, croissante indépendante de ε et telle que

$(\omega,\omega)_{\mu''\circ\varphi'} \leq ({}^{\varepsilon}\bar\partial\omega, {}^{\varepsilon}\bar\partial\omega)_{\mu''\circ\varphi'} + ({}^{\varepsilon}\bar\partial^*\omega, {}^{\varepsilon}\bar\partial^*\omega)_{\mu''\circ\varphi'}$, pour tout $\omega \in A_c^{o,1}(V_\varepsilon)$ et pour toute application μ'' de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C_∞, convexe, croissante telle que $D\mu'' \geq D\mu'$.

On en déduit que si $\omega \in A^{o,1}(V_\varepsilon) \cap L^{o,1}(V_\varepsilon, \mu''\circ\varphi')$ et si ${}^{\varepsilon}\bar\partial\omega = 0$ alors il existe $\omega' \in A^{o,o}(V_\varepsilon) \cap L^{o,o}(V_\varepsilon, \mu''\circ\varphi')$ tel que ${}^{\varepsilon}\bar\partial\omega' = \omega$, $\|\omega'\|_{\mu''\circ\varphi'} \leq \|\omega\|_{\mu''\circ\varphi'}$. Choisissons une application μ'' de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe, croissante, de classe C_∞, telle que $D\mu'' \geq D\mu'$, $\int_V e^{-\mu''\circ\varphi'} dx \leq 1$.

Notons a_j^i la $j^{\text{ème}}$ composante de la forme v^i par rapport au repère cotangent $(dx_1,\dots,dx_{2n})$. Posons $a^i = \sum_{j=1}^{2n} a_j^i(o)\, x_j$.

Comme les formes ${}^{\varepsilon}\bar\partial a^i$ appartiennent à $A^{o,1}(V_\varepsilon) \cap L^{o,1}(V_\varepsilon, \mu''\circ\varphi')$ il existe des éléments b_ε^i de $A^{o,o}(V_\varepsilon) \cap L^{o,o}(V_\varepsilon, \mu''\circ\varphi')$ tels que ${}^{\varepsilon}\bar\partial b_\varepsilon^i = {}^{\varepsilon}\bar\partial a^i$, $\|b_\varepsilon^i\|_{\mu''\circ\varphi'} \leq \|{}^{\varepsilon}\bar\partial a^i\|_{\mu''\circ\varphi'}$. Il est clair que

$\int_V |b_\varepsilon^i|^2 e^{-\mu''\circ\varphi'} v_V(\varepsilon x) \leq \int_V \sum_{j=1}^{n} |{}^{\varepsilon}\bar v_j a^i|^2 e^{-\mu''\circ\varphi'} v_V(\varepsilon x)$

Ainsi pour tout compact K de V il existe une constante C_K telle que $\int_K |b_\varepsilon^i|^2\, dx \leq C_K \sup_V \left(\sum_{j=1}^{n} |{}^{\varepsilon}\bar v_j\, a^i|^2\right)$.

On sait que $\bar{v}_j f = \sum_{k=1}^{2n} \bar{v}_j x_k \, D_{x_k} f$ pour tout $f \in A^{o,o}(V)$

On en déduit que $({}^{\varepsilon}\bar{v}_j f)_x = \sum_{k=1}^{2n} (\bar{v}_j x_k)_{\varepsilon x} (D_{x_k} f)_x$

Ainsi $\quad ({}^{\varepsilon}\bar{v}_j \; a^i)_x = \sum_{k=1}^{2n} (\bar{v}_j x_k)_{\varepsilon x} \; (D_{x_k} \; a^i)_x$

et $\quad ({}^{\varepsilon}\bar{v}_j \; a^i)_x = \sum_{k=1}^{2n} ((\bar{v}_j x_k)_{\varepsilon x} - (\bar{v}_j x_k)_o) a_k^i(o)$

Il en résulte que $\lim_{\varepsilon \to o} \sup_{\bar{V}} |D^{\alpha}({}^{\varepsilon}\bar{v}_j \; a^i)| = 0$

pour tout 2n-indice α. La proposition II.8.8. montre alors que $b_{\varepsilon}^i \xrightarrow[C_{\infty}(V)]{} 0$. Choisissons ε suffisamment petit pour que les formes $d(a^1-b_{\varepsilon}^1),\ldots,d(a^n-b_{\varepsilon}^n)$ soient linéairement indépendantes en 0.

L'application $(((a^1-b_{\varepsilon}^1)(\frac{x}{\varepsilon}),\ldots,(a^n-b_{\varepsilon}^n)(\frac{x}{\varepsilon})) : \varepsilon V \to \mathbb{C}^n)$ est donc étale en 0. Elle est aussi quasi-holomorphe car ${}^{\varepsilon}\bar{\partial} a^i = {}^{\varepsilon}\bar{\partial} b_{\varepsilon}^i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. On en déduit aussitôt que le point x_o admet un voisinage ouvert dans M quasi-holomorphiquement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Ainsi la variété M est holomorphe. ///

CHAPITRE IV

VARIETES DE STEIN

IV.1. Définitions, propriétés élémentaires

DEFINITION IV.1.1. Une variété de Stein est une variété holomorphe M telle que:

a) M est à base dénombrable,

b) Pour tout point z de M il existe des éléments $f_1,\dots,f_n$ de $\mathcal{O}(M)$ et un voisinage U de z tel que $(U,(f_1\dots,f_n)|U)$ est une carte locale de M en z,

c) Si z_0, z_1 sont deux points distincts de M, il existe une application holomorphe f de M dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z_0)\neq f(z_1)$

d) $\hat{K}^{\mathcal{O}}$ est compact pour tout compact K de M.

PROPOSITION IV.1.2. Si M est une variété holomorphe, si N est une variété de Stein et si $(f:M \to N)$ un plongement propre, alors M est une variété de Stein.

Preuve: Prouvons que M est une variété de Stein.

a) La possession d'une base dénombrable est une propriété héréditaire donc l'espace topologique sous-jacent à M est à base dénombrable.

b) Soit z un point de M et soit φ une application holomorphe de N dans $\mathbb{C}^n$ étale sur le voisinage ouvert U de f(z). L'application $(\varphi \circ f : M \to \mathbb{C}^n)$ est holomorphe et immersive en chaque point de $f^{-1}(U)$. Si M est de dimension p, il existe donc p fonctions $\varphi_{\nu_1}, \ldots, \varphi_{\nu_p}$ parmi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que $((\varphi_{\nu_1}, \ldots, \varphi_{\nu_p}) \circ f : M \to \mathbb{C}^p)$ est une application holomorphe étale en z.

c) Si z_0, z_1 sont des points distincts de M alors $f(z_0), f(z_1)$ sont des points distincts de N et il existe un élément g de $\mathcal{O}(N)$ tel que $g(f(z_0)) \neq g(f(z_1))$. Mais alors $g \circ f \in \mathcal{O}(M)$ et $g \circ f(z_0) \neq g \circ f(z_1)$.

d) Soit K un compact de M, f(K) est un compact de N. Pour toute application holomorphe g de N dans $\mathbb{C}$,

$$\left\{z : |g \circ f(z)| \leq \sup_K |g \circ f|\right\} = f^{-1}\left\{z : |g(z)| \leq \sup_{f(K)} |g|\right\}.$$

Par conséquent, $\hat{K}^{\mathcal{O}} \subset f^{-1}(\widehat{f(K)}^{\mathcal{O}})$. Mais $\widehat{f(K)}^{\mathcal{O}}$ est compact et f est propre donc $\hat{K}^{\mathcal{O}}$ est compact, ce qui suffit.

PROPOSITION IV.1.3. Le produit de deux variétés de Stein est une variété de Stein.

<u>Preuve</u>: Soient M et N des variétés de Stein.

a) MxN est à base dénombrable,

b) Soient z un point de M et z' un point de N. Il existe une application holomorphe $(\varphi : M \to \mathbb{C}^m)$ étale en z et une application holomorphe $(\psi : N \to \mathbb{C}^n)$ étale en z'.

L'application $(\varphi\times\psi : M\times N \to \mathbb{C}^{m+n})$ est holomorphe et étale en (z,z'), ce qui suffit.

c) Soient $(z_o,z'),(z_1,z'_1)$ deux points distincts de $M\times N$. On a donc $z_o\neq z_1$ ou $z'_o\neq z'_1$. Supposons que $z_o\neq z_1$. Soit f un élément de $\mathcal{O}(M)$ tel que $f(z_o) \neq f(z_1)$. On constate que $f\circ p_M \in \mathcal{O}(M\times N)$ et que $f\circ p_M(z_o,z'_o) \neq f\circ p_M(z_1,z'_1)$. La cas $z'_o \neq z'_1$ se traite de manière analogue.

d) Soit K un compact de $M\times N$. On sait que $p_M(K)$ est un compact de M et que $p_N(K)$ est un compact de N. Si $f\in\mathcal{O}(M)$ et $g\in\mathcal{O}(N)$ alors

$$\{(z,z') : |f\circ p_M(z,z')| \leq \sup_K |f\circ p_M|\} = p_M^{-1}\{z : |f(z)| \leq \sup_{p_M(K)} |f|\}, \text{et}$$

$$\{(z,z') : |g\circ p_N(z,z')| \leq \sup_K |g\circ p_N|\} = p_N^{-1}\{z : |g(z)| \leq \sup_{p_N(K)} |g|\}.$$

Par conséquent $\hat{K}^{\mathcal{O}(M\times N)} \subset p_M^{-1}(\widehat{p_M(K)}^{\mathcal{O}(M)})$

et $\hat{K}^{\mathcal{O}(M\times N)} \subset p_N^{-1}(\widehat{p_N(K)}^{\mathcal{O}(N)})$

Ainsi $\hat{K}^{\mathcal{O}(M\times N)} \subset \widehat{p_M(K)}^{\mathcal{O}(M)} \times \widehat{p_N(K)}^{\mathcal{O}(N)}$

et $\hat{K}^{\mathcal{O}(M\times N)}$ est compact.

PROPOSITION IV.1.4. Tout ouvert de $\mathbb{C}$ est une variété de Stein.

<u>Preuve</u>: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

a) Ω est évidemment à base dénombrable,

b) L'application $(id : \Omega \to \mathbb{C})$ est holomorphe et étale en tout point de Ω.

c) L'application $(id : \Omega \to \mathbb{C})$ sépare les points de Ω.

d) Soit K un compact de Ω. Montrons que $\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)}$ est un compact de Ω. Scindons la preuve en deux cas.

α) $\Omega = \mathbb{C}$. On sait que $\hat{K}^{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$ est un fermé de $\mathbb{C}$ inclus dans $\{z : z \in \mathbb{C}, |z| \leq \sup_{z' \in K} |z'|\}$. Par conséquent $\hat{K}^{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

β) $\Omega \neq \mathbb{C}$. Soit ξ un élément de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

L'application $(\frac{1}{z-\xi} : \Omega \to \mathbb{C})$ est holomorphe et

$\sup_{z \in K} \frac{1}{|z-\xi|} = \frac{1}{d(K,\xi)}$. Par conséquent

$\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \{z : z \in \Omega, d(K,\xi) \leq |z-\xi|\}$ et

$d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) \leq d(\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathbb{C}\setminus\Omega)$. Comme $d(K,\mathbb{C}\setminus\Omega)$ est strictement positif , la majoration précédente montre que

$d(\overline{\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)}}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C}\setminus\Omega) > 0$. Ainsi $\overline{\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)}}^{\mathbb{C}} \subset \Omega$ et $\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)} = \overline{\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)}}^{\mathbb{C}}$

La cas précédent montre que $\overline{\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)}}^{\mathbb{C}}$ est compact donc $\hat{K}^{\mathcal{O}(\Omega)}$ est compact dans Ω.

COROLLAIRE IV.1.5. Une sous variété holomorphe fermée de $\mathbb{C}^n$ est une variété de Stein.

Preuve: Cela résulte des propositions précédentes.

PROPOSITION IV.1.6. Si M est une variété de Stein et si $f \in \mathcal{O}(M)$, alors $\{z : z \in M, f(z) \neq 0\}$ est une sous variété de Stein ouverte de M.

Preuve: Posons $N = \{z : z \in M, f(z) \neq 0\}$. On sait que N est un ouvert de M. Montrons que N est une variété de Stein.

Les conditions a),b),c) sont trivialement vérifiées.

Prouvons la condition d). Soit K un compact de N. Posons $C = \inf_K |f|$. L'ensemble $P = \{z : z \in M, |f(z)| \geq C\}$ est un fermé de M inclus dans N. De plus $\hat{K}^{\mathcal{O}(N)} \subset P$, en effet $P = \{z : z \in N, \frac{1}{|f(z)|} \leq \sup_K \frac{1}{|f|}\}$ et $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(N)$. Donc $\hat{K}^{\mathcal{O}(N)} \subset P \cap \hat{K}^{\mathcal{O}(M)}$ $\hat{K}^{\mathcal{O}(N)}$ est compact.

COROLLAIRE IV.1.7. Les groupes de Lie complexes $GL(n,\mathbb{C})$ sont des variétés de Stein ainsi que tous les sous-groupes de Lie complexes.

<u>Preuve</u>: L'application (dét: $\mathbb{C}^{n^2} \to \mathbb{C}$) est une application holomorphe. Comme $\mathbb{C}^{n^2}$ est une variété de Stein, la proposition IV.1.6 montre que $GL(n,\mathbb{C})$ est une variété de Stein.
Un groupe de Lie est toujours complet donc un sous-groupe de Lie complexe H de $GL(n,\mathbb{C})$ est une sous-variété holomorphe fermée de $GL(n,\mathbb{C})$ et la proposition IV.1.2. montre que c'est une variété de Stein.

PROPOSITION IV.1.8. Si la variété holomorphe M vérifie les conditions a,d de la définition IV.1.1 et si K est un compact holomorphiquement convexe de M alors il existe une suite fondamentale $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de compacts holomorphiquement convexes de M telle que $K_o = K$.

<u>Preuve</u>: Soit $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de M formé d'ouverts relativement compacts. Posons $K_o = K$. Déterminons par récurrence la suite $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en choisissant pour compact K_{m+1} l'enveloppe holomorphe d'un voisinage compact de $K_m \cup \overline{U_m}$.
Il résulte de la construction précédente que $K_m \subset \mathring{K}_{m+1}$, $K_{m+1} \supset U_m$, $\hat{K}_m^{\mathcal{O}(M)} = K_m$. Ainsi $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = M$ et la suite $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ répond aux conditions de l'énoncé.

IV.2. Relations avec les variétés pseudo-convexes

RAPPEL IV.2.1. Si f est une application de M dans $\mathbb{C}^N$ et si $m \in \mathbb{N}$ alors on note f^m l'application de M dans $\mathbb{C}^N$ qui envoit x sur $(f_1^m(x),\dots,f_N^m(x))$.

PROPOSITION IV.2.2. Soit M une variété holomorphe de dimension n vérifiant la condition b) de la définition IV.1.1.. Si K est un compact holomorphiquement convexe de M et si K' est un compact de M disjoint de K, alors il existe un entier N et un élément f de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ dont les puissances sont immersives sur K et pour lequel $\|f\|_{\infty} \underset{K}{<} 1$ $\|f\|_{\infty} \underset{K'}{>} 1$.

Preuve: Notons A le sous ensemble de $\mathcal{O}(M)$ formé des fonctions holomorphes f pour lesquelles $|f| \underset{K}{<} 1$.

Posons $I_{\varphi} = \{x : x \in M, |\varphi(x)| > 1\}$ si $\varphi \in \Phi$. La famille $(I_{\varphi})_{\varphi \in \Phi}$ est un recouvrement ouvert de K' car K est holomorphiquement. convexe. Soit $\varphi_1,\dots,\varphi_{N'}$, N' éléments de Φ tels que $K' \subset \bigcup_{j=1}^{N'} I_{\varphi_j}$. Posons $\varphi' = (\varphi_1,\dots,\varphi_{N'})$. Il est clair que $\|\varphi'\|_{\infty} \underset{K}{<} 1$ et que $\|\varphi'\|_{\infty} \underset{K'}{>} 1$.

Posons $J_{\varphi} = \{x : x \in M, \varphi \text{ immersif en } x\}$ lorsque $\varphi \in \mathcal{O}(M,\mathbb{C}^n)$

Il est clair que $(J_{\varphi})_{\varphi \in \mathcal{O}(M,\mathbb{C}^n)}$ est un recouvrement ouvert de K car M vérifie la condition b) de la définition IV.1.1.

Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_{N''}$, N'' éléments de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^n)$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^{N''} J_{\varphi_j}$. Posons $\psi = (\varphi_1 - \inf_K \varphi_1 + 1,\dots,\varphi_{N''} - \inf_K \varphi_{N''} + 1)$.

Il résulte de ce qui précède que $\psi \in \mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{nN''})$ et que ψ^k est immersif sur K pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Posons $\varphi'' = \dfrac{\psi}{1+\sup_K \|\psi\|_{\infty}}$

Il est clair que l'application (φ',φ'') répond aux conditions de l'énoncé.

PROPOSITION IV.2.3. Soit M une variété holomorphe vérifiant les conditions a,b,d de la définition IV.1.1. Si U est un voisinage ouvert d'un compact holomorphiquement convexe K de M alors il existe une fonction φ strictement pseudo-convexe telle que $\varphi \underset{K}{<} 0$, $\varphi \underset{CU}{>} 0$ et pour laquelle $\varphi^{-1}(]-\infty, r])$ est compact dans M pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Preuve: Soit $(K_j)_{j\in \mathbb{N}}$ une suite fondamentale de compacts holomorphiquement convexes de M telle que $K_o=K$.

Posons $U_j = \overset{\circ}{K}_{j+1}$ pour $j \in \mathbb{N}_o$ et $U_o = \overset{\circ}{K}_1 \cap U$. Pour tout $j\in\mathbb{N}$, choisissons un entier N_j et un élément f_j de $\mathcal{O}(M, \mathbb{C}^{N_j})$ dont les puissances sont immersives sur K_j et tel que $\|f_j\|_{\infty} \underset{K_j}{<} 1$, $\|f_j\|_{\infty} \underset{K_{j+2}\setminus U_j}{>} 1$. Choisissons un naturel, non nul, m_j tel que $\|f_j^{2m_j}\|_{\infty} \underset{K_j}{<} \frac{2^{-j-2}}{N_j}$ $\|f_j^{2m_j}\|_{\infty} \underset{K_{j+2}\setminus U_j}{>} j+1$. Posons $g_j = f_j^{m_j}$ et

$h_j(z,z') = \sum_{k=1}^{N_j} g_j^k(z)\, \overline{g_j^k(z')}$. Il résulte des majorations précédentes que $h_j \underset{K_j \times K_j}{<} 2^{-j-2}$. On en déduit aussitôt que la série $\sum_{j=o}^{\infty} h_j$ converge absolument et uniformément sur tout compact de $M\times M$. Posons $\varphi = \sum_{j=o}^{\infty} h_j$. Il résulte de la construction précédente que $\varphi(z,z')$ est holomorphe en z et anti-holomorphe en z'. Le théorème de Hartogs montre alors que φ est de classe C_∞ sur $M\times M$. Posons $\psi(z) = \varphi(z,z)$ pour tout $z\in M$. La fonction ψ est de classe C_∞. De plus,

$\psi(z) = \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_j} |g_j^k z)|^2$, $\psi(z) \underset{K_o}{<} 1$. On en déduit que $\psi(z) \geq \|g_j(z)\|_\infty^2$ pour tout $j\in\mathbb{N}$. Il en résulte que $\psi \underset{CU_j}{>} j+1$

et que $\Psi^{-1}(]-\infty,r])$ est compact pour tout $r\in\mathbb{R}$. De plus, Ψ est strictement pseudo-convexe car pour tout $z\in M$, il existe $j\in\mathbb{N}$ pour lequel g_j est immersif en z. Il est clair que la fonction Ψ^{-1} répond aux conditions de l'énoncé.

COROLLAIRE IV.2.4. Une variété de Stein est pseudo-convexe.

LEMME IV.2.5. Soit φ une fonction strictement pseudo-convexe sur une variété holomorphe M. Tout point z_0 de M possède un voisinage V_0 où il existe une fonction holomorphe f, nulle en z_0 et telle que $\mathcal{R}f \underset{V_0\setminus\{z_0\}}{<} \varphi-\varphi(z_0)$.

<u>Preuve</u>: Soit (V,ψ) une carte locale de M en z_0 telle que $\psi(z_0) = 0$. Posons

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n} D_{z_i}(\varphi\circ\psi^{-1})|_0 z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{z_i}D_{z_j}(\varphi\circ\psi^{-1})|_0 z_i z_j \quad \text{et}$$

$$h(z) = \varphi\circ\psi^{-1}(z) - \varphi(z_0) - 2\mathcal{R}g - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{z_i}D_{\bar z_j}(\varphi\circ\psi^{-1})|_0 z_i\bar z_j \quad \text{si } z\in\mathbb{C}^n.$$

Il est clair que $g\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ et un calcul rapide montre que h s'annule en 0 avec toutes ses dérivées d'ordre ≤ 2.

On en déduit qu'il existe un voisinage relativement compact $\bar U$ de 0 dans $\psi(V)$ et une constante C telle que $|h(z)| \underset{U}{\leq} C|z|^3$.

Posons $\lambda = \inf_{\bar U} \lambda_{\varphi\circ\psi^{-1}}$. Il résulte de ce qui précède que

$$\varphi\circ\psi^{-1}(z) - \varphi(z_0) - 2\mathcal{R}g(z) \underset{U}{\geq} (\lambda - C|z|)|z|^2.$$

Choisissons un voisinage U' de 0 dans U suffisamment petit pour que $\lambda - C|z| \underset{U'}{>} 0$. Posons $V_0 = \psi^{-1}(U')$ et $f = 2g\circ\psi|_{V_0}$. La construction précédente montre que V_0 et f vérifient les conditions de l'énoncé.

PROPOSITION IV.2.6. Si M est une variété holomorphe et si φ est une fonction str. pseudo-convexe telle que $\varphi^{-1}(]-\infty,r])$ est compact pour tout $r\in\mathbb{R}$, alors M est variété de Stein et $\varphi^{-1}(]-\infty,r])$ est holomorphiquement convexe.

<u>Preuve</u>: Notons Ω_r l'ouvert $\varphi^{-1}(]-\infty,r[)$, et Ω_r est pseudo convexe car la fonction $\psi=\frac{1}{r-\varphi}$ y est str. pseudo-convexe et telle que $\psi^{-1}(]-\infty,r'])$ est compact dans Ω_r pour tout $r'\in\mathbb{R}$. Soient z_o,z_1 deux points de M tels que $\varphi(z_1)\leq\varphi(z_o)$, $z_1\neq z_o$. Il existe un voisinage coordonné V de z_o ne contenant pas z_1 et une fonction $u_o\in\mathcal{O}(V)$ nulle en z_o et telle que $\mathcal{R}u_o<\varphi(z)-\varphi(z_o)$ pour $z\in V\setminus\{z_o\}$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages compacts de z_o tels que $V_1\subset\overset{o}{V}_2$, $V_2\subset V$. Choisissons une fonction $\Psi\in D(M)$, à support dans V_2, valant 1 au voisinage de V_1. Le support de $\bar\partial\Psi$ est un compact inclus dans $V_2\setminus\overset{o}{V}_1$ et par conséquent $\inf\limits_{x\in[\bar\partial\Psi]}(\varphi(z)-\varphi(z_o)-\mathcal{R}u_o(z))>o$. Soit ε un réel $>o$ tel que $\varphi(z)-\varphi(z_o)-\mathcal{R}u_o(z)>2\varepsilon$ pour $z\in[\bar\partial\Psi]$. Posons $a=\varepsilon+\varphi(z_o)$, on constate que $z_o\in\Omega_a$, $z_1\in\Omega_a$ et que $\mathcal{R}u_o(z)<-\varepsilon$ pour $z\in[\bar\partial\Psi]\cap\Omega_a$. Soit u une fonction de $\mathcal{O}(V)$. La forme $ue^{tu_o}\,\bar\partial\Psi$ appartient à $A_c^{o,1}(V)$ et définit un élément de $A_c^{o,1}(\Omega\ )$ que nous noterons f_t. Vu la construction précédente, on sait que $\|f_t\|_{\Omega_a}\leq\sup\limits_{[\bar\partial\Psi]}\|u\bar\partial\Psi\|e^{-\varepsilon t}\chi_{V_2}$. Comme Ω_a est pseudoconvexe il existe un poids φ_a tel que pour tout $t>o$ il existe $v_t\in L_2^{o,o}(\Omega_a,\varphi_a)$ vérifiant $\bar\partial v_t=f_t$,

$$\|v_t\|_{\Omega_a,\varphi_a}\leq\|f_t\|_{\Omega_a,\varphi_a}.\ \text{Ainsi}\quad v_t\xrightarrow[L_2(\Omega_a,\varphi_a)]{}o\ \text{lorsque}\ t\to+\infty$$

et $\bar\partial v_t=\bar\partial(ue^{tu_o}\,\Psi)$.

Posons $u_t = ue^{tu_o\psi} - v_t$, on sait que $u_t \in L_2(\Omega_a, \varphi_a)$ et que $\bar{\partial}u_t = o$, on en déduit que $u_t \in \mathcal{O}(\Omega_a)$. Comme $f_t = o$ sur $\Omega_a \setminus [\bar{\partial}\psi]$ on sait que $v_t \in \mathcal{O}(\Omega_a \setminus [\bar{\partial}\psi])$. De plus $u_t \xrightarrow[L_2(\Omega_c, \varphi_c)]{} o$ pour $c < \varphi(z_o)$ et $v_t \xrightarrow[L_2(\Omega_a \setminus [\bar{\partial}\psi], \varphi_a)]{} o$. Ainsi $u_t \xrightarrow[\mathcal{O}(\Omega_c)]{} o$ pour $c < \varphi(z_o)$, $v_t \xrightarrow[\mathcal{O}(\Omega_a \setminus [\bar{\partial}\psi])]{} o$, $u_t(z_o) \to u(z_o)$, $u_t(z_1) \to o$.

Montrons qu'il existe une fonction holomorphe f sur M séparant z_o de z_1. Soit u un élément de $\mathcal{O}(V)$ tel que $u(z_o)=1$. Vu ce qui précède, il existe $u' \in \mathcal{O}(\Omega_a)$ tel que $u'(z_o) > \frac{1}{2}$ et $u'(z_1) < \frac{1}{2}$. La restriction de u' à $\varphi^{-1}(]-\infty, \varphi(z_o)])$ peut-être approchée uniformément sur $\varphi^{-1}(]-\infty, \varphi(z_o)])$ par des fonctions de $\mathcal{O}(M)$. Comme $z_o, z_1 \in \varphi^{-1}(]-\infty, \varphi(z_o)])$ on en déduit qu'il existe $u'' \in \mathcal{O}(M)$ tel que $u''(z_o) > \frac{1}{2}$ et $u''(z_1) < \frac{1}{2}$.

Montrons que z_o n'est pas dans l'enveloppe holomorphe de $\varphi^{-1}(]-\infty, r])$ lorsque $r < \varphi(z_o)$. Soient u un élément de $\mathcal{O}(V)$ tel que $u(z_o)=1$ et r' un réel tel que $r<r'<\varphi(z_o)$. Vu ce qui précède, on sait que $u_t \xrightarrow[\mathcal{O}(\Omega_{r'})]{} o$ et cela entraine que

$u_t \xrightarrow[\varphi^{-1}(]-\infty, r])]{} o$. Ainsi il existe $u' \in \mathcal{O}(\Omega_a)$ tel que

$\sup_{\varphi^{-1}(]-\infty, r])} |u'| \leq \frac{1}{2}$ et tel que $u'(z_o) > \frac{1}{2}$. En raisonnant comme ci-dessus on trouve une fonction $u'' \in \mathcal{O}(M)$ telle que

$\sup_{\varphi^{-1}(]-\infty, r])} |u''| < \frac{1}{2}$ et $u''(z_o) > \frac{1}{2}$. Ceci montre que $\varphi^{-1}(]-\infty, r])$ est holomorphiquement convexe. On en conclut que l'enveloppe holomorphe d'un compact K de M est compacte puisqu'il existe r tel que $K \subset \varphi^{-1}(]-\infty, r])$.

Montrons qu'il existe n éléments $f_1,\dots,f_n$ de $\mathcal{O}(M)$ tels que l'application $(f_1,\dots,f_n)$ soit une carte locale en z_o.
Soit $u^1,\dots,u^n$ un système de coordonnées sur V tel que $u^j(z_o) = o$. On a $(\partial u^j_t)_{z_o} = (\partial u^j)_{z_o} - (\partial v^j_t)_{z_o}$. Or $v^j_t \xrightarrow[\mathcal{O}(\Omega_a \setminus [\bar\partial \varphi])]{} 0$

donc $(\partial v^j_t)_{z_o} \to 0$ et $(\partial u^j_t)_{z_o} \to (\partial u^j)_{z_o}$.

Il existe donc $(u'^1,\dots,u'^n) \in \mathcal{O}(\Omega_a)^n$ tel que

$(\partial u'^1)_{z_o},\dots,(\partial u'^n)_{z_o}$ sont n covecteurs linéairement indépendants. Soit b un réel tel que $\varphi(z_o) < b < a$. Les fonctions

$u'^1|_{\varphi^{-1}(]-\infty,b])},\dots,u'^n|_{\varphi^{-1}(]-\infty,b])}$ peuvent-être approchées

uniformément sur $\varphi^{-1}(]-\infty,b])$ par des fonctions de $\mathcal{O}(M)$.
Ces mêmes fonctions peuvent par conséquent être approchées dans $\mathcal{O}(\varphi^{-1}]-\infty,b[)$ par les restrictions de fonctions holomorphes sur M. Il existe donc $((u''^1,\dots,u''^n) \in \mathcal{O}(M)^n$ tels que $\partial u''^1_{z_o},\dots,\partial u''^n_{z_o}$ sont n covecteurs linéairement

indépendants.

COROLLAIRE IV.2.7. Toute variété pseudo-convexe est une variété de Stein.

IV.3. Cohomologie de Dolbeault et de de Rahm.

DEFINITION IV.3.1. Si E est un fibré vectoriel holomorphe de base M, on pose:

$$L^{p,q}(M,E) = \{u : u \in \mathcal{L}_2(M, E \otimes \overset{p,q}{\Lambda} T^*M),\ \bar{\partial}_E u \in \mathcal{L}_2(M, E \otimes \overset{p,q+1}{\Lambda} T^*M)\}$$

$$L_c^{p,q}(M,E) = \{u : u \in L^{p,q}(M,E),\ [u] \text{ compact}\}$$

$$\omega^p(M,E) = \bigcap_{v \in \Omega^{n-p}(M,E^*)} \{u : u \in L_c^{p,n}(M,E),\ \int_M u \wedge v = 0\}.$$

PROPOSITION IV.3.2. Si E est un fibré vectoriel holomorphe dont la base est une variété de Stein, alors les suites $0 \to \Omega^p(M,E) \to L^{p,o}(M,E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \ldots\ldots L^{p,n}(M,E) \to 0$

et $0 \to \Omega^p(M,E) \to A^{p,o}(M,E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \ldots\ldots A^{p,n}(M;E) \to 0$

sont exactes.

Preuve: Cela résulte du corollaire IV.2.4 et de la proposition III.I.13.

COROLLAIRE IV.3.3.

$$H_{\bar{\partial}}^{p,o}(M,E) = \Omega^p(M,E) \quad \text{et} \quad H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M,E) = 0 \quad \text{si} \quad q > 0$$

PROPOSITION IV.3.4. Soient E un fibré vectoriel holomorphe dont la base est une variété de Stein de dimension n et U un voisinage ouvert d'un compact holomorphiquement convexe K.

a) Si $p \in \mathbb{N}$, $u \in L^{p,o}(M,E)$, $[u] \subset K$, $\bar{\partial}_E u = 0$ alors $u = 0$.

b) Si $p,q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $q \neq n$, $u \in L^{p,q}(M,E)$, $[u] \subset K$, $\bar{\partial}_E u = 0$ alors il existe $u' \in L^{p,q-1}(M,E)$, tel que $[u'] \subset U$, $\bar{\partial}_E u' = u$.

c) Si $p \in \mathbb{N}$, $u \in \omega^p(M,E)$, $[u] \subset K$ alors il existe $u' \in L^{p,n-1}(M,E)$, tel que $[u'] \subset U$, $\bar{\partial}_E u' = u$.

Preuve: Cela résulte de la proposition III.1.15 compte tenu de la proposition IV.2.3.

PROPOSITION IV.3.5. Si E est un fibré vectoriel holomorphe dont la base est une variété de Stein et si U est un voisinage ouvert d'un compact holomorphiquement convexe K de M, alors il existe un voisinage ouvert V de K inclus dans U et tel que $\overline{\Omega(M,E)_{|V}}^{\Gamma(V,E_{|V})} \supset \Omega(U,E_{|U})_{|V}$.

PROPOSITION IV.3.6. Si M est une variété de Stein alors $H(M,\mathrm{hol}) \simeq H_d(M,\mathbb{C})$

Preuve: Notons i l'injection canonique de $\Omega(M)$ dans $A(M)$. Il est clair que $d\circ i = i\circ\partial$. Notons $H(i)$ l'application de $H(M,\mathrm{hol})$ dans $H_d(M,\mathbb{C})$ déduite de i par passage au quotient Si $f\in\Omega^p(M)$, si $f = dg$ et si $g\in A^{p-1}(M)$, alors $g = \sum_{r=0}^{p-1} h_{r,p-1-r}$ et $dg = \sum_{r=0}^{p-1}(\partial h_{r,p-1-r}+\bar\partial h_{r,p-1-r})$.
Comme dg est de type (p,o), on en déduit que $dg = \partial h_{p-1,o}$ et que $f = \partial h_{p-1,o}$. Il en résulte aussitôt que $H(i)$ est injectif. La composante de degré (p,q) d'un élément ω de $A(M)$ se note $\omega_{p,q}$ et on pose $q(\omega) = \sup\{q: \omega_{p,q} \neq 0\}$.
Soit p un naturel. Posons
$I=\{r:r\in\mathbb{N}, (\omega \text{ d-cycle de degré } p,\ q(\omega) = r) \Rightarrow (\omega \text{ d-homologue à un } \partial\text{-cycle de } \Omega(M))\}$.
Il est clair que $o\in I$. Soient r un naturel tel que $[o,r]\subset I$ et ω un d-cycle de degré p, tel que $q(\omega) = r+1$.
On sait que $\omega = \sum_{s=0}^{r+1}\omega_{p-s,s}$. On en déduit que
$d(\sum_{s=0}^{r}\omega_{p-s,s})+\partial\omega_{p-r-1,r+1}) + \bar\partial\omega_{p-r-1,r+1} = 0$. En prenant

les composantes de type $(p-r-1,r+2)$ des deux membres de cette égalité on voit que $\bar{\partial}\omega_{p-r-1,r+1} = 0$. Soit ω' un élément de $A^{p-r-1,r}(M)$ tel que $\bar{\partial}\omega' = \omega_{p-r-1,r+1}$.

Il est clair que $\sum_{s=0}^{r+1} \omega_{p-s,s} - d\omega' = \sum_{s=0}^{r} \omega_{p-s,s} - \partial\omega'$.

Il existe un élément $\omega'' \in A(M)$ tel que $(\sum_{s=0}^{r} \omega_{p-s,s} - \partial\omega' - d\omega'') \in \Omega(M)$, car $[o,r] \subset I$. On en déduit que $\sum_{s=0}^{r+1} \omega_{p-s,s} - d(\omega'+\omega'') \in \Omega(M)$ et que $r+1 \in I$.

Le théorème d'induction transfinie montre alors que $I = \mathbb{N}$.

Il en résulte aussitôt que tout d-cycle de $A(M)$ est d-homologue à un ∂-cycle de $\Omega(M)$, ce qui signifie que $H(i)$ est surjectif.

IV.4. Plongement des variétés de Stein

LEMME IV.4.1. Soit M une variété vérifiant les conditions b,c de la définition IV.1.1.. Pour tout compact K de M il existe une application f de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ immersive et injective sur K.

Preuve: Posons $I_\varphi=\{x : x\in M, \varphi \text{ immersif en } x\}$ lorsque $\varphi\in\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^n)$. $(I_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^n)}$ est un recouvrement ouvert de M car M vérifie l'hypothèse . On peut donc trouver des éléments $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^n)$ tel que $K\subset \bigcup_{j=1}^{k} I_{\varphi_j}$. Notons f l'application holomorphe $(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$ de M dans $\mathbb{C}^{nk}$. L'application f est immersive sur K et il existe un voisinage ouvert V de diagK dans KxK tel que $V\cap\ker(f)=\text{diag}K$. Lorsque $g\in\mathcal{O}(M)$ on pose $J_g=\{(x,y) : x\in M,\ y\in M,\ g(x)\neq g(y)\}$. La famille $(J_g)_{g\in\mathcal{O}(M)}$ est un recouvrement ouvert de $(K\times K)\setminus V$ car M vérifie l'hypothèse . On peut donc trouver $g_1,\dots,g_l$ dans $\mathcal{O}(M)$ tels que l'on a $\bigcup_{j=1}^{l} J_{g_j}\supset(K\times K)\setminus V$. Notons g l'application $(g_1,\dots,g_l)$ de M dans $\mathbb{C}^l$. Par construction (f,g) est injective sur K , elle y est aussi immersive vu la définition de f.

LEMME IV.4.2. L'image d'une variété réelle à base dénombrable de dimension n par un élément f de $C_1(M,\mathbb{R}^m)$ est l-négligeable lorsque m>n.

Preuve: Comme M admet un recouvrement dénombrable par des ouverts coordonnés, il suffit de prouver la proposition pour $M=\mathbb{R}^n$. Dans ce cas il suffit de montrer que l'image par f d'un cube est l-négligeable dans $\mathbb{R}^m$ si m>n. Soit C un cube de côté c. On sait que $f(y)-f(x)=\int_0^1 D_t f(x+t(y-x))dt$ donc on a $|f(y)-f(x)| = \sup_C\|Df\|\,|y-x|$ si $(y,x)\in C\times C$. On en déduit que $\operatorname{diam}(f(C)) \leq Dc$, si $D=\sqrt{n}.\sup\limits_{C} \|Df\|$. Comme $f(C)$ est mesurable et inclus dans un cube de côté diam $(f(C))$, on voit que $l(f(C)) \leq D^m.c^{m-n} l(C)$. Recouvrons C par des cubes $C_1,\dots,C_{k^n}$ de côté $\frac{c}{k}$. On a $l(f(C)) \leq \sum\limits_{i=1}^{k^n} l(f(C_i)) \leq D^m (\frac{c}{k})^{m-n} c^n$. On en déduit que $l(f(C)) = o$ ce qui suffit.///

LEMME IV.4.3. Soit M une variété holomorphe et A une partie de M. Notons p_a la projection de $\mathbb{C}^{N+1}$ sur $\mathbb{C}^N$ parallèlement à a, lorsque $a_{N+1} \neq o$.

α) Si f est un élément de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{N+1})$ immersif sur A et si $N \geq 2n$ alors l'ensemble $D = \{a : a \in \mathbb{C}^{N+1}, a_{N+1} \neq o,\ p_a \circ f$ immersif sur $A\}$ est dense dans $\mathbb{C}^{N+1}$.

β) Si f est un élément de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{N+1})$ immersif et injectif sur A et si $N \geq 2n+1$ alors l'ensemble $D' = \{a : a \in \mathbb{C}^{N+1}, a_{N+1} \neq o,\ p_a \circ f$ immersif et injectif sur $A\}$ est dense dans $\mathbb{C}^{N+1}$.

<u>Preuve</u>:

α) $p_a \circ f$ est une immersion en x si et seulement si l'application $((p_a \circ f)_{*x}|_{T'_xM} : T'_xM \to T'_{f(x)}\mathbb{C}^{N+1})$ est injective

Le fibré tangent holomorphe de $\mathbb{C}^{N+1}$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}^{N+1}$. Moyennant cette identification

$$p_2 \circ (p_a \circ f)_{*x}|_{T'_xM} = p_a \circ p_2 \circ f_{*x}|_{T'_xM}$$

Donc $p_a \circ f$ est une immersion en un point $x \in A$ si $a \notin p_2 \circ f_{*x}(T'_xM)$.

Ainsi $\complement(p_2 \circ f_*(T'M) \cup \mathbb{C}^N \times \{o\}) \subset D$ ce qui suffit car $p_2 \circ f_*(T'M) \cup \mathbb{C}^N \times \{o\}$ est l-négligeable dans $\mathbb{C}^{N+1}$ donc d'intérieur vide.

β) Définissons l'application g de $\mathbb{C} \times M \times M$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$ en posant

$g(\mu,z,z') = \mu.(f(z)-f(z'))$. On constate que $p_a \circ f$ est injectif sur A si $a \notin g(\mathbb{C}\times M\times M)$. En effet, si $z,z' \in A$ et si $p_a \circ f(z) = p_a \circ f(z')$ alors il existe μ tel que $f(z)-f(z') = \mu a$ or $a \notin g(\mathbb{C}\times M\times M)$ donc $\mu = o$ ainsi $f(z) = f(z')$ et $z=z'$. Mais $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\times M\times M, \mathbb{C}^{N+1})$ et $\mathbb{C}\times M\times M$ est une variété holomorphe de dimension $2n+1$ donc $g(\mathbb{C}\times M\times M)$ est 1-négligeable dans $\mathbb{C}^{N+1}$. En utilisant la partie précédente on voit que CD' est 1-négligeable dans $\mathbb{C}^{N+1}$, ce qui suffit.///

LEMME IV.4.4. Soient M une variété holomorphe, A une partie de M et $((f,g):M \to \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N'})$ une application holomorphe.

a) Si $N \geq 2n$, si (f,g) est immersif sur A et si $\varepsilon > o$ alors il existe une application linéaire B de $\mathbb{C}^{N'}$ dans $\mathbb{C}^N$ telle que $\|B\| \leq \varepsilon$ et pour laquelle $f+Bg$ est immersive sur A.

b) Si $N \geq 2n+1$, si (f,g) est injectif et immersif sur A et si $\varepsilon > o$ alors il existe une application linéaire B de $\mathbb{C}^{N'}$ dans C^N telle que $\|B\| \leq \varepsilon$ et pour laquelle $f+Bg$ est injective et immersive sur A.

<u>Preuve</u>: a) Traitons d'abord le cas $N'=1$. Le lemme IV .4.3. montre qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$ arbitrairement proche de $(o,1)$ et tel que $p_{(a,b)} \circ (f,g)$ est immersif sur A. Or on a $p_{(a,b)}(f,g) = f - \frac{a}{b} g$ et $\lim_{(a,b) \to (o,1)} \frac{a}{b} = o$. Le lemme est donc prouvé dans ce cas.

Prouvons le cas général par récurrence. Supposons le lemme exact pour $N'=k$ et prouvons le pour $N'=k+1$. Notons p_1 la projection de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^k$, p_2 la projection de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, p' la projection de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^k$ sur $\mathbb{C}^N$ et p'' la projection de

$\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^k$ sur $\mathbb{C}^k$. Le cas $N'=1$ montre qu'il existe une application linéaire B de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^k$, de norme inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ et pour laquelle $(f,p_1(g))- B(g_{k+1})$ est immersive sur A. L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe une application linéaire C de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}^N$, de norme inférieure à $\frac{\varepsilon}{4}$ et pour laquelle $f-p'{}_\circ B(g_{k+1}) - C_\circ p_1(g) - C_\circ p''{}_\circ B(g_{k+1})$ est immersive sur A. Posons $D=p'{}_\circ B_\circ p_2 + C_\circ p_1 + C_\circ p''{}_\circ B_\circ p_2$. D est une application linéaire de $\mathbb{C}^{k+1}$ dans $\mathbb{C}^N$, $\|D\| \leq \varepsilon$ si $\varepsilon < 1$.
De plus $f-Dg$ est immersive sur A, ce qui prouve le lemme dans le cas $N'=k+1$.

b) La preuve est entièrement analogue à celle de a).///

LEMME IV.4.5. Soient M une variété holomorphe à base dénombrable et K un compact de M.

a) Le sous-ensemble de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ formé des éléments de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ qui sont immersifs sur K est ouvert.

b) Le sous-ensemble de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ formé des éléments de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ qui sont immersifs et injectifs sur K est ouvert.

<u>Preuve</u>: a) Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ non immersifs sur K. Montrons que la limite f de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est non immersive sur K, cela prouvera a). Soit z_m un point de K où f_m n'est pas immersif. La suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possède une sous suite convergente $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, notons z sa limite. Soit (U,φ) une carte locale en z. Il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que $z_{m_k}\in U$ pour tout k appartenant à $[k_0,+\infty[\cap\mathbb{N}$. La suite $(D_{\varphi(z_{m_k})} f_{m_k}\circ\varphi^{-1})_{k\in[k_0,+\infty[\cap\mathbb{N}}$ est composée d'applications linéaires non injectives et converge vers $D_{\varphi(z)} f\circ\varphi^{-1}$. Par conséquent $D_{\varphi(z)} f\circ\varphi^{-1}$ n'est pas injective et f n'est pas une immersion en z.

b) Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ dont les éléments sont non injectifs sur K et dont la limite f est immersive sur K. Montrons que f est non injective sur K, cela prouvera b).

Comme f_m est non injective sur K il existe des points distincts z_m et z'_m de K tels que $f_m(z_m)=f_m(z'_m)$. Il existe une suite strictement croissante $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de naturels, telle que les suites $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z'_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Posons $z=\lim\limits_{k\to+\infty} z_{m_k}$ et $z'=\lim\limits_{k\to+\infty} z'_{m_k}$. On a $f(z)=f(z')$ car $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{m_k}(z_{m_k})=f(z)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{m_k}(z'_{m_k})=f(z')$. Pour conclure, il suffit de prouver que $z\neq z'$. Procédons par l'absurde.

Supposons que $z=z'$ et soit (U,φ) une carte locale en z telle que $\varphi(U)$ est convexe dans $\mathbb{C}^n$. Choisissons un naturel k_o suffisamment grand pour que l'on ait $z_{m_k}\in U, z'_{m_k}\in U$ lorsque $k\in\,]k_o,+\infty[\,\cap\mathbb{N}$. Si $k\in\,]k_o,+\infty[\,\cap\mathbb{N}$ on a

$$f_{m_k}(z_{m_k})-f_{m_k}(z'_{m_k})=\int_o^1 D_{\xi(t)}f_{m_k}\circ\overset{-1}{\varphi}(\varphi(z_{m_k})-\varphi(z'_{m_k}))\,dt \qquad (*)$$

où on a posé $\xi(t)=\varphi(z'_{m_k})+t(\varphi(z_{m_k})-\varphi(z'_{m_k}))$. Posons

$$M_k(t)=D_{\xi(t)}f_{m_k}\circ\overset{-1}{\varphi}\left[\frac{\varphi(z_{m_k})-\varphi(z'_{m_k})}{|\varphi(z_{m_k})-\varphi(z'_{m_k})|}\right] \text{ lorsque } t\in[o,1].$$

La relation $(*)$ montre que $\int_o^1 M_k(t)dt=o$. Soit k_l une suite strictement croissante de $]k_o,+\infty[\,\cap\mathbb{N}$ pour laquelle la suite

$$\left(\frac{\varphi(z_{m_{k_l}})-\varphi(z'_{m_{k_l}})}{|\varphi(z_{m_{k_l}})-\varphi(z'_{m_{k_l}})|}\right)_{l\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un élément } v \text{ de } \mathbb{C}^n.$$

Une application directe du théorème de Lebesgue montre que

$$\lim_{l\to+\infty}\int_o^1 M_{k_l}(t)dt=\int_o^1 D_{\varphi(z)}f\circ\overset{-1}{\varphi}(v)dt.$$

On en déduit que $D_{\varphi(z)}f\circ\overset{-1}{\varphi}(v)=o$ ce qui montre que $D_{\varphi(z)}f\circ\overset{-1}{\varphi}$

est une application linéaire non injective. Mais cela entraine que f n'est pas une immersion en z, ce qui contredit les hypothèses.

THEOREME IV.4.6. Si M est une variété holomorphe vérifiant les conditions a,b,c, de la définition IV.1.1. alors: a) L'ensemble des immersions holomorphes de M dans $\mathbb{C}^{2n}$ est une partie dense de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{2n})$

b) L'ensemble des immersions holomorphes injectives de M dans $\mathbb{C}^{2n+1}$ est une partie dense de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{2n+1})$

<u>Preuve</u>: a) Soit A une partie de M, notons I(A) l'ensemble des applications holomorphes de M dans $\mathbb{C}^{2n}$, immersives sur A. Soit $(K_m)_{m\in N}$ une suite fondamentale de compacts de M. Il est évident que $I(M) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I(K_m)$. Montrons que $I(K_m)$ est dense dans $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{2n})$. Soient f un élément de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{2n})$, K un compact de M et $\varepsilon > 0$. Il suffit de construire un élément h de $I(K_m)$ tel que $\sup_K |f-h| \leq \varepsilon$. Choisissons un élément g de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{2n})$ immersif sur K_m. L'application (f,g) de M dans $\mathbb{C}^{4n}$ est holomorphe et immersive sur K_m. Le lemme IV.4.4. nous fournit une application linéaire B de C^{2n} dans C^{2n} de norme majorée par $\dfrac{\varepsilon}{1+\sup_K |g|}$, telle que l'application f-Bg est immersive sur K_m. De plus on a $\sup_K |f-Bg-f| \leq \varepsilon$. Le lemme IV.4.5. montre que $I(K_m)$ est un ouvert dense de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{2n})$. Le théorème est une conséquence du théorème de Baire.

b) La preuve est analogue à celle de a). ///

RAPPEL IV.4.7. Si $z \in \mathbb{C}^N$, on pose $|z|_\infty = \sup_{j=1,\dots,N} |z_j|$.

DEFINITION IV.4.8. Une partie relativement compacte P de M est un polyèdre holomorphe d'ordre N s'il existe un élément f de $\mathcal{O}(M, \mathbb{C}^N)$ tel que P est une union de composantes connexes de $\{z : z \in M, |f(z)|_\infty < 1\}$.

PROPOSITION IV.4.9. Si K est un compact $\mathcal{O}$-convexe d'une variété holomorphe M et si V est un voisinage de K alors il existe un polyèdre holomorphe P tel que $K \subset P \subset V$.

<u>Preuve</u>: Soit U un voisinage ouvert relativement compact de K inclus dans V. Posons $A = \{f : f \in \mathcal{O}(M), |f|_K < 1\}$. Pour tout élément f de A on pose $U_f = \{z : z \in M, |f(z)| > 1\}$. La famille $(U_f)_{f \in A}$ est un recouvrement ouvert du compact $\dot{U}$ car $\hat{K}^{\mathcal{O}} = K$. Il existe donc des éléments $f_1, \dots, f_N$ de A tels que $\dot{U} \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{f_j}$. Posons $f = (f_1, \dots, f_N)$ et $P_0 = \{z : z \in M, |f(z)|_\infty < 1\}$. P_0 contient K et ne rencontre pas $\dot{U}$. Par conséquent $P_0 \cap U$ est une union de composantes connexes de P_0, en effet l'une d'elle ne peut rencontrer à la fois U et $C\overline{U}$. Ce qui précède montre que $P_0 \cap U$ est un polyèdre holomorphe tel que $K \subset P_0 \cap U \subset V$.

LEMME IV.4.10. Si $z \in \mathbb{C}$ et si $n \geq 2$ alors on a $|z^n - 1 - n(z-1)| \leq n(n-1)(1+|z-1|)^{n-2} |z-1|^2$.

<u>Preuve</u> : On a $z^n = 1 + n(z-1) + \int_0^1 (1-t)\, D_t^2 (1+t(z-1))^n \, dt$. On en déduit que $|z^n - 1 - n(z-1)| \leq \int_0^1 |1-t|\, n(n-1)\, |1+t(z-1)|^{n-2} |z-1|^2 dt$

Par conséquent on a $|z^n - 1 - n(z-1)| \leq n(n-1)(1+|z-1|)^{n-2} |z-1|^2$.

PROPOSITION IV.4.11. Soient M une variété holomorphe vérifiant les conditions a,b,c de la définition IV.1.1., K un compact de M et P un polyèdre holomorphe d'ordre N+1 contenant K. Si $N \geqq 2n$ alors il existe un polyèdre holomorphe P' d'ordre N tel que $K \subset P' \subset P$.

<u>Preuve</u>: Soit f un élément de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^{N+1})$ tel que P est une union de composantes connexes de $\{z : z \in M, |f(z)|_\infty < 1\}$. Choisissons un réel c_o tel que $\sup\limits_K |f|_\infty < c_o < 1$, puis trois réels c_1, c_2, c_3 tels que $c_o < c_1 < c_2 < c_3 < 1$. Posons $K' = \{z : z \in \overline{P}, |f_{N+1}(z)| \geqq c_2\}$. Les fonctions $\frac{f_1}{f_{N+1}}, \ldots, \frac{f_N}{f_{N+1}}$ sont définies et holomorphes au voisinage du compact K'.

Pour tout $\varepsilon > o$ il existe un élément g de $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^N)$ tel que $\sup\limits_{\overline{P}} |g|_\infty \leqq \varepsilon$ et pour lequel l'application $(\frac{f_1}{f_{N+1}} + g_1, \ldots, \frac{f_N}{f_{N+1}} + g_N)$ est immersive sur K'. Posons $F_i = \frac{f_i}{f_{N+1}} + g_i$ et $f'_i = F_i f_{N+1}$ si $i \leqq N$. Posons également $f'_{N+1} = f_{N+1}$ et $f' = (f'_1, \ldots, f'_{N+1})$.

On peut choisir ε suffisamment petit pour que l'on ait $\sup\limits_K |f'|_\infty < c_o$ et $\{z : z \in P, |f'(z)|_\infty < c_3\} \subset\subset P$. En effet, on a $\big||f'_i(z)| - |f_i(z)|\big| \leqq \sup\limits_{\overline{P}} |f_{N+1}|\varepsilon$ si $z \in \overline{P}$ et si $i \leqq N+1$.

Notons V l'ensemble $\{z : z \in P, |f'(z)|_\infty < c_3\}$ et U_m l'ensemble $\bigcap\limits_{j=1}^{N} \{z : z \in M, |(f'_j(z))^m - (f'_{N+1}(z))^m| < c_1^m\}$. Soit P_m l'union des composantes connexes de U_m qui rencontrent K. Pour conclure il suffit de montrer que l'on a $K \subset P_m \subset V$ lorsque m est un naturel suffisamment grand. En effet P_m est alors un polyèdre holomorphe d'ordre N inclus dans P et contenant K.

$|(f'_j(z))^m - (f'_{N+1}(z))^m| \leqq 2\left(\frac{c_o}{c_1}\right)^m c_1^m$ lorsque $z \in K$. Or $\lim\limits_{m \to +\infty} 2\left(\frac{c_o}{c_1}\right)^m = o$ donc $K \subset P_m$ pour m suffisamment grand.

Posons $L=\{z : z\in\dot{V}, |f_{N+1}(z)| \geq c_2\}$. Supposons que $P_m \not\subset V$ et que $c_1^m+c_2^m < c_3^m$ et montrons que $P_m \cap L \neq \emptyset$. Soit z un élément de $P_m \cap CV$. La composante connexe de U_m qui contient z rencontre donc $\dot{V}$ en un point z' et ce point appartient à $P_m \cap \dot{V}$. Si $f'_{N+1}(z') < c_2$ alors $\sup\limits_{j=1,\dots,N} |f'_j(z')|^m < c_3^m$ et cela contredit l'appartenance de z' à $\dot{V}$, par conséquent $z' \in P_m \cap L$. Si nous montrons que $P_m \cap L = \emptyset$ pour m suffisamment grand, alors nous pourrons conclure que $P_m \subset V$ et la proposition sera établie.

Soient (W,φ) une carte locale de M pour laquelle $\varphi(W)$ est un convexe de $\mathbb{C}^n$ et L' une partie compacte de L incluse dans W. Supposons que $z \in L' \cap U_m$, $z' \in W, |\varphi(z) - \varphi(z')| \doteq m^{-2}$.

On a $|(F_j(z))^m - 1| < \left|\dfrac{c_1}{f_{N+1}(z)}\right|^m$ et $|f_{N+1}(z)| \geq c_2$.

On en déduit que $|(F_j(z))^m - 1| < \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^m$. Choisissons un naturel m_0 tel que $\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^{m_0} < \dfrac{1}{2}$ et supposons $m > m_0$. La majoration précédente montre que $|(F_j(z))^m - 1| < \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $F_j(z) \neq 0$. La formule de Taylor montre alors qu'il existe une constante

$$\left|\frac{f'_{N+1}(z')}{f_{N+1}(z)} - 1\right| \leq C\ m^{-2}$$

$$\left|\frac{F_j(z')}{F_j(z)} - 1 - \frac{D_{\varphi(z)} F_j \circ \overset{-1}{\varphi}(\varphi(z') - \varphi(z))}{F_j(z)}\right| \leq C\ m^{-4}$$

En utilisant le lemme IV.4.10. on obtient

$$(*)\quad \begin{aligned} &\left|\left(\frac{f'_{N+1}(z')}{f_{N+1}(z)}\right)^m - 1\right| \leq C'\ m^{-1} \\ &\left|\left(\frac{F_j(z')}{F_j(z)}\right)^m - 1 - m\,\frac{D_{\varphi(z)} F_j \circ \overset{-1}{\varphi}(\varphi(z') - \varphi(z))}{F_j(z)}\right| \leq C'\ m^{-2}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\inf\limits_{\substack{z\in L' \\ \xi\in S_{2n}}} |D_{\varphi(z)}F \circ \overset{-1}{\varphi}(\xi)| > 0$ car l'application $(F_1,\dots,F_N)$ est immersive sur L'. On en déduit qu'il existe une constante absolue C" strictement positive telle que $|D_{\varphi(z)} F \circ \overset{-1}{\varphi} (\xi)| > C''|\xi|$. Cette dernière majoration combinée avec les majorations (*) montre qu'il existe une constante absolue C''' telle que

$$|f'_{N+1}(z')|^m \geq |f_{N+1}(z)|^m (1-C'm^{-1})$$

$$\sup_{j=1,\dots,N}\left|\left(\frac{F_j(z')}{F_j(z)}\right)^m - 1\right| = mC''' m^{-2} - C'm^{-2}$$

Posons $m_1 = 2C' + \frac{2C'}{C'''}$. Si $m > m_1$, alors

$$|f'_{N+1}(z')|^m \geq c_2^m \frac{1}{2}$$

$$\sup_{j=1,\dots,N}\left|\left(\frac{F_j(z')}{F_j(z)}\right)^m -1\right| \geq \frac{C'''}{2} m^{-1}$$

Il résulte que

$$\sup_{j=1,\dots,N} |(f'_j(z'))^m - (f'_{N+1}(z'))^m|$$

$$= \sup_{j=1,\dots,N} |F_j(z')^m -1|\ |f_{N+1}(z')|^m$$

$$\geq \sup_{j=1,\dots,N}\left|\,|F_j(z)|^m\left|\left(\frac{F_j(z')}{F_j(z)}\right)^m -1\right| - |(F_j(z))^m -1|\,\right|\,|f_{N+1}(z')|^m$$

$$\geq \left(\left(1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m\right) \frac{C'''}{2} m^{-1} - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m\right) \frac{1}{2} c_2^m$$

Soit m_2 un naturel pour lequel $\left(\left(1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m\right)\frac{C'''}{2}m^{-1}-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m\right)\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^m > 1$ dès que $m > m_2$. Les majorations précédentes montrent que

$|(f'_j(z'))^m - (f'_{N+1}(z'))^m| \geq c_1^m$ lorsque $m > \sup(m_o, m_1, m_2)$.
Soit m_3 un naturel strictement supérieur à $\sup(m_o, m_1, m_2)$ et tel que $m_3^{-2} < \inf(d(\varphi(K \cap W), \varphi(L')), d(C\varphi(W)), \varphi(L')))$.
Supposons que $z \in L'$ et que $m > m_3$.
Posons $B_m(z) = \{z' : z' \in W, |\varphi(z') - \varphi(z)| < m^{-2}\}$.
La construction précédente montre que $B_m(z) \cap K = \emptyset$ et que $\dot{B}_m(z) \cap U_m = \emptyset$. On en déduit que toute composante connexe de U_m qui rencontre $B_m(z)$ est disjointe de K. Cela montre que $B_m(z) \cap P_m = \emptyset$. Il en résulte que $L' \cap P_m = \emptyset$. En utilisant la compacité de L, on voit qu'il existe un naturel m_4 pour lequel $L \cap P_m = \emptyset$ dès que $m \geq m_4$.

LEMME IV.4.12. Si P est un polyèdre holomorphe d'ordre N de la variété holomorphe M alors il existe une application holomorphe $(f : M \to \mathbb{C}^N)$ telle que $|f|_\infty < 1$ sur P et $|f|_\infty = 1$ sur $\dot{P}$.

<u>Preuve</u>: Il existe une application holomorphe $(f : M \to \mathbb{C}^N)$ pour laquelle P est une union de composantes connexes de $U = \{z : z \in M, |f(z)|_\infty < 1\}$. P est fermé dans U car U est un espace topologique localement connexe. Il en résulte que $\dot{P} \cap U = \emptyset$ car $\dot{P} \cap U = \overline{P} \cap CP \cap U \subset \overline{P}^U \cap CP$. Il est alors clair que $|f|_{\infty, \dot{P}} = 1$ car $\dot{P} \subset CU \cap \overline{U}$.

PROPOSITION IV.4.13. Une variété de Stein M de dimension n se plonge proprement dans $\mathbb{C}^{2n+1}$.

<u>Preuve</u>: Soit g une immersion holomorphe injective de M dans $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Nous allons construire une application f de M dans $\mathbb{C}^{2n+1}$

telle que $\{z : z \in M, |f|_\infty \leq k + |g|_\infty\}$ est compact dans M pour tout $k \in Z$. Pour cela choisissons une suite fondamentale de compacts holomorphiquement convexes $(K_l)_{l \in \mathbb{N}}$. En utilisant les lemmes IV.4.9 et IV.4.11 nous pouvons construire une suite $(P_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de polyèdres holomorphes d'ordre 2n telle que $K_l \subset P_l \subset K_{l+1}$. Posons $M_l = \sup_{P_l} |g|_\infty$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, le lemme IV.4.12 nous fournit une application holomorphe $(h_l : M \to \mathbb{C}^{2n})$ telle que $|h_l|_\infty \underset{\overline{P}_{l-1}}{\leq} 1$, $|h_l|_\infty \underset{\dot{P}_l}{=} 1$. Comme $\overline{P}_{l-1}$ est un compact dans M, il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $|h_l|_\infty \underset{\overline{P}_{l-1}}{\leq} 1-\varepsilon$.

Posons $h'_l = \frac{1}{1-\varepsilon} h_l$, on a $|h'_l|_\infty \underset{\overline{P}_{l-1}}{\leq} 1$, $|h'_l|_\infty \underset{\dot{P}_l}{\geq} 1$.

Déterminons par récurrence une suite $(m_l)_{l \in \mathbb{N}}$ telle que

(1) $|h'^{m_l}_l|_\infty \underset{\overline{P}_{l-1}}{<} 1$ et

(2) $|h'^{m_l}_l|_\infty \underset{\dot{P}_l}{>} M_{l+1} + l + 2 + \left|\sum_{j=1}^{l-1} h'^{m_j}_j\right|_\infty$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Il résulte de (1) que la série $\sum_{l=0}^{\infty} h'^{m_l}_l$ converge absolument et uniformément sur tout compact de M. Posons $h = \sum_{l=0}^{\infty} h'^{m_l}_l$.

La proposition III.1.13 montre que $h \in [\mathcal{O}(M)]^{2n}$.

De l'égalité

$$h = \sum_{j=l+1}^{\infty} h'^{m_j}_j + h'^{m_l}_l + \sum_{j=0}^{l-1} h'^{m_j}_j$$

On déduit que

$$|h|_\infty \underset{\dot{P}_l}{\geq} |h'^{m_l}_l|_\infty - \sum_{j=l+1}^{\infty} {}^{-j} - \left|\sum_{j=0}^{l-1} h'^{m_j}_j\right|_\infty.$$

En tenant compte de (2), on voit que

$$|h|_\infty \underset{\dot{P}_l}{>} N_{l+1} + l.$$

Posons $F_l = \{z : z \in M, |f(z)|_\infty \leq M_{l+1} + 1\}$, $G_l = P_{l+1} \setminus P_l \cap F_l$ et $H_l = P_l \cap F_l$. Ce qui précède montre que les ensembles $(\overset{\bullet}{P}_{l+1} \setminus P_l) \cap F_l$ et $\overset{\bullet}{P}_l \cap F_l$ sont vides. On en déduit que G_l et H_l sont deux compacts disjoints de M.

On a $(H_l \cup G_l)^{\wedge \mathcal{O}(M)} \cap P_{l+1} = H_l \cup G_l$ car

$(H_l \cup G_l)^{\wedge \mathcal{O}(M)} \cap P_{l+1} \subset \hat{P}_{l+1}^{\mathcal{O}} \cap P_{l+1} \cap F_l$.

Posons $H_l' = (H_l \cup G_l)^{\wedge \mathcal{O}} \setminus P_{l+1}$. H_l' est compact, $G_l \cup H_l \cup H_l'$ est holomorphiquement convexe et $G_l \cap (H_l \cup H'_l) = \emptyset$. Soient V un voisinage ouvert de G_l tel que $\overline{V} \cap (H_l \cup H_l') = \emptyset$ et c un réel strictement positif. La fonction $c\chi_V$ est holomorphe au voisinage de $G_l \cup H_l \cup H_l'$. La proposition IV.3.5. nous fournit une fonction u_c holomorphe sur M pour laquelle on a

$|u_c| \underset{G_l}{\geq} \frac{c}{2}$ et $|u_c| \underset{H_l}{\leq} \frac{c}{2}$. Il est alors facile de construire par récurrence une suite $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{O}(M)$ telle que $u_l \underset{H_l}{\leq} 2^{-l}$ et $u_l \underset{G_l}{\geq} 2+l + M_{l+1} + |\sum_{j=0}^{l-1} u_j|$. La première inégalité montre que la série $\sum_{l=0}^{\infty} u_l$ est sommable dans $\mathcal{O}(M)$ car $H_l \subset H_{l+1}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Posons $u = \sum_{l=0}^{\infty} u_l$. De l'égalité

$u = \sum_{j=0}^{l-1} u_j + u_l + \sum_{j=l+1}^{\infty} u_j$, on déduit que

$|u| \geq |u_l| - |\sum_{j=0}^{l-1} u_j| - \sum_{j=l+1}^{\infty} |u_j|$.

En utilisant le fait que $G_l \subset H_{l+1}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ on obtient la majoration suivante:

$|u| \underset{G_l}{\geq} 1 + M_{l+1} + 2 - \sum_{j=l+1}^{\infty} 2^{-j}$. Finalement on voit que $|u| \underset{G_l}{>} 1 + M_{l+1}$. Posons $f = (h,u)$. Les constructions précédentes montrent que $|f|_\infty \underset{P_{l+1} \setminus P_l}{>} 1 + M_{l+1}$. On en déduit que $|f|_\infty \underset{P_{k+1} \setminus P_k}{>} 1 + |g|_\infty$ pour $k \geq 1$ car $M_{l+1} = \sup_{P_{l+1}} |g|_\infty$.
Ainsi $|f|_\infty \underset{M \setminus P_1}{>} 1 + |g|_\infty$ et $\{z : z \in M, |f(z)|_\infty \leq 1 + |g(z)|_\infty\} \subset P_1$.
Ceci montre que f répond aux conditions voulues.

Démontrons maintenant l'énoncé principal. L'application (f,g) de M dans $\mathbb{C}^{4n+2}$ est une immersion holomorphe injective. Le lemme IV.4.4 nous fournit une application linéaire A de $\mathbb{C}^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}^{2n+1}$ telle que $|Ax|_\infty \leq |x|_\infty$ et pour laquelle l'application $(f+Ag : M \to \mathbb{C}^{2n+1})$ est holomorphe, immersive et injective. De plus l'application $f + Ag$ est propre car l'ensemble $\{z : z \in M, |f(z) + Ag(z)|_\infty \leq k\}$ est inclus dans $\{z : z \in M, |f(z)| \leq k + |g(z)|\}$.
Il résulte clairement de ce qui précède que l'application $(f + Ag : M \to \mathbb{C}^{2n+1})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, est un plongement propre de M dans $\mathbb{C}^{2n+1}$. ///

APPENDICE

A.1. Lemmes sur les fonctions convexes

LEMME A.1.1. Une fonction réelle croissante est majorée par une fonction réelle croissante de classe C_∞.

Preuve: Soit $\rho \in D(\mathbb{R})$, positif, tel que $\int \rho \, dl = 1$, à support dans $[-1,1]$. Comme f est loc. intégrable on peut considérer la fonction $f * \rho$. On sait que $f*\rho$ est de classe C_∞ et que $D(f*\rho) = Df*\rho$. Or Df est une mesure positive donc $D(f*\rho)$ est positif et $f*\rho$ est croissant. De plus

$$f*\rho\ (x) = \int f(x-y)\rho(y)dy = \int_{[-1,1]} f(x-y)\ \rho\ (y)\ dy$$

$$f*\rho\ (x) \geq f(x-1)$$

Ainsi $\tau_{-1}(f*\rho)$ est croissante C_∞ et majore f.///

LEMME A.1.2. Toute fonction réelle de classe C_∞ est majorée sur $[o,+\infty[$ par une fonction réelle, convexe, croissante de classe C_∞.

Preuve: Soit f une fonction réelle de classe C_∞. Posons $g(r) = \sup\limits_{[o,r]} |D\varphi|$ si $r \in [o,+\infty[$ et $g(r) = 0$ sinon.
La fonction g est croissante, elle est par conséquent majorée par une fonction réelle h croissante, de classe C_∞.
Posons $k(t) = |\varphi(o)| + \int_o^t h(\tau)d\tau$. La fonction k est de classe C_∞ et $D_t k = h(t)$. On en déduit que k est convexe et

croissant . De plus si $t \in [0,+\infty[$ alors
$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t D\varphi(\tau)d\tau$ et $|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)| + \int_0^t h(\tau)d\tau$.
Il en résulte que k majore φ sur $[0,+\infty[$.///

LEMME A.1.3. Il existe une fonction ψ convexe, croissante C_∞ nulle sur $]-\infty,0]$ et >0 sur $]0,+\infty[$.

Preuve: La fonction φ_0 égale à $e^{-\frac{1}{x}}$ sur $]0,+\infty[$ et à 0 sur $]-\infty,0]$ est de classe C_∞, nulle sur $]-\infty,0]$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$.
La fonction $\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(t)dt$ est positive, de classe C_∞ nulle sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
La fonction $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_1(t)dt$ répond aux conditions de l'énoncé.///

LEMME A.1.4. Etant donné une fonction convexe C_∞, φ, il existe une suite croissante $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctions convexes C_∞ dont les dérivées premières majorent celles de φ et telle que $\varphi_m \underset{]-\infty,0]}{=} \varphi$, $\varphi_m|\,]0,+\infty[\uparrow +\infty$.

Preuve: Il est clair que la suite $(\varphi + m\psi)_{m\in\mathbb{N}}$ convient.///

LEMME A.1.5. Soient M une variété riemannienne et φ une fonction réelle de classe C_∞ telle que $\varphi^{-1}(]-\infty,r])$ est compact pour tout $r \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_2(M)$ il existe une fonction χ convexe, croissante, de classe C_∞, telle que $\|f\|^2 e^{-\chi}(\varphi) \in L_1(M)$.

Preuve: Posons $g(r) = \int_{\varphi^{-1}(]-\infty,r])} \|f\|^2 v$ & $h(r) = (1+r^2 g(r+1))$.
Soit χ une fonction convexe, croissante C_∞ et majorant $\ln h$ sur $[0,+\infty[$. on obtient alors les majorations suivantes ,

$$\int_{\bar{\varphi}^1(]1,m])} \|f\|^2 e^{-\chi(\varphi)} v \leq \sum_{n=1}^{m-1} \int_{\bar{\varphi}^1(]n,n+1])} \|f\|^2 e^{-\chi(\varphi)} v .$$

$$\int_{\bar{\varphi}^1(]1,m])} \|f\|^2 e^{-\chi(\varphi)} v \leq \sum_{n=1}^{m-1} e^{-\chi(n)} g(n+1)$$

$$\int_{\bar{\varphi}^1(]1,m])} \|f\|^2 e^{-\chi(\varphi)} v \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{g(n+1)}{1+n^2 g(n+1)}$$

$$\int_{\bar{\varphi}^1(]1,m])} \|f\|^2 e^{-\chi(\varphi)} v \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

La théorème de Levi montre alors que $\|f\|^2 e^{-\chi(\varphi)} v \in L_1(M)$.///

DEFINITION A.1.6. On note $H(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble des matrices hermitiennes de type (n,n). On note λ l'application de $H(\mathbb{C}^n)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\lambda(H) = \inf_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{(Hx,x)}{(x,\ x)}$.

LEMME A.1.7.

Si $H, H' \in H(\mathbb{C}^n)$ alors $|\lambda(H) - \lambda(H')| = \|H-H'\|$.

Preuve: Supposons que $x \in \mathbb{C}^n$, $H \in H(\mathbb{C}^n)$, $H' \in H(\mathbb{C}^n)$. On a

$\frac{(Hx,x)}{(x,\ x)} = \frac{((H-H')x,x)}{(x,x)} + \frac{(H'x,x)}{(x,x)}$. On en déduit que

$\lambda(H) \leq \|H-H'\| + \frac{(H'x,x)}{(x,x)}$, mais cela montre que $\lambda(H) - \|H-H'\| = \lambda(H')$

La proposition résulte immédiatement de cette majoration.///

A.2. Un difféomorphisme utile

PROPOSITION A.2.1. B_n est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et $B_n \cap H_n$ est difféomorphe à H_n.

Preuve: Soient f l'application de B_n dans $\mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|^2}$ et g l'application de $\mathbb{R}^n$ dans B_n définie par $g(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4\|y\|^2}}$. Il est évident que f et g sont de classe C_∞. De plus, un calcul immédiat montre que $g \circ f = id_{B_n}$ et que $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$.
Ainsi f est un difféomorphisme dont le difféomorphisme réciproque est g. Nous avons donc prouvé que $B_n \simeq \mathbb{R}^n$. Si x_n est positif alors $[f(x)]_n$ est également positif, de même si x_n est positif alors $[g(x)]_n$ est positif. On voit ainsi $(f_{|B_n \cap H_n} : B_n \cap H_n \to H_n)$ et $(g_{|H_n} : H_n \to B_n \cap H_n)$ sont des difféomorphismes réciproques l'un de l'autre ce qui achève la preuve.///

COROLLAIRE A.2.2. Toute variété à bord M possède un recouvrement par des ouverts difféomorphes à H_n ou à $\mathbb{R}^n$.

Preuve: Considérons l'ensemble $\mathfrak{R}$ des ouverts de M ayant la propriété demandée, il suffit de prouver que $\cup \mathfrak{R} = M$.
Soit x un point de M, il existe un ouvert U contenant x et un difféomorphisme $(\varphi : U \to V)$ où V est un ouvert de H_n.
Si $(\varphi(x))_n > 0$ il existe une boule ouverte $B(\varphi(x),r)$ incluse dans V. Alors $\varphi^{-1}(B(\varphi(x),r))$ est un ouvert contenant x difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Si $[\varphi(x)]_n = 0$, alors il existe une boule ouverte $B(\varphi(x),r)$ telle que $B(\varphi(x),r) \cap H_n$ est incluse dans V.
Pour conclure il suffit de remarquer que $B(\varphi(x),r) \cap H_n$ est difféomorphe à $B_n \cap H_n$.

A.3. $\mathcal{A}$-Convexité

REMARQUE A.3.1. Dans ce paragraphe M désigne un ensemble quelconque.

DEFINITION A.3.2. Une application f de M dans $\mathbb{C}$ sépare les parties A et B de M s'il existe un réel r tel que $A \in \{x : x \in M, |f(x)| < r\}$ et que $B \subset \{x : x \in M, |f(x)| > r\}$.
Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{C}^M$. $\mathcal{A}$ sépare A de B s'il existe une fonction de $\mathcal{A}$ qui sépare A de B.
Une partie A de M est $\mathcal{A}$-convexe si $\mathcal{A}$ sépare A de tout point de $C_M A$.

PROPOSITION A.3.3. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{C}^M$.

a) L'intersection d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties $\mathcal{A}$-convexes de M est une partie $\mathcal{A}$-convexe de M.

b) Si A est $\mathcal{A}$ convexe

$$A = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \{z : z \in M, |f(z)| \leq \sup_A |f|\}$$

<u>Preuve:</u>

a) Si $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ alors il existe $i \in I$ tel que $x \notin A_i$.
Ainsi il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ et un nombre r tel que $A_i \subset \{z : z \in M, |f(z)| < r\}$ et que $|f(x)| > r$. Il est clair que f sépare $\bigcap_{i \in I} A_i$ de $\{x\}$ donc $\bigcap_{i \in I} A_i$ est $\mathcal{A}$-convexe.

b) Il est évident que $A \subset \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \{z : z \in M, |f(z)| \leq \sup_A |f|\}$.
De plus si $x \notin A$ alors il existe $f \in \mathcal{A}$ et r tels que $|f(x)| > r$ et $\sup_A |f| < r$. Mais cela signifie que $x \notin \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \{z : z \in M, |f(z)| \leq \sup_A |f|\}$. ///

DEFINITION A.3.4. L'enveloppe $\mathcal{A}$-convexe d'une partie A de M est le plus petit $\mathcal{A}$-convexe contenant A, on la note $\hat{A}^{\mathcal{A}}$.

PROPOSITION A.3.5.

a) Si $f\in\mathcal{A}$ alors $\{z:|f(z)| \leq c\}$ est $\mathcal{A}$-convexe.

b) Si $f\in\mathcal{A}$ et si A est une partie de M alors $\sup\limits_A |f| = \sup\limits_{\hat{A}^{\mathcal{A}}} f$

c) Si A est une partie de M alors $\hat{A}^{\mathcal{A}} = \bigcap\limits_{f\in\mathcal{A}} \{z:|f(z)| \leq \sup\limits_A |f|\}$

Preuve:

a) Soient f un élément de $\mathcal{A}$, c un réel positif et z_o un point de M tel que $|f(z_o)| > c$. Choisissons un réel c' tel que $|f(z_o)| > c' > c$. Il est clair que $\{z:z\in M, |f(z)| \leq c\} \subset \{z:z\in M, |f(z)| < c'\}$ et que $\{z_o\} \subset \{z:|f(z)| > c'\}$. Ainsi $\mathcal{A}$ sépare tout point de $C\{z:z\in M, |f(z)| \leq c\}$ de $\{z:z\in M, |f(z)| \leq c\}$.

b) Il est clair que $\sup\limits_A |f| \leq \sup\limits_{\hat{A}^{\mathcal{A}}} |f|$ car $A \subset \hat{A}^{\mathcal{A}}$.

De plus $\hat{A}^{\mathcal{A}} \subset \{z:z\in M, |f(z)| \leq \sup\limits_A |f|\}$ car $\{z;z\in M, |f(z)| \leq \sup\limits_A |f|\}$ est un $\mathcal{A}$-convexe contenant A.

Ainsi $\sup\limits_{\hat{A}} |f| \leq \sup\limits_A |f|$.

c) Résulte de (b) et de la proposition A.3.3. ///

PROPOSITION A.3.6. Si $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ alors $\hat{A}^{\mathcal{B}} \subset \hat{A}^{\mathcal{A}}$. En particulier tout $\mathcal{A}$-convexe est $\mathcal{B}$-convexe.

Preuve: Cela découle de A.3.5.c. ///

EXEMPLES DE $\mathcal{A}$-CONVEXITE A.3.7.

a) Soit E un espace vectoriel topologique loc. convexe. Le théorème de Hahn-Banach premet de montrer que les parties absolument convexes fermées de E sont les seules parties E^*-convexes.

b) Soit X un espace topologique complètement régulier. On voit immédiatement que tout fermé est $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$-convexe.

c) Soit X une variété différentielle de classe C_r . Les parties $C_r(X, \mathbb{R})$-convexes de X sont les sous-ensembles fermés.

d) Sur une variété holomorphe X on considère surtout la $\mathcal{O}(X)$-convexité. Il est clair qu'un ensemble $\mathcal{O}(X)$-convexe est fermé. De plus le théorème du maximum du module montre que $\hat{K}^{\mathcal{O}(X)} = \hat{\mathring{K}}^{\mathcal{O}(X)}$ si K est compact de X dont la frontière est non vide.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. ADAMS, Sobolev spaces, Academic Press, New-York, 1975

[2] A.ANDREOTTI & VESENTINI, Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equations and complex manifolds, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci 25,81-130 (1965)

[3] N.BOURBAKI, Algèbre Chap. 1 à 3, Hermann,Paris,1970.

[4] N.BOURBAKI, Algèbre Chap. 10, Masson,Paris,1980

[5] N.BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques Chap. 1 à 5 Masson,Paris,1981.

[6] N.BOURBAKI, Topologie générale, Diffusion CCLS, Paris,1981

[7] J.DIEUDONNE,Eléments d'analyse Vol. 2, Gauthier-Villars Paris,1968.

[8] J.DIEUDONNE,Eléments d'analyse Vol. 3, Gauthier-Villars Paris,1974.

[9] J.DIEUDONNE,Eléments d'analyse Vol. 4, Gauthier-Villars Paris,1971.

[10] H.G.GARNIR,M.DE WILDE,J.SCHMETS, Analyse fonctionnelle Tome III, Birkhäuser Verlag, Bâle,1973

[11] O.GERARD, Ouverts d'holomorphie et ouverts pseudo-convexes, Mémoire,Université de Liège,1979-1980.

[12] C.GODBILLON, Eléments de topologie algébrique, Hermann, Paris, 1971.

[13] R.GODEMENT, Théorie des faisceaux, Hermann,Paris,1973

[14] Ph.GRIFFITHS & J.HARRIS, Principles of algebraic geometry, John Wiley & Sons,New-York, 1978.

[15] S.HELGASON, Differential geometry,Lie group & symmetric spaces, Academic Press, New-York, 1978

[16] L.HÖRMANDER, An Introduction to complex analysis in several variables, North-Holland Publishing Company,New-Yok

[17] F.JONGMANS,Notions de topologie générale,Université de Liège

[18] S.KOBAYASHI & K.NOMIZU, Foundations of differential geometry Vol 1 & 2,John Wiley & Sons, New-York,1963

[19] M.P.LELONG, Fonctions plurisousharmoniques;mesures de Radon associées.Applications aux fonctions analytiques Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953,pages 21 à 40.

[20] J.L.LIEUTENANT, Théorie cohomologique des faisceaux, Cours de troisième cycle interuniversitaire du F.N.R.S. Liège 1980.

[21] J.R.MUNKRES, Elementary differential topology, Princeton university press 1963.

[22] J.de C.NIESTEN, Estimation L_2 et problème de Neumann, Mémoire, Université de Liège, 1980-1981.

[23] J.P.SERRE, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables Bruxelles 1953, pages 57 à 68.

[24] M.SPIVAK, Differential geometry Vol. I, Publish or Perish, inc., Boston, 1970.

[25] A.WEIL, Variétés kählériennes, Hermann,Paris, 1971.

LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

$\hat{A}^{\mathfrak{A}}$	p.141
$A(M)$, $A^{p,q}(M)$, $A^{n}(M)$	p.16-17
$A(M,E)$, $A^{p,q}(M,E)$	p. 38
$\tilde{\mathbb{C}}$	p. 48
$\#_E$	p. 6 et p.55
d	p. 17
$\partial, \bar{\partial}$	p. 28
$dz_1, \ldots, dz_n$	p. 33
$\bar{\partial}_E$	p. 41
$\bar{\partial}^*_E$	p. 65
$D_{p,p}$, $D^K_{p,p}$, $D^c_{p,p}$	p. 80
$D(M,E)$	espace des sections de classe C_∞ à support compact de E au-dessus de M
(M,E)	espace des sections-distributions de E au-dessus de M.
$*_E$	p. 8
E_Ψ	p. 91
f_*, f^*	p. 17
Φ_M	p. 60
$\bigoplus_{i \in I} g_E$, $\bigotimes_{i \in I} g_{E_i}$, g_E	p.5-6
$G_{n,p}(\mathbb{C})$	p. 43
$GL(n,\mathbb{C})$	p. 43
$\Gamma(M,E)$	espace des sections de classe C_∞ de E au-dessus de M.
$\Gamma_s(M,E)$	espace des sections de classe C_s de E au-dessus de M.
$H_d(M,\mathbb{C})$	p. 18
$H^{p,q}(M)$, $H(M,hol)$	p. 30
$H^{p,q}(M,E)$	p. 42

TABLE DES MATIERES