Algèbre de Boole avec relation de contact non symétrique

Adeline Massuir

Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

22 juin 2016

Table des matières

Table des matières

Introduction

Théorème de représentation des algèbres de Boole de contact.

But : théorème similaire dans le cas non symétrique.

Table des matières

Applications entre ensembles ordonnés

Définitions

Soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés. Une application $f : P \to Q$ est un

- *plongement d'ordre* si pour tous $x, y \in P$,

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y).$$

- plongement d'ordre *dense* si c'est un plongement d'ordre et si pour tout $y \in Q \backslash \{0_Q\}$, il existe $x \in P$ tel que $f(x) \neq 0_Q$ et $f(x) \leq_Q y$.

Maximum et borne supérieure

Définitions

Soient $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et E une partie de P.

- Un élément a de P est dit *maximum* dans P si $a \geq x$ pour tout $x \in P$.
- Un élément x de P est un *majorant* de E si $x \geq e$ pour tout $e \in E$.
- Le *supremum* de E (ou encore *borne supérieure*), noté $\vee E$, est le plus petit majorant de E.

Le maximum de P, s'il existe, est unique et dans ce cas on le note 1. Si E possède au moins un majorant dans P, on dit que E est *majoré*.

Minimum et borne inférieure

Définitions

Soient $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et E une partie de P.

- Un élément a de P est dit *minimum* dans P si $a \leq x$ pour tout $x \in P$.
- Un élément x de P est un *minorant* de E si $x \leq e$ pour tout $e \in E$.
- L'*infimum* de E (ou encore *borne inférieure*), noté $\wedge E$, est le plus grand des minorants de E.

Le minimum de P, s'il existe, est unique et dans ce cas on le note 0. Si E possède au moins un minorant dans P, on dit que E est *minoré*.

Ensemble borné

Définition

Un ensemble ordonné $(P, \leq)$ est *borné* s'il possède un maximum et un minimum.

Treillis

Définition

Soit $(L, \leq)$ un ensemble ordonné. Cet ensemble est appelé *treillis* si pour tous $x, y \in L$, $\vee\{x, y\}$ et $\wedge\{x, y\}$ existent.

Notations

Si L est un treillis, si $x, y \in L$, alors on pose

$$\bigvee \{x, y\} := x \vee y.$$

De même, on pose

$$\bigwedge \{x, y\} := x \wedge y.$$

De plus, $x \vee y$ se lira par « x ou y » et $x \wedge y$ par « x et y ».

Distributivité

Définition

Un treillis L est *distributif* si pour tous $x, y, z \in L$, on a

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

ou, de façon équivalente,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Complémentation

Définition

Soient $(L, \leq)$ un treillis borné et $x \in L$. Un élément $y \in L$ est un *complément* de x dans L s'il est tel que

$$x \wedge y = 0 \qquad \text{et} \qquad x \vee y = 1.$$

Si tout élément de L admet au moins un complément, le treillis borné est dit *complémenté*. Si pour tout $x \in L$, x admet un et un seul complément, on dit que L est *unicomplémenté*.

Notations

Si un élément x d'un treillis borné L admet un unique complément, ce dernier sera noté x', x^c, $\neg x$ ou encore $-x$.

Distributivité et complémentation

Proposition

Dans un treillis distributif borné, tout élément possède au plus un complément.

Algèbre de Boole

Définition

Une *algèbre de Boole* (ou *algèbre booléenne*) est un treillis distributif borné et complémenté.

Exemples

Définitions

Soit X un espace topologique. Un *ouvert régulier* est un ouvert O tel que $O^{-\circ} = O$. On note $\mathrm{RO}(X)$ l'ensemble des ouverts réguliers de X.

Un *fermé régulier* est un fermé C tel que $C^{\circ -} = C$. On note $\mathrm{RC}(X)$ l'ensemble des fermés réguliers de X.

Exemples

Théorème

Si X est un espace topologique, alors $\mathrm{RO}(X)$ (ordonné par inclusion) est une algèbre de Boole dans laquelle

$$O \vee U = (O \cup U)^{-\circ} \qquad O \wedge U = O \cap U \qquad \neg O = (X \setminus O)^{\circ}$$

pour tous $O, U \in \mathrm{RO}(X)$.

Exemples

Théorème

Si X est un espace topologique, alors $\mathrm{RC}(X)$ (ordonné par inclusion) est une algèbre de Boole dans laquelle

$$C \vee D = C \cup D \qquad C \wedge D = (C \cap D)^{\circ -} \qquad \neg C = (X \setminus C)^{-}$$

pour tous $C, D \in \mathrm{RC}(X)$.

Homomorphisme d'algèbres de Boole

Définition

Une application $f : A \to B$ entre deux algèbres de Boole A et B est un *homomorphisme d'algèbres de Boole* si pour tous $a, b \in A$

- $f(a \vee_A b) = f(a) \vee_B f(b)$;
- $f(a \wedge_A b) = f(a) \wedge_B f(b)$;
- $f\left(a'^A\right) = (f(a))'^B$;
- $f(0_A) = 0_B$ et $f(1_A) = 1_B$.

Homomorphisme d'algèbres de Boole

Proposition

Soient A, B deux algèbres de Boole et $f : A \to B$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est un homomorphisme d'algèbres de Boole
2. f respecte $\wedge$ et $'$
3. f respecte $\vee$ et $'$.

Idéal et filtre

Définitions

Soit B une algèbre de Boole. Un *idéal* de B est une partie I de B telle que

- $0 \in I$;
- $i \vee j \in I$ pour tous $i, j \in I$;
- pour tous $a \in B, i \in I$ tels que $a \leq i$, on a $a \in I$.

Un *filtre* de B est une partie F de B telle que

- $1 \in F$;
- $f \wedge g \in F$ pour tous $f, g \in F$;
- pour tous $a \in B, f \in F$ tels que $a \geq f$, on a $a \in F$.

Idéal maximal et ultrafiltre

Définitions

Soit B une algèbre de Boole. Un idéal *propre* de B est un idéal différent de B. Un filtre *propre* de B est un filtre différent de B.

Un idéal *maximal* de B est un idéal propre maximal pour l'inclusion. Un filtre *maximal*, ou *ultrafiltre*, est un filtre propre maximal pour l'inclusion. On note $\mathrm{Spec}(B)$ l'ensemble des idéaux maximaux de B et $\mathrm{Ult}(B)$ l'ensemble des ultrafiltres de B.

Théorème de Stone

Théorème de Stone pour les algèbres de Boole

Soit B une algèbre de Boole. Si I est un idéal et F un filtre de B tels que $I \cap F = \emptyset$, alors il existe un ultrafiltre P de B tel que $F \subseteq P$ et $P \cap I = \emptyset$. De façon équivalente, il existe un idéal maximal Q de B tel que $I \subseteq Q$ et $Q \cap F = \emptyset$.

Notations

Si B est une algèbre de Boole et si $b \in B$, on pose

$$b\uparrow := \{a \in B \mid a \geq b\} \, .$$

Filtres particuliers

Proposition

Soient B une algèbre de Boole et $b \in B$. Alors $b\uparrow$ est un filtre. De plus, si $b \neq 0$, alors il s'agit d'un filtre propre.

Table des matières

Algèbre de Boole de contact

Définition

Une *algèbre de Boole de contact* est une algèbre de Boole B munie d'une relation de disjonction $\perp$ binaire telle que pour tous $a, b, c, d \in B$,

$\perp 1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $b \perp c$, alors $a \perp d$;

$\perp 2$: si $a \perp c, a \perp d, b \perp c$ et $b \perp d$, alors $a \vee b \perp c \vee d$;

$\perp 3$: $0 \perp 1$;

$\perp 4$: $1 \perp 0$;

$\perp 5$: si $a \perp a$, alors $a = 0$;

$\perp 6$: si $a \perp b$, alors $b \perp a$;

$\perp 7$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \not\perp e$ et $b \perp e$.

Relation de contact

Relation de contact : $\mathscr{C} := \not\leq$.

<u>Axiomes</u> : pour tous $a, b, c, d \in B$,

$\mathscr{C}1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $a \mathscr{C} d$, alors $b \mathscr{C} c$;

$\mathscr{C}2$: si $a \vee b \mathscr{C} c \vee d$, alors $a \mathscr{C} c$ ou $a \mathscr{C} d$ ou $b \mathscr{C} c$ ou $b \mathscr{C} d$;

$\mathscr{C}3$: $0 \not\mathscr{C} 1$;

$\mathscr{C}4$: $1 \not\mathscr{C} 0$;

$\mathscr{C}5$: si $a \neq 0$, alors $a \mathscr{C} a$;

$\mathscr{C}6$: si $a \mathscr{C} b$, alors $b \mathscr{C} a$;

$\mathscr{C}7$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \mathscr{C} e$ et $b \not\mathscr{C} e$.

L'axiome $\mathscr{C}7$

Remarque

Soient B une algèbre de Boole et $\mathscr{C}$ une relation binaire sur B vérifiant les axiomes $\mathscr{C}1$ à $\mathscr{C}5$. Alors $\mathscr{C}$ vérifie l'axiome $\mathscr{C}7$ si, et seulement si, pour tout $a \in B$

$$a \neq 1 \Rightarrow \exists b \neq 0 : a \not\mathscr{C} b.$$

Exemple

Exemple

Si X est un espace topologique faiblement régulier, l'algèbre de Boole $\mathrm{RC}(X)$, munie de la relation $\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}$ définie par

$$C \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, D \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad C \cap D \neq \emptyset$$

pour tous $C, D \in \mathrm{RC}(X)$, est une algèbre de Boole de contact.

Exemple

Soient $C, D, E, F \in \mathrm{RC}(X)$. Alors

$\mathscr{C}1$: si $C \subseteq D$, $F \subseteq E$ et $C \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, F$, alors $\emptyset \neq C \cap F \subseteq D \cap E$, donc $D \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, E$;

Exemple

Soient $C, D, E, F \in \mathrm{RC}(X)$. Alors

$\mathscr{C}1$: si $C \subseteq D$, $F \subseteq E$ et $C \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, F$, alors $\emptyset \neq C \cap F \subseteq D \cap E$, donc $D \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, E$;

$\mathscr{C}2$: si $C \cup D \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, E \cup F$, alors

$$\emptyset \neq (C \cup D) \cap (E \cup F) = (C \cap E) \cup (C \cap F) \cup (D \cap E) \cup (D \cap F)$$

et on a donc forcément $C \cap E \neq \emptyset$ ou $C \cap F \neq \emptyset$ ou $D \cap E \neq \emptyset$ ou $D \cap F \neq \emptyset$;

Exemple

Soient $C, D, E, F \in \mathrm{RC}(X)$. Alors

$\mathscr{C}1$: si $C \subseteq D$, $F \subseteq E$ et $C \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, F$, alors $\emptyset \neq C \cap F \subseteq D \cap E$, donc $D \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, E$;

$\mathscr{C}2$: si $C \cup D \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, E \cup F$, alors

$$\emptyset \neq (C \cup D) \cap (E \cup F) = (C \cap E) \cup (C \cap F) \cup (D \cap E) \cup (D \cap F)$$

et on a donc forcément $C \cap E \neq \emptyset$ ou $C \cap F \neq \emptyset$ ou $D \cap E \neq \emptyset$ ou $D \cap F \neq \emptyset$;

$\mathscr{C}3$: $\emptyset \cap X = \emptyset$;

Exemple

Soient $C, D, E, F \in \mathrm{RC}(X)$. Alors

$\mathscr{C}1$: si $C \subseteq D$, $F \subseteq E$ et $C \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, F$, alors $\emptyset \neq C \cap F \subseteq D \cap E$, donc $D \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, E$;

$\mathscr{C}2$: si $C \cup D \,\mathscr{C}_{\mathrm{RC}}\, E \cup F$, alors

$$\emptyset \neq (C \cup D) \cap (E \cup F) = (C \cap E) \cup (C \cap F) \cup (D \cap E) \cup (D \cap F)$$

et on a donc forcément $C \cap E \neq \emptyset$ ou $C \cap F \neq \emptyset$ ou $D \cap E \neq \emptyset$ ou $D \cap F \neq \emptyset$;

$\mathscr{C}3$: $\emptyset \cap X = \emptyset$;

$\mathscr{C}4$: $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Exemple

$\mathscr{C}5$: si $C \neq \emptyset$, alors $C \cap C = C \neq \emptyset$ et $C \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, C$;

Exemple

$\mathscr{C}5$: si $C \neq \emptyset$, alors $C \cap C = C \neq \emptyset$ et $C \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, C$;

$\mathscr{C}6$: si $C \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, D$, alors $\emptyset \neq C \cap D = D \cap C$, d'où $D \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, C$;

Exemple

$\mathscr{C}5$: si $C \neq \emptyset$, alors $C \cap C = C \neq \emptyset$ et $C \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, C$;

$\mathscr{C}6$: si $C \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, D$, alors $\emptyset \neq C \cap D = D \cap C$, d'où $D \, \mathscr{C}_{\mathrm{RC}} \, C$;

$\mathscr{C}7$: si $C \neq X$, alors il existe $x \in X \setminus C$. Or, C est fermé donc $X \setminus C$ est ouvert. Comme X est faiblement régulier, il existe un ouvert régulier O de X tel que $x \in O \subseteq O^- \subseteq X \setminus C$. On a donc $O^- \cap C = \emptyset$. De plus, O étant un ouvert régulier, O^- est un fermé régulier, non vide puisqu'il contient x.

Clan et cluster

Définitions

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de contact. Un *clan* Γ de B est un sous-ensemble non vide qui vérifie les conditions suivantes :

- si $x, y \in \Gamma$, alors $x \mathscr{C} y$;
- si $x \vee y \in \Gamma$, alors $x \in \Gamma$ ou $y \in \Gamma$;
- si $x \in \Gamma$ et $b \in B$ sont tels que $x \leq b$, alors $b \in \Gamma$.

Un *cluster* est un clan maximal pour l'inclusion. On note $\text{Clust}(B)$ l'ensemble des clusters de B.

Existence des clusters

Proposition

Tout clan d'une algèbre de Boole de contact est inclus dans un cluster.

L'application $\diamond$

Définition

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de contact. Posons $Y := \mathrm{Clust}(B)$. On définit l'application $\diamond_B$ comme suit :

$$\diamond_B : B \to \mathscr{P}(Y) : b \mapsto \{\Gamma \in Y \mid \Gamma \ni b\}\,.$$

L'application $\diamond$

Proposition

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de contact. Pour tous a, b dans B, on a

$$\diamond(a) \cup \diamond(b) = \diamond(a \vee b).$$

L'espace topologique $\mathrm{Clust}(B)$

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de contact et posons $Y := \mathrm{Clust}(B)$. On définit une topologie sur Y en donnant une base :

$$\{Y \setminus \diamond(a) \mid a \in B\} .$$

Théorème de représentation

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de contact et posons $Y := \mathrm{Clust}(B)$. L'espace topologique Y est faiblement régulier et accessible. De plus, l'application

$$\diamond : B \to \mathrm{RC}(Y) : b \mapsto \{\Gamma \in Y \mid \Gamma \ni b\}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Boole et un plongement d'ordre qui est dense. Enfin, pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si,

$$\diamond(a) \cap \diamond(b) \neq \emptyset.$$

Table des matières

Algèbre de Boole de pré-contact

Définition

Une *algèbre de Boole de pré-contact* est une algèbre de Boole B munie d'une relation de disjonction $\perp$ binaire telle que pour tous $a, b, c, d \in B$,

$\perp 1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $b \perp c$, alors $a \perp d$;

$\perp 2$: si $a \perp c, a \perp d, b \perp c$ et $b \perp d$, alors $a \vee b \perp c \vee d$;

$\perp 3$: $0 \perp 1$;

$\perp 4$: $1 \perp 0$;

$\perp 5$: si $a \perp a$, alors $a = 0$;

$\perp 7$: si $a \nleq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \not\perp e$ et $b \perp e$;

$\perp 8$: si $a \nleq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $e \not\perp a$ et $e \perp b$.

Relation de pré-contact : $\mathscr{C} := \not\perp$.

<u>Axiomes</u> : pour tous $a, b, c, d \in B$,

$\mathscr{C}1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $a \mathscr{C} d$, alors $b \mathscr{C} c$;

$\mathscr{C}2$: si $a \vee b \mathscr{C} c \vee d$, alors $a \mathscr{C} c$ ou $a \mathscr{C} d$ ou $b \mathscr{C} c$ ou $b \mathscr{C} d$;

$\mathscr{C}3$: $0 \not\mathscr{C} 1$;

$\mathscr{C}4$: $1 \not\mathscr{C} 0$;

$\mathscr{C}5$: si $a \neq 0$, alors $a \mathscr{C} a$;

$\mathscr{C}7$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \mathscr{C} e$ et $b \not\mathscr{C} e$;

$\mathscr{C}8$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $e \mathscr{C} a$ et $e \not\mathscr{C} b$.

Demi-clan

Définitions

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Un *2-clan* est une paire $(\Gamma, \Delta) \subseteq B \times B$ où $B \backslash \Gamma$ et $B \backslash \Delta$ sont des idéaux propres de B et $\Gamma \times \Delta \subseteq \mathscr{C}$.
Un *l-clan* est la première composante d'un 2-clan.
Un *r-clan* est la deuxième composante d'un 2-clan.
Si Λ est un l-clan ou un r-clan, on dit que c'est un *demi-clan*.

Rappel

Si B est une algèbre de Boole et si $\Gamma \subseteq B$, dire $B \backslash \Gamma$ est un idéal signifie que $0 \in B \backslash \Gamma$ et pour tous $x, y, b \in B$, on a

- si $x \vee y \in \Gamma$, alors $x \in \Gamma$ ou $y \in \Gamma$;
- si $x \in \Gamma$ et $x \leq b$, alors $b \in \Gamma$.

Demi-cluster

Définitions

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Un *2-cluster* est un 2-clan maximal pour l'inclusion.
Un *l-cluster* ou *cluster à gauche* est la première composante d'un 2-cluster. L'ensemble des l-clusters est noté Y_l.
Un *r-cluster* ou *cluster à droite* est la deuxième composante d'un 2-cluster. L'ensemble des r-clusters est noté Y_r.
Si Λ est un l-cluster ou un r-cluster, il s'agit d'un *demi-cluster*. On note DY l'ensemble des demi-clusters.

Existence des 2-clusters

Proposition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (Γ_0, Δ_0) un 2-clan. Alors il existe un 2-cluster contenant (Γ_0, Δ_0).

Existence des 2-clusters

Proposition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (Γ_0, Δ_0) un 2-clan. Alors il existe un 2-cluster contenant (Γ_0, Δ_0).

Démonstration :

Par Zorn. ■

«Théorème de Stone» pour les 2-clusters

Proposition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et $a, b \in B$. Si $a \mathscr{C} b$, alors il existe un 2-cluster (Γ, Δ) tel que $a \in \Gamma$ et $b \in \Delta$.

Lien avec les ultrafiltres

Proposition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et P un ultrafiltre de B. Alors (P, P) est un 2-clan.

L'application $\boxdot$

Définition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et Y_l l'ensemble de ses l-clusters. On définit l'application $\boxdot_B$ comme suit :

$$\boxdot_B : B \to \mathscr{P}(Y_l) : b \mapsto \{\Gamma \in Y_l \mid \Gamma \ni b\} .$$

L'application $\boxdot$

Proposition

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Pour tous $a, b \in B$, on a

$$\boxdot(a) \cup \boxdot(b) = \boxdot(a \vee b)$$

et $\boxdot(0) = \emptyset$.

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.
Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.
Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster
    - $a \in \Gamma$

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$

L'application $\boxdot$

<u>Démonstration</u> : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$
    - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un l-clan est une partie croissante

L'application $\boxdot$

<u>Démonstration</u> : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ I-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$
    - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un I-clan est une partie croissante
  - Si $\Gamma \in \boxdot(b)$: idem

L'application $\boxdot$

<u>Démonstration</u> : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$
    - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un l-clan est une partie croissante
  - Si $\Gamma \in \boxdot(b)$: idem
- $\Gamma \in \boxdot(a \vee b)$.

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ I-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$
    - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un I-clan est une partie croissante
  - Si $\Gamma \in \boxdot(b)$: idem
- $\Gamma \in \boxdot(a \vee b)$.

Si $\Delta \in \boxdot(a \vee b)$:

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$
    - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un l-clan est une partie croissante
  - Si $\Gamma \in \boxdot(b)$: idem
- $\Gamma \in \boxdot(a \vee b)$.

Si $\Delta \in \boxdot(a \vee b)$:

- Δ l-cluster

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
    - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
        - Γ l-cluster
        - $a \in \Gamma$
        - $a \vee b \geq a$
        - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un l-clan est une partie croissante
    - Si $\Gamma \in \boxdot(b)$: idem
- $\Gamma \in \boxdot(a \vee b)$.

Si $\Delta \in \boxdot(a \vee b)$:

- Δ l-cluster
- $a \vee b \in \Delta$

L'application $\boxdot$

Démonstration : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$
    - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un l-clan est une partie croissante
  - Si $\Gamma \in \boxdot(b)$: idem
- $\Gamma \in \boxdot(a \vee b)$.

Si $\Delta \in \boxdot(a \vee b)$:

- Δ l-cluster
- $a \vee b \in \Delta$
- $a \in \Delta$ ou $b \in \Delta$

L'application $\boxdot$

<u>Démonstration</u> : Par double inclusion.

Si $\Gamma \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$:

- $\Gamma \in \boxdot(a)$ ou $\Gamma \in \boxdot(b)$
  - Si $\Gamma \in \boxdot(a)$,
    - Γ l-cluster
    - $a \in \Gamma$
    - $a \vee b \geq a$
    - $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un l-clan est une partie croissante
  - Si $\Gamma \in \boxdot(b)$: idem
- $\Gamma \in \boxdot(a \vee b)$.

Si $\Delta \in \boxdot(a \vee b)$:

- Δ l-cluster
- $a \vee b \in \Delta$
- $a \in \Delta$ ou $b \in \Delta$
- $\Delta \in \boxdot(a) \cup \boxdot(b)$.

L'application $\boxdot$

Enfin, s'il existe un l-cluster Γ contenant 0

L'application $\boxdot$

Enfin, s'il existe un I-cluster Γ contenant 0

$\Rightarrow B \backslash \Gamma$ est un idéal ne contenant pas 0

Enfin, s'il existe un I-cluster Γ contenant 0

$\Rightarrow B \backslash \Gamma$ est un idéal ne contenant pas 0

$\Rightarrow$ contradiction. $\blacksquare$

L'espace topologique Y_l

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et Y_l l'ensemble de ses l-clusters. On définit une topologie sur Y_l en donnant une base :

$$\{Y_l \backslash \boxdot(a) \mid a \in B\}.$$

Proposition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et Y_l l'ensemble de ses l-clusters. L'espace topologique Y_l est semi-régulier. De plus, l'application

$$\boxdot : B \to \mathrm{RC}\,(Y_l) : b \mapsto \{\Gamma \in Y_l \mid \Gamma \ni b\}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Boole et un plongement d'ordre qui est dense.

Vers un théorème de représentation

Démonstration :

Procédons par étapes.

Vers un théorème de représentation

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.

Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \not\leq b$.

Démonstration :

Procédons par étapes.
L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :
Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.
Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \not\leq b$.

- $\exists c \in B : a \mathscr{C} c$ et $b \perp c$ ($\mathscr{C}7$)

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.

Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \not\leq b$.

- $\exists c \in B$: $a \mathscr{C} c$ et $b \perp c$ ($\mathscr{C}$7)
- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.

Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \nleq b$.

- $\exists c \in B : a \mathscr{C} c$ et $b \perp c$ ($\mathscr{C}7$)
- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$
- $\Gamma \in \boxdot(a)$

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.

Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \not\leq b$.

- $\exists c \in B : a \mathscr{C} c$ et $b \perp c$ ($\mathscr{C}7$)
- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$
- $\Gamma \in \boxdot(a)$
- $\Gamma \in \boxdot(b)$

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.
Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \not\leq b$.

- $\exists c \in B : a \mathscr{C} c$ et $b \perp c$ ($\mathscr{C}7$)
- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$
- $\Gamma \in \boxdot(a)$
- $\Gamma \in \boxdot(b)$
- $b \in \Gamma$

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.

Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \not\leq b$.

- $\exists c \in B : a \mathscr{C} c$ et $b \perp c$ ($\mathscr{C}7$)
- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$
- $\Gamma \in \boxdot(a)$
- $\Gamma \in \boxdot(b)$
- $b \in \Gamma$
- $\Gamma \times \Delta \subseteq \mathscr{C}$

Démonstration :

Procédons par étapes.

L'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$ vu la définition d'un l-clan.

Si $a, b \in B$ sont tels que $\boxdot(a) \subseteq \boxdot(b)$, supposons que $a \not\leq b$.

- $\exists c \in B : a \mathscr{C} c$ et $b \perp c$ ($\mathscr{C}7$)
- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$
- $\Gamma \in \boxdot(a)$
- $\Gamma \in \boxdot(b)$
- $b \in \Gamma$
- $\Gamma \times \Delta \subseteq \mathscr{C}$
- $b \mathscr{C} c$.

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^{\circ} = Y_I \setminus \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a)$

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a)$
- $\boxdot(a) \cup \boxdot(b) = Y_I$

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a)$
- $\boxdot(a) \cup \boxdot(b) = Y_I$
- $\boxdot(a \vee b) = Y_I = \boxdot(1)$

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a)$
- $\boxdot(a) \cup \boxdot(b) = Y_I$
- $\boxdot(a \vee b) = Y_I = \boxdot(1)$
- $a \vee b = 1$

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a)$
- $\boxdot(a) \cup \boxdot(b) = Y_I$
- $\boxdot(a \vee b) = Y_I = \boxdot(1)$
- $a \vee b = 1$
- $b \geq a'$

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a)$
- $\boxdot(a) \cup \boxdot(b) = Y_I$
- $\boxdot(a \vee b) = Y_I = \boxdot(1)$
- $a \vee b = 1$
- $b \geq a'$
- $\boxdot(b) \supseteq \boxdot(a')$

Si $a \in B$, on a $(\boxdot(a))^\circ = Y_I \backslash \boxdot(a')$:

Procédons par double inclusion.

Si $\Gamma \in (\boxdot(a))^\circ$,

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a)$
- $\boxdot(a) \cup \boxdot(b) = Y_I$
- $\boxdot(a \vee b) = Y_I = \boxdot(1)$
- $a \vee b = 1$
- $b \geq a'$
- $\boxdot(b) \supseteq \boxdot(a')$
- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq Y_I \backslash \boxdot(a')$.

Si $\Lambda \in Y_l \backslash \boxdot(a')$,

Vers un théorème de représentation

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$

Vers un théorème de représentation

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon

Vers un théorème de représentation

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon
  - $a \in B \backslash \Lambda$

Vers un théorème de représentation

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon
  - $a \in B \backslash \Lambda$
  - $1 = a \vee a' \in B \backslash \Lambda$

Vers un théorème de représentation

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon
  - $a \in B \backslash \Lambda$
  - $1 = a \vee a' \in B \backslash \Lambda$
  - $B \backslash \Lambda$ idéal propre

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon
  - $a \in B \backslash \Lambda$
  - $1 = a \vee a' \in B \backslash \Lambda$
  - $B \backslash \Lambda$ idéal propre
- $\Lambda \in \boxdot(a)$

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon
  - $a \in B \backslash \Lambda$
  - $1 = a \vee a' \in B \backslash \Lambda$
  - $B \backslash \Lambda$ idéal propre
- $\Lambda \in \boxdot(a)$
- $Y_I \backslash \boxdot(a') \subseteq \boxdot(a)$

Vers un théorème de représentation

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon
  - $a \in B \backslash \Lambda$
  - $1 = a \vee a' \in B \backslash \Lambda$
  - $B \backslash \Lambda$ idéal propre
- $\Lambda \in \boxdot(a)$
- $Y_I \backslash \boxdot(a') \subseteq \boxdot(a)$
- $Y_I \backslash \boxdot(a')$ est un ouvert

Vers un théorème de représentation

Si $\Lambda \in Y_I \backslash \boxdot(a')$,

- $a' \notin \Lambda$
- $a \in \Lambda$, sinon
  - $a \in B \backslash \Lambda$
  - $1 = a \vee a' \in B \backslash \Lambda$
  - $B \backslash \Lambda$ idéal propre
- $\Lambda \in \boxdot(a)$
- $Y_I \backslash \boxdot(a') \subseteq \boxdot(a)$
- $Y_I \backslash \boxdot(a')$ est un ouvert
- $Y_I \backslash \boxdot(a') \subseteq (\boxdot(a))^\circ$.

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(Y_I \setminus \boxdot(a))^- = \boxdot(a')$:

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(Y_I \backslash \boxdot(a))^{-} = \boxdot(a')$:

$$(Y_I \backslash \boxdot(a))^{-} = Y_I \backslash (\boxdot(a))^{\circ} = \boxdot\left(a'\right).$$

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = \boxdot(a')$:

$$(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = Y_I \backslash (\boxdot(a))^\circ = \boxdot(a') .$$

Si $a \in B$, on a $\boxdot(a) \in \mathrm{RC}(Y_I)$:

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = \boxdot(a')$:

$$(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = Y_I \backslash (\boxdot(a))^\circ = \boxdot\left(a'\right).$$

Si $a \in B$, on a $\boxdot(a) \in \mathrm{RC}(Y_I)$:

$$(\boxdot(a))^{\circ -} = \left(Y_I \backslash \boxdot\left(a'\right)\right)^- = \boxdot(a).$$

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = \boxdot(a')$:

$$(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = Y_I \backslash (\boxdot(a))^\circ = \boxdot\left(a'\right).$$

Si $a \in B$, on a $\boxdot(a) \in \mathrm{RC}(Y_I)$:

$$(\boxdot(a))^{\circ -} = \left(Y_I \backslash \boxdot\left(a'\right)\right)^- = \boxdot(a).$$

L'application $\boxdot$ respecte le complément :

Si $a \in B$, on a $(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = \boxdot(a')$:

$$(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = Y_I \backslash (\boxdot(a))^\circ = \boxdot(a').$$

Si $a \in B$, on a $\boxdot(a) \in \mathrm{RC}(Y_I)$:

$$(\boxdot(a))^{\circ -} = \left(Y_I \backslash \boxdot(a')\right)^- = \boxdot(a).$$

L'application $\boxdot$ respecte le complément :

Soit $a \in B$. On a

$$\boxdot(a') = (Y_I \backslash \boxdot(a))^- = \neg \boxdot(a).$$

Vers un théorème de représentation

Si $a \in B$, on a $(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = \boxdot(a')$:

$$(Y_I \backslash \boxdot(a))^- = Y_I \backslash (\boxdot(a))^\circ = \boxdot(a').$$

Si $a \in B$, on a $\boxdot(a) \in \mathrm{RC}(Y_I)$:

$$(\boxdot(a))^{\circ -} = \left(Y_I \backslash \boxdot(a')\right)^- = \boxdot(a).$$

L'application $\boxdot$ respecte le complément :

Soit $a \in B$. On a

$$\boxdot(a') = (Y_I \backslash \boxdot(a))^- = \neg \boxdot(a).$$

L'application $\boxdot$ respecte le supremum : Ok.

Vers un théorème de représentation

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}(Y_I) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

Vers un théorème de représentation

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}\left(Y_I\right) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B\ \forall i \in I$: $C = \bigcap_{i \in I} \boxdot\left(a_i\right)$

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}\left(Y_I\right) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \ \forall i \in I : C = \bigcap_{i \in I} \boxdot\left(a_i\right)$
- $C = C^{\circ -}$

Vers un théorème de représentation

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}(Y_I) \setminus \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \; \forall i \in I : C = \bigcap_{i \in I} \boxdot (a_i)$
- $C = C^{\circ -}$
- $C^{\circ} \neq \emptyset$.

Vers un théorème de représentation

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}\left(Y_I\right) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \; \forall i \in I$: $C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $C = C^{\circ -}$
- $C^{\circ} \neq \emptyset$.

Soit $\Gamma \in C^{\circ}$. Alors

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}(Y_I) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \; \forall i \in I : C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $C = C^{\circ -}$
- $C^{\circ} \neq \emptyset$.

Soit $\Gamma \in C^{\circ}$. Alors

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$

Vers un théorème de représentation

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}(Y_I) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \ \forall i \in I : C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $C = C^{\circ -}$
- $C^{\circ} \neq \emptyset$.

Soit $\Gamma \in C^{\circ}$. Alors

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a_i) \ \forall i \in I$

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}(Y_I) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \; \forall i \in I : C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $C = C^{\circ -}$
- $C^{\circ} \neq \emptyset$.

Soit $\Gamma \in C^{\circ}$. Alors

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a_i) \;\; \forall i \in I$
- $\boxdot(a_i)$ fermé pour tout $i \in I$

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}(Y_I) \setminus \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \; \forall i \in I$: $C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $C = C^{\circ -}$
- $C^{\circ} \neq \emptyset$.

Soit $\Gamma \in C^{\circ}$. Alors

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \setminus \boxdot(b) \subseteq C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $Y_I \setminus \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a_i) \; \forall i \in I$
- $\boxdot(a_i)$ fermé pour tout $i \in I$
- $\boxdot(b') = (Y_I \setminus \boxdot(b))^{-} \subseteq \boxdot(a_i) \; \forall i \in I$

Ce plongement est dense :

Soit $C \in \mathrm{RC}(Y_I) \backslash \{\emptyset\}$. Alors

- $\exists I$ famille d'indices et $a_i \in B \; \forall i \in I$: $C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $C = C^{\circ -}$
- $C^{\circ} \neq \emptyset$.

Soit $\Gamma \in C^{\circ}$. Alors

- $\exists b \in B : \Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i)$
- $Y_I \backslash \boxdot(b) \subseteq \boxdot(a_i) \; \forall i \in I$
- $\boxdot(a_i)$ fermé pour tout $i \in I$
- $\boxdot(b') = (Y_I \backslash \boxdot(b))^{-} \subseteq \boxdot(a_i) \; \forall i \in I$
- $\boxdot(b') \subseteq \bigcap_{i \in I} \boxdot(a_i) = C$.

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot\,(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \setminus \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$
- $b' \uparrow$ filtre propre

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$
- $b'\uparrow$ filtre propre
- $\exists P \in \mathrm{Ult}(B) : b\uparrow \subseteq P$

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \setminus \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$
- $b' \uparrow$ filtre propre
- $\exists P \in \mathrm{Ult}(B) : b \uparrow \subseteq P$
- (P, P) 2-clan

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$
- $b'\uparrow$ filtre propre
- $\exists P \in \mathrm{Ult}(B) : b\uparrow \subseteq P$
- (P, P) 2-clan
- $\exists(\Gamma_0, \Delta_0)$ 2-cluster : $(P, P) \subseteq (\Gamma_0, \Delta_0)$

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$
- $b' \uparrow$ filtre propre
- $\exists P \in \mathrm{Ult}(B) : b \uparrow \subseteq P$
- (P, P) 2-clan
- $\exists (\Gamma_0, \Delta_0)$ 2-cluster : $(P, P) \subseteq (\Gamma_0, \Delta_0)$
- $b' \in P \subseteq \Gamma_0$

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$
- $b'\uparrow$ filtre propre
- $\exists P \in \mathrm{Ult}(B) : b\uparrow \subseteq P$
- (P, P) 2-clan
- $\exists(\Gamma_0, \Delta_0)$ 2-cluster : $(P, P) \subseteq (\Gamma_0, \Delta_0)$
- $b' \in P \subseteq \Gamma_0$
- Γ_0 I-cluster

Vers un théorème de représentation

Il reste à prouver que $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

- $\Gamma \in Y_I \backslash \boxdot(b)$
- Si $b = 1$, $\boxdot(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$
- $b \neq 1$
- $b' \neq 0$
- $b'\uparrow$ filtre propre
- $\exists P \in \mathrm{Ult}(B) : b\uparrow \subseteq P$
- (P, P) 2-clan
- $\exists(\Gamma_0, \Delta_0)$ 2-cluster : $(P, P) \subseteq (\Gamma_0, \Delta_0)$
- $b' \in P \subseteq \Gamma_0$
- Γ_0 I-cluster
- $\boxdot(b') \neq \emptyset$.

L'espace topologique Y_I est semi-régulier :

L'espace topologique Y_I est semi-régulier :

- $\boxdot(a)$ fermé régulier pour tout $a \in B$

Vers un théorème de représentation

L'espace topologique Y_I est semi-régulier :

- $\boxdot(a)$ fermé régulier pour tout $a \in B$
- $Y_I \setminus \boxdot(a)$ ouvert régulier pour tout $a \in B$

Vers un théorème de représentation

L'espace topologique Y_I est semi-régulier :

- $\boxdot(a)$ fermé régulier pour tout $a \in B$
- $Y_I \backslash \boxdot(a)$ ouvert régulier pour tout $a \in B$
- $\{Y_I \backslash \boxdot(a) \mid a \in B\}$ base de topologie pour Y_I.

∎

Théorème de représentation

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de contact et posons $Y := \mathrm{Clust}(B)$. L'espace topologique Y est faiblement régulier et accessible. De plus, l'application

$$\diamond : B \to \mathrm{RC}(Y) : b \mapsto \{\Gamma \in Y \mid \Gamma \ni b\}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Boole et un plongement d'ordre qui est dense. Enfin, pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si,

$$\diamond(a) \cap \diamond(b) \neq \emptyset.$$

Dans le cas non symétrique

Si $(B, \mathscr{C})$ est une algèbre de Boole de pré-contact et si $a, b \in B$,

$$\boxdot(a) \cap \boxdot(b) \neq \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxdot(b) \cap \boxdot(a) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$ symétrie «forcée».

L'application $\boxminus$

Définition

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et notons DY l'ensemble de ses demi-clusters. On définit l'application $\boxminus_B$ comme suit :

$$\boxminus_B : B \to \mathscr{P}(DY) : b \mapsto \{\Lambda \in DY \mid \Lambda \ni b\}\,.$$

L'application $\boxminus$

Proposition

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Pour tous $a, b \in B$, on a

$$\boxminus(a) \cup \boxminus(b) = \boxminus(a \vee b)$$

et $\boxminus(0) = \emptyset$.

Topologie sur les demi-clusters

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et notons DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters.

On définit une topologie sur DY en donnant une base :

$$\{DY \backslash \boxminus(a) \mid a \in B\}.$$

Topologie sur Y_l : restriction de l'application $\boxminus$ à Y_l.

Topologie sur Y_r : restriction de l'application $\boxminus$ à Y_r.

Remarque

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters.

Remarque

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters.
Si on considère la relation $\mathscr{C}^\star$ définie sur B par

$$a \mathscr{C}^\star b \qquad \Leftrightarrow \qquad b \mathscr{C} a,$$

alors $(B, \mathscr{C}^\star)$ est une algèbre de Boole de pré-contact.

Remarque

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters.
Si on considère la relation $\mathscr{C}^\star$ définie sur B par

$$a \mathscr{C}^\star b \qquad \Leftrightarrow \qquad b \mathscr{C} a,$$

alors $(B, \mathscr{C}^\star)$ est une algèbre de Boole de pré-contact.
Les l-clusters de $(B, \mathscr{C}^\star)$ sont les r-clusters de $(B, \mathscr{C})$ et les r-clusters de $(B, \mathscr{C}^\star)$ sont les l-clusters de $(B, \mathscr{C})$.

Remarque

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters.
Si on considère la relation $\mathscr{C}^\star$ définie sur B par

$$a \mathscr{C}^\star b \qquad \Leftrightarrow \qquad b \mathscr{C} a,$$

alors $(B, \mathscr{C}^\star)$ est une algèbre de Boole de pré-contact.
Les l-clusters de $(B, \mathscr{C}^\star)$ sont les r-clusters de $(B, \mathscr{C})$ et les r-clusters de $(B, \mathscr{C}^\star)$ sont les l-clusters de $(B, \mathscr{C})$.
L'application

$$\boxdot^\star : B \to \mathrm{RC}\,(Y_r) : b \mapsto \{\Delta \in Y_r \mid \Delta \ni b\}$$

est donc un plongement d'ordre qui est dense et un homomorphisme d'algèbres de Boole.

Espace d'ombre

Définitions

Un *espace d'ombre* est un triplet $(Y, \mathrm{sh}, \mathrm{h})$ où

- Y est un espace topologique
- $\mathrm{sh} : Y_1 \to \mathscr{P}(Y_2)$ avec $Y_1 \cup Y_2 = Y$ est une application appelée *application d'ombre*
- $\mathrm{h} : \mathrm{RC}(Y_1) \to \mathrm{RC}(Y_2)$ est une bijection appelée *fonction d'ambivalence.*

Les éléments de Y_1 sont appelés *point* et ceux de Y_2 sont dénommés *point d'ombre*. Si $E \subseteq Y_1$, alors $\mathrm{sh}(E)$ est dit *l'ombre de E*. Les *régions* de Y sont les fermés réguliers de Y_1. On définit une relation binaire $\mathscr{D}_{\mathrm{sh}}$ sur les régions de Y comme suit : pour tous $C, D \in \mathrm{RC}(Y_1)$, on a

$$C \mathscr{D}_{\mathrm{sh}} D \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{sh}(C) \cap \mathrm{h}(D) \neq \emptyset.$$

Rappel

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et notons Y_l (resp. Y_r) l'ensemble de ses l-clusters (resp. r-clusters).

Rappel

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et notons Y_l (resp. Y_r) l'ensemble de ses l-clusters (resp. r-clusters).

L'ensemble $\{Y_l \backslash \boxdot(a) \mid a \in B\}$ (resp. $\{Y_r \backslash \boxdot^\star(a) \mid a \in B\}$) est une base de topologie pour Y_l (resp. Y_r).

Rappel

Soit $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et notons Y_l (resp. Y_r) l'ensemble de ses l-clusters (resp. r-clusters).

L'ensemble $\{Y_l \backslash \boxdot(a) \mid a \in B\}$ (resp. $\{Y_r \backslash \boxdot^\star(a) \mid a \in B\}$) est une base de topologie pour Y_l (resp. Y_r).

Pour tout $C \in \mathrm{RC}(Y_l)$ (resp. $C \in \mathrm{RC}(Y_r)$), $\exists I$ une famille d'indices et $\exists b_i \in B\ \forall i \in I : C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(b_i)$ (resp. $C = \bigcap_{i \in I} \boxdot^\star(b_i)$).

Espace d'ombre particulier

Définitions

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. On définit l'application $\mathrm{sh}^\star$ de la manière suivante :

$$\mathrm{sh}^\star : Y_l \to \mathscr{P}(Y_r) : \Gamma \mapsto \{\Delta \in Y_r \mid (\Gamma, \Delta) \text{ est un 2-cluster}\}.$$

On définit également l'application $\mathrm{h}^\star$ comme suit :

$$\mathrm{h}^\star : \mathrm{RC}(Y_l) \to \mathrm{RC}(Y_r) : C = \bigcap_{i \in I} \boxdot(b_i) \mapsto \mathrm{h}^\star(C) = \bigcap_{i \in I} \boxdot^\star(b_i).$$

Espace d'ombre particulier

Proposition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. Alors $(DY, \mathrm{sh}^\star, \mathrm{h}^\star)$ est un espace d'ombre.

Espace d'ombre particulier

Proposition

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. Alors $(DY, \mathrm{sh}^\star, \mathrm{h}^\star)$ est un espace d'ombre.

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de prouver que $\mathrm{h}^\star$ est une bijection. L'application $(\mathrm{h}^\star)^{-1}$ est donnée par

$$(\mathrm{h}^\star)^{-1} : \mathrm{RC}(Y_r) \to \mathrm{RC}(Y_l) : D = \bigcap_{i \in I} \boxdot^\star (b_i) \mapsto \bigcap_{i \in I} \boxdot (b_i) .$$

■

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Théorème

Soient $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. Alors l'application $\boxdot$ est un plongement d'ordre qui est dense et un homomorphisme d'algèbres de Boole entre B et l'ensemble des régions de l'espace d'ombre $(DY, \mathrm{sh}^\star, \mathrm{h}^\star)$. De plus, Y_l est un espace topologique semi-régulier et pour tous a, b dans B, on a

$$a \mathscr{C} b \quad \Leftrightarrow \quad \boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b).$$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Démonstration :
Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Démonstration :
Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in B$.

Démonstration :
Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in B$.
Supposons que $a \mathscr{C} b$.

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Démonstration :
Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in B$.
Supposons que $a \mathscr{C} b$.

- $\exists (\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$, $b \in \Delta$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

<u>Démonstration</u> :
Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in B$.
Supposons que $a \mathscr{C} b$.

- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$, $b \in \Delta$
- Δ est un r-cluster contenant b

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Démonstration :
Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in B$.
Supposons que $a \mathscr{C} b$.

- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$, $b \in \Delta$
- Δ est un r-cluster contenant b
- $\Delta \in \boxdot^\star(b) = \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Démonstration :

Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

Soient $a, b \in B$.

Supposons que $a \mathscr{C} b$.

- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$, $b \in \Delta$
- Δ est un r-cluster contenant b
- $\Delta \in \boxdot^\star(b) = \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- $\Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma)$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Démonstration :

Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot (b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

Soient $a, b \in B$.

Supposons que $a \mathscr{C} b$.

- $\exists(\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$, $b \in \Delta$
- Δ est un r-cluster contenant b
- $\Delta \in \boxdot^\star(b) = \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- $\Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma)$
- $\Delta \in \mathrm{sh}^\star(\boxdot(a))$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Démonstration :

Il reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathscr{C} b$ si, et seulement si, $\boxdot(a) \mathscr{D}_{\mathrm{sh}^\star} \boxdot(b)$, i.e. si, et seulement si $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

Soient $a, b \in B$.

Supposons que $a \mathscr{C} b$.

- $\exists (\Gamma, \Delta)$ 2-cluster t.q. $a \in \Gamma$, $b \in \Delta$
- Δ est un r-cluster contenant b
- $\Delta \in \boxdot^\star(b) = \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- $\Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma)$
- $\Delta \in \mathrm{sh}^\star(\boxdot(a))$
- $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Supposons à présent que $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Supposons à présent que $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

- $\exists \Gamma \in \boxdot(a), \Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Supposons à présent que $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

- $\exists \Gamma \in \boxdot(a), \Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- (Γ, Δ) 2-cluster

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Supposons à présent que $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

- $\exists \Gamma \in \boxdot(a), \Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- (Γ, Δ) 2-cluster
- $a \in \Gamma$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Supposons à présent que $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

- $\exists \Gamma \in \boxdot(a), \Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- (Γ, Δ) 2-cluster
- $a \in \Gamma$
- $\Delta \in \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) = \boxdot^\star(b)$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Supposons à présent que $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

- $\exists \Gamma \in \boxdot(a), \Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- (Γ, Δ) 2-cluster
- $a \in \Gamma$
- $\Delta \in \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) = \boxdot^\star(b)$
- $b \in \Delta$

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact

Supposons à présent que $\mathrm{sh}^\star(\boxdot(a)) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) \neq \emptyset$.

- $\exists \Gamma \in \boxdot(a), \Delta \in \mathrm{sh}^\star(\Gamma) \cap \mathrm{h}^\star(\boxdot(b))$
- (Γ, Δ) 2-cluster
- $a \in \Gamma$
- $\Delta \in \mathrm{h}^\star(\boxdot(b)) = \boxdot^\star(b)$
- $b \in \Delta$
- $a \mathscr{C} b$.

$\blacksquare$

Table des matières

Enlever d'autres axiomes

Questions

Existe-t-il un théorème de représentation pour les algèbres de Boole munies d'une relation vérifiant les axiomes $\perp 1$ à $\perp 4$, $\perp 6$ et $\perp 7$?

Peut-on démontrer un théorème de représentation pour les algèbres de Boole munies d'une relation vérifiant les axiomes $\perp 1$ à $\perp 4$ ainsi que l'axiome $\perp 7$ (et son symétrique) ?

Dans les treillis

Question

Existe-t-il un théorème semblable dans les treillis de contact ?

Table des matières

Bibliographie I

- Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative*, vol. I-II, Eléments de mathématique, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- Stanley Burris et H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2012.
- Nathalie Caspard, Bruno Leclerc et Bernard Monjardet, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, Mathématiques et applications, n° 60, Springer, Berlin, 2007.
- Marc De Wilde, *Topologie générale*, Université de Liège, 1997.
- Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova et Dimiter Vakarelov, *A Generalization of the Stone Duality Theorem*, submitted.
- Georgi Dimov et Dimiter Vakarelov, *Topological representation of precontact algebras*, Relational methods in computer science (St. Catharines, Ontario, Canada, 22–26 février 2005)(Ivo Düntsch, Wendy MacCaull et Michael Winter, éd.), Lecture notes in computer science, 3929, Springer, Berlin, 2006, p. 1–16.

Bibliographie II

- Ivo Düntsch, Sabine Koppelberg et Michael Winter, *Remarks on contact relations on Boolean algebras*, submitted.
- Ivo Düntsch et Dimiter Vakarelov, *Region-based theory of discrete spaces : A proximity approach*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence **49** (2007), 1, p. 5–14.
- Ivo Düntsch et Michael Winter, *A representation theorem for Boolean contact algebras*, Theoretical Computer Science **347** (2005), 3, p. 498–512.
- Steven Givant, *Duality Theories for Boolean Algebras with Operators*, Springer Monographs in Mathematics, Spinger, New York, 2014.
- Steven Givant et Paul Halmos, *Introduction to Boolean Algebras*, Undergraduate Texts in Mathematics, Spinger, New York, 2009.
- Paul Halmos, *Lectures on boolean algebras*, Van Nostrand mathematical studies, D. Van Nostrand Compagny, Princeton, New Jersey, 1963.

Bibliographie III

- Georges Hansoul, *Mereotopological distributive lattices*.
- Georges Hansoul, *Topologie et algèbre booléenne*, Université de Liège, 2004–2005.
- Masaki Kashiwara et Pierre Schapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, n° 332, Springer, New York, 2000.
- Serge Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, n° 211, Springer, New York, 2002.
- Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, n° 5, Springer, New York, 1971.
- Pierre Mathonet *Topologie générale*, Université de Liège, 2013–2014.
- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*, CAPES/AGREG Mathématiques, Ellipses, Paris, 1996.
- Daniel Ponasse et Jean-Claude Carrega, *Algèbre et topologie booléennes*, Masson, Paris, 1979.

Bibliographie IV

- Claire Poussart, *Dualités de Stone et de Priestley pour les demi-treillis distributifs*, Mémoire de master, Université de Liège, Liège, 2005.
- Michel Rigo, *Algèbre linéaire*, Université de Liège, 2009–2010.
- Marshall Harvey Stone, *The theory of representations for boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936), p. 37–111.
- Dimiter Vakarelov, *Dynamic Mereotopology. III. Whiteheadean Type of Integrated Point-Free Theories of Space and Time. I*, Algebra and Logic **53** (2014), 3, p. 191–205.