

Algèbre de Boole avec relation de contact non symétrique

Auteur : Massuir, Adeline

Promoteur(s) : Hansoul, Georges

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2015-2016

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/1572>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès restreint sur le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Par conséquent, seule une utilisation à des fins strictement privées, d'enseignement ou de recherche scientifique est autorisée conformément aux exceptions légales définies aux articles XI. 189 et XI. 190. du Code de droit économique. Toute autre forme d'exploitation (utilisation commerciale, diffusion sur le réseau Internet, reproduction à des fins publicitaires, ...) sans l'autorisation préalable de l'auteur est strictement interdite et constitutive de contrefaçon.



UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Algèbre de Boole avec relation de contact non symétrique

Auteur :
Adeline MASSUIR

Promoteur :
Georges HANSOUL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master en
Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2015 – 2016

Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur monsieur Georges HANSOUL pour son aide, ses précieux conseils et sa disponibilité durant la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Julien RASKIN pour ses réponses à mes questions.

Un grand merci à Marie-Elise DIDDEN et Christophe DUBUSSY pour leur relecture attentive et leurs conseils.

Enfin, je tiens à remercier messieurs P. GRIBOMONT, P. MATHONET, M. RIGO et B. TEHEUX d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Table des matières

Introduction	5
1 Ensemble ordonné et treillis	7
1.1 Ensemble ordonné	7
1.2 Treillis	13
1.2.1 Premières définitions et propriétés	13
1.2.2 Sous-treillis et homomorphisme	18
1.2.3 Distributivité	21
1.2.4 Complétion et complémentation	28
1.2.5 Idéal et filtre	30
2 Algèbre et espace de Boole	39
2.1 Algèbre de Boole	39
2.1.1 Premières définitions et propriétés	39
2.1.2 Sous-algèbre de Boole et homomorphisme	44
2.1.3 Idéal et filtre	47
2.2 Espace de Boole et dualité de Stone	52
2.2.1 Espace dual d'une algèbre de Boole	52
2.2.2 Espace dual d'une algèbre multimodale	59
3 Algèbre de Boole de contact	69
3.1 Relation de contact symétrique	69
3.1.1 Premières définitions	69
3.1.2 Quelques propriétés des clans	74
3.1.3 Théorème de représentation	76
3.2 Relation de contact non symétrique	80
3.2.1 Premières définitions	80
3.2.2 Demi-clans et clusters	83
3.2.3 Théorème de représentation	86
4 Perspectives	92
4.1 Autour du théorème de représentation des algèbres de Boole de pré-contact	92
4.2 Enlever d'autres axiomes	93

4.3	Théorème de représentation dans le dual	93
4.4	Treillis de contact	97
Annexes		99
A	Rappels topologiques	100
A.1	Topologie, voisinage et base	100
A.2	Intérieur et adhérence	101
A.3	Topologie produit	104
A.4	Séparation et continuité	104
A.5	Compacité	105
B	Lien entre algèbre de Boole et anneau	106
B.1	Structure	106
B.2	Idéal	110
C	Rudiments de théorie des catégories	112
C.1	Définitions de base	112
C.2	Foncteur et équivalence de catégories	113
Bibliographie		115

Introduction

En 2005, I. Düntsch et M. Winter établissent un théorème de représentation pour les algèbres de Boole de contact (cf. [9]). Dans cet article, ils démontrent que toute algèbre de Boole de contact se plonge dans l'ensemble des fermés réguliers de l'ensemble de ses clusters que l'on peut munir également d'une relation de contact. Leur démonstration s'appuie fortement sur la symétrie des relations de contact. Nous nous sommes demandé ce qu'il adviendrait du théorème de représentation si l'axiome de symétrie disparaissait de la définition d'une relation de contact.

Notre travail a consisté en deux tâches distinctes. La première était d'établir une base solide et relativement complète pour le lecteur désirant découvrir la théorie des algèbres de Boole. La seconde partie nous a permis de nous confronter au monde de la recherche, puisqu'il s'agissait de tenter de démontrer un théorème de représentation pour les algèbres de Boole de contact pour lesquelles l'axiome de symétrie n'est pas forcément vérifié. Ce résultat est établi dans le troisième chapitre.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres ainsi que de trois annexes. Le premier chapitre commence par un rappel sur la théorie des ensembles ordonnés. Nous en profitons pour introduire quelques notations utiles dans la suite du travail. Ensuite, nous produisons une synthèse, que nous espérons plutôt complète, de la théorie des demi-treillis et des treillis. Après en avoir donné les définitions, quelques exemples et une caractérisation, nous étendons des notions connues dans les ensembles ordonnés : les sous-ensembles et les homomorphismes. Ce chapitre se poursuit avec l'étude de treillis particuliers : les treillis distributifs, les treillis complets et les treillis complémentés. Enfin, nous concluons ce premier chapitre par la définition des idéaux et des filtres et l'étude de leurs caractéristiques. Les filtres maximaux pour l'inclusion, appelés ultrafiltres, seront importants dans le chapitre suivant, car ils serviront à établir la dualité de Stone.

Le deuxième chapitre est consacré aux algèbres de Boole. Dans un premier temps, nous effectuons une étude similaire à celle des treillis du chapitre précédent : sous-algèbres de Boole, homomorphismes, filtres et idéaux. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la dualité de Stone établie par le mathématicien du même nom dans l'article [23] en 1936. Il s'agit d'une dualité entre les algèbres de Boole et les espaces topologiques séparés, compacts et qui admettent une base d'ouverts fermés, appelés espaces de Boole. Notre travail se consacrant dans la suite aux relations de contact, qui sont des multiopérateurs,

nous terminons ce chapitre en montrant que la catégorie des algèbres multimodales et celle des espaces multimodaux sont dualement équivalentes.

Le troisième chapitre est quant à lui consacré aux relations de contact et pré-contact. Nous commençons par les algèbres de Boole de contact. Après avoir défini les axiomes de contact, nous démontrons quelques propriétés basiques. Nous poursuivons par l'étude des clans et clusters indispensables dans notre preuve du théorème de représentation. Enfin, nous donnons une démonstration de ce théorème différente de celle fournie par I. Düntsch et M. Winter dans l'article [9]. Nous traitons ensuite des algèbres de Boole de pré-contact, c'est-à-dire les algèbres de Boole munies d'une relation vérifiant tous les axiomes de contact, excepté la symétrie. Nous procédons comme dans le cas symétrique : définition, propriétés basiques puis introduction des 2-clans, demi-clans, 2-clusters et demi-clusters. De plus, l'absence de symétrie nous oblige à introduire de nouveaux espaces : les espaces d'ombre. Ce chapitre se termine par la démonstration d'un théorème similaire au théorème de représentation des algèbres de Boole de contact.

Dans le dernier chapitre, nous donnons des pistes de réflexion possibles pour poursuivre ce mémoire.

Finalement, nous concluons par trois annexes. La première consiste en un rappel des concepts topologiques intervenant dans ce travail. Dans la seconde, nous expliquons le lien entre les algèbres de Boole et les anneaux commutatifs. Enfin, la troisième et dernière annexe rappelle les concepts de base de théorie des catégories.

Chapitre 1

Ensemble ordonné et treillis

Ce chapitre contient deux parties. La première constitue un rappel sur les ensembles ordonnés, tandis que la seconde est une introduction à la théorie des treillis.

1.1 Ensemble ordonné

Cette section est un rappel des notions de base concernant les ensembles ordonnés. Pour plus de détails, le lecteur pourra par exemple consulter [3].

Définition 1.1.1. Soit P un ensemble. Une *relation d'ordre* (ou simplement un *ordre*) sur P est une relation binaire R sur P telle que pour tous $x, y, z \in P$, on a

- *réflexivité* : xRx ;
- *antisymétrie* : si xRy et yRx , alors $x = y$;
- *transitivité* : si xRy et yRz , alors xRz .

Un *ensemble ordonné* est un ensemble P muni d'une relation d'ordre R . On le note (P, R) ou parfois simplement P lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Remarque 1.1.2. Dans la suite, nous noterons $\leq$ la relation d'ordre plutôt que R . Nous préciserons parfois en indice l'ensemble sur lequel cette relation a lieu afin d'éviter les cas ambigus. Si x et y sont deux éléments d'un ensemble ordonné P et si $x \leq y$, on dira « x est inférieur à y ».

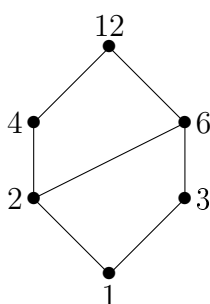
Exemples 1.1.3. L'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ muni de l'ordre habituel, de même que les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des ensembles ordonnés. Si on considère la relation de divisibilité, notée $|$ (on dit que le naturel x divise le naturel y s'il existe un naturel k tel que $kx = y$), l'ensemble $(\mathbb{N}_0, |)$ est un ensemble ordonné. Si X est un ensemble quelconque, l'ensemble des parties de X , $\mathcal{P}(X)$, muni de l'inclusion est un ensemble ordonné.

Notations. Si $(P, \leq)$ est un ensemble ordonné et si x, y sont deux éléments de P , on notera $x \not\leq y$ pour dire « x n'est pas inférieur à y » et on notera $x < y$ au lieu de « $x \leq y$ et $x \neq y$ », autrement dit « x est strictement inférieur à y ».

Remarque 1.1.4. On peut représenter un ensemble ordonné $(P, \leq)$ à l'aide d'un diagramme. On le construit de la manière suivante :

- à chaque élément x dans P , on associe un point du plan de façon injective ;
- si $x \leq y$ dans P , on relie d'un segment ascendant les points représentant x et y ;
- on ne représente d'un trait que les relations « directes », c'est-à-dire qu'on ne trace pas les segments de transitivité (si $x \leq y$ et $y \leq z$ dans P , on ne trace pas de trait entre les points représentant x et z).

Exemple 1.1.5. Si on choisit $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ et la relation de divisibilité $|$ comme ordre, le diagramme représentant $(P, |)$ est donné par



Définitions 1.1.6. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné. Deux éléments x et y de P sont dits *comparables* si $x \leq y$ ou $y \leq x$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$, ils sont dits *incomparables*. On dit que $\leq$ est *total* si deux éléments quelconques de P sont toujours comparables pour $\leq$. Dans ce cas, $(P, \leq)$ est appelé *ensemble totalement ordonné* ou *chaîne*.

Exemples 1.1.7. Il est évident que $\mathbb{N}$ muni de l'ordre habituel est une chaîne, mais que $(\mathbb{N}_0, |)$ n'en est pas une.

Définition 1.1.8. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné. La *relation d'ordre réciproque* ou *ordre réciproque* de $\leq$ est la relation $\geq$ définie par $x \geq y$ si $y \leq x$ pour tous $x, y \in P$. Il est évident qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre. Lorsque $x \geq y$, on dira que « x est supérieur à y ».

Notations. Si $(P, \leq)$ est un ensemble ordonné et si x, y sont deux éléments de P , on notera $x \not\geq y$ pour dire « x n'est pas supérieur à y » et on notera $x > y$ au lieu de « $x \geq y$ et $x \neq y$ », autrement dit « x est strictement supérieur à y ».

Définition 1.1.9. Soit P un ensemble ordonné. Le *dual* P^∂ de P est un ensemble ordonné sur lequel l'ordre est défini par

$$x \leq_{P^\partial} y \text{ si et seulement si } y \leq_P x \text{ avec } x, y \in P.$$

Remarque 1.1.10. Si on possède une propriété ϕ sur les ensembles ordonnés, on obtient la *propriété duale* ϕ^∂ en remplaçant chaque occurrence de $\leq$ dans ϕ par $\geq$. On a alors le *principe de dualité* : « Si une propriété ϕ concernant les ensembles ordonnés est vraie dans tous les ensembles ordonnés, alors la propriété duale ϕ^∂ est également vraie dans tous les ensembles ordonnés. »

Ce principe sera utile notamment dans la suite de ce chapitre où nous pourrons obtenir aisément des propriétés des filtres en dualisant les propriétés des idéaux.

Définition 1.1.11. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et soit E une partie non vide de P . La *relation d'ordre induite* par $\leq$ sur E est la relation d'ordre $\leq_E$ définie par $e \leq_E f$ si $e \in E, f \in E$ et $e \leq f$. Il est clair qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

Définition 1.1.12. Soient I une famille d'indices et $((P_i, \leq_i))_{i \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés. Posons $P := \prod_{i \in I} P_i$. La *relation d'ordre produit* sur P est la relation d'ordre $\leq_P$ définie par $(x_i)_{i \in I} \leq_P (y_i)_{i \in I}$ si $x_i \leq_i y_i$ pour tout $i \in I$ et ce pour tous $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in P$.

Définitions 1.1.13. Soient $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et E une partie de P .

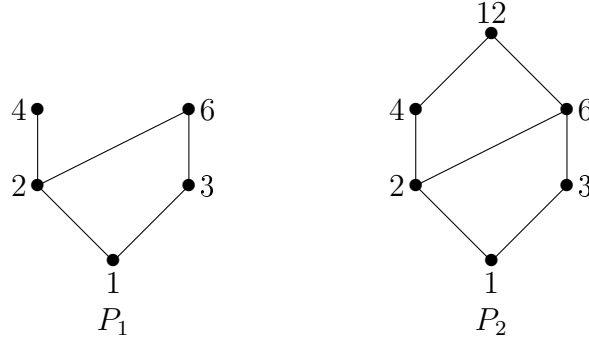
- Un élément a de P est dit *maximum* dans P si $a \geq x$ pour tout $x \in P$.
- Un élément x de P est un *majorant* de E si $x \geq e$ pour tout $e \in E$.
- Le *supremum* de E (ou encore *borne supérieure*), noté $\vee E$, est le plus petit majorant de E .
- Un élément $e \in E$ est *maximal* dans E si pour tout $f \in E$, on a

$$e \leq f \Rightarrow e = f.$$

L'ensemble des éléments maximaux de E est noté $\max(E)$.

Le maximum de P , s'il existe, est unique et dans ce cas on le note 1. Le supremum de E , s'il existe, est unique et n'appartient pas nécessairement à E . Si le supremum est un élément de E , il est également le maximum de E pour l'ordre induit. Remarquons que l'ensemble E peut ne pas posséder d'élément maximal, tout comme il peut en avoir plusieurs. De plus, si E possède un maximum 1, alors 1 est l'unique élément maximal de E . Enfin, si E possède au moins un majorant dans P , on dit que E est *majoré*.

Remarque 1.1.14. Les notions d'élément maximum et d'élément maximal sont bien différentes, comme le montrent les exemples suivants. Considérons $P_1 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et $P_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Choisissons la relation de divisibilité $|$ comme ordre sur les ensembles P_1 et P_2 . Voici la représentation de ces ensembles ordonnés :



Dans l'ensemble ordonné P_1 , les éléments 4 et 6 sont maximaux, mais cet ensemble ne possède pas de maximum. L'ensemble P_2 quant à lui possède un unique élément maximal : 12. Il s'agit également du maximum. Intuitivement, un élément maximal n'a pas d'élément au-dessus de lui, tandis que pour un élément maximum, tous les autres éléments de l'ensemble sont en dessous de lui.

Le théorème fondamental suivant est équivalent à l'axiome du choix. Dans la suite, nous noterons « AC » chaque fois que l'axiome du choix sera explicitement ou implicitement utilisé.

Lemme 1.1.15 (Lemme de Zorn (AC)). *Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné non vide dont toute chaîne possède un majorant. Alors $(P, \leq)$ possède un élément maximal.*

En dualisant les notions de maximum, majorant, supremum et d'élément maximal, on obtient les définitions suivantes.

Définitions 1.1.16. Soient $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et E une partie de P .

- Un élément a de P est dit *minimum* dans P si $a \leq x$ pour tout $x \in P$.
- Un élément x de P est un *minorant* de E si $x \leq e$ pour tout $e \in E$.
- L'*infimum* de E (ou encore *borne inférieure*), noté $\wedge E$, est le plus grand des minorants de E .
- Un élément $e \in E$ est *minimal* dans E si pour tout $f \in E$, on a

$$e \geq f \Rightarrow e = f.$$

L'ensemble des éléments minimaux de E est noté $\min(E)$.

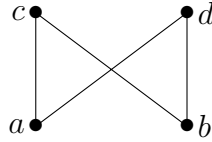
Le minimum de P , s'il existe, est unique et dans ce cas on le note 0. L'infimum de E , s'il existe, est unique et n'appartient pas nécessairement à E . Si l'infimum est un élément de E , il est également le minimum de E pour l'ordre induit. Remarquons que l'ensemble E peut ne pas posséder d'élément minimal, tout comme il peut en avoir plusieurs. De plus, si E possède un minimum 0, alors 0 est l'unique élément minimal de E . Enfin, si E possède au moins un minorant dans P , on dit que E est *minoré*.

Remarques 1.1.17. De la même façon que les notions d'élément maximum et d'élément maximal sont différentes (cf. remarque 1.1.14), les concepts de minimum et d'élément minimal sont distincts.

Notons que si $(P, \leq)$ est un ensemble ordonné et si $x, y \in P$, on voit clairement que

$$\bigwedge \{x, y\} = x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee \{x, y\} = y.$$

Remarquons également que les bornes supérieure et inférieure de parties constituées de deux éléments peuvent ne pas exister pour diverses raisons. Par exemple, dans l'ensemble ordonné représenté ci-dessous, la paire $\{a, b\}$ n'a pas de borne supérieure, car il n'existe pas de *plus petit* majorant et n'a pas de borne inférieure, car l'ensemble $\{a, b\}$ ne possède pas de minorant. Quant à la paire $\{c, d\}$, elle n'a pas de borne supérieure, car aucun élément ne la majore et elle n'admet pas de borne inférieure, car on ne peut pas trouver de *plus grand* minorant.



Définition 1.1.18. Un ensemble ordonné $(P, \leq)$ est *borné* s'il possède un maximum et un minimum.

Définition 1.1.19. Soient $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et $x, y \in P$. On dit que y *couvre* x si $x < y$ et s'il n'existe aucun $z \in P$ tel que $x < z < y$.

Proposition 1.1.20. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné fini. Alors

- tout élément non maximal est couvert par au moins un élément ;
- tout élément non minimal couvre au moins un élément.

Démonstration. Soit x un élément non maximal de P . Alors il existe au moins un élément $x_1 \in P$ tel que $x < x_1$. Si x_1 couvre x , on peut conclure. Sinon, il existe $x_2 \in P$ tel que $x < x_2 < x_1$. Si x_2 couvre x , on peut conclure. Sinon, on itère le processus. Comme P est un ensemble fini, on obtient forcément un élément $x_n \in P$ ($n \in \mathbb{N}$) qui couvre x .

On procède de façon analogue pour démontrer la deuxième assertion. ■

Notations. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et soient E une partie de P et x un élément de P . On pose

$$\begin{aligned} E \downarrow &:= \{f \in P \mid \exists e \in E \text{ avec } f \leq e\} & E \uparrow &:= \{f \in P \mid \exists e \in E \text{ avec } f \geq e\} \\ x \downarrow &:= \{y \in P \mid y \leq x\} & x \uparrow &:= \{y \in P \mid y \geq x\}. \end{aligned}$$

Définitions 1.1.21. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné. Une partie E de P est dite :

- *décroissante* si $E \downarrow = E$;
- *croissante* si $E \uparrow = E$;

- $\downarrow$ -dirigée si pour tous $x, y \in E$, il existe $z \in E$ tel que $z \leq x, y$;
- $\uparrow$ -dirigée si pour tous $x, y \in E$, il existe $z \in E$ tel que $z \geq x, y$.

Définitions 1.1.22. Soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés. Une application $f : P \rightarrow Q$ est une

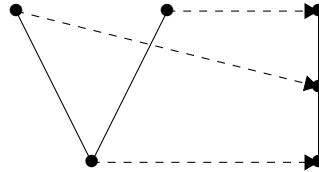
- *application croissante*, ou encore *homomorphisme d'ordres*, si pour tous $x, y \in P$, $x \leq_P y$ implique $f(x) \leq_Q f(y)$;
- *application décroissante* si pour tous $x, y \in P$, $x \leq_P y$ implique $f(x) \geq_Q f(y)$;
- *application strictement croissante* si pour tous $x, y \in P$,

$$x <_P y \Rightarrow f(x) <_Q f(y);$$

- *application strictement décroissante* si pour tous $x, y \in P$,

$$x <_P y \Rightarrow f(x) >_Q f(y).$$

Remarque 1.1.23. Un homomorphisme d'ordres peut être une bijection sans pour autant que son inverse soit un homomorphisme d'ordres, comme le montre l'exemple ci-dessous.



Définitions 1.1.24. Soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés. Un *plongement d'ordre* est une application $f : P \rightarrow Q$ telle que $x \leq_P y$ si, et seulement si, $f(x) \leq_Q f(y)$. Ce plongement d'ordre est dit *dense* si pour tout $y \in Q \setminus \{0_Q\}$, il existe $x \in P$ tel que $f(x) \neq 0_Q$ et $f(x) \leq_Q y$.

Remarque 1.1.25. Un plongement d'ordre est toujours injectif. En effet, soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés et $f : P \rightarrow Q$ un plongement d'ordre. Soient $x, y \in P$ tels que $f(x) = f(y)$. Supposons que $x \neq y$. Alors $x \not\leq_P y$ ou $y \not\leq_P x$. Dans le premier cas, on a $f(x) \not\leq_Q f(y)$ et dans le second, $f(y) \not\leq_Q f(x)$. Dans tous les cas, on a $f(x) \neq f(y)$, ce qui est absurde.

Définition 1.1.26. Soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés. Un *isomorphisme d'ordres* entre P et Q est une application $f : P \rightarrow Q$ qui est bijective et telle que $x \leq_P y$ si, et seulement si, $f(x) \leq_Q f(y)$. Autrement dit, c'est un plongement d'ordre bijectif.

Proposition 1.1.27. Soient P et Q deux ensembles ordonnés, $f : P \rightarrow Q$ un isomorphisme d'ordres et E une partie de P . Si $\vee E$ existe dans P , alors $\vee f(E)$ existe dans Q et est égal à $f(\vee E)$. De même, si $\wedge E$ existe dans P , alors $\wedge f(E)$ existe dans Q et est égal à $f(\wedge E)$.

Démonstration. Montrons le résultat pour le supremum. Supposons que $\vee E$ existe. Soit $y \in f(E)$. Alors $y = f(x)$ avec $x \in E$. De plus, $x \leq \vee E$, donc $y \leq f(\vee E)$. On en tire que $f(\vee E)$ est un majorant de $f(E)$.

Soit à présent M un majorant de $f(E)$ dans Q . Alors il existe un unique $m \in P$ tel que $f(m) = M$. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \leq f(m)$ donc $x \leq m$, d'où m est un majorant de E . On en tire que $\vee E \leq m$ et donc $f(\vee E) \leq M$, ce qui conclut.

On procède de façon analogue pour l'infimum. ■

1.2 Treillis

L'objectif de cette partie est d'établir une base solide de la théorie des treillis pour le lecteur ne connaissant pas cette branche de l'algèbre. Après quelques définitions et propriétés de base, nous introduisons les notions de sous-treillis et d'homomorphisme, avant d'étudier les caractéristiques de treillis particuliers : les treillis distributifs, les treillis complets ou encore les treillis complémentés. Nous concluons cette section et ce chapitre en définissant les filtres et les idéaux et en étudiant quelques-unes de leurs propriétés.

1.2.1 Premières définitions et propriétés

Définitions 1.2.1. Soit $(L, \leq)$ un ensemble ordonné. Cet ensemble est appelé :

- *sup.demi-treillis* si pour tous $x, y \in L$, $\vee\{x, y\}$ existe ;
- *inf.demi-treillis* si pour tous $x, y \in L$, $\wedge\{x, y\}$ existe ;
- *treillis* s'il est à la fois un sup.demi-treillis et un inf.demi-treillis.

Remarquons qu'un inf.demi-treillis pour une relation d'ordre $\leq$ est en fait un sup.demi-treillis lorsqu'on prend son dual.

Notations. Si L est un sup.demi-treillis, si $x, y \in L$ et si E, F sont des parties de L , alors on pose $\vee\{x, y\} := x \vee y$ et $E \vee F := \{e \vee f \mid e \in E, f \in F\}$. De même, si M est un inf.demi-treillis, si $z, t \in M$ et si G, H sont deux parties de M , alors on pose $\wedge\{z, t\} := z \wedge t$ et $G \wedge H := \{g \wedge h \mid g \in G, h \in H\}$. De plus, $x \vee y$ se lira par « x ou y » et $z \wedge t$ par « z et t ».

Exemples 1.2.2. L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}_0, |)$ est un treillis où pour tous $x, y \in \mathbb{N}_0$, on a $x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$ et $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$. En effet, soient $x, y \in \mathbb{N}_0$. Alors $\text{ppcm}(x, y) \geq x, y$ et si $M \in \mathbb{N}_0$ est un majorant de $\{x, y\}$, alors $M \geq x, y$. Donc $M \geq \text{ppcm}(x, y)$. On procède de même pour montrer que $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$.

Si X est un ensemble, alors l'ensemble $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ des parties de X est un treillis où pour tous $U, V \in \mathcal{P}(X)$, on a $U \vee V = U \cup V$ et $U \wedge V = U \cap V$. En effet, soient $U, V \in \mathcal{P}(X)$. Alors $U \cup V \supseteq U, V$ et si $W \in \mathcal{P}(X)$ est un majorant de $\{U, V\}$, alors $W \supseteq U, V$. Donc $W \supseteq U \cup V$. On procède de même pour montrer que $U \wedge V = U \cap V$.

Si A est un anneau et M un A -module, l'ensemble des sous- A -modules de M ordonné par inclusion est un treillis où le supremum de deux sous- A -modules est donné par le

sous- A -module engendré par l'union de ces deux sous- A -modules et où l'infimum de deux sous- A -modules en est l'intersection.

Jusqu'ici, nous avons défini des structures. Nous allons à présent donner un sens algébrique aux notions de sup.demi-treillis, d'inf.demi-treillis et de treillis.

Proposition 1.2.3. *Soit $(L, \leq)$ un sup.demi-treillis. La loi de composition*

$$\vee : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \vee y$$

vérifie, pour tous $x, y, z \in L$,

- *idempotence* : $x \vee x = x$;
- *commutativité* : $x \vee y = y \vee x$;
- *associativité* : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

Démonstration. Vu la définition de $\vee$, l'idempotence et la commutativité sont claires. Montrons l'associativité. Soient $x, y, z \in L$. On a $x \vee (y \vee z) \geq x$ et $x \vee (y \vee z) \geq y \vee z$, donc $x \vee (y \vee z) \geq y$ et $x \vee (y \vee z) \geq z$. On en tire que $x \vee (y \vee z) \geq x \vee y$ et donc que $x \vee (y \vee z)$ est un majorant de $\{x \vee y, z\}$. De plus, si M est un majorant de $\{x \vee y, z\}$, alors $M \geq x \vee y$ et $M \geq z$, donc $M \geq x$ et $M \geq y$. D'où $M \geq y \vee z$, donc M est un majorant de $\{x, y \vee z\}$ et $M \geq x \vee (y \vee z)$. Donc $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. ■

En passant au dual, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.2.4. *Soit $(L, \leq)$ un inf.demi-treillis. La loi de composition*

$$\wedge : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \wedge y$$

vérifie, pour tous $x, y, z \in L$,

- *idempotence* : $x \wedge x = x$;
- *commutativité* : $x \wedge y = y \wedge x$;
- *associativité* : $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

Notations. Vu l'associativité, on notera sans ambiguïté $x \vee y \vee z$ (resp. $x \wedge y \wedge z$) au lieu de $x \vee (y \vee z)$ (resp. $x \wedge (y \wedge z)$) si $x, y, z \in L$ où L est un sup.demi-treillis (resp. un inf.demi-treillis).

Comme un treillis est à la fois un sup.demi-treillis et un inf.demi-treillis, la proposition suivante découle naturellement des propositions 1.2.3 et 1.2.4.

Proposition 1.2.5. *Soit $(L, \leq)$ un treillis. Les lois de composition*

$$\vee : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \vee y \quad \text{et} \quad \wedge : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \wedge y$$

sont idempotentes, commutatives et associatives.

Dans un treillis, il y a également des relations liant les deux lois de composition $\vee$ et $\wedge$. Il s'agit des *lois d'absorption*.

Proposition 1.2.6 (Lois d'absorption). *Soit $(L, \leq)$ un treillis. Pour tous $x, y \in L$, on a*

- $x \wedge (x \vee y) = x$
- $x \vee (x \wedge y) = x$.

Démonstration. Cela découle directement du fait que pour tous $x, y \in L$, on a

$$x \wedge y \leq x \leq x \vee y.$$

■

Nous passons à présent au problème réciproque, afin d'obtenir une caractérisation algébrique des treillis et demi-treillis.

Proposition 1.2.7. *Soit L un ensemble muni d'une loi de composition*

$$\nabla : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \nabla y$$

idempotente, commutative et associative. Alors il existe une unique relation d'ordre $\leq$ sur L qui fait de L un sup.demi-treillis et telle que $x \nabla y$ soit le supremum de $\{x, y\}$ (i.e. $x \nabla y = x \vee y$) pour tous $x, y \in L$.

Démonstration. Si une telle relation existe, elle est définie par

$$x \leq y \Leftrightarrow x \nabla y = y$$

pour tous $x, y \in L$. Donc une telle relation, si elle existe, est unique. Montrons qu'elle satisfait l'énoncé. Posons pour tous $x, y \in L$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \nabla y = y.$$

Montrons tout d'abord que $\leq$ est une relation d'ordre. Soient $x, y, z \in L$. Alors $x \leq x$ car $x \nabla x = x$ par idempotence de ∇ . Donc $\leq$ est réflexif. De plus, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x \nabla y = y$ et $y \nabla x = x$. Comme ∇ est commutatif, on en tire que $x = y$, d'où $\leq$ est antisymétrique. Il reste à prouver la transitivité. Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \nabla y = y$ et $y \nabla z = z$. On en tire que, comme ∇ est associatif,

$$x \nabla z = x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z = y \nabla z = z,$$

autrement dit $x \leq z$. Donc $(L, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Montrons à présent que $(L, \leq)$ est un sup.demi-treillis. Soient $x, y \in L$. On a

$$x \nabla (x \nabla y) = (x \nabla x) \nabla y = x \nabla y$$

par associativité et idempotence de ∇ . Cela montre que $x \leq x \nabla y$. De plus, $y \leq x \nabla y$ car

$$y \nabla (x \nabla y) = (x \nabla y) \nabla y = x \nabla (y \nabla y) = x \nabla y,$$

par commutativité, associativité et idempotence de ∇ . On en tire que $x \nabla y$ est un majorant de $\{x, y\}$. De plus, si M est un majorant de $\{x, y\}$, $x \leq M$ et $y \leq M$, donc

$$(x \nabla y) \nabla M = x \nabla (y \nabla M) = x \nabla M = M,$$

donc $x \nabla y \leq M$. On a donc $x \nabla y = x \vee y$, ce qui permet de conclure. ■

La proposition suivante se démontre de la même manière que la précédente.

Proposition 1.2.8. *Soit L un ensemble muni d'une loi de composition*

$$\triangle : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \triangle y$$

idempotente, commutative et associative. Alors il existe une unique relation d'ordre $\leq$ sur L qui fait de L un inf.demi-treillis et telle que $x \triangle y$ soit l'infimum de $\{x, y\}$ (i.e. $x \triangle y = x \wedge y$) pour tous $x, y \in L$.

Démonstration. La relation d'ordre

$$x \leq y \Leftrightarrow x \triangle y = x$$

pour tous $x, y \in L$ satisfait l'énoncé. ■

Si on veut faire un treillis d'un ensemble L muni de deux lois de composition idempotentes, commutatives et associatives

$$\nabla : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \nabla y \text{ et } \triangle : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \triangle y,$$

nous avons besoin d'une condition de plus. En effet, si on applique la proposition 1.2.7 à la loi ∇ et la proposition 1.2.8 à la loi $\triangle$, on obtient deux relations d'ordre :

- $x \leq_1 y \Leftrightarrow x \nabla y = y$
- $x \leq_2 y \Leftrightarrow x \triangle y = x$

pour tous $x, y \in L$, de sorte que $(L, \leq_1)$ est un sup.demi-treillis et $(L, \leq_2)$ est un inf.demi-treillis. Si les deux relations $\leq_1$ et $\leq_2$ diffèrent, on n'a pas fait de L un treillis. De plus, rien ne garantit que ces deux relations d'ordre sont identiques. Il suffit par exemple de choisir $L = \mathbb{N}_0$, $x \nabla y = \max(x, y)$ et $x \triangle y = \text{pgcd}(x, y)$ si x, y sont des éléments de L . L'ordre induit par ∇ sur L est l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$, tandis que la relation d'ordre induite par $\triangle$ sur L est la relation de divisibilité.

Théorème 1.2.9. *Soit L un ensemble muni de deux lois de composition*

$$\nabla : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \nabla y$$

et

$$\Delta : L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto x \Delta y$$

idempotentes, commutatives et associatives. Supposons de plus que ces deux lois vérifient les lois d'absorption (i.e. pour tous $x, y \in L$, on a $x \Delta (x \nabla y) = x = x \nabla (x \Delta y)$). Alors il existe une unique relation d'ordre $\leq$ sur L qui fait de L un treillis et telle que $x \nabla y$ soit le supremum de $\{x, y\}$ (i.e. $x \nabla y = x \vee y$) et que $x \Delta y$ soit l'infimum de $\{x, y\}$ (i.e. $x \Delta y = x \wedge y$) pour tous $x, y \in L$.

Démonstration. Par ce qui précède et vu les preuves des propositions 1.2.7 et 1.2.8, il suffit de montrer que les deux relations d'ordre $\leq_1$ et $\leq_2$ définies respectivement par

$$x \leq_1 y \Leftrightarrow x \nabla y = y \quad \text{et} \quad x \leq_2 y \Leftrightarrow x \Delta y = x$$

pour tous $x, y \in L$, sont équivalentes.

Soient $x, y \in L$. Si $x \leq_1 y$, alors $x \nabla y = y$ et $x \Delta y = x \Delta (x \nabla y) = x$ par les lois d'absorption. Donc $x \leq_2 y$. Si à présent on a $x \leq_2 y$, alors $x \Delta y = x$ et donc

$$x \nabla y = (x \Delta y) \nabla y = y \nabla (x \Delta y) = y \nabla (y \Delta x) = y$$

vu la commutativité de ∇ , Δ et les lois d'absorption. On en tire que $x \leq_1 y$, ce qui permet de conclure. ■

Proposition 1.2.10. *Soit $(L, \leq)$ un treillis. Alors pour tous $a, b, c, d \in L$*

- *si $a \leq b$, alors $a \wedge x \leq b \wedge x$ et $a \vee x \leq b \vee x$ pour tout $x \in L$;*
- *si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a \wedge c \leq b \wedge d$ et $a \vee c \leq b \vee d$.*

Démonstration. Montrons d'abord la première assertion. Comme $a \leq b$, on a $a \wedge b = a$ et $a \vee b = b$. Dès lors pour tout $x \in L$, on a

$$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x \wedge b \wedge x = a \wedge b \wedge x \wedge x = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) = a \wedge x.$$

Donc $a \wedge x \leq b \wedge x$. De même,

$$(a \vee x) \vee (b \vee x) = a \vee x \vee b \vee x = a \vee b \vee x \vee x = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x.$$

On a donc $a \vee x \leq b \vee x$.

Passons à la deuxième assertion. Comme $a \leq b$, par la première assertion, on a $a \wedge c \leq b \wedge c$. De même, comme $c \leq d$, on a $b \wedge c \leq b \wedge d$. Au final, on a $a \wedge c \leq b \wedge d$. On a aussi $a \vee c \leq b \vee c$ et $b \vee c \leq b \vee d$. Donc $a \vee c \leq b \vee d$. ■

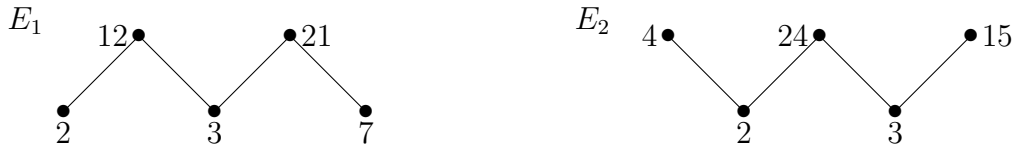
1.2.2 Sous-treillis et homomorphisme

Si $(L, \leq)$ est un sup.demi-treillis (resp. un inf.demi-treillis) et si x, y sont deux éléments de L , alors $x \vee y$ existe (resp. $x \wedge y$ existe). Soit E une partie de L et munissons E de l'ordre induit. Si x, y sont deux éléments de E , on a trois cas possibles :

- la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de x et y dans E , notée $x \vee_E y$ (resp. $x \wedge_E y$), existe et est égale à $x \vee y$ (resp. $x \wedge y$) ;
- la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de x et y dans E existe, mais n'est pas égale à $x \vee y$ (resp. $x \wedge y$), dans ce cas $x \vee_E y > x \vee y$ (resp. $x \wedge_E y < x \wedge y$) ;
- la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de x et y dans E n'existe pas.

Les trois cas de figure peuvent arriver au sein d'un unique sous-ensemble E d'un ensemble ordonné L comme le montrent les exemples suivants.

Exemples 1.2.11. Considérons le treillis $(\mathbb{N}_0, |)$ et les sous-ensembles $E_1 = \{2, 3, 7, 12, 21\}$ et $E_2 = \{2, 3, 4, 15, 24\}$ de ce treillis, munis de l'ordre induit et représentés ci-dessous.



On voit clairement que

- $3 \vee_{E_1} 7 = 21 = \text{ppcm}(3, 7)$;
- $2 \vee_{E_1} 3 = 12 > \text{ppcm}(2, 3) = 6$;
- $2 \vee_{E_1} 7$ n'existe pas, alors que $\text{ppcm}(2, 7) = 14$;

et que

- $15 \wedge_{E_2} 24 = 3 = \text{pgcd}(15, 24)$;
- $4 \wedge_{E_2} 24 = 2 < \text{pgcd}(4, 24) = 4$;
- $4 \wedge_{E_2} 15$ n'existe pas alors que $\text{pgcd}(4, 15) = 1$.

Cela nous amène aux définitions suivantes.

Définition 1.2.12. Soient $(L, \leq)$ un sup.demi-treillis et E une partie non vide de L munie de l'ordre induit. On dit que E est un *sous-sup.demi-treillis* de L si pour tous $x, y \in L$, $x \vee_E y$ existe et est égal à $x \vee y$.

Définition 1.2.13. Soient $(L, \leq)$ un inf.demi-treillis et E une partie non vide de L munie de l'ordre induit. On dit que E est un *sous-inf.demi-treillis* de L si pour tous $x, y \in P$, $x \wedge_E y$ existe et est égal à $x \wedge y$.

Les propositions suivantes sont une caractérisation des sous-demi-treillis.

Proposition 1.2.14. Soient $(L, \leq)$ un sup.demi-treillis et E une partie de L munie de l'ordre induit. Alors pour tous $x, y \in E$, on a $x \vee y \in E$ si, et seulement si, $x \vee_E y$ existe et est égal à $x \vee y$.

Démonstration. Soient $x, y \in L$. Si $x \vee y \in E$, alors $x \vee y$ est un majorant de la paire $\{x, y\}$ dans E . C'est clairement le plus petit, donc $x \vee y = x \vee_E y$ et en particulier $x \vee_E y$ existe. Réciproquement, on a $x \vee y = x \vee_E y \in E$, ce qui permet de conclure. ■

On démontre de la même façon la proposition suivante.

Proposition 1.2.15. Soient $(L, \leq)$ un inf.demi-treillis et E une partie de L munie de l'ordre induit. Alors pour tous $x, y \in E$, on a $x \wedge y \in E$ si, et seulement si, $x \wedge_E y$ existe et est égal à $x \wedge y$.

On en tire qu'un sous-sup.demi-treillis est un sup.demi-treillis pour l'ordre induit et qu'un sous-inf.demi-treillis est un inf.demi-treillis pour l'ordre induit.

Comme un treillis $(L, \leq)$ est à la fois un sup.demi-treillis et un inf.demi-treillis, si E est une partie non vide de L et si x, y sont des éléments de E , on a neuf cas possibles concernant l'existence ou non de bornes supérieure et inférieure. Un seul de ces cas nous intéresse ici.

Définition 1.2.16. Soient $(L, \leq)$ un treillis et E une partie non vide de L munie de l'ordre induit. On dit que E est un *sous-treillis* de L s'il est à la fois un sous-sup.demi-treillis et un sous-inf.demi-treillis, ou de manière équivalente, si pour tous $x, y \in E$, $x \vee y \in E$ et $x \wedge y \in E$. En particulier, E muni de l'ordre induit est un treillis pour lequel $x \vee_E y = x \vee y$ et $x \wedge_E y = x \wedge y$ pour tous $x, y \in E$.

Exemples 1.2.17. Si L est un treillis et si $x \in L$, alors $\{x\}$ est un sous-treillis de L , de façon évidente. De même, toute chaîne de L en est un sous-treillis.

Si X est un espace topologique, on sait que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est un treillis. Les ensembles $\mathcal{O}(X)$ (les ouverts de X) et $\Gamma(X)$ (les fermés de X) en sont deux sous-treillis puisque l'union de deux ouverts (resp. deux fermés) est un ouvert (resp. un fermé) et l'intersection de deux ouverts (resp. deux fermés) est un ouvert (resp. un fermé).

Par contre, si G est un groupe, $\text{Sg}(G)$ n'est pas un sous-treillis de $\mathcal{P}(G)$ puisque l'union de deux sous-groupes n'est pas nécessairement un sous-groupe.

Un autre exemple est donné par l'ensemble des diviseurs d'un nombre. En effet, si n est un naturel non nul, l'ensemble de ses diviseurs, noté $D(n)$, est un sous-treillis de $(\mathbb{N}_0, |)$, car si $x, y \in \mathbb{N}_0$ sont tels que $x|n, y|n$, alors $\text{ppcm}(x, y)|n$ et $\text{pgcd}(x, y)|n$.

Etudions à présent les homomorphismes.

Définition 1.2.18. Un *homomorphisme de sup.demi-treillis* ou $\vee$ -homomorphisme est une application $f : L \rightarrow M$ entre deux sup.demi-treillis L et M telle que pour tous $x, y \in L$,

$$f(x \vee_L y) = f(x) \vee_M f(y).$$

Définition 1.2.19. Un *homomorphisme d'inf.demi-treillis* ou $\wedge$ -*homomorphisme* est une application $f : L \rightarrow M$ entre deux inf.demi-treillis L et M telle que pour tous $x, y \in L$,

$$f(x \wedge_L y) = f(x) \wedge_M f(y).$$

Notations. Afin de ne pas alourdir les notations, on omettra les indices de $\vee$ et $\wedge$ lorsque le contexte est clair.

Proposition 1.2.20. Un *homomorphisme de sup.demi-treillis* est un *homomorphisme d'ordres*. De même, un *homomorphisme d'inf.demi-treillis* est un *homomorphisme d'ordres*.

Démonstration. Soient $(L, \leq_L)$ et $(M, \leq_M)$ deux sup.demi-treillis et soit $f : L \rightarrow M$ un homomorphisme de sup.demi-treillis. Si $x \leq_L y$ avec $x, y \in L$, alors $x \vee y = y$ et donc $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y)$. On en tire que $f(x) \leq_M f(y)$.

Soient à présent $(L', \leq_{L'})$ et $(M', \leq_{M'})$ deux inf.demi-treillis et soit $f : L' \rightarrow M'$ un homomorphisme d'inf.demi-treillis. Si $x \leq_{L'} y$ avec $x, y \in L'$, alors $x \wedge y = x$ et donc $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) = f(x)$. On en tire que $f(x) \leq_{M'} f(y)$, d'où la conclusion. ■

Notons que la réciproque n'est pas vraie. Considérons les deux treillis $L = (\mathbb{N}_0, |)$ et $M = (\mathbb{N}_0, \leq)$. Soit f l'identité de $\mathbb{N}_0$ (du premier ensemble ordonné dans le deuxième). Cette application est croissante, car si $x, y \in \mathbb{N}_0$ sont tels que $x | y$, alors $x \leq y$. Cependant, les bornes supérieures et inférieures ne sont pas conservées. En effet, $2 \vee_L 9 = 18$ alors que $2 \vee_M 9 = 9$. Il ne s'agit donc pas d'un $\vee$ -homomorphisme. De même, $6 \wedge_L 9 = 3$, tandis que $6 \wedge_M 9 = 6$. Il ne s'agit donc pas non plus d'un $\wedge$ -homomorphisme.

Définitions 1.2.21. Un $\vee$ -*isomorphisme* est un $\vee$ -homomorphisme bijectif. De la même manière, un $\wedge$ -*isomorphisme* est un $\wedge$ -homomorphisme bijectif.

Proposition 1.2.22. Soient $(L, \leq_L)$ et $(M, \leq_M)$ deux sup.demi-treillis. Une application $f : L \rightarrow M$ est un $\vee$ -isomorphisme si, et seulement si, c'est un isomorphisme d'ordres.

Démonstration. Si f est un $\vee$ -isomorphisme, alors il s'agit d'une bijection et cette application est croissante, vu ce qui précède. Il reste donc à montrer que f^{-1} est croissante. Soient $x, y \in L$ tels que $f(x) \leq_M f(y)$. Alors $f(y) = f(x) \vee f(y) = f(x \vee y)$. On en tire que $x \vee y = y$, donc $x \leq y$.

Réciproquement, si f est un isomorphisme d'ordres, f est bijective et préserve les bornes supérieures, vu la proposition 1.1.27, ce qui conclut. ■

On démontre de la même manière cette proposition dans les inf.demi-treillis.

Proposition 1.2.23. Soient $(L, \leq_L)$ et $(M, \leq_M)$ deux inf.demi-treillis. Une application $f : L \rightarrow M$ est un $\wedge$ -isomorphisme si, et seulement si, c'est un isomorphisme d'ordres.

Comme un treillis est un sup.demi-treillis et un inf.demi-treillis, parler d'homomorphisme de sup.demi-treillis et d'homomorphisme d'inf.demi-treillis entre deux treillis a du sens. Cependant, ces deux notions ne sont pas équivalentes. Il suffit de considérer un espace

topologique X . Notons $\Gamma(X)$ l'ensemble de ses fermés et considérons l'application f entre les deux treillis $\mathcal{P}(X)$ et $\Gamma(X)$, ordonnés par inclusion

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \Gamma(X) : U \mapsto \overline{U}$$

qui à une partie de X associe son adhérence. Il s'agit d'un $\vee$ -homomorphisme car si U et V sont deux parties de X , alors $\overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V}$. Comme en général, si U, V sont des parties de X , on a $\overline{U \cap V} \neq \overline{U} \cap \overline{V}$, il ne s'agit pas d'un $\wedge$ -homomorphisme. Nous ne pouvons donc pas nous contenter d'une seule de ces notions dans la définition d'un homomorphisme de treillis.

Définitions 1.2.24. Un *homomorphisme de treillis* est une application qui est à la fois un $\vee$ -homomorphisme et un $\wedge$ -homomorphisme. Si de plus cet homomorphisme est bijectif, on l'appellera *isomorphisme de treillis*.

Les deux propositions suivantes découlent directement des propositions 1.2.20, 1.2.22 et 1.2.23. La deuxième nous permettra plus tard d'effectuer moins de vérifications pour savoir si une application est un isomorphisme de treillis.

Proposition 1.2.25. *Un homomorphisme de treillis est un homomorphisme d'ordres.*

Proposition 1.2.26. *Soit f une application entre deux treillis. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. f est un isomorphisme de treillis ;
2. f est un isomorphisme d'ordres ;
3. f est un $\vee$ -isomorphisme ;
4. f est un $\wedge$ -isomorphisme.

1.2.3 Distributivité

La distributivité est une propriété supplémentaire dont disposent certains treillis. Cette notion est indispensable dans les algèbres de Boole définies dans le chapitre suivant.

Définition 1.2.27. Un treillis L est *distributif* si pour tous $x, y, z \in L$, on a

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Remarque 1.2.28. Pour vérifier qu'un treillis L est distributif, il suffit de montrer que pour tous $x, y, z \in L$, on a

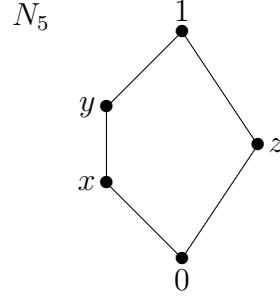
$$x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

En effet, l'autre inégalité est toujours vraie. Soient $x, y, z \in L$. Alors $x \leq x \vee y$ et $x \leq x \vee z$, donc $x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. De plus, $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ et $y \wedge z \leq z \leq x \vee z$, donc $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. On en tire que

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Exemples 1.2.29. Si X est un espace topologique, le treillis $\mathcal{P}(X)$ est distributif. Comme $\mathcal{O}(X)$ et $\Gamma(X)$ sont des sous-treillis de $\mathcal{P}(X)$, ils sont bien évidemment distributifs. Les treillis $(\mathbb{N}, \leq)$ et $(\mathbb{N}_0, |)$ sont également distributifs.

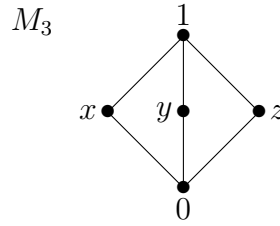
Définition 1.2.30. Le treillis N_5 est un treillis à cinq éléments représenté ci-dessous.



Ce treillis n'est pas distributif. En effet, on a

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee 0 = x \text{ et } (x \vee y) \wedge (x \vee z) = y \wedge 1 = y.$$

Définition 1.2.31. Le treillis M_3 est un treillis à cinq éléments représenté ci-dessous.



Ce treillis n'est pas distributif. En effet, on a

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee 0 = x \text{ et } (x \vee y) \wedge (x \vee z) = 1 \wedge 1 = 1.$$

On aurait pu choisir une autre définition pour la distributivité, comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 1.2.32. Soit L un treillis. Alors L est distributif si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in L$,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Démonstration. Si L est distributif, soient $x, y, z \in L$. On a

$$\begin{aligned}
 (x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z] && \text{(par distributivité)} \\
 &= x \wedge [(x \wedge y) \vee z] && \text{(vu les lois d'absorption)} \\
 &= x \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] && \text{(par commutativité et distributivité)} \\
 &= [x \wedge (x \vee z)] \wedge (y \vee z) && \text{(par associativité)} \\
 &= x \wedge (y \vee z) && \text{(vu les lois d'absorption).}
 \end{aligned}$$

Réciproquement, soient $x, y, z \in L$. On a

$$\begin{aligned}
 (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] && \text{(par hypothèse)} \\
 &= x \vee [(x \vee y) \wedge z] && \text{(vu les lois d'absorption)} \\
 &= x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] && \text{(par hypothèse et commutativité)} \\
 &= [x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z) && \text{(par associativité)} \\
 &= x \vee (y \wedge z) && \text{(vu les lois d'absorption)}.
 \end{aligned}$$

■

Dans la suite, lorsqu'on justifiera un calcul par la distributivité, ce sera via la définition, ou via la caractérisation, de façon équivalente.

Afin d'établir d'autres caractérisations de la distributivité, nous devons introduire la notion de treillis modulaire.

Définition 1.2.33. Un treillis L est modulaire si pour tous $x, y, z \in L$, on a

$$x \geq z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z.$$

Remarques 1.2.34.

1. Pour montrer qu'un treillis L est modulaire, il suffit de prouver que pour tous x, y, z dans L , on a

$$x \geq z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z.$$

En effet, l'autre inégalité est toujours vraie. Soient $x, y, z \in L$ avec $x \geq z$. On a $x \wedge y \leq x$ et $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$. De plus, $z \leq x$ et $z \leq y \vee z$. On en tire que

$$x \geq z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee z.$$

2. Si L est un treillis distributif, alors il est modulaire. En effet, soient $x, y, z \in L$ tels que $x \geq z$. Alors

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee z.$$

Exemple 1.2.35. Le treillis M_3 est modulaire. Il s'agit de simples vérifications.

On a également des caractérisations pour les treillis modulaires.

Proposition 1.2.36. Soit L un treillis. Alors L est modulaire si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in L$, on a

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee ([y \vee (x \wedge z)] \wedge z).$$

Démonstration. Supposons que L est modulaire et soient $x, y, z \in L$. Comme $z \geq x \wedge z$, on a

$$\begin{aligned} x \vee ([y \vee (x \wedge z)] \wedge z) &= x \vee [(x \wedge z) \vee y] \wedge z && \text{(par commutativité)} \\ &= x \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) && \text{(par commutativité et } L \text{ est modulaire)} \\ &= x \vee (y \wedge z) && \text{(vu les lois d'absorption).} \end{aligned}$$

Réciproquement, soient $x, y, z \in L$ tels que $x \leq z$. On a

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= x \vee ([y \vee (x \wedge z)] \wedge z) && \text{(par hypothèse)} \\ &= x \vee [(y \vee x) \wedge z] && \text{(car } x \leq z) \\ &\geq (y \vee x) \wedge z, \end{aligned}$$

ce qui suffit par commutativité. ■

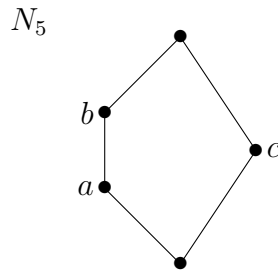
Proposition 1.2.37. *Soit L un treillis. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. L est modulaire ;
2. L ne contient pas N_5 comme sous-treillis ;
3. pour tous $x, y, z \in L$,

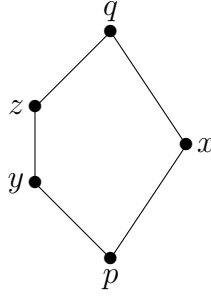
$$\left. \begin{array}{l} x \vee y = x \vee z \\ x \wedge y = x \wedge z \\ y \leq z \end{array} \right\} \Rightarrow y = z.$$

Démonstration.

1 $\Rightarrow$ 2 : Procédons par l'absurde et supposons que L contient N_5 comme sous-treillis. Alors dans L on peut trouver la situation représentée ci-dessous. On a alors $b \geq a$ et $b \wedge (c \vee a) = b$, alors que $(b \wedge c) \vee a = a$, d'où une contradiction.



2 $\Rightarrow$ 3 : Soient $x, y, z \in L$ tels que $x \vee y = x \vee z$, $x \wedge y = x \wedge z$ et $y \leq z$. Notons $p = x \vee y = x \vee z$ et $q = x \wedge y = x \wedge z$. Procédons par l'absurde et supposons que $y < z$. Alors dans L , on peut trouver



ce qui est absurde.

3 $\Rightarrow$ 1 : Soient $x, y, z \in L$ tels que $x \leq z$. On veut montrer que $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Posons $a = x \vee (y \wedge z)$ et $b = (x \vee y) \wedge z$. Vu la remarque 1.2.34, on a $a \leq b$, donc $a \wedge y \leq b \wedge y$ et $a \vee y \leq b \vee y$. De plus, on a

$$a \wedge y = [x \vee (y \wedge z)] \wedge y \geq [x \vee (y \wedge z)] \wedge (y \wedge z) = y \wedge z$$

par les lois d'absorption et

$$b \wedge y = [(x \vee y) \wedge z] \wedge y \leq y \wedge z.$$

Donc $a \wedge y = b \wedge y$. On a aussi

$$a \vee y = [x \vee (y \wedge z)] \vee y \geq x \vee y$$

et par les lois d'absorption

$$b \vee y = [(x \vee y) \wedge z] \vee y \leq [(x \vee y) \wedge z] \vee (x \vee y) = x \vee y,$$

donc $a \vee y = b \vee y$. Vu l'hypothèse, on a $a = b$, ce qui permet de conclure. ■

En particulier, notons que N_5 n'est pas modulaire.

Voici une autre caractérisation des treillis distributifs.

Proposition 1.2.38. *Soit L un treillis. Alors L est distributif si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in L$, on a*

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

Démonstration. Supposons que L est distributif et soient $x, y, z \in L$. On a

$$\begin{aligned}
 (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) &= [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee (z \wedge x) && \text{(par associativité)} \\
 &= [y \wedge (x \vee z)] \vee (z \wedge x) && \text{(par distributivité)} \\
 &= [y \vee (z \wedge x)] \wedge [(x \vee z) \vee (z \vee x)] && \text{(par distributivité)} \\
 &= (y \vee z) \wedge (y \vee x) \wedge (x \vee z) && \text{(par distributivité)}.
 \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que pour tous $x, y, z \in L$, on a

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

Alors L est modulaire. En effet, si $x, y, z \in L$ sont tels que $x \geq z$, alors

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee z = (x \wedge y) \vee z$$

et

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x = (y \vee z) \wedge x$$

et donc $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$.

On a

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] && \text{(vu les lois d'absorption)} \\ &= x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] && \text{(par hypothèse)} \\ &= x \wedge ((y \wedge z) \vee [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)]) && \text{(par associativité)} \\ &= [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z) \wedge x && \text{(par commutativité)} \\ &= [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z \wedge x) && \text{(car } L \text{ est modulaire)} \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \end{aligned}$$

car $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leq x$ par les lois d'absorption. Donc L est distributif. ■

La caractérisation suivante des treillis distributifs est très souvent énoncée sans démonstration. C'est pourquoi nous en donnons une preuve ici.

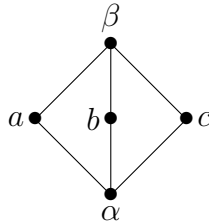
Proposition 1.2.39. *Soit L un treillis. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. L est distributif;
2. L ne contient ni M_3 , ni N_5 comme sous-treillis;
3. pour tous $x, y, z \in L$,

$$\left. \begin{array}{l} x \vee y = x \vee z \\ x \wedge y = x \wedge z \end{array} \right\} \Rightarrow y = z.$$

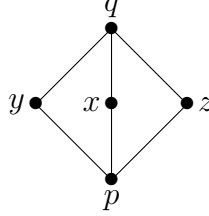
Démonstration.

1 $\Rightarrow$ 2 : Supposons que L est distributif. Montrons tout d'abord que M_3 n'est pas un sous-treillis de L . Procédons par l'absurde et supposons que L contient M_3 comme sous-treillis. Alors la situation représentée ci-dessous apparaît dans L . Dans ce cas, on a $a \wedge (b \vee c) = a \wedge \beta = a$ et $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \alpha \vee \alpha = \alpha$, d'où une contradiction.



De plus, comme L est distributif, il est modulaire et par la proposition 1.2.37, donc N_5 n'en est pas un sous-treillis.

$2 \Rightarrow 3$: Soient $x, y, z \in L$ tels que $x \vee y = x \vee z$ et $x \wedge y = x \wedge z$ et notons $p = x \wedge y = x \wedge z$ et $q = x \vee y = x \vee z$. Procédons par l'absurde et supposons que $y \neq z$. Alors dans L , on peut trouver



En effet, on a $x \neq y$ car sinon, $y = y \vee z$, d'où $y \geq z$ et $y = y \wedge z$, d'où $y \leq z$ et $y = z$. De même, on a $x \neq z$. On en tire une contradiction.

$3 \Rightarrow 1$: Supposons la troisième assertion vérifiée et soient $x, y, z \in L$. Montrons que

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Vu la proposition 1.2.37, il est clair que L est modulaire. Posons

$$a := (x \wedge y) \vee [z \wedge (x \vee y)] \text{ et } b := (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)].$$

On a

$$a \vee y = y \vee (x \wedge y) \vee [z \wedge (x \vee y)] = y \vee [z \wedge (x \vee y)] = (y \vee z) \wedge (x \vee y)$$

car $y \leq x \vee y$ et on a

$$b \vee y = y \vee (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)] = y \vee [x \wedge (y \vee z)] = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$$

car $y \leq y \vee z$. On en tire que $a \vee y = b \vee y$.

Vu que L est modulaire, que $x \wedge y \leq x \vee y$ et que $y \wedge z \leq y \vee z$, on a

$$a = [(x \wedge y) \vee z] \wedge (x \vee y) \text{ et } b = [(y \wedge z) \vee x] \wedge (y \vee z).$$

On trouve alors

$$a \wedge y = [(x \wedge y) \vee z] \wedge (x \vee y) \wedge y = [(x \wedge y) \vee z] \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y)$$

car $x \wedge y \leq y$. On a aussi

$$b \wedge y = [(y \wedge z) \vee x] \wedge (y \vee z) \wedge y = [(y \wedge z) \vee x] \wedge y = (y \wedge z) \vee (x \wedge y)$$

car $y \wedge z \leq y$. On en tire que $a \wedge y = b \wedge y$. Par hypothèse, on a alors $a = b$. Donc $a \wedge x = b \wedge x$. Or,

$$a \wedge x = [(x \wedge y) \vee z] \wedge (x \vee y) \wedge x = [(x \wedge y) \vee z] \wedge x = (x \wedge y) \vee (z \wedge x)$$

et

$$b \wedge x = x \wedge [(y \wedge z) \vee x] \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z).$$

Au final, on a

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

donc L est distributif. ■

1.2.4 Complétion et complémentation

La notion de treillis complété est essentielle dans les algèbres de Boole. Le concept de complétion est quant à lui une propriété supplémentaire que possèdent certains treillis, dits treillis complets. Nous donnons ici quelques propriétés basiques.

Définitions 1.2.40. Un ensemble ordonné $(L, \leq)$ est un *sup.demi-treillis complet* si pour toute partie $E \subseteq L$, $\vee E$ existe. On dira qu'il s'agit d'un *inf.demi-treillis complet* si pour toute partie $E \subseteq L$, $\wedge E$ existe.

Si $(L, \leq)$ est un sup.demi-treillis complet (resp. un inf.demi-treillis complet), il est clair que c'est un sup.demi-treillis (resp. un inf.demi-treillis) puisque pour tous $x, y \in L$, on a $\{x, y\} \subseteq L$.

Remarque 1.2.41. Si L est un sup.demi-treillis complet, alors L possède un maximum, $1 = \vee L$, et un minimum, $0 = \vee \emptyset$. De même, si M est un inf.demi-treillis complet, alors M possède un maximum, $1 = \wedge \emptyset$, et un minimum, $0 = \wedge M$. On peut donc dire que tout demi-treillis complet est borné.

Proposition 1.2.42. Si $(L, \leq)$ est un sup.demi-treillis complet, toute partie $E \subseteq L$ possède une borne inférieure.

Démonstration. Soit $E \subseteq L$. Si $E = \emptyset$, alors $\wedge E = 1$. Sinon, posons

$$M := \{m \in L \mid m \leq e \forall e \in E\}.$$

Remarquons que $M \neq \emptyset$ puisque $0 \in M$. Posons $a := \vee M$ et montrons que $a = \wedge E$. Soit $e \in E$. Alors $e \geq m \forall m \in M$ par définition de M , donc e est un majorant de M , d'où $e \geq a$. On en tire que a est un minorant de E puisqu'on a choisi un $e \in E$ quelconque. Si b est un autre minorant de E , alors $b \leq e \forall e \in E$, donc $b \in M$ et $b \leq \vee M = a$, d'où la conclusion. ■

On démontre de même la proposition suivante.

Proposition 1.2.43. Si $(L, \leq)$ est un inf.demi-treillis complet, toute partie $E \subseteq L$ possède une borne supérieure.

Définition 1.2.44. Un ensemble ordonné $(L, \leq)$ est un *treillis complet* si pour toute partie $E \subseteq L$, $\vee E$ et $\wedge E$ existent.

Un treillis complet est évidemment un treillis. De plus, tout treillis complet est borné.

La proposition suivante permet de diminuer le nombre de vérifications nécessaires pour savoir si un treillis est complet.

Proposition 1.2.45. *Soit $(L, \leq)$ un ensemble ordonné. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L est un sup.demi-treillis complet;*
2. *L est un inf.demi-treillis complet;*
3. *L est un treillis complet.*

Démonstration. Cela découle directement des propositions précédentes. ■

Exemples 1.2.46. Si X est un ensemble, alors l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est un treillis complet. Nous montrons ci-dessous que tout treillis fini est également complet. Par contre, le treillis $(\mathbb{N}, \leq)$ n'est pas complet car $\bigvee \mathbb{N}$ n'existe pas.

Proposition 1.2.47. *Soit $(L, \leq)$ un treillis et soit E une partie finie de L . Alors $\bigvee E$ et $\bigwedge E$ existent.*

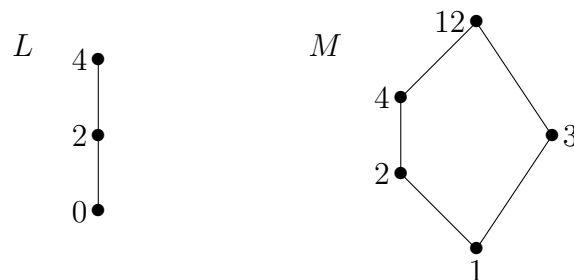
Démonstration. Il suffit de procéder de proche en proche, puisque dans un treillis, toute paire d'éléments admet un supremum et un infimum. ■

Corollaire 1.2.48. *Tout treillis fini est complet.*

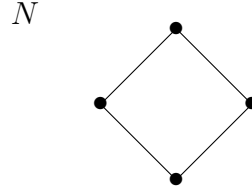
Passons au concept de complément d'un élément d'un treillis. Il existe deux notions de complément : complément et complément relatif. Toutefois, nous ne développons ici que le deuxième. Le lecteur intéressé par la première pourra consulter [20] par exemple.

Définition 1.2.49. Soient $(L, \leq)$ un treillis borné et $x \in L$. Un élément $y \in L$ est un *complément* de x dans L s'il est tel que $x \wedge y = 0$ et $x \vee y = 1$. Si tout élément de L admet au moins un complément, le treillis borné est dit *complémenté*. Un élément $x \in L$ peut admettre plusieurs compléments. Si pour tout $x \in L$, x admet un et un seul complément, on dit que L est *unicomplémenté*.

Exemples 1.2.50. Considérons le treillis $L = \{0, 2, 4\}$ muni de l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ représenté ci-dessous. Les éléments 0 et 4 sont complément l'un de l'autre puisque $\min(0, 4) = 0$ et $\max(0, 4) = 4$, mais l'élément 2 ne possède pas de complément.



Si on considère à présent le treillis $M = \{1, 2, 3, 4, 12\}$, que l'on munit de la relation de divisibilité $|$, représenté ci-dessus, les éléments 1 et 12 sont complément l'un de l'autre, les éléments 2 et 4 ont un unique complément : l'élément 3. L'élément 3 possède quant à lui deux compléments : 2 et 4. Le treillis L n'est donc pas complété, tandis que le treillis M l'est. Donnons un exemple de treillis unicomplémenté. Il suffit de considérer le treillis N représenté ci-dessous.



Notations. Si un élément x d'un treillis borné L admet un unique complément, ce dernier sera noté x' , x^c , $\neg x$ ou encore $-x$.

Remarquons que dans un treillis borné, le minimum 0 et le maximum 1 sont toujours compléments l'un de l'autre. De plus, ils n'admettent aucun autre complément.

Proposition 1.2.51. *Dans un treillis distributif borné, tout élément possède au plus un complément.*

Démonstration. Soit L un treillis distributif borné et $x \in L$. Supposons disposer de deux compléments de x dans L : y et z . On a

$$\left. \begin{array}{l} x \vee y = 1 = x \vee z \\ x \wedge y = 0 = x \wedge z \end{array} \right\} \Rightarrow y = z,$$

par la proposition 1.2.39. ■

1.2.5 Idéal et filtre

Dans un treillis, les filtres et les idéaux jouent un rôle essentiel, notamment pour la dualité de Stone développée dans le prochain chapitre. Nous donnons ici un certain nombre de particularités de ces ensembles.

Définition 1.2.52. Soit L un sup.demi-treillis. Un *idéal* de L est une partie non vide I de L décroissante et stable pour $\vee$ -fini, i.e. une partie I non vide telle que

- $i \vee j \in I$ pour tous $i, j \in I$;
- pour tous $x \in L$, $i \in I$ tels que $x \leq i$, on a $x \in I$.

L'ensemble des idéaux de L est noté $\text{Id}(L)$.

En particulier, on voit qu'un idéal d'un sup.demi-treillis est un sous-sup.demi-treillis.

En passant à l'ordre dual, on peut définir dans un inf.demi-treillis une notion similaire à celle d'idéal des sup.demi-treillis : les filtres.

Définition 1.2.53. Soit L un inf.demi-treillis. Un *filtre* de L est une partie non vide F de L croissante et stable pour $\wedge$ -fini, i.e. une partie F non vide telle que

- $f \wedge g \in F$ pour tous $f, g \in F$;
- pour tous $x \in L$, $f \in F$ tels que $x \geq f$, on a $x \in F$.

L'ensemble des filtres de L est noté $\text{Ft}(L)$.

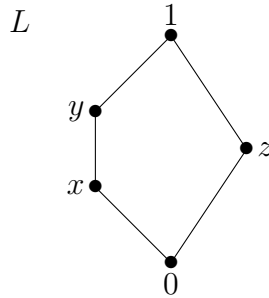
En particulier, un filtre d'un inf.demi-treillis est un sous-inf.demi-treillis.

Comme un treillis est un sup.demi-treillis et un inf.demi-treillis, les notions d'idéal et de filtre ont bien évidemment du sens dans un treillis. De plus, un treillis peut posséder simultanément des idéaux et des filtres.

Notons que dans un treillis, tout idéal et tout filtre sont des sous-treillis. En effet, on sait déjà qu'il s'agit de sous-sup.demi-treillis et sous-inf.demi-treillis respectivement. De plus, si I est un idéal d'un treillis L , alors si $i, j \in I$, on a $i \wedge j \leq i$ donc $i \wedge j \in I$. On procède de même pour les filtres.

Remarque 1.2.54. Dans le cas d'un treillis borné (par 0 et 1), on peut remplacer la condition « non vide » par « contenant 0 » dans le cas d'un idéal, vu sa décroissance, et par « contenant 1 » dans le cas d'un filtre, comme un filtre est un ensemble croissant.

Exemple 1.2.55. Considérons le treillis L représenté ci-dessous.



Les idéaux de L sont

$$\text{Id}(L) = \{\{0\}, \{0, x\}, \{0, x, y\}, \{0, z\}, L\}$$

et les filtres sont

$$\text{Ft}(L) = \{\{1\}, \{1, y\}, \{1, y, x\}, \{1, z\}, L\}.$$

Proposition 1.2.56. Soit L un treillis borné. Alors $\text{Id}(L)$ muni de l'inclusion inverse (i.e. $(\text{Id}(L), \supseteq)^\delta$) est un treillis borné distributif.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que puisqu'on munit $\text{Id}(L)$ de l'inclusion inverse, on a $I \leq J$ si, et seulement si, $I \supseteq J$ où I et J sont des idéaux de L .

Soient I, J deux idéaux de L . Montrons que $I \vee J (= I \cap J$ puisque $\text{Id}(L) \subseteq \mathcal{P}(L)$, qu'on utilise l'ordre induit et qu'on travaille avec l'inclusion inverse) est un idéal de L . On a

- $I \cap J \neq \emptyset$ puisque $0 \in I \cap J$;
- si $i, j \in I \cap J$, on a $i, j \in I$, donc $i \vee j \in I$. De même, on a $i \vee j \in J$. Au total, on a $i \vee j \in I \cap J$;
- si $i \in I \cap J$, $x \in L$ avec $x \leq i$, alors on a $i \in I$ et $i \in J$. Comme I et J sont des idéaux, on a $x \in I$ et $x \in J$. On en tire que $x \in I \cap J$.

De plus, cet idéal est borné inférieurement par $\{0\}$ et supérieurement par L . Comme le treillis $(\mathcal{P}(L), \supseteq)$ est distributif et que $(\text{Id}(L), \subseteq)^\delta$ en est un sous-treillis, ce dernier est évidemment distributif. ■

On a évidemment la même proposition concernant les filtres.

Proposition 1.2.57. *Soit L un treillis borné. Alors $\text{Ft}(L)$ muni de l'inclusion inverse (i.e. $(\text{Ft}(L), \subseteq)^\delta$) est un treillis borné distributif.*

Si L est un sup.demi-treillis et si M est un inf.demi-treillis, on a toujours $L \in \text{Id}(L)$ et $M \in \text{Ft}(M)$. L'ensemble L (resp. M) est donc un idéal (resp. un filtre) particulier. La définition suivante va permettre de le distinguer des autres idéaux (resp. filtres).

Définition 1.2.58. Soit L est sup.demi-treillis (resp. un inf.demi-treillis). L'idéal (resp. le filtre) L est dit *impropre*. Tout idéal (resp. filtre) différent de L est appelé *idéal propre* (resp. *filtre propre*).

Remarque 1.2.59. Dans le cas de demi-treillis bornés, un idéal propre est un idéal ne contenant pas 1 et un filtre propre est un filtre ne contenant pas 0, puisqu'un idéal est décroissant et qu'un filtre est croissant.

Tout comme en théorie des anneaux, on dispose de la notion d'idéal engendré par une partie d'un sup.demi-treillis. Dans le contexte présent, on peut aussi définir un filtre engendré par une partie d'un inf.demi-treillis.

Définition 1.2.60. Soient L un sup.demi-treillis et E une partie de L . L'*idéal engendré par E* , noté $\langle E \rangle_L^{\text{id}}$, est le plus petit idéal de L contenant E .

On a une caractérisation d'un idéal engendré par une partie non vide d'un sup.demi-treillis, comme le montre la prochaine proposition.

Proposition 1.2.61. *Soient L un sup.demi-treillis et E une partie non vide de L . Alors*

$$\langle E \rangle_L^{\text{id}} = \{x \in L \mid \exists e_1, \dots, e_n \in E, (n \in \mathbb{N}) : x \leq e_1 \vee \dots \vee e_n\}.$$

Démonstration. Posons

$$I := \{x \in L \mid \exists e_1, \dots, e_n \in E, (n \in \mathbb{N}) : x \leq e_1 \vee \dots \vee e_n\}.$$

Il est clair que $E \subseteq I$ et que I est un idéal de L . Montrons à présent que tout idéal de L contenant E contient I . Soit J un idéal de L contenant E . Soit $x \in I$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $e_1, \dots, e_n \in E$ tels que $x \leq e_1 \vee \dots \vee e_n$. Comme $E \subseteq J$, en particulier $e_1 \vee \dots \vee e_n \in J$, et donc $x \in J$, vu que J est un idéal. Donc $I \subseteq J$. ■

Remarque 1.2.62. Dans le cas particulier où E est réduit à un seul élément $x \in L$ (avec L un sup.demi-treillis), on a $\langle E \rangle_L^{id} = x \downarrow$.

En passant à l'ordre dual, on obtient des résultats similaires pour les filtres.

Définition 1.2.63. Soient L un inf.demi-treillis et E une partie de L . Le *filtre engendré par E* , noté $\langle E \rangle_L^{ft}$, est le plus petit filtre de L contenant E .

On dispose également d'une caractérisation des filtres engendrés par une partie non vide d'un inf.demi-treillis.

Proposition 1.2.64. Soient L un inf.demi-treillis et E une partie non vide de L . Alors

$$\langle E \rangle_L^{ft} = \{x \in L \mid \exists e_1, \dots, e_n \in E, (n \in \mathbb{N}) : x \geq e_1 \wedge \dots \wedge e_n\}.$$

Remarque 1.2.65. Dans le cas particulier où E est réduit à un seul élément $x \in L$ (avec L un inf.demi-treillis), on a $\langle E \rangle_L^{ft} = x \uparrow$.

Proposition 1.2.66. Soient L un treillis borné, J une collection d'indices et $(I_j)_{j \in J}$ une famille d'idéaux de L . Alors $\bigcap_{j \in J} I_j$ est un idéal de L .

Démonstration. Comme $0 \in I_j \forall j \in J$, on a $0 \in \bigcap_{j \in J} I_j$, donc cet ensemble est non vide. De plus, soient $x \in L$ et $a \in \bigcap_{j \in J} I_j$ tels que $x \leq a$. Alors $a \in I_j \forall j \in J$, donc $x \in I_j \forall j \in J$ et $x \in \bigcap_{j \in J} I_j$. Enfin, soient $a, b \in \bigcap_{j \in J} I_j$. Alors $a, b \in I_j \forall j \in J$. Donc $a \vee b \in I_j \forall j \in J$, d'où $a \vee b \in \bigcap_{j \in J} I_j$, ce qui permet de conclure. ■

On obtient de la même façon la proposition suivante.

Proposition 1.2.67. Soient L un treillis borné, I une collection d'indices et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de filtres de L . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un filtre de L .

Remarque 1.2.68. Le complément (au sens ensembliste) d'un idéal n'est pas nécessairement un filtre. C'est le cas lorsqu'on dispose de conditions supplémentaires comme le montre la proposition 1.2.70 ci-dessous. Cependant, le complément (au sens ensembliste) d'un idéal est tout de même un ensemble croissant. En effet, soit I un idéal d'un treillis L . Soient $f \in L \setminus I$ et $g \geq f$. Supposons que $g \notin L \setminus I$. Alors $g \in I$. Donc $f \in I$ comme un idéal est décroissant. D'où une contradiction. De même, le complément ensembliste d'un filtre n'est a priori pas un idéal, mais il s'agit tout de même d'un ensemble décroissant.

Définitions 1.2.69. Soit L un treillis. Un idéal I de L est *premier* si pour tous idéaux J, K de L tels que $I \supseteq J \cap K$, on a $I \supseteq J$ ou $I \supseteq K$.

Un filtre F de L est *premier* si pour tous $G, H \in \text{Ft}(L)$ tels que $F \subseteq G \cup H$, on a $F \subseteq G$ ou $F \subseteq H$.

Rappelons que si L est un treillis et si E, F en sont deux parties, on pose

$$E \vee F := \{e \vee f \mid e \in E, f \in F\}.$$

Proposition 1.2.70. *Soient L un treillis distributif borné et I un idéal propre de L . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $L \setminus I$ est un filtre premier;
2. $L \setminus I$ est un filtre;
3. $L \setminus I$ est fermé pour $\wedge$ -fini;
4. $L \setminus I$ est $\downarrow$ -dirigé;
5. I est premier.

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$: Un filtre premier est bien évidemment un filtre.

$2 \Rightarrow 3$: Etre fermé pour $\wedge$ -fini fait partie de la définition d'un filtre.

$3 \Rightarrow 4$: Soient $x, y \in L \setminus I$. Alors $x \wedge y \in L \setminus I$ et $x \wedge y \leq x, x \wedge y \leq y$. Donc $L \setminus I$ est $\downarrow$ -dirigé.

$4 \Rightarrow 5$: Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe des idéaux J et K tels que $I \supseteq J \cap K$, $I \not\supseteq J$ et $I \not\supseteq K$. Alors il existe $j \in J \setminus I \subseteq L \setminus I$ et $k \in K \setminus I \subseteq L \setminus I$. Vu que $L \setminus I$ est $\downarrow$ -dirigé, il existe $l \in L \setminus I$ tel que $l \leq j, l \leq k$. Donc $l \in J$ et $l \in K$. Autrement dit, $l \in J \cap K \subseteq I$ et $l \in L \setminus I$, d'où une contradiction.

$5 \Rightarrow 1$: Supposons que I est un idéal premier. Vu la remarque 1.2.68, on sait que $L \setminus I$ est croissant. Montrons qu'il est également fermé pour $\wedge$ -fini. Supposons qu'il existe $x, y \in L \setminus I$ tels que $x \wedge y \in I$. Posons

$$J := I \vee x \downarrow \quad \text{et} \quad K := I \vee y \downarrow.$$

Montrons que J est un idéal de L . On a $0 \in I$ et $0 \leq x$ donc $0 = 0 \vee 0 \in J$. De plus, soient $i, j \in J$. Alors il existe $k, l \in I$ et $z, t \in x \downarrow$ tels que $i = k \vee z$ et $j = l \vee t$. Donc $i \vee j = k \vee z \vee l \vee t = (k \vee l) \vee (z \vee t)$ et comme I est un idéal, on a $k \vee l \in I$. De plus, comme $z \leq x$ et $t \leq x$, on a $z \vee t \leq x$ d'où $z \vee t \in x \downarrow$. On en tire que $i \vee j \in J$. Enfin, si $j \in J$ et $z \in L$ sont tels que $z \leq j$, alors il existe $k \in I$ et $t \in x \downarrow$ avec $j = k \vee t$. On en tire que $z \leq k \vee t$. Autrement dit, on a

$$z = z \wedge (k \vee t) = (z \wedge k) \vee (z \wedge t),$$

puisque L est un treillis distributif. De plus, I est un idéal et $z \wedge k \leq k$ donc $z \wedge k \in I$. On a aussi $z \wedge t \leq t \leq x$. On en tire que $z \in J$. On a donc prouvé que J est un idéal. De la même façon, K est un idéal de L .

Soit $\alpha \in J \cap K$, alors il existe $i, j \in I$ tels que $\alpha \leq i \vee x$ et $\alpha \leq j \vee y$. On en tire que

$$\alpha \leq (i \vee x) \wedge (j \vee y) = (i \wedge j) \vee (x \wedge j) \vee (i \wedge y) \vee (x \wedge y).$$

Posons $k := i \vee j$. Alors $\alpha \leq k \vee (x \wedge y) \in I$. Donc $\alpha \in I$. On en tire que $I \supseteq J \cap K$. Comme I est premier, nous avons deux cas possibles : $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$. Dans le premier

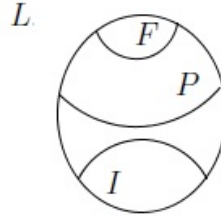
cas, on a $x \in I$. Dans le deuxième cas, on a $y \in I$. Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction. Enfin, I étant propre, $L \setminus I$ est non vide. On en tire que $L \setminus I$ est un filtre. Montrons à présent que $L \setminus I$ est premier. Jusqu'ici, nous avons montré que tout idéal propre d'un treillis distributif borné est premier si, et seulement si, son complémentaire au sens ensembliste est un filtre. En passant à la propriété duale, on sait qu'un filtre propre est premier si, et seulement si, son complémentaire au sens ensembliste est un idéal. Comme dans notre cas $L \setminus I$ est un filtre (forcément propre puisque par définition un idéal est non vide) vu ce qui précède et comme I est un idéal, $L \setminus I$ est premier. ■

La proposition qui suit est équivalente à la précédente.

Proposition 1.2.71. *Soient L un treillis distributif borné et F un filtre propre de L . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $L \setminus F$ est un idéal premier ;
2. $L \setminus F$ est un idéal ;
3. $L \setminus F$ est fermé pour $\vee$ -fini ;
4. $L \setminus F$ est $\uparrow$ -dirigé ;
5. F est premier.

Le théorème qui suit nous sera particulièrement utile dans la suite de ce travail. Il s'agit du théorème de Stone. Nous utiliserons cependant la version booléenne de ce théorème, qui est établie dans le prochain chapitre. Le théorème de Stone nous montre que lorsqu'on dispose d'un filtre F et d'un idéal I disjoints dans un treillis distributif borné L , on peut trouver un filtre premier P contenant le filtre F de départ et qui reste disjoint de l'idéal I . Cette situation peut se représenter comme suit :



Théorème 1.2.72 (Théorème de Stone (AC)). *Soit L un treillis distributif borné. Si I est un idéal et F un filtre de L tels que $I \cap F = \emptyset$, alors il existe un filtre premier P tel que $F \subseteq P$ et $P \cap I = \emptyset$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{G} = \{G \in \text{Ft}(L) \mid G \supseteq F, G \cap I = \emptyset\}$$

ordonné par inclusion. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient F . Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{G}$. Si cette chaîne est vide, tout élément de $\mathcal{G}$ majore évidemment $\mathcal{C}$. Sinon, posons

$$T := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Il est alors clair que pour tout $C \in \mathcal{C}$, on a $C \subseteq T$. Montrons que $T \in \mathcal{G}$. On a

- $T \supseteq F$ car $F \subseteq C \forall C \in \mathcal{C}$;
- $T \cap I = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap I = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (C \cap I) = \emptyset$;
- T est un filtre, car une union d'ensembles croissants est croissante et si $x, y \in T$, alors il existe $C_1 \in \mathcal{C}, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $x \in C_1$ et $y \in C_2$. Or, comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, on a $C_1 \subseteq C_2$ ou $C_2 \subseteq C_1$. Dans le premier cas, on a $x, y \in C_2$, donc $x \wedge y \in C_2 \subseteq T$. Dans le deuxième cas, on a $x, y \in C_1$, donc $x \wedge y \in C_1 \subseteq T$. Au final, on a $x \wedge y \in T$.

Par le lemme de Zorn, on sait donc qu'il existe un filtre maximal P tel que $P \supseteq F$ et $P \cap I = \emptyset$. En particulier, P est un filtre propre. Montrons qu'il s'agit d'un filtre premier. Supposons que P n'est pas premier. Alors vu la proposition 1.2.71, $L \setminus P$ n'est pas un idéal. Dès lors, il existe $x, y \in L \setminus P$ tels que $x \vee y \in P$, puisque $L \setminus P$ est non vide et décroissant. Considérons à présent les filtres

$$G := \langle P \cup \{x\} \rangle_L^{ft} \quad \text{et} \quad H := \langle P \cup \{y\} \rangle_L^{ft}.$$

Le filtre P est inclus strictement dans ces deux filtres. Par maximalité de P , on a $G \cap I \neq \emptyset$ et $H \cap I \neq \emptyset$. Soient donc $i, j \in I$ tels que $i \in G$ et $j \in H$. Vu la caractérisation des filtres engendrés par une partie d'un treillis (proposition 1.2.64) et comme les filtres sont fermés pour $\wedge$ -fini, il existe $g, h \in P$ tels que

$$i \geq g \wedge x \quad \text{et} \quad j \geq h \wedge y.$$

En se rappelant que L est distributif, on trouve

$$I \ni i \vee j \geq (g \wedge x) \vee (h \wedge y) = (g \vee h) \wedge (g \vee y) \wedge (x \vee h) \wedge (x \vee y).$$

Or, $g \vee h \geq g$, $g \vee y \geq g$, $x \vee h \geq h$, donc $g \vee h, g \vee y, x \vee h \in P$ et comme $x \vee y \in P$ qui est un filtre, on a $(g \vee h) \wedge (g \vee y) \wedge (x \vee h) \wedge (x \vee y) \in P$. On en tire que $i \vee j \in P$. Comme $I \cap P = \emptyset$, on a une contradiction. ■

Corollaire 1.2.73 (AC). *Soit L un treillis distributif borné. Si I est un idéal et F un filtre de L tels que $I \cap F = \emptyset$, alors il existe un idéal premier P tel que $I \subseteq P$ et $P \cap F = \emptyset$.*

Démonstration. Cela découle directement du théorème précédent et de la proposition 1.2.70. ■

Nous terminons ce chapitre en démontrant l'existence d'idéaux et de filtres maximaux pour l'inclusion et en expliquant en quoi ces notions sont différentes des idéaux et filtres premiers. Les idéaux maximaux et les ultrafiltres seront utilisés dans la dualité de Stone dans le chapitre 2.

Définitions 1.2.74. Soit L un sup.demi-treillis borné. Un idéal *maximal* de L est un idéal propre maximal pour l'inclusion (parmi les idéaux propres). L'ensemble des idéaux maximaux de L est noté $\text{Spec}(L)$.

Soit M un inf.demi-treillis borné. Un filtre *maximal*, aussi appelé *ultrafiltre*, de M est un filtre propre maximal pour l'inclusion (parmi les filtres propres). L'ensemble des ultrafiltres de M est noté $\text{Ult}(M)$.

L'existence d'idéaux maximaux et d'ultrafiltres se démontre à l'aide du lemme de Zorn. Nous devons supposer que nos demi-treillis bornés contiennent au moins deux éléments (autrement dit que $0 \neq 1$) afin d'assurer l'existence d'idéaux et de filtres propres.

Proposition 1.2.75 (AC). *Soit L un sup.demi-treillis borné contenant au moins deux éléments et soit I un idéal propre de L . Alors I est inclus dans un idéal maximal.*

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{J} = \{J \in \text{Id}(L) \mid J \text{ propre}, J \supseteq I\}$$

ordonné par inclusion. Comme I est un idéal propre inclus dans lui-même, cet ensemble est non vide. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{J}$. Si $\mathcal{C}$ est vide, tout élément de $\mathcal{J}$ majore $\mathcal{C}$. Supposons $\mathcal{C}$ non vide et posons

$$T := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Il est clair que pour tout $C \in \mathcal{C}$, on a $C \subseteq T$. De plus $T \in \mathcal{J}$. En effet,

- T est un idéal car
 - T est non vide car $\mathcal{C}$ est non vide,
 - si $s, t \in T$, alors il existe $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $s \in C_1, t \in C_2$. Comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, on a $C_1 \subseteq C_2$ ou $C_2 \subseteq C_1$. Dans le premier cas, on a $s, t \in C_2$ donc $s \vee t \in C_2$. Dans le deuxième cas, on a $s, t \in C_1$, donc $s \vee t \in C_1$. Dans tous les cas, on voit que $s \vee t \in T$,
 - si $x \in L, t \in T$ tels que $x \leq t$, alors il existe $C \in \mathcal{C}$ avec $t \in C$. Comme C est un idéal, on a $x \in C$ donc $x \in T$;
- T est propre car $1 \notin C \forall C \in \mathcal{C}$, donc $1 \notin T$;
- T contient I car $I \subseteq C$ pour tout $C \in \mathcal{C}$.

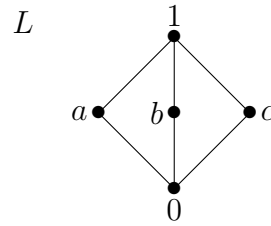
On peut donc conclure grâce au lemme de Zorn. ■

Comme d'habitude, par une démonstration similaire à la précédente, nous avons une proposition analogue pour les filtres propres dans un inf.demi-treillis borné.

Proposition 1.2.76 (AC). *Soit L un inf.demi-treillis borné contenant au moins deux éléments et soit F un filtre propre de L . Alors F est inclus dans un ultrafiltre.*

Dans un treillis, les notions d'idéal premier et d'idéal maximal (resp. de filtre premier et d'ultrafiltre) sont trivialement différentes, puisque le treillis lui-même est un idéal (resp. un filtre) premier, mais impropre donc non maximal. On peut toutefois aller plus loin en affirmant qu'en général, dans un treillis, l'ensemble des idéaux propres premiers (resp. des filtres propres premiers) diffère de l'ensemble des idéaux maximaux (resp. des ultrafiltres). Il suffit de considérer l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.2.77. Soit L le treillis représenté ci-dessous.

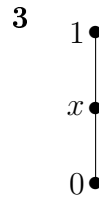


Posons

$$I := \{0, a\}, \quad J := \{0, b\} \quad \text{et} \quad K := \{0, c\}.$$

Il s'agit trivialement d'idéaux maximaux de L . De plus, on a $I \supseteq J \cap K = \{0\}$. Or, il est clair que $I \not\supseteq J$ et $I \not\supseteq K$. Donc I est maximal, mais pas premier. De même, si on considère l'ultrafiltre $F := \{a, 1\}$, son complémentaire est l'ensemble $\{0, b, c\}$ qui n'est pas fermé pour $\vee$ -fini puisque $b \vee c = 1 \notin L \setminus F$. Par la proposition 1.2.71, on voit que F n'est pas premier.

Considérons à présent le treillis $\mathbf{3}$ à trois éléments, représenté ci-dessous.



Les idéaux de $\mathbf{3}$ sont $\{0\}$, $\{0, x\}$ et $\mathbf{3}$ lui-même. Il est clair que $\{0\}$ n'est pas maximal. De plus, on a

$$\{0\} \cap \{0, x\} = \{0\}, \quad \{0\} \cap \mathbf{3} = \{0\} \quad \text{et} \quad \{0, x\} \cap \mathbf{3} = \{0, x\} \not\subseteq \{0\}.$$

On voit clairement que $\{0\}$ est un idéal premier.

On verra dans le prochain chapitre des treillis particuliers où les idéaux maximaux (resp. les ultrafiltres) sont exactement les idéaux propres premiers (resp. les filtres propres premiers).

Chapitre 2

Algèbre et espace de Boole

Dans ce chapitre, nous commençons par étudier les algèbres de Boole et leurs propriétés. Dans un second temps, nous définissons les espaces de Boole et établissons la dualité de Stone entre les algèbres de Boole et les espaces de Boole, avant de conclure par la dualité des multiopérateurs.

2.1 Algèbre de Boole

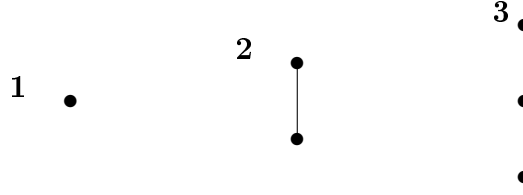
Les algèbres de Boole sont des treillis particuliers. Il est donc évident que nous retrouvons ici les notions de sous-structure, d'homomorphisme, ou encore de filtre et d'idéal. Ces éléments définis dans les treillis possèdent des propriétés supplémentaires lorsque le treillis est une algèbre de Boole. Nous les développons ici. Enfin, nous écrivons également certaines propriétés en « version booléenne », car cette version sera privilégiée dans la suite de ce travail.

2.1.1 Premières définitions et propriétés

Définition 2.1.1. Une *algèbre de Boole* (ou *algèbre booléenne*) est un treillis distributif borné et complémenté.

Remarque 2.1.2. Puisque dans une algèbre de Boole, tout élément possède un complément, au vu de la proposition 1.2.51, il est évident que ce complément est unique.

Exemples 2.1.3. Le treillis **1** à un seul élément est une algèbre de Boole. Elle est appelée *algèbre de Boole triviale*. Le treillis **2** qui comporte deux éléments est une algèbre de Boole, où chaque élément est le complément de l'autre. Par contre, le treillis **3** à trois éléments n'est pas une algèbre de Boole, puisqu'un des éléments n'a pas de complément. Il s'agit de l'élément qui couvre 0 et couvert par 1. Ces trois treillis sont représentés ci-dessous.



Un autre exemple est donné par les parties d'un ensemble, qu'on ordonne par inclusion, ou encore les ouverts-fermés d'un espace topologique.

Un exemple important est celui des ouverts réguliers d'un espace topologique.

Définition 2.1.4. Soit X un espace topologique. Un *ouvert régulier* est un ouvert O égal à l'intérieur de son adhérence (i.e. $O^{-\circ} = O$). On note $RO(X)$ l'ensemble des ouverts réguliers de X .

Théorème 2.1.5. Si X est un espace topologique, alors $RO(X)$ (ordonné par inclusion) est une algèbre de Boole complète dans laquelle

$$O \vee U = (O \cup U)^{-\circ} \quad O \wedge U = O \cap U \quad \neg O = (X \setminus O)^{\circ}$$

pour tous $O, U \in RO(X)$.

Démonstration. Procédons par étapes.

1. Soit O un ouvert. Montrons que $O \subseteq O^{-\circ}$.
On a $O \subseteq O^{-}$ par définition de l'adhérence. Donc $O = O^{\circ} \subseteq O^{-\circ}$, ce qui suffit.
2. Montrons que l'application $^{-\circ} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui à un ensemble associe l'intérieur de son adhérence est croissante.
Soient A_1 et A_2 deux parties de X telles que $A_1 \subseteq A_2$. Le plus petit fermé contenant A_2 contient forcément le plus petit fermé contenant A_1 , i.e. $(A_1)^- \subseteq (A_2)^-$. Dès lors, il est clair que le plus grand ouvert inclus dans $(A_1)^-$ est forcément inclus dans le plus grand ouvert que contient $(A_2)^-$, i.e. $(A_1)^{-\circ} \subseteq (A_2)^{-\circ}$.
3. Soient $O, U \in RO(X)$ et prouvons que $O \cap U \in RO(X)$.
On sait déjà que $O \cap U$ est un ouvert. Il faut donc montrer que $O \cap U = (O \cap U)^{-\circ}$. Comme $O \cap U \subseteq (O \cap U)^-$, on a $O \cap U \subseteq (O \cap U)^{-\circ}$.
Montrons l'autre inclusion. On a

$$(O \cap U)^{-\circ} \subseteq (O^- \cap U^-)^{\circ} = O^{-\circ} \cap U^{-\circ} = O \cap U,$$

car $O, U \in RO(X)$.

4. Soient $O, U \in RO(X)$ et montrons que $O \wedge U = O \cap U$.
Comme $O \cap U \subseteq O$, $O \cap U \subseteq U$ et vu le point précédent, $O \cap U$ est un minorant de $\{O, U\}$ dans $RO(X)$. De plus, si V est un minorant de $\{O, U\}$, alors $V \subseteq O$ et $V \subseteq U$, donc $V \subseteq O \cap U$. On en tire que $O \cap U = O \wedge U$.

On a donc montré que $RO(X)$ est un inf.demi-treillis.

5. Pour toute partie A de X , on a $A^{-\circ} \in \text{RO}(X)$.
C'est évident puisque pour toute partie A de X , on a $A^{-\circ-\circ} = A^{-\circ}$.
6. Soit O un ouvert et montrons à présent que $O^{-\circ}$ est le plus petit ouvert régulier qui contient O .
Par le point précédent, on sait déjà que $O^{-\circ}$ est un ouvert régulier. Par le premier point, on sait qu'il contient O . Il reste donc à prouver qu'il est le plus petit avec cette caractéristique.
Soit $U \in \text{RO}(X)$ tel que $O \subseteq U$. Alors $U = U^{-\circ}$ et $O \subseteq U^{-\circ} \subseteq U^-$. On en tire que $O^- \subseteq U^-$ et donc $O^{-\circ} \subseteq U^{-\circ} = U$.
7. Prouvons que si $O, U \in \text{RO}(X)$, alors $(O \cup U)^{-\circ} = O \vee U$.
Comme l'union de deux ouverts est un ouvert, $O \cup U$ est un ouvert. Dès lors, le point précédent nous indique que $(O \cup U)^{-\circ}$ est le plus petit ouvert régulier contenant $O \cup U$. Il s'agit donc du supremum.

Donc $\text{RO}(X)$ est un treillis.

8. Il est clair que $\emptyset$ et X sont deux ouverts réguliers de X et que pour tout $O \in \text{RO}(X)$, on a $\emptyset \subseteq O \subseteq X$.

On voit donc que $\text{RO}(X)$ est borné.

9. Montrons que si $O \in \text{RO}(X)$, alors $U := (X \setminus O)^{\circ} \in \text{RO}(X)$ et

$$O \wedge U = \emptyset \quad O \vee U = X.$$

On a $(X \setminus O)^{\circ} = (X \setminus O)^{-\circ}$ et par le point 5, on voit que $U \in \text{RO}(X)$. De plus, on a

$$O \wedge U = O \cap U = O \cap (X \setminus O)^{\circ} = O \cap (X \setminus \overline{O}) \subseteq O \cap (X \setminus O) = \emptyset$$

et

$$\begin{aligned} O \vee U &= (O \cup U)^{-\circ} \\ &= (O \cup (X \setminus O)^{\circ})^{-\circ} \\ &= (O \cup (X \setminus \overline{O}))^{-\circ} \\ &= (\overline{O} \cup (X \setminus \overline{O})^-)^{\circ} \\ &= X^{\circ} \\ &= X. \end{aligned}$$

On sait maintenant que $\text{RO}(X)$ est complémenté.

10. Rappelons que si O et U sont deux ouverts de X , alors $(O \cap U)^{-\circ} = O^{-\circ} \cap U^{-\circ}$.
11. Prouvons la distributivité.

Soient $O, U, V \in \text{RO}(X)$. Montrons que $O \wedge (U \vee V) = (O \wedge U) \vee (O \wedge V)$. On a

$$O \wedge (U \vee V) = O \cap (U \cup V)^{-\circ}.$$

De plus, comme l'intersection de deux ouverts est ouverte, que l'union de deux ouverts est un ouvert et vu le dernier point, on a

$$\begin{aligned}
 (O \wedge U) \vee (O \wedge V) &= ((O \cap U) \cup (O \cap V))^{-\circ} \\
 &= [((O \cap U) \cup O) \cap ((O \cap U) \cup V)]^{-\circ} \\
 &= (O \cap (O \cup V) \cap (U \cup V))^{-\circ} \\
 &= O^{-\circ} \cap (O \cup V)^{-\circ} \cap (U \cup V)^{-\circ} \\
 &= O \cap (O \cup V)^{-\circ} \cap (U \cup V)^{-\circ} \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Il est donc clair que

$$(O \wedge U) \vee (O \wedge V) \subseteq O \wedge (U \vee V).$$

Montrons l'autre inclusion. Partant de (2.1), on trouve

$$\begin{aligned}
 (O \wedge U) \vee (O \wedge V) &= O \cap (O \cup V)^{-\circ} \cap (U \cup V)^{-\circ} \\
 &= O \cap (O^{-\circ} \cup V^{-\circ})^{\circ} \cap (U \cup V)^{-\circ} \\
 &\supseteq O \cap (O^{-\circ} \cup V^{-\circ}) \cap (U \cup V)^{-\circ} \\
 &\supseteq O \cap (O \cup V) \cap (U \cup V)^{-\circ} \\
 &\supseteq O \cap (U \cup V)^{-\circ},
 \end{aligned}$$

d'où $(O \wedge U) \vee (O \wedge V) \supseteq O \wedge (U \vee V)$.

On en tire que $\text{RO}(X)$ est distributif.

12. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts réguliers de X (I collection d'indices). Alors par ce qui précède, on sait que $\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right)^{-\circ}$ est le plus petit ouvert régulier contenant l'ouvert $\bigcup_{i \in I} O_i$. Il s'agit donc du supremum.

On sait donc que $\text{RO}(X)$ est un sup.demi-treillis complet.

13. La proposition 1.2.45 indique que $\text{RO}(X)$ est aussi un inf.demi-treillis complet.

Finalement, $\text{RO}(X)$ est une algèbre de Boole complète. ■

On peut également définir les fermés réguliers d'un espace topologique, de manière similaire aux ouverts réguliers. On obtient ainsi une nouvelle algèbre de Boole.

Définition 2.1.6. Soit X un espace topologique. Un *fermé régulier* est un fermé C égal à l'adhérence de son intérieur (i.e. $C^{\circ-} = C$). On note $\text{RC}(X)$ l'ensemble des fermés réguliers de X .

Théorème 2.1.7. *Si X est un espace topologique, alors $RC(X)$ (ordonné par inclusion) est une algèbre de Boole complète dans laquelle*

$$C \vee D = C \cup D \quad C \wedge D = (C \cap D)^{\circ-} \quad \neg C = (X \setminus C)^-$$

pour tous $C, D \in RC(X)$.

Démonstration. On procède de façon similaire à la démonstration du théorème 2.1.5. ■

Proposition 2.1.8. *Soit X un espace topologique. Le complémentaire d'un ouvert régulier est un fermé régulier et réciproquement.*

Démonstration. Soit O un ouvert régulier. Alors

$$(X \setminus O)^{\circ-} = (X \setminus O^-)^- = X \setminus O^{\circ-} = X \setminus O.$$

Soit C un fermé régulier. On a

$$(X \setminus C)^{-\circ} = (X \setminus C^\circ)^\circ = X \setminus C^{\circ-} = X \setminus C.$$

■

Avant de passer aux sous-algèbres de Boole et aux homomorphismes, voici quelques propriétés des algèbres de Boole qui ne sont pas vraies en toute généralité dans les treillis.

Proposition 2.1.9 (Lois de Morgan). *Soient B une algèbre de Boole et $a, b \in B$. Alors*

$$(a \wedge b)' = a' \vee b' \quad \text{et} \quad (a \vee b)' = a' \wedge b'.$$

Démonstration. On a

$$(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge b') = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$$

et

$$(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee a' \vee b') = (b' \vee 1) \wedge (a' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$$

On a donc $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. On en tire que $(a' \wedge b')' = a \vee b$ et donc $(a \vee b)' = a' \wedge b'$. ■

Proposition 2.1.10. *Soit B une algèbre de Boole. Pour tous $a, b \in B$, on a*

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1.$$

Démonstration. Montrons la première équivalence. Soient $a, b \in B$ tels que $a \leq b$. On a

$$a \wedge b' \leq b \wedge b' = 0.$$

Réciproquement, si $a, b \in B$ sont tels que $a \wedge b' = 0$. On a alors

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (b \vee b') = (a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \wedge b \leq b.$$

La deuxième équivalence est simplement un passage au complémentaire. ■

Corollaire 2.1.11. *Soient B une algèbre de Boole et $a, b \in B$. Alors on a $a \leq b$ si, et seulement si, $b' \leq a'$.*

Démonstration. Par la proposition précédente, on a

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow (a')' \wedge b' = 0 \Leftrightarrow b' \leq a',$$

d'où la conclusion. ■

2.1.2 Sous-algèbre de Boole et homomorphisme

Dans cette partie, nous étendons les notions vues dans la section 1.2.2 du chapitre précédent et regardons les propriétés supplémentaires dont elles jouissent dans le cadre des algèbres de Boole.

Définition 2.1.12. Soient B une algèbre de Boole et C une partie non vide de B munie de l'ordre induit. On dit que C est une *sous-algèbre de Boole* de B si

- c'est un sous-treillis de B ;
- pour tout $a \in C$, a' est un élément de C ;
- si 0 et 1 sont les minimum et maximum de B , alors $0 \in C$ et $1 \in C$.

Autrement dit, C est une sous-algèbre de Boole de B si C contient 0, 1 et est fermé pour $\vee$, $\wedge$ et $'$. En particulier, C est une algèbre de Boole.

Exemples 2.1.13. Si X est un espace topologique, alors l'ensemble $of(X)$ des ouverts fermés de X est une sous-algèbre de Boole de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Par contre, si X est un espace topologique, alors l'ensemble $\mathcal{O}(X)$ des ouverts de X est un sous-treillis de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ (cf. exemple 1.2.17), mais ce n'est pas une sous-algèbre de Boole puisque le complémentaire d'un ouvert est fermé, donc $\mathcal{O}(X)$ n'est pas fermé pour le complémentaire.

Proposition 2.1.14. Soient B une algèbre de Boole et C une partie de B . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. C est une sous-algèbre de Boole de B ;
2. C est une partie non vide, stable pour $\wedge$ et $'$;
3. C est une partie non vide, stable pour $\vee$ et $'$.

Démonstration.

$\underline{1} \Rightarrow \underline{2}$: C'est évident vu la définition d'une sous-algèbre de Boole.

$\underline{2} \Rightarrow \underline{3}$: C'est dû aux lois de Morgan 2.1.9.

$\underline{3} \Rightarrow \underline{1}$: La partie C est fermée pour $\wedge$, par les lois de Morgan. De plus, comme C est non vide, il existe $c \in C$ et on a $0 = c \wedge c'$ et $1 = c \vee c'$, ce qui suffit. ■

Définition 2.1.15. Soient B une algèbre de Boole et C une partie de B . La *sous-algèbre de Boole engendrée par C* , notée $\langle C \rangle_B^{bo}$, est la plus petite sous-algèbre de Boole de B contenant C .

Tout comme pour les treillis, si B est une algèbre de Boole, on dispose d'une caractérisation de la sous-algèbre de Boole engendrée par une partie de B .

Notations. Si B est une algèbre de Boole et C une partie de B , on note $b^1 := b$ et $b^{-1} := b'$ pour tout $b \in B$. Nous utiliserons ces notations uniquement dans le cadre de la proposition suivante.

Proposition 2.1.16. *Soient B une algèbre de Boole et C une partie non vide de B . Alors*

$$\langle C \rangle_B^{bo} = \{c_1^{\varepsilon_1} \vee \dots \vee c_m^{\varepsilon_m} \mid c_1, \dots, c_m \in C^m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}^n, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Démonstration. Posons

$$D := \{c_1^{\varepsilon_1} \vee \dots \vee c_m^{\varepsilon_m} \mid c_1, \dots, c_m \in C^m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}^n, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Il est clair que $C \subseteq D$ (prendre $m = 1, n = 1$ et $\varepsilon_1 = 1$). De plus, toute sous-algèbre de Boole de B contenant C contient D vu la définition de D . Montrons donc que D est une sous-algèbre de Boole. On a $0 \in D$ en prenant $m = 0$. De même, $1 \in D$ en choisissant $m = 1, n = 0$. Il est évident que D est fermé pour $\vee$. Prouvons que D est fermé pour $\wedge$. Soient $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_{m_1} \in C^{m_1}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_1} \in \{-1, 1\}^{n_1}$, $d_1, \dots, d_{m_2} \in C^{n_2}$ et $\eta_1, \dots, \eta_{m_2} \in \{-1, 1\}^{n_2}$. Alors on a

$$(c_1^{\varepsilon_1} \vee \dots \vee c_{m_1}^{\varepsilon_{m_1}}) \wedge (d_1^{\eta_1} \vee \dots \vee d_{m_2}^{\eta_{m_2}}) = (c_1^{\varepsilon_1} \wedge d_1^{\eta_1}) \vee (c_1^{\varepsilon_1} \wedge d_2^{\eta_2}) \vee \dots \vee (c_{m_1}^{\varepsilon_{m_1}} \wedge d_{m_2}^{\eta_{m_2}}),$$

ce qui suffit. Il nous reste à montrer que D est stable pour le complément. Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_m \in C^n$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}^n$. On a

$$\begin{aligned} (c_1^{\varepsilon_1} \vee \dots \vee c_m^{\varepsilon_m})' &= (c_1^{\varepsilon_1})' \wedge \dots \wedge (c_m^{\varepsilon_m})' \\ &= (c_{1,1}^{\varepsilon_{1,1}} \wedge c_{1,2}^{\varepsilon_{1,2}} \wedge \dots)' \wedge \dots \wedge (c_{m,1}^{\varepsilon_{m,1}} \wedge c_{m,2}^{\varepsilon_{m,2}} \wedge \dots)' \\ &= (c_{1,1}^{-\varepsilon_{1,1}} \vee c_{1,2}^{-\varepsilon_{1,2}} \vee \dots) \wedge \dots \wedge (c_{m,1}^{-\varepsilon_{m,1}} \vee c_{m,2}^{-\varepsilon_{m,2}} \vee \dots) \end{aligned}$$

et on peut conclure puisque D est fermé pour $\wedge$. ■

Corollaire 2.1.17. *Soient B une algèbre de Boole et C une partie de B . Si C est fini, alors $\langle C \rangle_B^{bo}$ est fini.*

Regardons à présent les homomorphismes.

Définitions 2.1.18. Une application $f : A \rightarrow B$ entre deux algèbres de Boole A et B est un *homomorphisme d'algèbres de Boole* si pour tous $a, b \in A$

- $f(a \vee_A b) = f(a) \vee_B f(b)$;
- $f(a \wedge_A b) = f(a) \wedge_B f(b)$;
- $f(a'^A) = (f(a))'^B$;
- $f(0_A) = 0_B$ et $f(1_A) = 1_B$.

Autrement dit, il s'agit d'un homomorphisme de treillis qui respecte le complément, 0 et 1. Un homomorphisme d'algèbres de Boole bijectif est appelé *isomorphisme d'algèbres de Boole*.

Notations. Afin de ne pas alourdir l'écriture, on précisera en indice les algèbres de Boole uniquement lorsque cela s'avère indispensable à la compréhension.

Proposition 2.1.19. *Soient A et B deux algèbres de Boole et $f : A \rightarrow B$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. f est un homomorphisme d'algèbres de Boole ;
2. f respecte $\wedge$ et $'$;
3. f respecte $\vee$ et $'$.

Démonstration.

1 $\Rightarrow$ 2 : Cela découle de la définition d'un homomorphisme d'algèbres de Boole.

2 $\Rightarrow$ 3 : C'est dû aux lois de Morgan 2.1.9.

3 $\Rightarrow$ 1 : Les lois de Morgan indiquent que f respecte $\wedge$. De plus, on a

$$f(0) = f(0 \wedge 1) = f(0) \wedge f(1) = f(0) \wedge f(0') = f(0) \wedge (f(0))' = 0.$$

Enfin, on a

$$f(1) = f(1 \vee 0) = f(1) \vee f(0) = f(1) \vee f(1') = f(1) \vee (f(1))' = 1,$$

ce qui permet de conclure. ■

Exemple 2.1.20. Si X est un espace topologique, alors les algèbres de Boole $\text{RO}(X)$ et $\text{RC}(X)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Boole. En effet, considérons l'application

$$^- : \text{RO}(X) \rightarrow \text{RC}(X) : O \mapsto O^-.$$

Il s'agit d'une bijection dont la bijection réciproque est donnée par

$$^\circ : \text{RC}(X) \rightarrow \text{RO}(X) : C \mapsto C^\circ.$$

Montrons que l'application $^- : \text{RO}(X) \rightarrow \text{RC}(X)$ est un homomorphisme d'algèbres de Boole. Pour tous $O, U \in \text{RO}(X)$, en indiquant $\vee$ et $\neg$ par « RO » pour les ouverts réguliers et par « RC » pour les fermés réguliers, on a

- $(O \vee_{\text{RO}} U)^- = (O \cup U)^{-\circ-} = (O^- \cup U^-)^{\circ-}$. Or, O^- et U^- sont deux fermés réguliers, donc on a $(O \vee_{\text{RO}} U)^- = (O^- \cup U^-)^{\circ-} = (O^- \vee_{\text{RC}} U^-)^{\circ-}$ et comme $O^- \vee_{\text{RC}} U^-$ est un fermé régulier, on a finalement $(O \vee_{\text{RO}} U)^- = O^- \vee_{\text{RC}} U^-$;
- $(\neg_{\text{RO}} O)^- = (X \setminus O)^{\circ-} = (X \setminus O^-)^- = \neg_{\text{RC}} O^-$.

Proposition 2.1.21. *Un homomorphisme d'algèbres de Boole est un homomorphisme d'ordres.*

Démonstration. Un homomorphisme d'algèbres de Boole étant un homomorphisme de treillis, cela découle directement de la proposition 1.2.25 ■

Proposition 2.1.22. *Soient A et B deux algèbres de Boole et $f : A \rightarrow B$ une application. Alors f est un isomorphisme d'algèbres de Boole si, et seulement si, c'est un isomorphisme de treillis.*

Démonstration. Par définition, un isomorphisme d'algèbres de Boole est un isomorphisme de treillis.

Réciproquement, si f est un isomorphisme de treillis, montrons que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(a') = (f(a))'$ pour tout $a \in A$. On a

$$f(0) = f(\vee \emptyset) = \vee f(\emptyset) = \vee \emptyset = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = f(\wedge \emptyset) = \wedge f(\emptyset) = \wedge \emptyset = 1,$$

en appliquant la proposition 1.1.27. De plus, si $a \in A$, on a

$$f(a') \wedge f(a) = f(a' \wedge a) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(a') \vee f(a) = f(a' \vee a) = f(1) = 1,$$

d'où la conclusion. ■

Corollaire 2.1.23. *Soit f une application entre deux algèbres de Boole. Alors f est un isomorphisme d'algèbres de Boole si, et seulement si, c'est un isomorphisme d'ordres.*

Démonstration. Cela découle directement de la proposition 1.2.26. ■

2.1.3 Idéal et filtre

Une algèbre de Boole est en particulier un treillis borné. Les notions d'idéal et de filtre ont donc un sens ici. Rappelons-en les définitions.

Définitions 2.1.24. Soit B une algèbre de Boole. Un *idéal* de B est une partie I de B telle que

- $0 \in I$;
- $i \vee j \in I$ pour tous $i, j \in I$;
- pour tous $a \in B, i \in I$ tels que $a \leq i$, on a $a \in I$.

Un *filtre* de B est une partie F de B telle que

- $1 \in F$;
- $f \wedge g \in F$ pour tous $f, g \in F$;
- pour tous $a \in B, f \in F$ tels que $a \geq f$, on a $a \in F$.

Un idéal *propre* de B est un idéal différent de B . Notons que ça revient à demander que 1 ne soit pas un élément de l'idéal. Un filtre *propre* de B est un filtre différent de B . On peut également dire de façon équivalente qu'il s'agit d'un filtre qui ne contient pas 0.

Un idéal *maximal* de B est un idéal propre maximal pour l'inclusion. Un filtre *maximal*, ou *ultrafiltre*, est un filtre propre maximal pour l'inclusion. On note $\text{Spec}(B)$ l'ensemble des idéaux maximaux de B et $\text{Ult}(B)$ l'ensemble des ultrafiltres de B .

Proposition 2.1.25. *Soient B une algèbre de Boole et I un idéal propre de B . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. I est maximal;
2. $a, b \notin I \Rightarrow a \wedge b \notin I$ pour tous $a, b \in B$ ($B \setminus I$ est fermé pour $\wedge$ -fini);

3. pour tout $a \in B$, on a $a \in I$ ou $a' \in I$.

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$: Supposons qu'il existe $a, b \in B$ tels que $a, b \notin I$ et $a \wedge b \in I$. Comme I est maximal, on a $\langle I \cup \{a\} \rangle_B^{id} = B = \langle I \cup \{b\} \rangle_B^{id}$. En particulier, on a $1 \in \langle I \cup \{a\} \rangle_B^{id}$ et $1 \in \langle I \cup \{b\} \rangle_B^{id}$. Vu la caractérisation des idéaux engendrés par un ensemble (proposition 1.2.61), il existe $i \in I$ tel que $1 \leq i \vee a$, i.e. $1 = i \vee a$. De même, il existe $j \in I$ tel que $1 = j \vee b$. On en tire que

$$1 = 1 \wedge 1 = (i \vee a) \wedge (j \vee b) = (i \wedge j) \vee (i \wedge b) \vee (a \wedge j) \vee (a \wedge b)$$

et comme I est un idéal, il est décroissant et vu qu'on a supposé $a \wedge b \in I$, on obtient finalement $1 \in I$, d'où une contradiction.

$2 \Rightarrow 3$: Supposons qu'il existe un élément $a \in B$ tel que $a \notin I$ et $a' \notin I$. Alors par hypothèse, on a $a \wedge a' \notin I$. Or, on a $a \wedge a' = 0$, donc $0 \notin I$, ce qui est absurde puisque I est un idéal d'algèbre de Boole et contient donc 0 par définition.

$3 \Rightarrow 1$: Supposons que I n'est pas maximal. Alors il existe un idéal maximal J contenant I de manière stricte. Soit $j \in J \setminus I$. Alors $j \notin I$ donc par hypothèse, $j' \in I$. Donc $j' \in J$. On en tire que $1 = j \vee j' \in J$, ce qui est impossible puisque J est un idéal maximal, donc propre. ■

Comme d'habitude, on a la proposition version filtres.

Proposition 2.1.26. Soient B une algèbre de Boole et F un filtre propre de B . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est un ultrafiltre ;
2. $a, b \notin F \Rightarrow a \vee b \notin F$ pour tous $a, b \in B$ ($B \setminus F$ est fermé pour $\vee$ -fini) ;
3. pour tout $a \in B$, on a $a \in F$ ou $a' \in F$.

Proposition 2.1.27. Soient B une algèbre de Boole et I un idéal propre de B . Alors I est premier si, et seulement si, I est maximal.

Démonstration. Il suffit de combiner les propositions 1.2.70 et 2.1.25. ■

Bien sûr, dans les filtres on a :

Proposition 2.1.28. Soient B une algèbre de Boole et F un filtre propre de B . Alors F est premier si, et seulement si, F est un ultrafiltre.

Dans une algèbre de Boole, on peut donc indifféremment parler d'idéal propre premier ou d'idéal maximal et de filtre propre premier ou d'ultrafiltre, ce qui n'était pas le cas dans les treillis, comme le montre l'exemple 1.2.77.

On peut faire un lien entre algèbre de Boole et anneau commutatif, puisque toute algèbre de Boole est un anneau commutatif particulier. Le lecteur intéressé peut consulter

l'annexe B. Tout théorème vrai dans les anneaux commutatifs est donc vrai dans les algèbres de Boole, pour autant que l'on transpose les notions utilisées. Nous savons qu'un idéal dans une algèbre de Boole B est un idéal « classique » dans les anneaux. Nous énonçons ici sans démonstration le théorème de Krull qui nous sera utile par la suite. Il s'agit en réalité d'un théorème que nous avons démontré dans les sup.demi-treillis bornés (voir proposition 1.2.75). On savait donc déjà le résultat vrai dans les algèbres de Boole. Le théorème de Krull montre qu'il est valable dans tout anneau commutatif. Ce résultat sera utilisé dans la dualité de Stone à la prochaine section de ce chapitre.

Théorème 2.1.29 (Théorème de Krull (AC)). *Soit A un anneau commutatif et I un idéal propre de A . Alors il existe un idéal maximal de A contenant I .*

Corollaire 2.1.30 (AC). *Soient A un anneau commutatif et $a \in A$ tel que $a \neq 1$. Alors il existe un idéal maximal de A contenant a .*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Krull à l'idéal engendré par a . ■

Le théorème suivant n'est en réalité que le théorème de Stone 1.2.72 formulé dans les algèbres de Boole. Bien que ce soit une redite, nous jugeons utile de l'énoncer sous cette forme plus pratique pour la suite de notre travail.

Théorème 2.1.31 (Théorème de Stone pour les algèbres de Boole (AC)). *Soit B une algèbre de Boole. Si I est un idéal et F un filtre de B tels que $I \cap F = \emptyset$, alors il existe un ultrafiltre P de B tel que $F \subseteq P$ et $P \cap I = \emptyset$. De façon équivalente, il existe un idéal maximal Q de B tel que $I \subseteq Q$ et $Q \cap F = \emptyset$.*

A présent, établissons un lien entre idéal, filtre et homomorphisme.

Proposition 2.1.32. *Soient A et B deux algèbres de Boole. Soient I un idéal de B et F un filtre de B . Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole. Alors $f^{-1}(I)$ est un idéal de A et $f^{-1}(F)$ est un filtre de A .*

Démonstration. Montrons que $f^{-1}(I)$ est un idéal. On a

- $f(0) = 0 \in I$ car I est un idéal, donc $0 \in f^{-1}(I)$;
- si $i, j \in f^{-1}(I)$, alors $f(i) \in I$, $f(j) \in I$, donc $f(i) \vee f(j) \in I$. Or $f(i) \vee f(j) = f(i \vee j)$, donc $f(i \vee j) \in I$, d'où $i \vee j \in f^{-1}(I)$;
- si $a \in A$, $i \in f^{-1}(I)$ avec $a \leq i$, alors $f(a) \leq f(i)$. Comme $f(i) \in I$ et I est un idéal, on a $f(a) \in I$ et $a \in f^{-1}(I)$.

On peut donc conclure.

La partie concernant les filtres se démontre de la même façon. ■

Proposition 2.1.33. *Soient A, B des algèbres de Boole, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole, I un idéal propre de B et F un filtre propre de B . Alors $f^{-1}(I)$ est un idéal propre de A et $f^{-1}(F)$ est un filtre propre de A .*

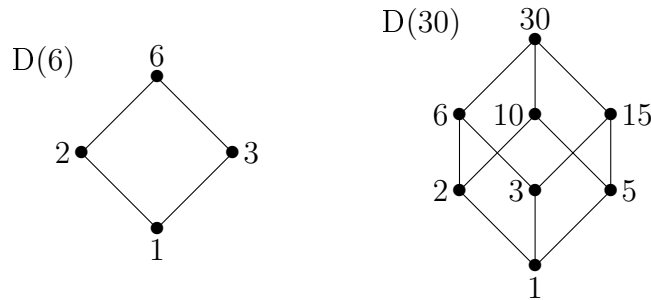
Démonstration. On sait déjà que $f^{-1}(I)$ est un idéal. Supposons qu'il ne soit pas propre. Alors $1 \in f^{-1}(I)$. Autrement dit, $1 = f(1) \in I$, ce qui est impossible puisque I est propre. On procède de même pour les filtres. ■

Proposition 2.1.34. Soient A, B des algèbres de Boole, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole, I un idéal maximal de B et F un ultrafiltre de B . Alors $f^{-1}(I)$ est un idéal maximal de A et $f^{-1}(F)$ est un ultrafiltre de A .

Démonstration. On sait déjà que $f^{-1}(I)$ est un idéal. Montrons qu'il est maximal. Soit $a \in A$ et supposons que $a \notin f^{-1}(I)$. Alors $f(a) \notin I$ et comme I est un idéal maximal, on a $(f(a))' \in I$ (par la proposition 2.1.25). De $(f(a))' = f(a')$, on tire que $a' \in f^{-1}(I)$ et on utilise à nouveau la proposition 2.1.25 pour conclure.

Quant à la partie concernant F , elle se démontre de façon similaire. ■

Remarque 2.1.35. L'image directe d'un idéal (resp. d'un filtre) par un homomorphisme d'algèbres de Boole n'est pas nécessairement un idéal (resp. un filtre). En effet, considérons les algèbres de Boole de l'ensemble des diviseurs de 6 (noté $D(6)$) ordonné par la relation de divisibilité et l'ensemble des diviseurs de 30 (noté $D(30)$) ordonné de la même manière, représentés ci-dessous.



Soit f l'application de $D(6)$ dans $D(30)$ définie par

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 15 \quad \text{et} \quad f(6) = 30.$$

Vérifions tout d'abord qu'il s'agit d'un homomorphisme d'algèbres de Boole. On a

- $f(1 \vee 2) = 2 = 1 \vee 2 = f(1) \vee f(2)$;
- $f(1 \vee 3) = 15 = f(1) \vee f(3)$;
- $f(1 \vee 6) = 30 = f(1) \vee f(6)$;
- $f(2 \vee 3) = 30 = 2 \vee 15 = f(2) \vee f(3)$;
- $f(2 \vee 6) = 30 = f(2) \vee f(6)$;
- $f(3 \vee 6) = 30 = f(3) \vee f(6)$;
- $f(1') = f(6) = 30 = 1' = (f(1))'$;
- $f(2') = f(3) = 15 = 2' = (f(2))'$;
- $f(3') = f(2) = 2 = 15' = (f(3))'$;
- $f(6') = f(1) = 1 = 30' = (f(6))'$.

Il est clair que $\{2, 6\}$ est un filtre de $D(6)$ mais que $f(\{2, 6\}) = \{2, 30\}$ n'est pas un filtre de $D(30)$. De plus, $\{1, 3\}$ est un idéal de $D(6)$, mais $f(\{1, 3\}) = \{1, 15\}$ n'est pas un idéal de $D(30)$.

La proposition suivante sera utile dans le chapitre 3. En effet, elle nous servira à démontrer une propriété des *clans*.

Proposition 2.1.36 (AC). Soit B une algèbre de Boole et soit E une partie de B telle que

- $0 \notin E$;
- si $a \vee b \in E$, alors $a \in E$ ou $b \in E$ pour tous $a, b \in B$;
- si $e \in E$ et $b \in B$ avec $e \leq b$, alors $b \in E$.

Alors pour tout $e \in E$, il existe un ultrafiltre P de B tel que $e \in P \subseteq E$.

Démonstration. Soit $e \in E$. Montrons tout d'abord qu'il existe un sous-ensemble P de E contenant e et maximal pour

$$x_1, \dots, x_n \in P \Rightarrow x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in E,$$

où $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\mathcal{Q} := \{Q \subseteq E \mid e \in Q \text{ et } x_1, \dots, x_n \in Q \Rightarrow x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in E \ (n \in \mathbb{N})\}.$$

Prouvons que $\mathcal{Q}$ vérifie les hypothèses du lemme de Zorn :

$\mathcal{Q}$ est non vide :

Il est clair que $\{e\}$ est un élément de $\mathcal{Q}$.

$\mathcal{Q}$ est inductif :

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{Q}$. On cherche $L \in \mathcal{Q}$ tel que $L \supseteq C$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est vide, alors $\{e\}$ majore $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est non vide, posons $L := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. On a alors

- $L \supseteq C$ pour tout $C \in \mathcal{C}$ par construction ;
- $L \in \mathcal{Q}$, car $e \in L$ vu que $e \in C \ \forall C \in \mathcal{C}$. De plus, si $x_1, \dots, x_n \in L$ ($n \in \mathbb{N}$), alors il existe $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ tels que $x_1 \in C_1, \dots, x_n \in C_n$. Vu que $\mathcal{C}$ est une chaîne, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_i \subseteq C_{i_0}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On a donc $x_1, \dots, x_n \in C_{i_0} \in \mathcal{Q}$, donc $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in E$.

Donc toute chaîne est majorée. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{Q}$ admet un élément maximal, que l'on notera P . Il est clair que $e \in P$ et $P \subseteq E$. Montrons que P est un ultrafiltre de B . On a

- $e \in P$ donc P est non vide ;
- si $a, b \in P$, alors $a \wedge b \in P$. En effet, soient $x_1, \dots, x_n \in P$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors comme $P \in \mathcal{Q}$, on a $a \wedge b \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in E$. Si $a \wedge b \notin P$, alors $Q := P \cup \{a \wedge b\} \in \mathcal{Q}$ et $P \subsetneq Q$, ce qui contredit la maximalité de P . Donc $a \wedge b \in P$;
- si $a \in P$, $b \in B$ avec $a \leq b$, alors $b \in P$. En effet, pour tous $x_1, \dots, x_n \in P$ ($n \in \mathbb{N}$), comme $P \in \mathcal{Q}$, on a $a \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in E$. De plus, comme $a \leq b$ et $a \in E$, les hypothèses sur E indiquent que $b \in E$. Supposons que $b \notin P$. Alors $Q := P \cup \{b\} \in \mathcal{Q}$, car pour tous $x_1, \dots, x_n \in P$ ($n \in \mathbb{N}$), on a

$$b \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n \geq a \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in E,$$

donc $b \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in E$. De plus, $P \subsetneq Q$, ce qui contredit la maximalité de P . Donc $b \in P$.

Cela montre que P est un filtre. Il nous reste à prouver qu'il s'agit d'un ultrafiltre. Montrons que pour tout $b \in B$, on a $b \in P$ ou $b' \in P$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $b \in B$ tel que $b \notin P$ et $b' \notin P$. Alors il existe $y \in P$ tel que $y \wedge b \notin E$. En effet, si pour tout $y \in P$ on a $y \wedge b \in E$, alors $y \wedge b \leq b$ donc $b \in E$. De plus, si on pose $Q := P \cup \{b\}$, on a $Q \in \mathcal{Q}$ et $P \subsetneq Q$, ce qui contredit la maximalité de P . En outre, il existe $z \in P$ tel que $z \wedge b' \notin E$, sinon pour tout $z \in P$, on a $z \wedge b' \in E$ et comme $z \wedge b' \leq b'$, on trouve $b' \in E$ et en posant $R := P \cup \{b'\}$, on a $R \in \mathcal{Q}$ et $P \subsetneq R$, d'où une contradiction. Comme $y, z \in P$ et $P \in \mathcal{Q}$, on a $y \wedge z \in E$. En utilisant les hypothèses, on déduit de $y \wedge b \notin E$ et $z \wedge b' \notin E$ que $y \wedge z \wedge b \notin E$ et $y \wedge z \wedge b' \notin E$. Or, on a

$$(y \wedge z \wedge b) \vee (y \wedge z \wedge b') = y \wedge z \in E,$$

donc $y \wedge z \wedge b \in E$ ou $y \wedge z \wedge b' \in E$, d'où une contradiction. On peut alors conclure via la proposition 2.1.26, comme P est trivialement propre puisque $P \subseteq E$ et $0 \notin E$. ■

2.2 Espace de Boole et dualité de Stone

Dans cette section, nous établissons la dualité de Stone, avant de calculer le dual d'un multiopérateur. Nous avons choisi la version de la dualité avec les ultrafiltres. A partir d'ici, sauf mention explicite du contraire, nous supposons toujours que nos algèbres de Boole contiennent au moins deux éléments, l'algèbre de Boole triviale n'admettant pas d'ultrafiltre (puisque'elle ne contient aucun filtre propre). Notons que cette dualité peut également s'établir à l'aide des idéaux maximaux. Le lecteur préférant cette version peut consulter [14].

2.2.1 Espace dual d'une algèbre de Boole

La dualité de Stone est une dualité de catégories. Nous n'utilisons ici que des notions rudimentaires de théorie des catégories : catégorie, foncteur contravariant, catégories dualement équivalentes. Ces concepts sont définis dans l'annexe C.

Définition 2.2.1. Un espace topologique est un *espace de Boole* s'il est séparé, compact et s'il admet une base d'ouverts fermés.

Définition 2.2.2. Soit B une algèbre de Boole. On définit l'application r_B comme suit :

$$r_B : B \rightarrow \mathcal{P}(\text{Ult}(B)) : b \mapsto \{P \in \text{Ult}(B) \mid P \ni b\}.$$

Proposition 2.2.3. Soient B une algèbre de Boole et $a, b \in B$. On a

- $r_B(a) \cup r_B(b) = r_B(a \vee b)$;
- $r_B(a) \cap r_B(b) = r_B(a \wedge b)$;
- $r_B(a') = X_B \setminus r_B(a)$;
- $r_B(0) = \emptyset$;

$$- r_B(1) = X_B.$$

Autrement dit, l'application r_B est un homomorphisme d'algèbres de Boole.

Démonstration. Soit $P \in \text{Ult}(B)$. Alors

$$P \in r_B(a) \cap r_B(b) \Leftrightarrow a \in P \text{ et } b \in P \Leftrightarrow a \wedge b \in P \Leftrightarrow P \in r_B(a \wedge b),$$

en se rappelant qu'un filtre est croissant et stable pour $\wedge$ -fini. De plus,

$$P \in r_B(a') \Leftrightarrow a' \in P \Leftrightarrow a \notin P \Leftrightarrow P \notin r_B(a) \Leftrightarrow P \in X_B \setminus r_B(a),$$

en appliquant la proposition 2.1.26. On conclut grâce à la proposition 2.1.19. $\blacksquare$

Définition 2.2.4. Soit B une algèbre de Boole. On définit l'espace topologique X_B (associé à B) comme l'ensemble des ultrafiltres de B et dont une base de la topologie est

$$\{r_B(b) \mid b \in B\}.$$

On dit que X_B est l'espace dual de B .

Notons que par la proposition 2.2.3, on voit que si B est une algèbre de Boole,

$$\{r_B(b) \mid b \in B\}$$

est une base d'ouverts fermés de X_B . En effet, si $b \in B$, on a $X_B \setminus r_B(b) = r_B(b')$ et donc $r_B(b)$ est un fermé.

Proposition 2.2.5. Soit B une algèbre de Boole. L'espace topologique X_B est compact.

Démonstration. Soit

$$\{r_B(b) \mid b \in I\}$$

un recouvrement de X_B par des ouverts de base (avec $I \subseteq B$ une collection d'indices). Supposons que pour tout ensemble fini $J \subseteq I$, on a $\bigvee J \neq 1$. Posons $M := \langle I \rangle_B^{id}$. Alors $M \not\equiv 1$ car sinon, il existe $b_1, \dots, b_n \in I$ ($n \in \mathbb{N}$) tels que $1 \leq b_1 \vee \dots \vee b_n$ ce qui contredit notre supposition. Donc M est un idéal propre et par la proposition 1.2.75, il existe un idéal maximal P qui contient M , donc I . Vu les propositions 1.2.70, 2.1.27 et 2.1.28, $B \setminus P$ est un ultrafiltre. De plus, $(B \setminus P) \cap I = \emptyset$. Donc pour tout $b \in I$, $B \setminus P \notin r(b)$, d'où une contradiction puisque $B \setminus P \in X_B$ et que les ouverts $r_B(b)$ ($b \in I$) recouvrent X_B . Donc il existe $J \subseteq I$ fini avec $\bigvee J = 1$. Montrons que

$$\{r_B(b) \mid b \in J\}$$

est un recouvrement (fini) de X_B . De $\bigvee J = 1$, on tire que pour tout $Q \in X_B$, on a $\bigvee J \in Q$. Pour tout $Q \in X_B$, il existe donc $b \in J$ tel que $b \in Q$, vu la proposition 2.1.26. Autrement dit, si $Q \in X_B$, il existe $b \in J$ avec $Q \in r_B(b)$, d'où la conclusion. $\blacksquare$

Proposition 2.2.6. Soit B une algèbre de Boole. L'espace topologique X_B est séparé.

Démonstration. Soient $P, Q \in X_B$ tels que $P \neq Q$. Alors il existe $a \in B$ avec $a \in P \setminus Q$. Par la proposition 2.1.26, on voit que $a' \in Q$. Donc $P \in r_B(a)$ et $Q \in r_B(a')$. On conclut en remarquant que $r_B(a) \cap r_B(a') = r_B(0) = \emptyset$. ■

Proposition 2.2.7. *Soit B une algèbre de Boole. L'espace topologique X_B est un espace de Boole.*

Démonstration. Cela découle des propositions précédentes. ■

Proposition 2.2.8. *Soit X un espace de Boole. L'ensemble $\text{of}(X)$ des ouverts fermés de X , ordonné par inclusion, est une algèbre de Boole.*

Démonstration. Il est évident que pour tous $O, U \in \text{of}(X)$, on a

$$O \vee U = O \cup U, \quad O \wedge U = O \cap U \quad \text{et} \quad \neg O = X \setminus O.$$

Les lois de Morgan dans les ensembles montrent la distributivité. Enfin, le treillis distributif complété $\text{of}(X)$ est borné par $\emptyset$ et X . Il s'agit donc d'une algèbre de Boole. ■

Introduisons les catégories que nous allons employer.

Définition 2.2.9. La catégorie des algèbres de Boole, notée AB , est la catégorie dont les objets sont les algèbres de Boole et les flèches sont les homomorphismes d'algèbres de Boole.

Remarque 2.2.10. Il s'agit bien d'une catégorie. En effet, il suffit de considérer la loi de composition classique entre les homomorphismes et la flèche identité est donnée par l'identité habituelle.

Définition 2.2.11. La catégorie des espaces de Boole, notée EB , est la catégorie dont les objets sont les espaces de Boole et les flèches sont les applications continues entre espaces de Boole.

Remarque 2.2.12. On est bien en présence d'une catégorie : il suffit de considérer la loi de composition usuelle entre applications continues et la fonction identité comme neutre.

Pour l'équivalence duale, nous avons besoin de deux foncteurs contravariants entre nos catégories.

Proposition 2.2.13. *L'application Ult qui à une algèbre de Boole B associe l'espace topologique $\text{Ult}(B)$ ($= X_B$) et qui à un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ d'algèbres de Boole associe $\text{Ult}(f) = f^{-1}$, est un foncteur contravariant de la catégorie AB dans la catégorie EB .*

Démonstration. Soit B une algèbre de Boole. Alors $\text{Ult}(B)$ est un espace de Boole par ce qui précède. Soient A une deuxième algèbre de Boole et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole. Prouvons tout d'abord que $\text{Ult}(f)$ est une flèche de EB , i.e. une application continue.

On a $\text{Ult}(f) : \text{Ult}(B) \rightarrow \text{Ult}(A)$:

Soit $P \in \text{Ult}(B)$ et montrons que $f^{-1}(P) \in \text{Ult}(A)$. Cela découle directement de la proposition 2.1.34.

L'application $\text{Ult}(f)$ est continue :

Soit $a \in A$. Il suffit de montrer que

$$(\text{Ult}(f))^{-1}(r_A(a)) = r_B(f(a)).$$

On a

$$\begin{aligned} (\text{Ult}(f))^{-1}(r_A(a)) &= \{P \in \text{Ult}(B) \mid (\text{Ult}(f))(P) \in r_A(a)\} \\ &= \{P \in \text{Ult}(B) \mid (\text{Ult}(f))(P) \ni a\} \\ &= \{P \in \text{Ult}(B) \mid P \ni f(a)\} \\ &= r_B(f(a)). \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer deux propriétés pour que Ult soit un foncteur contravariant.

Comportement vis-à-vis de l'identité :

Soit B une algèbre de Boole. Alors la fonction $\text{Ult}(\text{id}_B)$ est donnée par

$$(\text{id}_B)^{-1} : \text{Ult}(B) \rightarrow \text{Ult}(B).$$

On en tire que $\text{Ult}(\text{id}_B) = \text{id}_{\text{Ult}(B)}$.

Comportement vis-à-vis de la composition :

Soient A, B, C trois algèbres de Boole et soient $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ des homomorphismes d'algèbres de Boole. Alors

$$\text{Ult}(g \circ f) = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} = \text{Ult}(f) \circ \text{Ult}(g).$$

D'où la conclusion. ■

Proposition 2.2.14. *L'application of qui à un espace de Boole X associe l'algèbre de Boole $\text{of}(X)$ et qui à une application continue $\varrho : X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Boole associe $\text{of}(\varrho) = \varrho^{-1}$ est un foncteur contravariant de la catégorie EB dans la catégorie AB .*

Démonstration. Soit X un espace de Boole. La proposition 2.2.8 montre que $\text{of}(X)$ est une algèbre de Boole. Soient Y un deuxième espace de Boole et $\varrho : X \rightarrow Y$ une application continue. Montrons que $\text{of}(\varrho)$ est une flèche de AB , i.e. un homomorphisme d'algèbres de Boole.

On a $\text{of}(\varrho) : \text{of}(Y) \rightarrow \text{of}(X)$:

Soit $O \in \text{of}(Y)$ et montrons que $\varrho^{-1}(O) \in \text{of}(X)$. L'application ϱ étant continue, c'est évident.

L'application $\text{of}(\varrho)$ est un homomorphisme d'algèbres de Boole :

Soient $O, U \in \text{of}(Y)$. On a

– $(\text{of}(\varrho))(O \vee U) = (\text{of}(\varrho))(O \cup U) = \varrho^{-1}(O \cup U) = \varrho^{-1}(O) \cup \varrho^{-1}(U)$. On en tire que

$$(\text{of}(\varrho))(O \vee U) = \varrho^{-1}(O) \vee \varrho^{-1}(U) = (\text{of}(\varrho))(O) \vee (\text{of}(\varrho))(U);$$

– $\text{of}(\varrho)(\neg O) = \text{of}(\varrho)(Y \setminus O) = \varrho^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus \varrho^{-1}(O) = X \setminus \text{of}(\varrho)(O) = \neg(\text{of}(\varrho))(O)$,

ce qui suffit, vu la proposition 2.1.19.

Comportement vis-à-vis de l'identité :

Soit X un espace de Boole. Alors la fonction $\text{of}(\text{id}_X)$ est donnée par

$$(\text{id}_X)^{-1} : \text{of}(X) \rightarrow \text{of}(X).$$

On en tire que $\text{of}(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{of}(X)}$.

Comportement vis-à-vis de la composition :

Soient X, Y, Z trois espaces de Boole et $\varrho : X \rightarrow Y$, $\sigma : Y \rightarrow Z$ des applications continues. Alors

$$\text{of}(\sigma \circ \varrho) = (\sigma \circ \varrho)^{-1} = \varrho^{-1} \circ \sigma^{-1} = \text{of}(\varrho) \circ \text{of}(\sigma).$$

D'où la conclusion. ■

Afin d'obtenir une équivalence duale, il nous reste à prouver les isomorphismes avec les bidiaux et montrer que les diagrammes correspondants sont commutatifs.

Proposition 2.2.15 (AC). *Soit B une algèbre de Boole. Alors l'application*

$$r_B : B \rightarrow \text{of}(X_B) : b \mapsto r_B(b)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Boole.

Démonstration. Vu la proposition 2.1.23, il suffit de montrer que r_B est un isomorphisme d'ordres. Dès lors, on doit prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \leq b$ si, et seulement si, $r_B(a) \leq r_B(b)$ (i.e. $r_B(a) \subseteq r_B(b)$) et que r_B est surjectif.

Soient $a, b \in B$. Supposons avoir $a \leq b$. Il est clair que tout ultrafiltre contenant a contient b , vu la définition d'un ultrafiltre. Donc $r_B(a) \subseteq r_B(b)$.

Réciproquement, si $r_B(a) \subseteq r_B(b)$. Supposons que $a \not\leq b$. Alors $a' \vee b \neq 1$ par la proposition 2.1.10. On en tire qu'il existe un idéal maximal I contenant $a' \vee b$ (cf. corollaire du théorème de Krull 2.1.30). Donc l'ultrafiltre $B \setminus I$ ne contient pas $a' \vee b$. On en tire que $a' \notin B \setminus I$, d'où $a \in B \setminus I$. De plus, $b \notin B \setminus I$. Finalement, on a $B \setminus I \in r_B(a) \setminus r_B(b)$, d'où une contradiction. Donc $a \leq b$.

Il nous reste à montrer que r_B est surjectif. Soit O un ouvert fermé de X_B . Comme c'est un ouvert, il existe $C \subseteq B$ tel que $O = \bigcup_{c \in C} r_B(c)$. De plus, comme O est un fermé dans le compact X_B , c'est un compact. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et $c_1, \dots, c_n \in C$ tels que

$$O = r_B(c_1) \cup \dots \cup r_B(c_n) = r_B(c_1 \vee \dots \vee c_n).$$

Donc r_B est surjectif. Finalement, r_B est un isomorphisme d'algèbres de Boole. ■

Proposition 2.2.16. *Soient B et C deux algèbres de Boole et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r_A} & \text{of} \circ \text{Ult}(A) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{of} \circ \text{Ult}(f) \\ B & \xrightarrow{r_B} & \text{of} \circ \text{Ult}(B) \end{array}$$

Démonstration. Soit $a \in A$. On doit montrer que

$$r_B(f(a)) = \text{of} \circ \text{Ult}(f)(r_A(a)).$$

On a $r_B(f(a)) = \{P \in \text{Ult}(B) \mid P \ni f(a)\}$ et $\text{of} \circ \text{Ult}(f)(r_A(a)) = (f^*)^{-1}(r_A(a))$ si on pose $f^* := \text{Ult}(f)$. On en tire que

$$\begin{aligned} \text{of} \circ \text{Ult}(f)(r_A(a)) &= (f^*)^{-1}(r_A(a)) \\ &= \{P \in \text{Ult}(B) \mid f^*(P) \in r_A(a)\} \\ &= \{P \in \text{Ult}(B) \mid f^*(P) \ni a\} \\ &= \{P \in \text{Ult}(B) \mid P \ni f(a)\}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. ■

Proposition 2.2.17. *Soit X un espace de Boole. Alors l'application*

$$\varepsilon_X : X \rightarrow \text{Ult}(\text{of}(X)) : x \mapsto \varepsilon_X(x) = \{O \in \text{of}(X) \mid O \ni x\}$$

est un isomorphisme d'espaces de Boole, i.e. une bijection continue.

Démonstration. Montrons tout d'abord que ε_X est à valeurs dans $\text{Ult}(\text{of}(X))$. Soit $x \in X$. Nous devons prouver que $\varepsilon_X(x)$ est un ultrafiltre de $\text{of}(X)$. On a $X \in \varepsilon_X(x)$. Ensuite, soient $O \in \varepsilon_X(x)$ et $U \in \text{of}(X)$ tels que $O \subseteq U$. Alors $x \in O \subseteq U$, donc $U \in \varepsilon_X(x)$. Donc $\varepsilon_X(x)$ est croissant. Soient $O_1, O_2 \in \varepsilon_X(x)$. Alors $x \in O_1, x \in O_2$ donc $x \in O_1 \cap O_2$. Autrement dit, $O_1 \cap O_2 \in \varepsilon_X(x)$. On en tire que $\varepsilon_X(x)$ est fermé pour $\wedge$ -fini. Il s'agit donc d'un filtre. De plus, c'est un filtre propre car $\emptyset \notin \varepsilon_X(x)$. Enfin, pour tout $V \in \text{of}(X)$, on a $x \in V$ ou $x \in X \setminus V$, i.e. $V \in \varepsilon_X(x)$ ou $X \setminus V \in \varepsilon_X(x)$, ce qui suffit pour montrer qu'il s'agit d'un ultrafiltre (cf. proposition 2.1.26).

Prouvons à présent que ε_X est injectif. Soient $x, y \in X$ tels que $\varepsilon_X(x) = \varepsilon_X(y)$. Supposons que $x \neq y$. Comme un espace de Boole est séparé et admet une base d'ouverts fermés (par définition), il existe $O \in \text{of}(X)$ tel que $O \ni x$ et $O \not\ni y$. On a alors $O \in \varepsilon_X(x) \setminus \varepsilon_X(y)$. On en tire une contradiction.

L'application $\varepsilon_X : X \rightarrow \text{Ult}(\text{of}(X))$ est surjective. En effet, soit P un ultrafiltre de $\text{of}(X)$. Montrons tout d'abord que $\bigcap_{O \in P} O \neq \emptyset$. Supposons que cette intersection est vide. Alors comme O est fermé pour tout $O \in P$ et vu que X est compact, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $O_1, \dots, O_n \in P$ tels que $O_1 \cap \dots \cap O_n = \emptyset$. Comme P est un ultrafiltre, il est fermé par

intersections finies. On en tire que $\emptyset \in P$, donc P n'est pas propre, ce qui est absurde puisque P est un ultrafiltre dans une algèbre de Boole. On sait donc que

$$\bigcap_{O \in P} O \neq \emptyset.$$

Soit $x \in \bigcap_{O \in P} O$ et montrons que $\varepsilon_X(x) = P$. Comme $\varepsilon_X(x)$ et P sont deux ultrafiltres, il suffit de prouver que $\varepsilon_X(x) \supseteq P$. Soit $O_0 \in P$. On a $x \in \bigcap_{O \in P} O \subseteq O_0$, donc $O_0 \in \varepsilon_X(x)$.

Enfin l'application ε_X est continue, car pour tout $O \in \text{of}(X)$, on a

$$\begin{aligned} (\varepsilon_X)^{-1}(r_{\text{of}(X)}(O)) &= \{x \in X \mid \varepsilon_X(x) \in r_{\text{of}(X)}(O)\} \\ &= \{x \in X \mid \varepsilon_X(x) \ni O\} \\ &= \{x \in X \mid O \ni x\} \\ &= O. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.18. *Soient X et Y deux espaces de Boole et $\varrho : X \rightarrow Y$ une application continue. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \text{Ult} \circ \text{of}(X) \\ \varrho \downarrow & & \downarrow \text{Ult} \circ \text{of}(\varrho) \\ Y & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & \text{Ult} \circ \text{of}(Y) \end{array}$$

Démonstration. Soit $x \in X$. On doit montrer que

$$\varepsilon_Y(\varrho(x)) = \text{Ult} \circ \text{of}(\varrho)(\varepsilon_X(x)).$$

On a $\varepsilon_Y(\varrho(x)) = \{O \in \text{of}(Y) \mid O \ni \varrho(x)\}$ et $\text{Ult} \circ \text{of}(\varrho)(\varepsilon_X(x)) = (\varrho^\star)^{-1}(\varepsilon_X(x))$ si on pose $\varrho^\star := \text{of}(\varrho)$. On en tire que

$$\begin{aligned} \text{Ult} \circ \text{of}(\varrho)(\varepsilon_X(x)) &= (\varrho^\star)^{-1}(\varepsilon_X(x)) \\ &= \{O \in \text{of}(Y) \mid \varrho^\star(O) \in \varepsilon_X(x)\} \\ &= \{O \in \text{of}(Y) \mid \varrho^\star(O) \ni x\} \\ &= \{O \in \text{of}(Y) \mid O \ni \varrho(x)\}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. ■

Toutes ces propositions mènent à l'équivalence duale.

Théorème 2.2.19 (AC). *Les foncteurs contravariants Ult et of établissent une équivalence duale entre la catégorie AB et la catégorie EB .*

Concluons cette section par une dernière proposition. Il s'agit d'une caractérisation des algèbres de Boole complètes qui nécessite le passage à l'espace dual.

Proposition 2.2.20. *Soient B une algèbre de Boole et X son espace dual. Soient I une famille d'indices et $\{O_i \mid i \in I\}$ une famille d'ouverts fermés de X . Posons $U := \bigcup_{i \in I} O_i$. Alors $\bigvee_{i \in I} O_i$ existe si, et seulement si, U^- est un ouvert. Dans ce cas, $\bigvee_{i \in I} O_i = U^-$.*

Démonstration. Si $O := \bigvee_{i \in I} O_i$ existe, alors $O \in \text{of}(X)$. De plus, $O_i \subseteq O \forall i \in I$, donc $U \subseteq O$. Comme O est fermé, on a $U^- \subseteq O$. Vu que O est également ouvert et comme un ouvert moins un fermé est un ouvert, $O \setminus U^-$ est ouvert. Si cet ouvert est non vide, il contient un ouvert fermé V non vide (puisque X est un espace de Boole et admet donc une base d'ouverts fermés). On en tire que $O \setminus V$ est un ouvert fermé (vu qu'un fermé moins un ouvert est un fermé) inclus strictement dans O tel que $O_i \subseteq O \setminus V \forall i \in I$. Ceci contredit la définition de O , qui est le supremum des O_i ($i \in I$). On en tire que $U^- = O$ et donc U^- est un ouvert.

Réciproquement, si U^- est ouvert, il s'agit évidemment d'un ouvert fermé contenant O_i pour tout $i \in I$. Si O est un ouvert fermé contenant $O_i \forall i \in I$, alors $U \subseteq O$ et vu que O est fermé, on a $U^- \subseteq O$. On en tire que U^- est le supremum des O_i ($i \in I$) dans $\text{of}(X) \simeq B$. ■

2.2.2 Espace dual d'une algèbre multimodale

Dans le chapitre 3, nous définissons une relation de contact sur les algèbres de Boole. On peut montrer que cette relation est un multiopérateur. Il est donc pertinent de regarder ce que devient le contact lorsqu'on passe à l'espace dual de l'algèbre de Boole. C'est le but de cette partie du travail.

Définition 2.2.21. Soient L, M deux treillis bornés. Un multiopérateur $p : L \rightarrow M$ est une fonction (aussi notée p) de L dans le treillis $(\text{Ft}(M))^\delta$ des filtres de M avec l'inclusion inverse, telle que

- $p(x \vee y) = p(x) \vee p(y)$ pour tous $x, y \in L$;
- $p(0) = 0$.

Remarquons que puisqu'on utilise l'inclusion inverse, en réalité, on a $p(x \vee y) = p(x) \cap p(y)$ ($x, y \in L$) et $p(0) = M$.

Définition 2.2.22. Soit B une algèbre de Boole et $p : B \rightarrow B$ un multiopérateur. Alors (B, p) est une *algèbre multimodale*.

Définition 2.2.23. Soit X un espace de Boole et R une relation binaire incluse dans X^2 fermée pour la topologie produit. Alors (X, R) est un *espace multimodal*.

Notations. Si (X, R) est un espace multimodal, on pose

$$R(x, -) := \{y \in X \mid xRy\} \quad \text{et} \quad R(-, x) := \{y \in X \mid yRx\}$$

pour tout $x \in X$. De plus, si $Y \subseteq X$, on pose

$$R(Y, -) := \{x \in X \mid \exists y \in Y : yRx\} \quad \text{et} \quad R(-, Y) := \{x \in X \mid \exists y \in Y : xRy\}.$$

Définition 2.2.24. Soient (B, p) une algèbre multimodale et X l'espace dual de B . On définit la relation R_p sur X comme suit :

$$PR_pQ \Leftrightarrow \forall a, b \in B, (P \ni a \text{ et } b \in p(a)) \Rightarrow Q \ni b$$

pour tous $P, Q \in X (= \text{Ult}(B))$.

Proposition 2.2.25. Soient (B, p) une algèbre multimodale et X l'espace dual de B . Alors l'espace (X, R_p) est un espace multimodal.

Démonstration. Il suffit de prouver que R_p est fermé dans X^2 , c'est-à-dire que son complémentaire est ouvert. Soient $P, Q \in X$ tels que $(P, Q) \notin R_p$. Alors il existe $a, b \in B$ tels que $a \in P$, $b \in p(a)$ et $b \notin Q$. On en tire que $P \in r_B(a)$ et $Q \in X \setminus r_B(b) = r_B(b')$. Donc $(P, Q) \in r_B(a) \times r_B(b')$. On a donc trouvé un voisinage de (P, Q) . Montrons qu'il est disjoint de R_p . Soit $(S, T) \in r_B(a) \times r_B(b')$. Alors $a \in S$ et $b \notin T$. Or, $b \in p(a)$, donc $(S, T) \notin R_p$. On en tire que le complémentaire de R_p est un voisinage de chacun de ses points, ce qui permet de conclure. ■

Définition 2.2.26. Soient (X, R) un espace multimodal et B l'algèbre de Boole duale de X . On définit l'opérateur p_R comme suit :

$$U \in p_R(O) \Leftrightarrow R(O, -) \subseteq U$$

pour tous $O, U \in B = \text{of}(X)$.

Proposition 2.2.27. Soient (X, R) un espace multimodal et B l'algèbre de Boole duale de X . Alors l'algèbre (B, p_R) est une algèbre multimodale.

Démonstration. Montrons que $p_R : B \rightarrow B$ est un multiopérateur.

On a $p_R : B \rightarrow (\text{Ft}(B))^\delta$:

Soit $O \in B = \text{of}(X)$. Alors $p_R(O)$ est un filtre de B car

- $X \in p_R(O)$;
- si $U_1, U_2 \in p_R(O)$, alors $R(O, -) \subseteq U_1, U_2$, donc $R(O, -) \subseteq U_1 \cap U_2$. On en tire que $U_1 \cap U_2 \in p_R(O)$;
- si $U \in p_R(O)$ et $V \in B$ tels que $V \supseteq U$, alors $R(O, -) \subseteq U \subseteq V$ donc $V \in p_R(O)$.

Comportement vis-à-vis du supremum :

Soient $O, U \in B$. On doit montrer que $p_R(O \cup U) = p_R(O) \cap p_R(U)$. Soit $V \in B$. On a

$$\begin{aligned} V \in p_R(O \cup U) &\Leftrightarrow R(O \cup U, -) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow R(O, -) \subseteq V \text{ et } R(U, -) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow V \in p_R(O) \cap p_R(U). \end{aligned}$$

Comportement vis-à-vis du 0 :

On doit montrer que $p_R(\emptyset) = B$. Soit $O \in B$. On a

$$\begin{aligned} O \in p_R(\emptyset) &\Leftrightarrow R(\emptyset, -) \subseteq O \\ &\Leftrightarrow \forall y \in X (\exists x \in \emptyset \text{ tel que } xRy \Rightarrow y \in O). \end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in X$, la phrase « $\exists x \in \emptyset$ tel que xRy » est toujours fausse. Donc la phrase « $\forall y \in X (\exists x \in \emptyset \text{ tel que } xRy \Rightarrow y \in O)$ » est toujours vraie. On en tire que pour tout $O \in B$, on a $O \in p_R(\emptyset)$.

On peut donc conclure. ■

La proposition suivante est un fait général concernant les multiopérateurs qui nous sera utile pour prouver l'équivalence duale.

Proposition 2.2.28 (AC). *Soient (B, p) une algèbre multimodale et (X, R_p) l'espace multimodal associé. Soit $b \in B$. On a*

$$R_p(r_B(b), -) = \bigcap_{a \in p(b)} r_B(a).$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que

$$\bigcap_{a \in p(b)} r_B(a) = \{P \in \text{Ult}(B) \mid P \supseteq p(b)\}.$$

Procédons par double inclusion. Soit $P \in R_p(r_B(b), -)$. Alors il existe $Q \in r_B(b)$ tel que QR_pP . Autrement dit, pour tous $c, d \in B$, si $c \in Q$ et $d \in p(c)$, alors $d \in P$. Or, $b \in Q$. On en tire que $p(b) \subseteq P$, donc

$$R_p(r_B(b), -) \subseteq \bigcap_{a \in p(b)} r_B(a).$$

Il nous reste à prouver que

$$R_p(r_B(b), -) \supseteq \bigcap_{a \in p(b)} r_B(a).$$

Soit $P \in \text{Ult}(B)$ tel que $P \notin R_p(r_B(b), -)$. Alors pour tout $Q \in r_B(b)$, on a $Q \not R_p P$. Donc pour tout $Q \in r_B(b)$, il existe $a_Q \in Q$, $b_Q \in p(a_Q)$ tels que $b_Q \notin P$. Cela revient à dire que

pour tout $Q \in r_B(b)$, il existe $a_Q \in Q$, $b_Q \in p(a_Q)$ tels que $b_Q \in B \setminus P$. Notons que par les propositions 2.1.27 et 1.2.71, $B \setminus P$ est un idéal maximal. Posons

$$\mathcal{P} := \{r_B(a_Q) \mid Q \in r_B(b)\} = \bigcup_{Q \in r_B(b)} r_B(a_Q).$$

Comme $Q \ni a_Q$ pour tout $Q \in r_B(b)$, on voit que $Q \in r_B(a_Q)$ et on en tire que $\mathcal{P}$ est un recouvrement ouvert de $r_B(b)$. L'ensemble $r_B(b)$ étant fermé dans l'espace topologique X qui est compact, il s'agit d'un compact. Il existe donc $Q_1, \dots, Q_n \in r_B(b)$ ($n \in \mathbb{N}$) tels que

$$r_B(b) \subseteq r_B(a_{Q_1}) \cup \dots \cup r_B(a_{Q_n}) = r_B(a_{Q_1} \vee \dots \vee a_{Q_n}),$$

en appliquant la proposition 2.2.3. L'application r_B étant un isomorphisme d'algèbres de Boole (cf. proposition 2.2.15), il s'agit en particulier d'un isomorphisme d'ordres (voir proposition 2.1.23). On en tire que $b \leq a_{Q_1} \vee \dots \vee a_{Q_n}$. Posons $a := a_{Q_1} \vee \dots \vee a_{Q_n}$. On a

$$p(a) = p(a_{Q_1} \vee \dots \vee a_{Q_n}) = p(a_{Q_1}) \cap \dots \cap p(a_{Q_n})$$

par définition d'un multiopérateur. De plus, si on pose $\beta := b_{Q_1} \vee \dots \vee b_{Q_n}$, on a $\beta \geq b_{Q_i}$ pour tout $i \leq n$, $b_{Q_i} \in p(a_{Q_i})$ pour tout $i \leq n$ et puisque $p(a_{Q_i})$ est un filtre pour tout $i \leq n$, c'est une partie croissante, d'où $\beta \in p(a_{Q_i})$ pour tout $i \leq n$ et donc $\beta \in p(a)$. Comme $b_{Q_i} \in B \setminus P$ pour tout $i \leq n$, on a $\beta = b_{Q_1} \vee \dots \vee b_{Q_n} \in B \setminus P$, ce dernier étant un idéal de B . De $b \leq a$, on tire que $p(a) = p(a \vee b) = p(a) \cap p(b)$, d'où $p(a) \subseteq p(b)$. Comme $\beta \in p(a)$, on a $\beta \in p(b)$. De plus, $\beta \in B \setminus P$, donc $\beta \notin P$. On en tire que $P \notin r_B(\beta)$ et donc $P \notin \bigcap_{a \in p(b)} r_B(a)$, ce qui permet de conclure. ■

Définissons les catégories avec lesquelles nous allons travailler.

Définition 2.2.29. La catégorie des algèbres multimodales, notée AMM , est la catégorie dont les objets sont les algèbres multimodales et dont les flèches sont les homomorphismes d'algèbres de Boole $f : (A, p_A) \rightarrow (B, p_B)$ tels que

$$p_B(f(a)) = (f(p_A(a))) \uparrow$$

pour tout $a \in A$.

Remarque 2.2.30. Il s'agit bien d'une catégorie : il suffit de considérer la loi de composition classique entre les homomorphismes et la flèche identité est donnée par l'identité habituelle, puisqu'un filtre est une partie croissante. Montrons que la composée de deux flèches est bien une flèche. Soient $(A, p_A), (B, p_B), (C, p_C)$ des algèbres multimodales et $f : (A, p_A) \rightarrow (B, p_B)$ et $g : (B, p_B) \rightarrow (C, p_C)$ des homomorphismes d'algèbres de Boole tels que pour tous $a \in A, b \in B$

$$p_B(f(a)) = (f(p_A(a))) \uparrow \quad \text{et} \quad p_C(g(b)) = (g(p_B(b))) \uparrow.$$

Fixons a dans A et montrons que $((g \circ f)(p_A(a))) \uparrow = p_C((g \circ f)(a))$. Remarquons tout d'abord que

$$p_C((g \circ f)(a)) = p_C(g(f(a))) = (g(p_B(f(a)))) \uparrow.$$

Si $b \in ((g \circ f)(p_A(a))) \uparrow$, il existe $c \in (g \circ f)(p_A(a))$ tel que $b \geq c$. Dès lors, il existe $d \in p_A(a)$ tel que $c = g(f(d))$. On en tire que $b \geq g(f(d))$, d'où

$$b \in (g(f(p_A(a)))) \uparrow \subseteq (g((f(p_A(a))) \uparrow)) \uparrow = (g(p_B(f(a)))) \uparrow.$$

Si à présent $b \in p_C((g \circ f)(a)) = (g(p_B(f(a)))) \uparrow$, alors il existe $c \in g(p_B(f(a)))$ tel que $b \geq c$. Dès lors, on peut trouver $d \in p_B(f(a))$ tel que $g(d) = c$. Or, comme on a $p_B(f(a)) = (f(p_A(a))) \uparrow$, on voit qu'il existe $e \in f(p_A(a))$ tel que $d \geq e$. Comme g est un homomorphisme d'algèbres de Boole, c'est un homomorphisme d'ordres (cf. proposition 2.1.21), donc $g(e) \leq g(d) = c$. On en tire que $g(e) \leq b$, d'où la conclusion.

Définition 2.2.31. La catégorie des espaces multimodaux, notée EMM , est la catégorie dont les objets sont les espaces multimodaux et les flèches sont les applications continues entre espaces de Boole $\varrho : (X, R_X) \rightarrow (Y, R_Y)$ telles que $\varrho(R_X(-, x)) = R_Y(-, \varrho(x))$ pour tout $x \in X$.

Remarque 2.2.32. C'est bien une catégorie, puisqu'il suffit de considérer la loi de composition usuelle entre applications continues et la fonction identité comme neutre.

Montrons à présent que les foncteurs contravariants Ult et of de la section précédente conviennent pour nos nouvelles catégories.

Proposition 2.2.33. *L'application Ult qui à une algèbre multimodale (B, p_B) associe l'espace multimodal $(\text{Ult}(B), R_{p_B})$ et qui à un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ d'algèbres de Boole (avec (A, p_A) et (B, p_B) deux algèbres multimodales), tel que $p_B(f(a)) = (f(p_A(a))) \uparrow$ pour tout $a \in A$, associe $\text{Ult}(f) = f^{-1}$ est un foncteur contravariant de la catégorie AMM dans la catégorie EMM .*

Démonstration. Soit (B, p_B) une algèbre multimodale. La proposition 2.2.25 montre que $(\text{Ult}(B), R_{p_B})$ est un espace multimodal. Soient (A, p_A) une deuxième algèbre multimodale et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole tel que $p_B(f(a)) = (f(p_A(a))) \uparrow$ pour tout $a \in A$. Par la proposition 2.2.13, on sait que $\text{Ult}(f) : \text{Ult}(B) \rightarrow \text{Ult}(A)$ est une application continue. Il nous reste donc à prouver que

$$(\text{Ult}(f))(R_{p_B}(-, y)) = R_{p_A}(-, \text{Ult}(f)(y))$$

pour tout $y \in \text{Ult}(B)$. Soit $y \in \text{Ult}(B)$. Procédons par double inclusion. Soit $x \in \text{Ult}(B)$ tel que $x R_{p_B} y$. Montrons que $\text{Ult}(f)(x) R_{p_A} \text{Ult}(f)(y)$. On doit montrer que pour tous $c, d \in A$, si $\text{Ult}(f)(x) \ni c$ et $d \in p_A(c)$, alors $\text{Ult}(f)(y) \ni d$. On sait que pour tous $a, b \in B$, on a

$$(x \ni a \text{ et } b \in p_A(a)) \Rightarrow y \ni b.$$

Soient $c, d \in A$. On a

$$\begin{aligned} \text{Ult}(f)(x) \ni c \text{ et } d \in p_A(c) &\Rightarrow f^{-1}(x) \ni c \text{ et } f(d) \in f(p_A(c)) \\ &\Rightarrow x \ni f(c) \text{ et } f(d) \in p_B(f(c)) \\ &\Rightarrow y \ni f(d) \\ &\Rightarrow \text{Ult}(f)(y) = f^{-1}(y) \ni d. \end{aligned}$$

On en tire que $(\text{Ult}(f))(R_{p_B}(-, y)) \subseteq R_{p_A}(-, \text{Ult}(f)(y))$.

Soit à présent $z \in \text{Ult}(A)$ tel que $z R_{p_A} \text{Ult}(f)(y)$. A-t-on $z \in (\text{Ult}(f))(R_{p_B}(-, y))$? Puisque f est continu et que R_{p_B} est fermé, on sait que $(\text{Ult}(f))(R_{p_B}(-, y))$ est fermé. Montrons donc que tout voisinage de z rencontre cet ensemble. Alors z sera dans son adhérence et comme il s'agit d'un fermé, z sera dans l'ensemble lui-même. Comme $\{r_A(a) \mid a \in A\}$ est une base d'ouverts fermés de $\text{Ult}(A)$, il suffit de montrer que pour tout $a \in A$ tel que $r_A(a)$ est un voisinage de z , on a $r_A(a) \cap (\text{Ult}(f))(R_{p_B}(-, y)) \neq \emptyset$. Soit $a \in A$ tel que $r_A(a)$ est un voisinage de z . En appliquant la proposition 2.2.28, on trouve

$$\begin{aligned} z R_{p_B} \text{Ult}(f)(y) &\Rightarrow \text{Ult}(f)(y) \in R_{p_A}(r_A(a), -) \\ &\Rightarrow \text{Ult}(f)(y) \in r_A(b) \forall b \in p_A(a) \\ &\Rightarrow \text{Ult}(f)(y) \ni b \forall b \in p_A(a) \\ &\Rightarrow \text{Ult}(f)(y) \supseteq p_A(a) \\ &\Rightarrow y \supseteq f(p_A(a)) \\ &\Rightarrow y \supseteq (f(p_A(a)))^\uparrow && \text{(car } y \text{ est un filtre)} \\ &\Rightarrow y \supseteq p_B(f(a)) && \text{(par hypothèse).} \end{aligned}$$

On tire de la proposition 2.2.28 que si $y \supseteq p_B(f(a))$, alors il existe $x \in \text{Ult}(B)$ tel que $x \ni f(a)$ et $x R_{p_B} y$. On a donc

$$\begin{aligned} z R_{p_B} \text{Ult}(f)(y) &\Rightarrow y \supseteq p_B(f(a)) \\ &\Rightarrow \exists x \in \text{Ult}(B) : x \ni f(a), x R_{p_B} y \\ &\Rightarrow \exists x \in \text{Ult}(B) : \text{Ult}(f)(x) \ni a, x R_{p_B} y \\ &\Rightarrow \exists x \in \text{Ult}(B) : \text{Ult}(f)(x) \in r_A(a) \cap \text{Ult}(f)(R_{p_B}(-, y)), \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

Proposition 2.2.34. *L'application of qui à un espace multimodal (X, R) associe l'algèbre multimodale $(of(X), p_R)$ et qui à une application continue $\varrho : X \rightarrow Y$ où (X, R_X) et (Y, R_Y) sont deux espaces multimodaux, telle que $\varrho(R_X(-, x)) = R_Y(-, \varrho(x))$ pour tout $x \in X$, associe $of(\varrho) = \varrho^{-1}$ est un foncteur contravariant de la catégorie EMM dans la catégorie AMM.*

Démonstration. Soit (X, R_X) un espace multimodal. La proposition 2.2.27 montre que $(of(X), p_{R_X})$ est une algèbre multimodale. Soient (Y, R_Y) un deuxième espace multimodal

et $\varrho : X \rightarrow Y$ une application continue telle que $\varrho(R_X(-, x)) = R_Y(-, \varrho(x))$ pour tout $x \in X$. Par la proposition 2.2.14, on sait que $\text{of}(\varrho) : \text{of}(Y) \rightarrow \text{of}(X)$ est un homomorphisme d'algèbres de Boole. Il nous reste donc à prouver que

$$((\text{of}(\varrho))(p_{R_Y}(O))) \uparrow = p_{R_X}((\text{of}(\varrho))(O))$$

pour tout $O \in \text{of}(Y)$. Fixons $O \in \text{of}(Y)$. On a $R_X(\varrho^{-1}(O), -) = \varrho^{-1}(R_Y(O, -))$. En effet, si $y \in R_X(\varrho^{-1}(O), -)$, il existe $x \in \varrho^{-1}(O)$ tel que xR_Xy . On en tire que $\varrho(x)R_Y\varrho(y)$ et puisque $x \in \varrho^{-1}(O)$, on a $\varrho(x) \in O$ et on voit que $\varrho(y) \in R_Y(O, -)$. On a donc $R_X(\varrho^{-1}(O), -) \subseteq \varrho^{-1}(R_Y(O, -))$. De plus, si $y \in \varrho^{-1}(R_Y(O, -))$, alors il existe $x \in O$ tel que $xR_Y\varrho(y)$. Par hypothèse sur ϱ , il existe $z \in X$ tel que $x = \varrho(z)$ et zR_Xy . On a donc $z \in \varrho^{-1}(O)$ et donc $y \in R_X(\varrho^{-1}(O), -)$. Montrons par double inclusion que

$$((\text{of}(\varrho))(p_{R_Y}(O))) \uparrow = p_{R_X}((\text{of}(\varrho))(O)).$$

Soit $U \in ((\text{of}(\varrho))(p_{R_Y}(O))) \uparrow$. Alors il existe $V \in (\text{of}(\varrho))(p_{R_Y}(O))$ tel que $V \subseteq U$. Comme $p_{R_X}(\text{of}(\varrho)(O))$ est un ultrafiltre, il suffit de montrer que V en est un élément, car dans ce cas, U appartiendra également à cet ensemble. Montrons donc que

$$(\text{of}(\varrho))(p_{R_Y}(O)) \subseteq p_{R_X}((\text{of}(\varrho))(O)).$$

Soit $W \in p_{R_Y}(O)$ et prouvons que $(\text{of}(\varrho))(W) \in p_{R_X}((\text{of}(\varrho))(O))$. Autrement dit, démontrons que $R_X((\text{of}(\varrho))(O), -) \subseteq (\text{of}(\varrho))(W)$. Par ce qui précède, on a

$$R_X((\text{of}(\varrho))(O), -) = R_X(\varrho^{-1}(O), -) = \varrho^{-1}(R_Y(O, -)) = (\text{of}(\varrho))(R_Y(O, -)).$$

Comme $W \in p_{R_Y}(O)$, on a $R_Y(O, -) \subseteq W$. Donc

$$R_X((\text{of}(\varrho))(O), -) = (\text{of}(\varrho))(R_Y(O, -)) \subseteq (\text{of}(\varrho))(W).$$

Pour terminer, montrons que

$$p_{R_X}((\text{of}(\varrho))(O)) \subseteq ((\text{of}(\varrho))(p_{R_Y}(O))) \uparrow.$$

Soit $U \in p_{R_X}((\text{of}(\varrho))(O))$. Alors $R_X((\text{of}(\varrho))(O), -) \subseteq U$, d'où $\varrho^{-1}(R_Y(O, -)) \subseteq U$. On en tire que

$$X \setminus U \subseteq X \setminus \varrho^{-1}(R_Y(O, -)) \subseteq \varrho^{-1}(Y \setminus R_Y(O, -)).$$

On a donc $\varrho(X \setminus U) \subseteq Y \setminus R_Y(O, -)$, i.e. $R_Y(O, -) \subseteq Y \setminus \varrho(X \setminus U)$. Comme R_Y est une relation fermée, on sait que $R_Y(O, -)$ est fermé. De plus, comme U est un ouvert fermé de X , il en est de même pour $X \setminus U$. Vu que X est un espace compact, l'ensemble $X \setminus U$ est compact. Puisque ϱ est continu, $\varrho(X \setminus U)$ est fermé et son complémentaire (dans Y) est donc ouvert. On a donc un fermé inclus dans un ouvert. L'espace Y étant un espace de Boole, pour tout $y_i \in R_Y(O, -)$ (I famille d'indices), il existe $W_i \in \text{of}(Y)$ tel que $y_i \in W_i \subseteq Y \setminus \varrho(X \setminus U)$. On en tire que $R_Y(O, -) \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$. L'espace Y étant compact, il existe $J \subseteq I$ fini tel que

$R_Y(O, -) \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j$. Toute union finie d'ouverts fermés étant un ouvert fermé, on voit qu'il existe $W \in \text{of}(Y)$ tel que $R_Y(O, -) \subseteq W \subseteq Y \setminus \varrho(X \setminus U)$. On en tire que $W \in p_{R_Y}(O)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} W \subseteq Y \setminus \varrho(X \setminus U) &\Rightarrow \varrho(X \setminus U) \subseteq Y \setminus W \\ &\Rightarrow X \setminus U \subseteq \varrho^{-1}(Y \setminus W) \subseteq X \setminus \varrho^{-1}(W) \\ &\Rightarrow \varrho^{-1}(W) \subseteq U \\ &\Rightarrow (\text{of}(\varrho))(W) \subseteq U. \end{aligned}$$

Au final, on obtient $U \in ((\text{of}(\varrho))(p_{R_Y}(O)))^\uparrow$, d'où la conclusion. $\blacksquare$

Montrons enfin les isomorphismes avec les biduaux, ainsi que la commutativité des diagrammes correspondants. Nous aurons ainsi établi l'équivalence duale recherchée entre les catégories AMM et EMM.

Proposition 2.2.35 (AC). *Toute algèbre multimodale (B, p) est isomorphe à son bidual*

$$(\text{of}(\text{Ult}(B)), p_{R_p}).$$

Démonstration. Soit (B, p) une algèbre multimodale. Grâce à la proposition 2.2.15, on sait que la fonction r_B est un isomorphisme d'algèbres de Boole entre B et $\text{of}(\text{Ult}(B))$. Il nous reste donc à prouver que pour tout $b \in B$, on a

$$r_B(p(b)) = p_{R_p}(r_B(b)).$$

Soit $b \in B$. Procédons par double inclusion. Tout d'abord, soit $a \in p(b)$ et montrons que $r_B(a) \in p_{R_p}(r_B(b))$, i.e. que $R_p(r_B(b), -) \subseteq r_B(a)$. Soit $P \in R_p(r_B(b), -)$. Alors il existe $Q \in r_B(b)$ tel que QR_pP . On a $b \in Q$ et $a \in p(b)$. Par définition de QR_pP , on a $a \in P$. Donc $P \in r_B(a)$. On en tire que

$$r_B(p(b)) \subseteq p_{R_p}(r_B(b)).$$

Soit à présent $O \in p_{R_p}(r_B(b))$. Comme r_B est un isomorphisme, il existe $a \in B$ tel que $O = r_B(a) \in p_{R_p}(r_B(b))$. On a $r_B(a) \in p_{R_p}(r_B(b))$, donc $R_p(r_B(b), -) \subseteq r_B(a)$. En appliquant la proposition 2.2.28, on trouve $\{P \in \text{Ult}(B) \mid P \supseteq p(b)\} \subseteq r_B(a)$. Procédons par l'absurde et supposons que $a \notin p(b)$. Comme $p(b)$ est un filtre et que $a \downarrow$ est un idéal disjoint de $p(b)$, par le théorème de Stone 2.1.31, il existe un idéal maximal Q tel que $a \downarrow \subseteq Q$ et $Q \cap p(b) = \emptyset$. Vu que Q est un idéal maximal, $B \setminus Q$ est un ultrafiltre. De plus, on a $p(b) \subseteq B \setminus Q$. Par hypothèse, on a $B \setminus Q \in r_B(a)$, i.e. $a \in B \setminus Q$. Or, $a \in a \downarrow \subseteq Q$. On en tire une contradiction. Finalement, $a \in p(b)$ et $O = r_B(a) \in r_B(p(b))$. Ceci montre que

$$r_B(p(b)) \supseteq p_{R_p}(r_B(b)),$$

d'où la conclusion. $\blacksquare$

Proposition 2.2.36. Soient (A, p_A) et (B, p_B) deux algèbres multimodales et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole tel que $(f(p_A(a))) \uparrow = p_B(f(a))$ pour tout $a \in A$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (A, p_A) & \xrightarrow{r_A} & (of \circ Ult(A), p_{R_{p_A}}) \\ f \downarrow & & \downarrow of \circ Ult(f) \\ (B, p_B) & \xrightarrow{r_B} & (of \circ Ult(B), p_{R_{p_B}}) \end{array}$$

Démonstration. Cela découle directement de la proposition 2.2.16 puisqu'il s'agit des mêmes fonctions que celles utilisées pour la dualité de Stone. ■

Proposition 2.2.37. Tout espace multimodal (X, R) est isomorphe à son bidual

$$(Ult(of(X)), R_{p_R}).$$

Démonstration. Soit (X, R) un espace multimodal. Grâce à la proposition 2.2.17, on sait que la fonction ε_X est une bijection continue entre X et $Ult(of(X))$. Il nous reste donc à prouver que pour tous $x, y \in X$, on a

$$xRy \Leftrightarrow \varepsilon_X(x)R_{p_R}\varepsilon_X(y).$$

Soient $x, y \in X$. On a $\varepsilon_X(x)R_{p_R}\varepsilon_X(y)$ si, et seulement si, pour tous $O, U \in of(X)$,

$$(\varepsilon_X(x) \ni O \text{ et } U \in p_R(O)) \Rightarrow \varepsilon_X(y) \ni U.$$

Autrement dit, on a $\varepsilon_X(x)R_{p_R}\varepsilon_X(y)$ si, et seulement si, pour tous $O, U \in of(X)$,

$$(x \in O \text{ et } R(O, -) \subseteq U) \Rightarrow y \in U.$$

Supposons que xRy . Soient $O, U \in of(X)$ tels que $x \in O$ et $R(O, -) \subseteq U$. Comme xRy , on a $y \in R(O, -)$ donc $y \in U$. On en tire que $\varepsilon_X(x)R_{p_R}\varepsilon_X(y)$.

Supposons à présent que $\varepsilon_X(x)R_{p_R}\varepsilon_X(y)$. Prouvons que $(x, y) \in R$. Procédons par l'absurde et supposons que $(x, y) \notin R$. Comme R est fermé, son complémentaire est ouvert et il existe donc deux ouverts fermés $O, U \in of(X)$ (de base, puisque X est un espace de Boole) tels que $(x, y) \in O \times U$ et $O \times U \cap R = \emptyset$. Cette dernière affirmation peut se réécrire $R(O, -) \subseteq X \setminus U$. Comme $x \in O$, l'hypothèse nous dit que $y \in X \setminus U$. D'où une contradiction. ■

Proposition 2.2.38. Soient X et Y deux espaces de Boole et $\varrho : X \rightarrow Y$ une application continue. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (X, R_X) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & (Ult \circ of(X), R_{p_{R_X}}) \\ \varrho \downarrow & & \downarrow Ult \circ of(\varrho) \\ (Y, R_Y) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & (Ult \circ of(Y), R_{p_{R_Y}}) \end{array}$$

Démonstration. Cela découle directement de la proposition 2.2.18 puisqu'il s'agit des mêmes fonctions que celles utilisées pour la dualité de Stone. ■

Toutes ces propositions mènent à l'équivalence duale :

Théorème 2.2.39 (AC). *Les foncteurs contravariants Ult et of établissent une équivalence duale entre la catégorie AMM et la catégorie EMM .*

Chapitre 3

Algèbre de Boole de contact

Ce chapitre est consacré aux algèbres de Boole de contact et de pré-contact. La première partie a pour but de démontrer le théorème de représentation établi par Ivo Düntsch et Michael Winter dans l'article [9]. Dans la seconde section, nous établissons un théorème similaire dans les algèbres de Boole de pré-contact.

3.1 Relation de contact symétrique

Afin d'établir le théorème de représentation, les notions de clan et de cluster ont été introduites. Après avoir donné quelques propriétés de ces concepts, nous donnons une preuve du théorème de représentation différente de celle établie dans [9].

3.1.1 Premières définitions

Commençons par définir une algèbre de Boole de contact.

Définition 3.1.1. Une *algèbre de Boole de contact* est une algèbre de Boole B munie d'une relation de disjonction $\perp$ binaire telle que pour tous $a, b, c, d \in B$,

$\perp 1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $b \perp c$, alors $a \perp d$;

$\perp 2$: si $a \perp c, a \perp d, b \perp c$ et $b \perp d$, alors $a \vee b \perp c \vee d$;

$\perp 3$: $0 \perp 1$;

$\perp 4$: $1 \perp 0$;

$\perp 5$: si $a \perp a$, alors $a = 0$;

$\perp 6$: si $a \perp b$, alors $b \perp a$;

$\perp 7$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \not\leq e$ et $b \perp e$.

Par souci de facilité, pour prouver qu'une algèbre de Boole avec une certaine relation est une algèbre de Boole de contact, on privilégiera parfois le fait de ne pas être disjoints, c'est-à-dire être en contact, ce que l'on notera par $\mathcal{C}$. Autrement dit, on pose $\mathcal{C} := \not\perp$

et on dit que $\mathcal{C}$ est une *relation de contact*. En contraposant les axiomes $\perp 1, 2, 5$ et 6 et en recopiant les axiomes $\perp 3, 4$ et 7 en remplaçant $\not\perp$ par $\mathcal{C}$ et $\perp$ par $\not\mathcal{C}$, on obtient une nouvelle liste d'axiomes, qu'on numérote de $\mathcal{C}1$ à $\mathcal{C}7$. Pour vérifier qu'une algèbre de Boole munie d'une relation est une algèbre de Boole de contact, on pourra indifféremment vérifier les axiomes $\perp$ ou $\mathcal{C}$, qui sont un à un équivalents (i.e. $\perp 1$ équivaut à $\mathcal{C}1, \dots, \perp 7$ est équivalent à $\mathcal{C}7$).

Voici la liste des axiomes écrits dans la version du contact : pour tous $a, b, c, d \in B$,

$\mathcal{C}1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $a \mathcal{C} d$, alors $b \mathcal{C} c$;

$\mathcal{C}2$: si $a \vee b \mathcal{C} c \vee d$, alors $a \mathcal{C} c$ ou $a \mathcal{C} d$ ou $b \mathcal{C} c$ ou $b \mathcal{C} d$;

$\mathcal{C}3$: $0 \not\mathcal{C} 1$;

$\mathcal{C}4$: $1 \not\mathcal{C} 0$;

$\mathcal{C}5$: si $a \neq 0$, alors $a \mathcal{C} a$;

$\mathcal{C}6$: si $a \mathcal{C} b$, alors $b \mathcal{C} a$;

$\mathcal{C}7$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \mathcal{C} e$ et $b \not\mathcal{C} e$.

On appellera indifféremment $(B, \perp)$ ou $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact sans confusion possible, puisque connaître $\mathcal{C}$ est équivalent à connaître $\perp$.

Remarque 3.1.2. Soient B une algèbre de Boole et $\mathcal{C}$ une relation binaire sur B vérifiant les axiomes $\mathcal{C}1$ à $\mathcal{C}5$. Alors $\mathcal{C}$ vérifie l'axiome $\mathcal{C}7$ si, et seulement si, pour tout $a \in B$

$$a \neq 1 \Rightarrow \exists b \neq 0 : a \mathcal{C} b. \quad (3.1)$$

En effet, si l'axiome $\mathcal{C}7$ est vérifié, soit $a \in B$ avec $a \neq 1$. Alors $1 \not\leq a$ et il existe $b \in B$ tel que $1 \mathcal{C} b$ et $a \not\mathcal{C} b$. Au vu de l'axiome $\mathcal{C}4$, on a $b \neq 0$. Supposons à présent que la propriété 3.1 est vérifiée. Soient $a, b \in B$ tels que $a \not\leq b$. Donc $a' \vee b \neq 1$ (cf. proposition 2.1.10). Vu 3.1, il existe $c \in B$ avec $c \neq 0$ et $(a' \vee b) \not\mathcal{C} c$. Comme $a' \leq a' \vee b$, $c \geq c$ et $a' \vee b \mathcal{C} c$, on a $a' \not\mathcal{C} c$ vu $\perp 1$ et de même, $b \leq a' \vee b$ donc $b \not\mathcal{C} c$. Si $a \mathcal{C} c$, alors $a' \perp c$, $a \perp c$ et vu $\perp 2$, on a $1 = a \vee a' \perp c \vee c = c$. Comme $c \leq 1$, $c \geq c$ et $1 \perp c$, en appliquant $\perp 1$, on voit que $c \perp c$, donc $c = 0$ par $\perp 5$, d'où une contradiction.

Exemples 3.1.3. Si X est un espace topologique faiblement régulier, l'algèbre de Boole $\text{RC}(X)$ des fermés réguliers de X , muni de la relation $\mathcal{C}_{\text{RC}}$ définie par

$$C \mathcal{C}_{\text{RC}} D \quad \text{si, et seulement si,} \quad C \cap D \neq \emptyset$$

pour tous $C, D \in \text{RC}(X)$, est une algèbre de Boole de contact. Soient $C, D, E, F \in \text{RC}(X)$. Alors

$\mathcal{C}1$: si $C \subseteq D, F \subseteq E$ et $C \mathcal{C}_{\text{RC}} F$, alors $\emptyset \neq C \cap F \subseteq D \cap E$, donc $D \mathcal{C}_{\text{RC}} E$;

$\mathcal{C}2$: si $C \cup D \mathcal{C}_{\text{RC}} E \cup F$, alors

$$\emptyset \neq (C \cup D) \cap (E \cup F) = (C \cap E) \cup (C \cap F) \cup (D \cap E) \cup (D \cap F)$$

et on a donc forcément $C \cap E \neq \emptyset$ ou $C \cap F \neq \emptyset$ ou $D \cap E \neq \emptyset$ ou $D \cap F \neq \emptyset$;

$\mathcal{C}3 : \emptyset \cap X = \emptyset ;$

$\mathcal{C}4 : X \cap \emptyset = \emptyset ;$

$\mathcal{C}5 : \text{si } C \neq \emptyset, \text{ alors } C \cap C = C \neq \emptyset \text{ et } C \mathcal{C}_{\text{RC}} C ;$

$\mathcal{C}6 : \text{si } C \mathcal{C}_{\text{RC}} D, \text{ alors } \emptyset \neq C \cap D = D \cap C, \text{ d'où } D \mathcal{C}_{\text{RC}} C ;$

$\mathcal{C}7 : \text{si } C \neq X, \text{ alors il existe } x \in X \setminus C. \text{ Or, } C \text{ est fermé donc } X \setminus C \text{ est ouvert. Comme } X \text{ est faiblement régulier, il existe un ouvert régulier } O \text{ de } X \text{ tel que } x \in O \subseteq O^- \subseteq X \setminus C. \text{ On a donc } O^- \cap C = \emptyset. \text{ De plus, } O \text{ étant un ouvert régulier, } O^- \text{ est un fermé régulier, non vide puisqu'il contient } x. \text{ La remarque 3.1.2 permet de conclure.}$

De même, l'ensemble $\text{RO}(X)$ des ouverts réguliers de X , muni de la relation $\mathcal{C}'$ définie par $O \mathcal{C}_{\text{RO}} U$ si, et seulement si $O^- \cap U^- \neq \emptyset$ pour tous $O, U \in \text{RO}(X)$, est une algèbre de Boole de contact.

Proposition 3.1.4. *Soit X un espace topologique faiblement régulier. Alors $\text{RC}(X)$ et $\text{RO}(X)$ sont des algèbres de Boole isomorphes et $(\text{RC}(X), \mathcal{C}_{\text{RC}})$ et $(\text{RO}(X), \mathcal{C}_{\text{RO}})$ sont des structures relationnelles isomorphes.*

Démonstration. Considérons l'application

$$f : \text{RO}(X) \rightarrow \text{RC}(X) : O \mapsto O^-.$$

Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme d'algèbres de Boole. Sa bijection réciproque est donnée par

$$f^{-1} : \text{RC}(X) \rightarrow \text{RO}(X) : C \mapsto C^\circ.$$

En effet, si $O \in \text{RO}(X)$, on a $f^{-1}(f(O)) = O^{-\circ} = O$. De plus, si $C \in \text{RC}(X)$, alors $f(f^{-1}(C)) = C^{\circ-} = C$, ce qui suffit.

Prouvons que f respecte $\wedge$. Soient $O, U \in \text{RO}(X)$. On a $f(O) \wedge f(U) = (O^- \cap U^-)^{\circ-}$ et $f(O \wedge U) = (O \cap U)^-$. On a

$$(O^- \cap U^-)^{\circ} = O^{-\circ} \cap U^{-\circ} = O \cap U,$$

donc $(O^- \cap U^-)^{\circ-} = (O \cap U)^-$.

Montrons que f respecte le complément. Soit $O \in \text{RO}(X)$. On a

$$(f(O))' = (X \setminus O^-)^- = (X \setminus O)^{\circ-} = f((X \setminus O)^{\circ}) = f(O').$$

Soient $O, U \in \text{RO}(X)$ tels que $O \mathcal{C}_{\text{RO}} U$. Alors $f(O) \mathcal{C}_{\text{RC}} f(U)$. En effet, on a $O^- \cap U^- \neq \emptyset$. Soient $C, D \in \text{RC}(X)$ tels que $C \mathcal{C}_{\text{RC}} D$. Alors $f^{-1}(C) \mathcal{C}_{\text{RO}} f^{-1}(D)$. En effet, on a

$$(f^{-1}(C))^- \cap (f^{-1}(D))^- = C^{\circ-} \cap D^{\circ-} = C \cap D \neq \emptyset.$$

■

Définitions 3.1.5. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et $a \in B$. On définit les ensembles $\mathcal{C}(a, -)$, $\mathcal{C}(-, a)$, $\perp(a, -)$, $\perp(-, a)$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(a, -) &:= \{b \in B \mid a \mathcal{C} b\} & \mathcal{C}(-, a) &:= \{b \in B \mid b \mathcal{C} a\} \\ \perp(a, -) &:= \{b \in B \mid a \perp b\} & \perp(-, a) &:= \{b \in B \mid b \perp a\}.\end{aligned}$$

Remarque 3.1.6. Notons que si $(B, \mathcal{C})$ est une algèbre de Boole de contact et $a \in B$, on a $\mathcal{C}(a, -) = \mathcal{C}(-, a)$ et $\perp(a, -) = \perp(-, a)$ vu la symétrie du contact ($\perp 6$ et $\mathcal{C} 6$). Cependant, dans la suite, nous ôterons l'axiome de symétrie au contact et définir ces quatre ensembles (et non uniquement deux) prendra son sens.

Lemme 3.1.7. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et soient $a, b \in B$. Si $a \perp b$, alors $a \wedge b = 0$, i.e. $b \leq a'$.

Démonstration. Supposons que $a \wedge b \neq 0$. Alors $a \wedge b \mathcal{C} a \wedge b$ par $\mathcal{C} 5$. Comme $a \wedge b \leq a \wedge b$ et $a \geq a \wedge b$, on a $a \wedge b \mathcal{C} a$ vu $\mathcal{C} 1$. Donc $a \mathcal{C} a \wedge b$ par symétrie et comme $b \geq a \wedge b$, on remarque via $\mathcal{C} 1$ que $a \mathcal{C} b$, d'où une contradiction. On conclut grâce à la proposition 2.1.10. ■

Proposition 3.1.8. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et soit $a \in B$. Alors $\perp(a, -)$ est un idéal de B . De plus, si $a \in B \setminus \{0, 1\}$, il s'agit d'un idéal propre non trivial. Enfin, $\vee \perp(a, -) = a'$ pour tout $a \in B$.

Démonstration. Montrons que $\perp(a, -)$ est un idéal :

- si $b, c \in \perp(a, -)$, alors $a \perp b$ et $a \perp c$. Vu $\perp 2$, $a = a \vee a \perp (b \vee c)$;
- si $b \in \perp(a, -)$ et $c \leq b$ avec $c \in B$, alors $a \leq a$, $b \geq c$ et $a \perp b$ donc $a \perp c$ vu $\perp 1$.

De plus, on a $1 \perp 0$ par $\perp 4$ et comme $a \leq 1$ et $0 \geq 0$, on tire de $\perp 1$ que $a \perp 0$, donc $0 \in \perp(a, -)$.

Montrons que dans le cas où a diffère de 0 et 1, il s'agit d'un idéal propre non trivial. Comme $a \neq 1$, vu $\mathcal{C} 7$ (remarque 3.1.2) il existe $b \in B$ avec $b \neq 0$ tel que $a \not\mathcal{C} b$, ce qui prouve que $\perp(a, -)$ n'est pas trivial. De plus, $a \neq 0$ donc $a \mathcal{C} a$ vu $\mathcal{C} 5$. On en tire que $\perp(a, -)$ est propre.

Il nous reste à prouver que $\vee \perp(a, -) = a'$ si $a \in B$. Vu le lemme 3.1.7, on a $b \leq a'$ pour tout $b \in \perp(a, -)$, donc a' est un majorant de $\perp(a, -)$. Montrons que c'est le plus petit. Supposons qu'il existe $m \in B$ un majorant de $\perp(a, -)$ tel que $a' \not\leq m$. Alors $a \vee m \neq 1$, car sinon $a \vee m = 1$ et $a' \leq m$ (proposition 2.1.10). Dès lors, vu la remarque 3.1.2, il existe $d \in B$ tel que $d \neq 0$ et $(a \vee m) \perp d$. Vu $\perp 1$, comme $a \leq a \vee m$ et $d \geq d$, on a $a \perp d$. En procédant de la même façon, on trouve $m \perp d$. On en tire que $d \in \perp(a, -)$ et que $m \wedge d = 0$ (par le lemme 3.1.7). Comme m majore $\perp(a, -)$, on a $d \leq m$. On a donc $d = 0$, d'où une contradiction puisque $d \neq 0$. ■

Définition 3.1.9. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Si E est une partie de B , on pose

$$I_E := \langle \perp(a, -) \mid a \in E \rangle_B^{id}.$$

Remarque 3.1.10. Au vu de la caractérisation d'un idéal engendré par une partie d'un sup.demi-treillis (proposition 1.2.61), si $(B, \mathcal{C})$ est une algèbre de Boole de contact et si E est une partie de B , pour tout $a \in B$ on a $a \in I_E$ si, et seulement si,

$$(\exists n \in \mathbb{N}) (\exists e_1, \dots, e_n \in E) (\exists a_1, \dots, a_n \in B) : a \leq a_1 \vee \dots \vee a_n \text{ et } e_1 \perp a_1, \dots, e_n \perp a_n.$$

Dans notre cas, c'est équivalent à dire

$$(\exists m \in \mathbb{N}) (\exists f_1, \dots, f_m \in E) (\exists b_1, \dots, b_m \in B) : a = b_1 \vee \dots \vee b_m \text{ et } f_1 \perp b_1, \dots, f_m \perp b_m.$$

En effet, si cette dernière condition est vérifiée, il est clair que

$$a \leq b_1 \vee \dots \vee b_m \text{ et } f_1 \perp b_1, \dots, f_m \perp b_m,$$

donc $a \in I_E$. Réciproquement, si $a \in I_E$,

$$(\exists n \in \mathbb{N}) (\exists e_1, \dots, e_n \in E) (\exists a_1, \dots, a_n \in B) : a \leq a_1 \vee \dots \vee a_n \text{ et } e_1 \perp a_1, \dots, e_n \perp a_n.$$

Donc $a \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) = a$. En utilisant la distributivité, on obtient

$$a = (a \wedge a_1) \vee \dots \vee (a \wedge a_n).$$

On en tire que $a \leq b_1 \vee \dots \vee b_n$ avec $b_1 \leq a_1, \dots, b_n \leq a_n$, si on pose $b_i = a \wedge a_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On a donc $b_1, \dots, b_n \in B$ et comme $b_i \leq a_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$, on sait par $\perp 1$ que $e_1 \perp b_1, \dots, e_n \perp b_n$, d'où la conclusion.

Pour établir le théorème de représentation, nous avons besoin de la notion de clan et de cluster. A l'image des filtres et des idéaux, un clan est une partie d'une algèbre de Boole (de contact) qui vérifie certaines propriétés. Un cluster est alors à un clan ce qu'un ultrafiltre est à un filtre.

Définition 3.1.11. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Un *clan* Γ de B est un sous-ensemble non vide qui vérifie les conditions suivantes :

- si $x, y \in \Gamma$, alors $x \mathcal{C} y$;
- si $x \vee y \in \Gamma$, alors $x \in \Gamma$ ou $y \in \Gamma$;
- si $x \in \Gamma$ et $b \in B$ sont tels que $x \leq b$, alors $b \in \Gamma$.

Définition 3.1.12. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Un *cluster* est un clan maximal pour l'inclusion. On note $\text{Clust}(B)$ l'ensemble des clusters de B .

La proposition suivante démontre l'existence de clusters dans toute algèbre de Boole de contact.

Proposition 3.1.13 (AC). Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et Δ un clan. Alors Δ est inclus dans un cluster.

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{G} := \{\Gamma \mid \Gamma \text{ clan et } \Gamma \supseteq \Delta\}$$

ordonné par inclusion. Comme $\Delta \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ est non vide. Soit $\mathcal{D}$ une chaîne de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{D}$ est vide, tout élément de $\mathcal{G}$ majore $\mathcal{D}$. Supposons donc $\mathcal{D}$ non vide et posons

$$T := \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D.$$

Pour tout $D \in \mathcal{D}$, on a $D \subseteq T$ par construction. On en tire que $\Delta \subseteq T$. De plus, T est un clan. En effet,

- si $x, y \in T$, alors il existe $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ tels que $x \in D_1, y \in D_2$. Comme $\mathcal{D}$ est une chaîne, il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $x, y \in D_i$. Comme D_i est un clan, on a $x \mathcal{C} y$;
- si $x \vee y \in T$, alors il existe $D \in \mathcal{D}$ tel que $x \vee y \in D$. Comme D est un clan, on a $x \in D$ ou $y \in D$;
- si $x \in T$ et $b \in B$ sont tels que $x \leq b$, alors il existe $D \in \mathcal{D}$ tel que $x \in D$. Vu que D est un clan, on a $b \in D$.

On en tire que toute chaîne est majorée et par le lemme de Zorn, il existe un cluster qui contient Δ . ■

3.1.2 Quelques propriétés des clans

Voici quelques propositions permettant de lier filtres et clans.

Proposition 3.1.14. *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et P un ultrafiltre de B . Alors pour tous $x, y \in P$, on a $x \mathcal{C} y$. En particulier, P est un clan de B .*

Démonstration. Soient $x, y \in P$. Comme P est un filtre, on a $x \wedge y \in P$. Supposons que $x \perp y$. De $x \leq x$ et $y \geq x \wedge y$, on tire que $x \perp (x \wedge y)$ grâce à $\perp 1$. En appliquant à nouveau $\perp 1$, de $x \wedge y \leq x$ et $x \wedge y \geq x \wedge y$, on tire que $(x \wedge y) \perp (x \wedge y)$, ce qui entraîne que $x \wedge y = 0$, par $\perp 5$. Donc $0 \in P$, ce qui est impossible puisque P est un ultrafiltre. On conclut à l'aide de la définition d'un filtre et de la proposition 2.1.26. ■

Proposition 3.1.15 (AC). *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Soient F, G deux filtres de B tels que $F \times G \subseteq \mathcal{C}$. Alors il existe un clan de B contenant $F \cup G$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $G \cap I_F = \emptyset$. Procédons par l'absurde et supposons que $G \cap I_F \neq \emptyset$. Soit $x \in G \cap I_F$. Comme $x \in G$, on a $x \mathcal{C} f \forall f \in F$ (en se rappelant que la relation de contact est symétrique). De plus, comme $x \in I_F$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ et $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que $x = b_1 \vee \dots \vee b_n$ et $b_1 \perp f_1, \dots, b_n \perp f_n$ (cf. remarque 3.1.10). Or, F est un filtre, donc $f_1 \wedge \dots \wedge f_n \in F$. On en tire que $x \mathcal{C} (f_1 \wedge \dots \wedge f_n)$. Autrement dit, $(b_1 \vee \dots \vee b_n) \mathcal{C} (f_1 \wedge \dots \wedge f_n)$. Vu l'axiome $\mathcal{C}2$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $b_i \mathcal{C} f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Vu $\mathcal{C}1$, on a $b_i \mathcal{C} f_i$ puisque $b_i \leq b_i$ et $f_i \geq f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. On a alors

une absurdité. Donc $G \cap I_F = \emptyset$. Par le théorème de séparation de Stone (théorème 1.2.72), il existe un ultrafiltre P contenant G et tel que $P \cap I_F = \emptyset$.

On a $P \times F \subseteq \mathcal{C}$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe $z \in P$ et $f \in F$ tels que $z \perp f$. Dans ce cas, on a $z \in I_F$, ce qui est impossible.

Démontrons à présent que $F \cap I_P = \emptyset$. Sinon, soit $y \in F \cap I_P$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in P$ et $a_1, \dots, a_m \in B$ tels que $y = a_1 \vee \dots \vee a_m$ et $a_1 \perp x_1, \dots, a_m \perp x_m$. Comme P est un filtre, on a $x_1 \wedge \dots \wedge x_m \in P$. Vu que $x_1 \wedge \dots \wedge x_m \leq x_j$, $a_j \geq a_j$ et $x_j \perp a_j \forall j \in \{1, \dots, m\}$, on a $(x_1 \wedge \dots \wedge x_m) \perp a_j \forall j \in \{1, \dots, m\}$ vu l'axiome $\perp 1$. En appliquant l'axiome $\perp 2$, on a $(x_1 \wedge \dots \wedge x_m) \perp (a_1 \vee \dots \vee a_m)$, donc $(x_1 \wedge \dots \wedge x_m) \perp y$. Or, $x_1 \wedge \dots \wedge x_m \in P$ et $y \in F$. Donc $(x_1 \wedge \dots \wedge x_m) \mathcal{C} y$, d'où une contradiction. Donc $F \cap I_P = \emptyset$. Il existe alors un ultrafiltre Q contenant F et tel que $Q \cap I_P = \emptyset$, vu le théorème de séparation de Stone.

On a $P \times Q \subseteq \mathcal{C}$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe $x \in P, y \in Q$ tels que $x \perp y$. On en tire que $y \in I_P$, ce qui est impossible.

Prouvons que $P \cup Q$ est un clan. Il faut vérifier trois conditions. Tout d'abord, soient $x, y \in P \cup Q$. Si $x \in P$ et $y \in Q$ (resp. $x \in Q$ et $y \in P$), alors $x \mathcal{C} y$ puisque $P \times Q \subseteq \mathcal{C}$ (resp. $y \mathcal{C} x$ et on applique l'axiome $\mathcal{C} 6$). Si $x, y \in P$ ou $x, y \in Q$, il suffit d'appliquer la proposition 3.1.14. Dans tous les cas, $x \mathcal{C} y$. Soient à présent $z, t \in B$ tels que $z \vee t \in P \cup Q$. Alors soit $z \vee t \in P$, soit $z \vee t \in Q$. Dans les deux cas, on a $z \in P \cup Q$ ou $t \in P \cup Q$, grâce à la proposition 2.1.26. Enfin, si $r \in P \cup Q$ et $b \in B$ sont tels que $r \leq b$, on a $r \in P$ ou $r \in Q$ et donc $b \in P \cup Q$ puisque P et Q sont des filtres. On peut donc conclure. ■

Corollaire 3.1.16 (AC). *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et $a, b \in B$. Si $a \mathcal{C} b$, alors il existe un clan Γ tel que $a, b \in \Gamma$.*

Démonstration. Il suffit de considérer les filtres $a \uparrow$ et $b \uparrow$. En effet, si $c \in a \uparrow$ et $d \in b \uparrow$, alors $a \leq c$, $d \geq b$ et comme $a \mathcal{C} b$, $\mathcal{C} 1$ indique que $c \mathcal{C} d$. ■

Proposition 3.1.17. *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Soient Γ un clan de B et P un ultrafiltre de B tels que $P \times \Gamma \subseteq \mathcal{C}$. Alors $P \cup \Gamma$ est un clan de B .*

Démonstration. Montrons que $P \cup \Gamma$ est un clan.

Si $x, y \in P \cup \Gamma$, alors $x \mathcal{C} y$:

On a quatre cas possibles :

- si $x, y \in \Gamma$, alors $x \mathcal{C} y$ puisque Γ est un clan ;
- si $x \in P$ et $y \in \Gamma$, alors $x \mathcal{C} y$, car $P \times \Gamma \subseteq \mathcal{C}$;
- si $y \in P$ et $x \in \Gamma$, alors $x \mathcal{C} y$, car $P \times \Gamma \subseteq \mathcal{C}$ et vu l'axiome $\mathcal{C} 6$;
- si $x, y \in P$, il suffit d'appliquer la proposition 3.1.14.

Si $x \vee y \in P \cup \Gamma$, alors $x \in P \cup \Gamma$ ou $y \in P \cup \Gamma$:

Si $x \vee y \in \Gamma$, alors $x \in \Gamma$ ou $y \in \Gamma$, vu que Γ est un clan, ce qui suffit. Si $x \vee y \in P$, alors $x \in P$ ou $y \in P$, vu la proposition 2.1.26, puisque P est un ultrafiltre.

Si $x \in P \cup \Gamma$ et si $y \in B$ tels que $x \leq y$, alors $y \in P \cup \Gamma$:

On a deux possibilités : soit $x \in P$, soit $x \in \Gamma$. Si $x \in P$, alors $y \in P$ puisque P est un filtre. Si $x \in \Gamma$, alors comme Γ est un clan, on a $y \in \Gamma$, d'où la conclusion. ■

Proposition 3.1.18 (AC). *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Soient Γ un clan de B et $x \in \Gamma$. Alors il existe un ultrafiltre P de B tel que $x \in P \subseteq \Gamma$. De plus, $0 \notin \Gamma$.*

Démonstration. Comme Γ est un clan, on a

- $0 \notin \Gamma$. Sinon pour tout $x \in \Gamma$, $0 \mathcal{C} x$. En particulier, $0 \mathcal{C} 1$. Or, vu l'axiome $\mathcal{C}3$, on a $0 \not\mathcal{C} 1$, d'où une contradiction ;
- si $y \vee z \in \Gamma$, alors $y \in \Gamma$ ou $z \in \Gamma$ puisqu'il s'agit d'un clan ;
- si $y \in \Gamma$ et $b \in B$ sont tels que $y \leq b$, alors $b \in \Gamma$ comme c'est un clan.

On peut alors conclure par la proposition 2.1.36. ■

Nous concluons cette partie par une caractérisation des clusters.

Proposition 3.1.19 (AC). *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Un clan Γ est un cluster si, et seulement si,*

$$P \times \Gamma \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow P \subseteq \Gamma$$

pour tout $P \in \text{Ult}(B)$.

Démonstration. Si Γ est un cluster, soit $P \in \text{Ult}(B)$. Supposons que $P \times \Gamma \subseteq \mathcal{C}$. Alors $P \cup \Gamma$ est un clan, par la proposition 3.1.17. Comme Γ est maximal, on a $P \subseteq \Gamma$.

Réciproquement, si pour tout $P \in \text{Ult}(B)$, on a $P \times \Gamma \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow P \subseteq \Gamma$, supposons que Δ est un clan tel que $\Gamma \subsetneq \Delta$. Alors il existe $x \in \Delta \setminus \Gamma$. Par la proposition 3.1.18, il existe un ultrafiltre P de B tel que $x \in P \subseteq \Delta$. De plus, comme Δ est un clan, on a $\Delta \times \Delta \subseteq \mathcal{C}$ par définition. On en tire que $P \times \Gamma \subseteq \mathcal{C}$. Par hypothèse, on a $P \subseteq \Gamma$. Donc $x \in \Gamma$, d'où une contradiction. ■

3.1.3 Théorème de représentation

Le théorème de représentation des algèbres de Boole de contact indique que toute algèbre de Boole de contact $(B, \mathcal{C})$ se plonge dans l'ensemble des fermés réguliers de ses clusters. Il nous faut donc définir une topologie sur l'ensemble des clusters de B .

Définition 3.1.20. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Posons $Y := \text{Clust}(B)$. On définit l'application $\diamond_B$ comme suit :

$$\diamond_B : B \rightarrow \mathcal{P}(Y) : b \mapsto \{\Gamma \in Y \mid \Gamma \ni b\}.$$

Notation. Afin d'alléger l'écriture, lorsqu'aucune confusion n'est possible, on omettra l'indice référant à l'algèbre de Boole dans l'application définie ci-dessus.

Proposition 3.1.21. *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact. Pour tous a, b dans B , on a*

$$\diamond(a) \cup \diamond(b) = \diamond(a \vee b).$$

Démonstration. Procédons par double inclusion. Si $\Gamma \in \diamond(a) \cup \diamond(b)$, alors $\Gamma \in \diamond(a)$ ou $\Gamma \in \diamond(b)$. Si $\Gamma \in \diamond(a)$, alors $a \in \Gamma$ et Γ est un cluster, donc en particulier un clan. Comme $a \vee b \geq a$, on a $a \vee b \in \Gamma$. De même, si $\Gamma \in \diamond(b)$, on a $a \vee b \in \Gamma$. Dans les deux cas, on obtient $\Gamma \in \diamond(a \vee b)$.

Soit à présent $\Delta \in \diamond(a \vee b)$. Alors Δ est un cluster contenant $a \vee b$. Par définition d'un clan, on en tire que $a \in \Delta$ ou $b \in \Delta$. Quoi qu'il en soit, on a $\Delta \in \diamond(a) \cup \diamond(b)$. ■

Définition 3.1.22. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et posons $Y := \text{Clust}(B)$. On définit une topologie sur Y en donnant une base :

$$\{Y \setminus \diamond(a) \mid a \in B\}.$$

Remarque 3.1.23. Cette définition a bien un sens, puisque si $(B, \mathcal{C})$ est une algèbre de Boole de contact et $Y = \text{Clust}(B)$, alors vu la proposition 3.1.21 et comme

$$Y = Y \setminus \diamond(0) = Y \setminus \emptyset,$$

on a bien une base (cf. proposition A.1.6).

Le théorème suivant est le théorème de représentation des algèbres de Boole de contact. Notre démonstration est différente de celle donnée par I. Düntsch et M. Winter dans [9]. Nous avons choisi cette démonstration, car elle utilise plusieurs propriétés des clans.

Théorème 3.1.24 (Théorème de représentation (AC)). *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de contact et posons $Y := \text{Clust}(B)$. L'espace topologique Y est faiblement régulier et accessible. De plus, l'application*

$$\diamond : B \rightarrow RC(Y) : b \mapsto \{\Gamma \in Y \mid \Gamma \ni b\}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Boole et un plongement d'ordre qui est dense. Enfin, pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathcal{C} b$ si, et seulement si, $\diamond(a) \cap \diamond(b) \neq \emptyset$.

Démonstration. Procédons par étapes.

L'application $\diamond$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, il est clair que b appartient à tout cluster contenant a et donc $\diamond(a) \subseteq \diamond(b)$. Prouvons à présent que si $a, b \in B$ sont tels que $\diamond(a) \subseteq \diamond(b)$, alors $a \leq b$. Procédons par l'absurde et supposons que $a \not\leq b$. Par l'axiome $\mathcal{C}7$, on sait qu'il existe $c \in B$ tel que $a \mathcal{C} c$ et $b \perp c$. Posons $I := \perp(-, c)$. La proposition 3.1.8 et la remarque 3.1.6 nous indiquent que l'ensemble I est un idéal de B . L'idéal I ne contient bien évidemment pas a . En appliquant le théorème de Stone 2.1.31 à I et au filtre de B engendré par a , on trouve un ultrafiltre P contenant a et tel que $P \cap I = \emptyset$. Posons à présent

$$J := \perp(P, -) = \bigcup_{x \in P} \perp(x, -).$$

Montrons que J est un idéal de B . On a $a \in P$ et $a \perp 0$, car $1 \perp 0$ par $\perp 4$ et comme $a \leq 1$, $0 \geq 0$ et on applique $\perp 1$. Donc $0 \in J$. Soient ensuite $i, j \in J$. Alors il existe $x, y \in P$ tels

que $x \perp i$ et $y \perp j$. Comme $x \wedge y \leq x$, $i \geq i$, $x \wedge y \leq y$ et $j \geq j$, on tire de l'axiome $\perp 1$ que $x \wedge y \perp i$, $x \wedge y \perp j$ et comme P est un filtre, $x \wedge y \in P$. En appliquant l'axiome $\perp 2$, on trouve finalement $x \wedge y = (x \wedge y) \vee (x \wedge y) \perp i \vee j$, d'où $i \vee j \in J$. Enfin, si $j \in J$ et $d \in B$ sont tels que $d \leq j$, alors il existe $x \in P$ tel que $x \perp j$. En appliquant l'axiome $\perp 1$, comme $x \leq x$ et $j \geq d$, on trouve $x \perp d$, d'où $d \in J$. Donc J est bien un idéal de B . De plus, $c \notin J$, sinon il existe $x \in P$ tel que $x \perp c$. Dans ce cas, on a $x \in I$. Donc $x \in P \cap I = \emptyset$, ce qui est bien sûr impossible. Si on applique le théorème de Stone 2.1.31 à l'idéal J et au filtre engendré par c cette fois, on trouve un ultrafiltre Q de B qui contient c et qui ne rencontre pas J .

Prouvons à présent que $P \times Q \subseteq \mathcal{C}$. Soient $p \in P$ et $q \in Q$. On sait que $q \notin J$. Donc pour tout $x \in P$, on a $x \mathcal{C} q$. En particulier, $p \mathcal{C} q$. De plus, comme Q est un ultrafiltre, c'est un clan, par la proposition 3.1.14. En appliquant alors la proposition 3.1.17, on voit que $P \cup Q$ est un clan. Il existe alors un cluster $\Gamma \in Y$ contenant $P \cup Q$, par la proposition 3.1.13. Comme $a \in P$ et $c \in Q$, on a $a, c \in \Gamma$. On en tire que $\Gamma \in \diamond(a)$. En utilisant l'hypothèse, on trouve $\Gamma \in \diamond(b)$. Autrement dit, $b \in \Gamma$. D'où $b \mathcal{C} c$. On a donc une contradiction puisque $b \perp c$.

Si $a \in B$, on a $(\diamond(a))^\circ = Y \setminus \diamond(a')$:

Démontrons-le par double inclusion. Tout d'abord, soit $\Gamma \in Y \setminus \diamond(a')$. Alors $a' \notin \Gamma$. Si $a \notin \Gamma$, alors $1 \notin \Gamma$, ce qui est impossible puisque Γ est un clan. Donc $a \in \Gamma$. On en tire que $\Gamma \in \diamond(a)$. Donc $Y \setminus \diamond(a') \subseteq \diamond(a)$. De plus, $Y \setminus \diamond(a')$ est un ouvert (puisque c'est un ouvert de base), donc $Y \setminus \diamond(a') \subseteq (\diamond(a))^\circ$. Soit à présent $\Delta \in (\diamond(a))^\circ$. Alors il existe $b \in B$ tel que $\Delta \in Y \setminus \diamond(b) \subseteq \diamond(a)$. On en tire que $\diamond(a) \cup \diamond(b) = Y$, i.e. $\diamond(a \vee b) = Y = \diamond(1)$. Par le point précédent, on a donc $a \vee b = 1$. On en tire que $b \geq a'$. On obtient alors $\diamond(b) \supseteq \diamond(a')$ et enfin $\Delta \in Y \setminus \diamond(b) \subseteq Y \setminus \diamond(a')$.

Si $a \in B$, on a $(Y \setminus \diamond(a))^- = \diamond(a')$:

On a $(Y \setminus \diamond(a))^- = Y \setminus (\diamond(a))^\circ = \diamond(a')$.

Si $a \in B$, on a $\diamond(a) \in \text{RC}(Y)$:

En effet, on a $(\diamond(a))^\circ = (Y \setminus \diamond(a'))^- = \diamond(a)$.

L'application $\diamond$ respecte le complément :

Soit $a \in B$. On a $\diamond(a') = (Y \setminus \diamond(a))^- = \neg \diamond(a)$, en se rappelant du théorème 2.1.7.

L'application $\diamond$ respecte le supremum :

Cela découle directement de la proposition 3.1.21.

Ce plongement est dense :

Soit C un fermé régulier de Y non vide. Alors il existe une famille d'indices I et des éléments $a_i \in B$ pour tout $i \in I$ tels que $C = \bigcap_{i \in I} \diamond(a_i)$. De plus, comme C est un fermé régulier non vide, on a $C = C^{\circ-}$ et donc $C^\circ \neq \emptyset$. Soit $\Gamma \in C^\circ$. On sait qu'il existe $b \in B$ tel que

$$\Gamma \in Y \setminus \diamond(b) \subseteq C = \bigcap_{i \in I} \diamond(a_i).$$

On trouve donc $Y \setminus \diamond(b) \subseteq \diamond(a_i) \ \forall i \in I$. Puisque $\diamond(a_i)$ est fermé pour tout $i \in I$, on a $\diamond(b') = (Y \setminus \diamond(b))^- \subseteq \diamond(a_i)$ pour tout $i \in I$. Donc $\diamond(b') \subseteq \bigcap_{i \in I} \diamond(a_i) = C$. Prouvons que $\diamond(b') \neq \emptyset$, ce qui permettra de conclure. Comme $\Gamma \in Y \setminus \diamond(b)$, on voit que $b \neq 1$, car sinon $\diamond(b) = Y$ et $\Gamma \in \emptyset$. On en tire que $b' \neq 0$. Alors le filtre engendré par b' est propre et est donc inclus dans un ultrafiltre P . On obtient $\diamond(b') \neq \emptyset$, puisqu'il contient l'ultrafiltre P et que tout ultrafiltre est un clan (proposition 3.1.14).

L'espace topologique Y est faiblement régulier :

Vu que $\diamond(a)$ est un fermé régulier pour tout $a \in B$, l'ensemble $Y \setminus \diamond(a)$ est un ouvert régulier pour tout $a \in B$. De plus, $\{Y \setminus \diamond(a) \mid a \in B\}$ est une base de topologie pour Y . L'espace topologique Y est donc semi-régulier. Soit O un ouvert non vide et trouvons U un ouvert non vide tel que $U^- \subseteq O$. Il existe $a \in B$ tel que $Y \setminus \diamond(a) \subseteq O$, puisqu'il s'agit d'une base. De plus, on peut supposer que $a \neq 1$ car O est non vide. En appliquant l'axiome $\mathcal{C}7$ (remarque 3.1.2), il existe $b \in B$ avec $b \neq 0$ tel que $a \perp b$. Vu la définition d'un clan, aucun cluster ne peut contenir a et b en même temps. On en tire que $\diamond(a) \cap \diamond(b) = \emptyset$, i.e.

$$(\diamond(b))^{\circ-} = \diamond(b) \subseteq Y \setminus \diamond(a).$$

Posons $U := (\diamond(b))^{\circ}$. Alors $U^- \subseteq O$. De plus, $U \neq \emptyset$, car sinon, on a $\diamond(b) = \emptyset$ et $b = 0$, ce qui est impossible.

L'espace topologique Y est accessible :

Soit $\Gamma \in Y$. Alors $\Gamma \in \bigcap \{\diamond(a) \mid a \in \Gamma\}$. Soit à présent $\Delta \in \bigcap \{\diamond(a) \mid a \in \Gamma\}$. Pour tout $a \in \Gamma$, on a $\Delta \in \diamond(a)$, i.e. $a \in \Delta$. On en tire que $\Gamma \subseteq \Delta$. Par maximalité de Γ , on trouve $\Gamma = \Delta$. Finalement, on a $\{\Gamma\} = \bigcap \{\diamond(a) \mid a \in \Gamma\}$. L'intersection de fermés étant fermée, il s'agit bien d'un fermé.

Pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathcal{C} b$ si, et seulement si, $\diamond(a) \cap \diamond(b) \neq \emptyset$:

Soient $a, b \in B$. Si $a \mathcal{C} b$, alors par le corollaire 3.1.16, il existe un clan Γ contenant a et b . En appliquant la proposition 3.1.13, on peut trouver un cluster Δ contenant Γ . On a alors $\Delta \in \diamond(a) \cap \diamond(b)$.

Supposons à présent que $\diamond(a) \cap \diamond(b) \neq \emptyset$. Alors il existe $\Gamma \in \diamond(a) \cap \diamond(b)$. On a donc $a \in \Gamma$ et $b \in \Gamma$. Comme Γ est un clan, on a $a \mathcal{C} b$ par définition. ■

Remarque 3.1.25. A titre d'information, nous donnons ici la preuve établie dans l'article [9]. Sous les hypothèses du théorème précédent, nous devons prouver tout d'abord que l'application $\diamond$ est un plongement d'ordre. Soient $a, b \in B$. Si $a \leq b$, par définition d'un clan, tout clan contenant a contient b . Il en va donc de même pour les clusters. Supposons à présent que $\diamond(a) \subseteq \diamond(b)$ et que $a \not\leq b$. Par l'axiome $\mathcal{C}7$, il existe $c \in B$ tel que $a \mathcal{C} c$ et $b \perp c$. Par le corollaire 3.1.16, il existe un clan Γ tel que $a, c \in \Gamma$. Il existe donc un cluster Δ contenant a et c (proposition 3.1.13). De plus, $b \notin \Delta$, car sinon $b \mathcal{C} c$ par définition d'un clan. On en tire que $\diamond(a) \not\subseteq \diamond(b)$, d'où une contradiction. La fin de la preuve est similaire à la nôtre.

3.2 Relation de contact non symétrique

Dans cette dernière partie de ce chapitre, nous donnons une preuve d'un résultat analogue au théorème 3.1.24 dans le cas des algèbres de Boole de pré-contact. L'élément clé est la disparition de la symétrie. Nous avons donc défini les clans à gauche et à droite, et non simplement des clans qui sont liés intrinsèquement à la symétrie d'une relation de contact. L'idée de notre preuve reste cependant identique.

3.2.1 Premières définitions

Définition 3.2.1. Une *algèbre de Boole de pré-contact* est une algèbre de Boole B munie d'une relation de disjonction $\perp$ binaire telle que pour tous $a, b, c, d \in B$,

- $\perp 1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $b \perp c$, alors $a \perp d$;
- $\perp 2$: si $a \perp c, a \perp d, b \perp c$ et $b \perp d$, alors $a \vee b \perp c \vee d$;
- $\perp 3$: $0 \perp 1$;
- $\perp 4$: $1 \perp 0$;
- $\perp 5$: si $a \perp a$, alors $a = 0$;
- $\perp 7$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \not\leq e$ et $b \perp e$;
- $\perp 8$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $e \not\leq a$ et $e \perp b$.

Remarque 3.2.2. Comme dans le cas où la relation est symétrique, on peut obtenir les axiomes ci-dessus à l'aide de la *relation de pré-contact* $\mathcal{C} = \not\leq$: pour tous $a, b, c, d \in B$,

- $\mathcal{C}1$: si $a \leq b, c \geq d$ et $a \mathcal{C} d$, alors $b \mathcal{C} c$;
- $\mathcal{C}2$: si $a \vee b \mathcal{C} c \vee d$, alors $a \mathcal{C} c$ ou $a \mathcal{C} d$ ou $b \mathcal{C} c$ ou $b \mathcal{C} d$;
- $\mathcal{C}3$: $0 \not\mathcal{C} 1$;
- $\mathcal{C}4$: $1 \not\mathcal{C} 0$;
- $\mathcal{C}5$: si $a \neq 0$, alors $a \mathcal{C} a$;
- $\mathcal{C}7$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $a \mathcal{C} e$ et $b \not\mathcal{C} e$;
- $\mathcal{C}8$: si $a \not\leq b$, alors il existe $e \in B$ tel que $e \mathcal{C} a$ et $e \not\mathcal{C} b$.

Une algèbre de Boole de pré-contact sera notée $(B, \perp)$ ou $(B, \mathcal{C})$. Nous utilisons la même notation que pour une algèbre de Boole de contact, mais aucune confusion ne sera possible puisqu'il sera toujours précisé s'il s'agit d'une algèbre de Boole de contact ou de pré-contact.

Exemples 3.2.3. Toute algèbre de Boole de contact est une algèbre de Boole de pré-contact. Donc si X est un espace topologique faiblement régulier, $(\text{RC}(X), \mathcal{C}_{\text{RC}})$ où, pour tous $C, D \in \text{RC}(X)$, $C \mathcal{C}_{\text{RC}} D$ si, et seulement si, $C \cap D \neq \emptyset$, est une algèbre de Boole de pré-contact. De même, $(\text{RO}(X), \mathcal{C}_{\text{RO}})$ où, pour tous $O, U \in \text{RO}(X)$, $O \mathcal{C}_{\text{RO}} U$ si, et seulement si, $O^- \cap U^- \neq \emptyset$, est une algèbre de Boole de pré-contact.

Définitions 3.2.4. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et $a \in B$. On définit les ensembles $\mathcal{C}(a, -)$, $\mathcal{C}(-, a)$, $\perp(a, -)$ et $\perp(-, a)$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(a, -) &:= \{b \in B \mid a \mathcal{C} b\} & \mathcal{C}(-, a) &:= \{b \in B \mid b \mathcal{C} a\} \\ \perp(a, -) &:= \{b \in B \mid a \perp b\} & \perp(-, a) &:= \{b \in B \mid b \perp a\}.\end{aligned}$$

De plus, si E est une partie de B , on pose

$$I_E := \langle \perp(-, a) \mid a \in E \rangle_B^{id}.$$

Proposition 3.2.5. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et soit $a \in B$. Alors $\perp(-, a)$ et $\perp(a, -)$ sont des idéaux de B .

Démonstration. En effet,

- $0 \in \perp(-, a)$, car $0 \perp 1$ par l'axiome $\perp 3$ et comme $0 \leq 0$, $1 \geq a$, l'axiome $\perp 1$ indique que $0 \perp a$;
- si $c \in \perp(-, a)$ et $b \in B$ sont tels que $b \leq c$, alors $b \leq c$, $a \geq a$ et $c \perp a$, donc $b \perp a$ vu l'axiome $\perp 1$;
- si $c, d \in \perp(-, a)$, alors $c \perp a$, $d \perp a$ et par l'axiome $\perp 2$, on a $c \vee d \perp a \vee a = a$.

On procède de façon similaire pour montrer que $\perp(a, -)$ est un idéal de B . ■

Proposition 3.2.6. Soit $(B, \perp)$ une algèbre de Boole de pré-contact. Alors l'application

$$\perp : B \rightarrow B^\delta : b \mapsto \perp(b, -)$$

est un multiopérateur.

Démonstration. Soient $a, b \in B$. On a

- $\perp(a, -)$ est un filtre de B^δ , i.e. un idéal de B , par la proposition précédente ;
- $\perp(a \vee b, -) = \perp(a, -) \cap \perp(b, -)$. En effet, si $c \in \perp(a \vee b, -)$, $(a \vee b) \perp c$ et en appliquant deux fois $\perp 1$ (car $a \leq a \vee b$, $c \geq c$ et $b \leq a \vee b$), on a $a \perp c$ et $b \perp c$. De plus, si $d \in \perp(a, -) \cap \perp(b, -)$, alors $a \perp d$ et $b \perp d$ et vu $\perp 2$, on a $(a \vee b) \perp d \vee d = d$;
- $\perp(0, -) = B^\delta$, car $0 \perp 1$ vu $\perp 3$ et on applique ensuite $\perp 1$ à tous les éléments $b \in B^\delta$, puisque $b \leq 1$ et $0 \geq 0$.

D'où la conclusion. ■

Dans la partie 2.2.2 du chapitre précédent, nous avons dualisé les algèbres multimodales, c'est-à-dire les algèbres de Boole B avec un multiopérateur $p : B \rightarrow B$. Or, $\perp$ n'est pas à valeurs dans l'ensemble qui convient. Afin de tout de même pouvoir dualiser une algèbre de Boole de pré-contact, nous introduisons une nouvelle relation binaire sur B .

Définition 3.2.7. Soit $(B, \perp)$ une algèbre de Boole de pré-contact. Une *relation de proximité* sur B est une relation $\prec$ définie par

$$a \prec b \quad \Leftrightarrow \quad a \perp b'$$

pour tous $a, b \in B$.

Proposition 3.2.8. Soit $(B, \perp)$ une algèbre de Boole de pré-contact et $\prec$ une relation de proximité sur B . Alors $\prec$ vérifie les propriétés suivantes : pour tous $a, b, c, d \in B$

- $\prec 1$: si $a \leq b, c \leq d$ et $b \prec c$, alors $a \prec d$;
- $\prec 2$: si $a \prec c, a \prec d, b \prec c$ et $b \prec d$, alors $a \vee b \prec c \wedge d$;
- $\prec 3$: $0 \prec 0$;
- $\prec 4$: $1 \prec 1$.

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in B$.

$\prec 1$: Si $a \leq b, c \leq d$ et $b \prec c$, alors $b \perp c'$. Comme $c \leq d$, on a $c' \geq d'$. Par l'axiome $\perp 1$, on trouve $a \perp d'$, i.e. $a \prec d$.

$\prec 2$: si $a \prec c, a \prec d, b \prec c$ et $b \prec d$, alors $a \perp c', a \perp d', b \perp c'$ et $b \perp d'$. Par $\perp 2$, on a $a \vee b \perp c' \vee d' = (c \wedge d)'$, d'où $a \vee b \prec c \wedge d$.

$\prec 3$: Par $\perp 3$, on a $0 \perp 1 = 0'$, donc $0 \prec 0$.

$\prec 4$: Vu l'axiome $\perp 4$, on a $1 \perp 0 = 1'$, d'où $1 \prec 1$. ■

Définitions 3.2.9. Soient $(B, \perp)$ une algèbre de Boole de pré-contact et $a \in B$. On définit les ensembles $\prec(a, -)$ et $\prec(-, a)$ de la façon suivante :

$$\prec(a, -) := \{b \in B \mid a \prec b\} \quad \prec(-, a) := \{b \in B \mid b \prec a\}.$$

Proposition 3.2.10. Soit $(B, \perp)$ une algèbre de Boole de pré-contact. Alors l'application

$$\prec : B \rightarrow B : b \mapsto \prec(b, -)$$

est un multiopérateur.

Démonstration. Soient $a, b \in B$. Alors

- $\prec(a, -)$ est un filtre de B , car $1 \in \prec(a, -)$ (parce que $1 \prec 1$ par $\prec 4$ et $a \leq 1, 1 \leq 1$ donc $a \prec 1$ par $\prec 1$). De plus, si $c \in \prec(a, -)$ et si $d \in B$ est tel que $c \leq d$, alors comme $a \leq a$, on a $a \prec d$ par $\prec 1$. Enfin, si $c, d \in \prec(a, -)$ alors $a \prec c, a \prec d$ et par $\prec 2$, on a $a = a \vee a \prec c \wedge d$;
- $\prec(a \vee b, -) = \prec(a, -) \cap \prec(b, -)$. En effet, si $c \in \prec(a \vee b, -)$, alors $a \vee b \prec c$ et comme $a \leq a \vee b$ et $c \leq c$, on a $a \prec c$ via $\prec 1$. De même, puisque $b \leq a \vee b$ et $c \leq c$, on tire de $\prec 1$ que $b \prec c$. De plus, si $d \in \prec(a, -) \cap \prec(b, -)$, alors $a \prec d$ et $b \prec d$. On conclut via $\prec 2$;
- $\prec(0, -) = B$, car $0 \prec 0$ vu $\prec 3$ et pour tout $b \in B$, on a $0 \leq 0$ et $0 \leq b$ et on termine en appliquant $\prec 1$.

D'où la conclusion. ■

Nous pouvons à présent dualiser le multiopérateur $\prec$ sur une algèbre de Boole de pré-contact $(B, \perp)$. La relation associée à $\prec$ est donnée par

$$UR_{\prec}V \Leftrightarrow \forall a, b \in B, (U \ni a \text{ et } b \in \prec(a, -)) \Rightarrow V \ni b$$

pour tous $U, V \in \text{Ult}(B)$. Or pour tous $a, b \in B$, on a

$$b \in \prec(a, -) \Leftrightarrow a \prec b \Leftrightarrow a \perp b' \Leftrightarrow b' \in \perp(a, -).$$

On trouve donc que pour tous $U, V \in \text{Ult}(B)$, on a

$$\begin{aligned} UR_{\prec}V &\Leftrightarrow \forall a, b \in B, (U \ni a \text{ et } b \in \prec(a, -)) \Rightarrow V \ni b \\ &\Leftrightarrow \forall a, b \in B, (U \ni a \text{ et } b' \in \perp(a, -)) \Rightarrow V \ni b \\ &\Leftrightarrow \forall a, b \in B, (U \ni a \text{ et } b \in \perp(a, -)) \Rightarrow V \ni b' \\ &\Leftrightarrow \forall a, b \in B, (U \ni a \text{ et } b \in \perp(a, -)) \Rightarrow V \not\ni b. \end{aligned}$$

On peut alors poser $R_{\perp} := R_{\prec}$ et on appellera $R_{\perp}$ la *relation duale* du multiopérateur $\perp$. Si $X = \text{Ult}(B)$, on dira que $(X, R_{\perp})$ est l'espace dual de l'algèbre de Boole de pré-contact $(B, \perp)$.

Remarquons que le raisonnement ci-dessus reste valable dans le cas des algèbres de Boole de contact. En effet, une relation de contact étant une relation de pré-contact particulière, si $(B, \perp)$ est une algèbre de Boole de contact, alors si on pose $X := \text{Ult}(B)$, l'espace $(X, R_{\perp})$ sera l'espace dual de $(B, \mathcal{C})$. On peut choisir d'ajouter des axiomes à la relation de contact. Ces axiomes supplémentaires ainsi que l'axiome $\mathcal{C}6$ correspondent à des propriétés supplémentaires de la relation $R_{\perp}$: symétrie, réflexivité, transitivité,... Nous invitons le lecteur désireux d'en savoir plus à consulter l'article de Dimitar Vakarelov [24].

3.2.2 Demi-clans et clusters

Comme dans le cas des algèbres de Boole de contact, on introduit le concept de clan. Cependant, l'axiome de symétrie étant absent, être en contact à gauche ou à droite est différent. C'est pourquoi nous introduisons trois notions : les 2-clans, les clans à gauche et les clans à droite.

Définitions 3.2.11. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Un *2-clan* est une paire $(\Gamma, \Delta) \subseteq B \times B$ où $B \setminus \Gamma$ et $B \setminus \Delta$ sont des idéaux propres de B et $\Gamma \times \Delta \subseteq \mathcal{C}$.

Un *l-clan* est la première composante d'un 2-clan.

Un *r-clan* est la deuxième composante d'un 2-clan.

Si Λ est un l-clan ou un r-clan, on dit que c'est un *demi-clan*.

Rappelons que si B est une algèbre de Boole et si $\Gamma \subseteq B$, dire $B \setminus \Gamma$ est un idéal signifie que $0 \in B \setminus \Gamma$ et pour tous $x, y, b \in B$, on a

- si $x \vee y \in \Gamma$, alors $x \in \Gamma$ ou $y \in \Gamma$;
- si $x \in \Gamma$ et $x \leq b$, alors $b \in \Gamma$.

Définitions 3.2.12. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Un *2-cluster* est un 2-clan maximal pour l'inclusion.

Un *l-cluster* ou *cluster à gauche* est la première composante d'un 2-cluster. L'ensemble des l-clusters est noté Y_l .

Un *r-cluster* ou *cluster à droite* est la deuxième composante d'un 2-cluster. L'ensemble des r-clusters est noté Y_r .

Si Λ est un l-cluster ou un r-cluster, il s'agit d'un *demi-cluster*. On note DY l'ensemble des demi-clusters.

La proposition suivante démontre l'existence des clusters dans une algèbre de Boole de pré-contact.

Proposition 3.2.13 (AC). *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (Γ_0, Δ_0) un 2-clan. Alors il existe un 2-cluster contenant (Γ_0, Δ_0) .*

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{G} := \{(\Gamma, \Delta) \subseteq B \mid (\Gamma, \Delta) \text{ 2-clan et } \Gamma \supseteq \Gamma_0, \Delta \supseteq \Delta_0\}$$

ordonné par inclusion. Comme $(\Gamma_0, \Delta_0) \in \mathcal{G}$, cet ensemble est non vide. Soit $\mathcal{D}$ une chaîne de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{D}$ est vide, tout élément de $\mathcal{G}$ majore $\mathcal{D}$. Supposons donc que $\mathcal{D}$ n'est pas vide. Il existe une famille I d'indices telle que $\mathcal{D} = \{(\Gamma_i, \Delta_i) \mid i \in I\}$ où (Γ_i, Δ_i) est un 2-clan et $\Gamma_i \supseteq \Gamma_0, \Delta_i \supseteq \Delta_0$ pour tout $i \in I$. Posons

$$T := \left(\bigcup_{i \in I} \Gamma_i, \bigcup_{i \in I} \Delta_i \right).$$

Par construction, on a $(\Gamma_i, \Delta_i) \subseteq T$ pour tout $i \in I$. De plus, on a $(\Gamma_0, \Delta_0) \subseteq T$. Montrons que T est un 2-clan. Posons $\Gamma := \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ et $\Delta := \bigcup_{i \in I} \Delta_i$. Prouvons tout d'abord que $B \setminus \Gamma$ est un idéal. On a

- $0 \in B \setminus \Gamma$, sinon $0 \in \Gamma$ donc il existe $i \in I$ tel que $0 \in \Gamma_i$. Or, $B \setminus \Gamma_i$ est un idéal, donc $0 \in B \setminus \Gamma_i$, d'où une contradiction ;
- si $x \vee y \in \Gamma$, il existe $i \in I$ tel que $x \vee y \in \Gamma_i$. Comme Γ_i est un l-clan, on a $x \in \Gamma_i$ ou $y \in \Gamma_i$;
- si $x \in \Gamma$ et $b \in B$ sont tels que $x \leq b$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in \Gamma_i$. On en tire que $b \in \Gamma_i$ et donc $b \in \Gamma$.

En procédant de la même façon, on montre que $B \setminus \Delta$ est un idéal.

Montrons qu'il s'agit d'idéaux propres. Procédons par l'absurde et supposons que $1 \in B \setminus \Gamma$. Alors $1 \notin \Gamma$ et pour tout $i \in I$, on a $1 \in B \setminus \Gamma_i$, ce qui est impossible puisqu'il s'agit d'idéaux propres. De même, on a $1 \notin B \setminus \Delta$.

Il nous reste à prouver que $\Gamma \times \Delta \subseteq \mathcal{C}$. Soient $x \in \Gamma$ et $y \in \Delta$. Alors il existe $i_1, i_2 \in I$ tels que $x \in \Gamma_{i_1}$ et $y \in \Delta_{i_2}$. Or, $\mathcal{D}$ est une chaîne, donc on a $(\Gamma_{i_1}, \Delta_{i_1}) \subseteq (\Gamma_{i_2}, \Delta_{i_2})$ ou $(\Gamma_{i_2}, \Delta_{i_2}) \subseteq (\Gamma_{i_1}, \Delta_{i_1})$. Dans le premier cas, on trouve $x \in \Gamma_{i_2}, y \in \Delta_{i_2}$ donc $x \mathcal{C} y$, car $(\Gamma_{i_2}, \Delta_{i_2})$ est un 2-clan. Dans le deuxième cas, on a $x \in \Gamma_{i_1}, y \in \Delta_{i_1}$ et on peut conclure puisque $(\Gamma_{i_1}, \Delta_{i_1})$ est un 2-clan.

On en tire que toute chaîne de $\mathcal{G}$ est majorée. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{G}$ admet un élément maximal. ■

Proposition 3.2.14 (AC). *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et $a, b \in B$. Si $a \mathcal{C} b$, alors il existe un 2-cluster (Γ, Δ) tel que $a \in \Gamma$ et $b \in \Delta$.*

Démonstration. Comme $a \mathcal{C} b$, on a $b \notin \perp(a, -)$. Par le théorème de Stone 2.1.31, qu'on applique à l'idéal $\perp(a, -)$ et au filtre $b \uparrow$, il existe un ultrafiltre P tel que $b \in P$ et $P \cap \perp(a, -) = \emptyset$. Montrons que $a \notin I_P$. Si $a \in I_P$, par la caractérisation d'un idéal engendré par une partie d'une algèbre de Boole (proposition 1.2.61), il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in P$ et $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que $b_1 \perp x_1, \dots, b_n \perp x_n$ et $a \leq b_1 \vee \dots \vee b_n$. Or, puisque pour tout $i \leq n$, on a $b_i \leq b_i$ et $x_i \geq x_1 \wedge \dots \wedge x_n$, on trouve $b_i \perp x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ pour tout $i \leq n$, en appliquant l'axiome $\perp 1$. Vu $\perp 2$, on obtient $b_1 \vee \dots \vee b_n \perp x_1 \wedge \dots \wedge x_n$. De plus, $a \leq b_1 \vee \dots \vee b_n$ et $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \geq x_1 \wedge \dots \wedge x_n$, donc $a \perp x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ en utilisant à nouveau $\perp 1$. Enfin, P étant un ultrafiltre, on a $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in P$. On a donc $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in P \cap \perp(a, -)$, d'où une contradiction. On en tire que $a \notin I_P$ comme annoncé. Appliquant le théorème de Stone à l'idéal I_P et au filtre $a \uparrow$, on obtient un ultrafiltre Q contenant a et ne rencontrant pas I_P . Montrons à présent que $Q \times P \subseteq \mathcal{C}$. Sinon, il existe $x \in Q, y \in P$ tels que $x \perp y$. Puisque $y \in P$, on a $x \in I_P$. Donc $x \in I_P \cap Q = \emptyset$. On a une contradiction, d'où $Q \times P \subseteq \mathcal{C}$. Vu que P et Q sont des ultrafiltres, leur complémentaire (ensembliste) est un idéal propre. On en tire que (Q, P) est un 2-clan. Par la proposition précédente, il existe un 2-cluster (Γ, Δ) tel que $(Q, P) \subseteq (\Gamma, \Delta)$. Comme $a \in Q$ et $b \in P$, on peut conclure. ■

Définitions 3.2.15. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et soit $E \subseteq B$. On pose

$$E' := \bigcap_{e \in E} \mathcal{C}(e, -) \quad \text{et} \quad 'E := \bigcap_{e \in E} \mathcal{C}(-, e).$$

Proposition 3.2.16. *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Soient E_1, E_2 des parties de B . On a*

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 \subseteq \mathcal{C} &\Leftrightarrow E_2 \subseteq E_1' \\ &\Leftrightarrow E_1 \subseteq 'E_2. \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons la première équivalence. Supposons que $E_1 \times E_2 \subseteq \mathcal{C}$. Soit $y \in E_2$. Alors pour tout $x \in E_1$, on a $x \mathcal{C} y$. Comme $E_1' = \bigcap_{x \in E_1} \mathcal{C}(x, -)$, on a $y \in E_1'$.

Supposons à présent que $E_2 \subseteq E_1'$. On a $E_1 \times E_1' \subseteq \mathcal{C}$ puisque si $y \in E_1'$, alors $x \mathcal{C} y \forall x \in E_1$. On en tire que $E_1 \times E_2 \subseteq \mathcal{C}$.

On procède de même pour montrer l'équivalence $E_1 \times E_2 \subseteq \mathcal{C} \Leftrightarrow E_1 \subseteq 'E_2$. ■

Proposition 3.2.17. *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Soient E_1, E_2 des parties de B telles que $E_1 \subseteq E_2$. Alors $E_1' \supseteq E_2'$ et $'E_1 \supseteq 'E_2$.*

Démonstration. C'est clair puisque plus l'ensemble sur lequel on prend l'intersection est grand, plus l'intersection est petite. ■

Lions à présent ultrafiltres et 2-clans.

Proposition 3.2.18. *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et P un ultrafiltre de B . Alors pour tous $x, y \in P$, on a $x \mathcal{C} y$. De plus, (P, P) est un 2-clan.*

Démonstration. Soient $x, y \in P$. On a $x \mathcal{C} y$ par la proposition 3.1.14 (on peut appliquer cette proposition dans le cas non symétrique puisque l'axiome $\perp 6$ n'est pas utilisé dans la démonstration). De plus, P étant un ultrafiltre, $B \setminus P$ est un idéal propre (car $0 \in P$) et $P \times P \subseteq \mathcal{C}$ par ce qui précède, d'où la conclusion. ■

Concluons cette partie en établissant un lien entre 2-clans et clans (au sens de la définition 3.1.11).

Remarque 3.2.19. Nous étendons la définition de clan aux algèbres de Boole de pré-contact : si $(B, \mathcal{C})$ est une algèbre de Boole de pré-contact, une partie non vide Γ de B est un *clan* si $B \setminus \Gamma$ est un idéal et si pour tous $x, y \in \Gamma$, on a $x \mathcal{C} y$. Notons qu'on a toujours $0 \notin \Gamma$. En effet, supposons que $0 \in \Gamma$. Soit $x \in \Gamma$. Alors $0 \mathcal{C} x$. Comme $0 \leq 0$ et $1 \geq x$, on voit que $0 \mathcal{C} 1$ par l'axiome $\mathcal{C}1$. Cela contredit l'axiome $\mathcal{C}3$.

Proposition 3.2.20. *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Soit Γ une partie de B . Alors Γ est un clan si, et seulement si, (Γ, Γ) est un 2-clan.*

Démonstration. Supposons que Γ est un clan. Alors $B \setminus \Gamma$ est un idéal par définition. De plus, cet idéal est propre, par la remarque précédente. Enfin, $\Gamma \times \Gamma \subseteq \mathcal{C}$, ce qui permet de conclure.

Réciproquement, si (Γ, Γ) est un 2-clan, alors $B \setminus \Gamma$ est un idéal et pour tous $x, y \in \Gamma$, on a $x \mathcal{C} y$, d'où la conclusion. ■

3.2.3 Théorème de représentation

Tout comme dans le cas symétrique, nous souhaitons plonger toute algèbre de Boole de pré-contact dans l'ensemble des fermés réguliers non plus de ses clusters, mais de ses l-clusters. Nous devons donc également définir une topologie sur l'ensemble des l-clusters d'une algèbre de Boole de pré-contact.

Définition 3.2.21. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et Y_l l'ensemble de ses l-clusters. On définit l'application $\Box_B$ comme suit :

$$\Box_B : B \rightarrow \mathcal{P}(Y_l) : b \mapsto \{\Gamma \in Y_l \mid \Gamma \ni b\}.$$

Notation. Pour ne pas alourdir l'écriture, on omettra l'indice B dans l'application définie ci-dessus lorsque le contexte est clair.

Proposition 3.2.22. *Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact. Pour tous $a, b \in B$, on a*

$$\Box(a) \cup \Box(b) = \Box(a \vee b)$$

et $\Box(0) = \emptyset$.

Démonstration. Prouvons tout d'abord la première assertion. Procédons par double inclusion. Si $\Gamma \in \square(a) \cup \square(b)$, alors $\Gamma \in \square(a)$ ou $\Gamma \in \square(b)$. Si $\Gamma \in \square(a)$, alors Γ est un l-cluster contenant a . Comme $a \vee b \geq a$, on a $a \vee b \in \Gamma$ puisqu'un l-clan est une partie croissante (rappelons que le complémentaire d'un idéal est une partie croissante, cf. remarque 1.2.68). De même, si $\Gamma \in \square(b)$, alors Γ est un l-cluster et on a $a \vee b \in \Gamma$. Dans les deux cas, on en tire que $\Gamma \in \square(a \vee b)$.

Soit à présent $\Delta \in \square(a \vee b)$. Alors Δ est un l-cluster contenant $a \vee b$. De la définition d'un l-clan, on tire que $a \in \Delta$ ou $b \in \Delta$. On a donc $\Delta \in \square(a) \cup \square(b)$.

Passons à présent à la deuxième partie. S'il existe un l-cluster Γ contenant 0, alors $B \setminus \Gamma$ est un idéal ne contenant pas 0, d'où une contradiction. Donc l'ensemble des l-clusters contenant 0 est vide. ■

Définition 3.2.23. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et Y_l l'ensemble de ses l-clusters. On définit une topologie sur Y_l en donnant une base :

$$\{Y_l \setminus \square(a) \mid a \in B\}.$$

Remarque 3.2.24. Par la proposition 3.2.22, il est clair qu'il s'agit bien d'une base.

La proposition 3.2.25 est une ébauche pour un théorème de représentation dans les algèbres de Boole de pré-contact. Après cette proposition, nous introduirons de nouvelles définitions afin d'obtenir notre théorème de représentation. Notons que plusieurs parties de la démonstration sont analogues à la preuve du théorème 3.1.24. Nous les écrivons cependant en intégralité ici pour convaincre le lecteur du bon fonctionnement des choses dans ce cas où le contact est non symétrique.

Proposition 3.2.25 (AC). Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et Y_l l'ensemble de ses l-clusters. L'espace topologique Y_l est semi-régulier. De plus, l'application

$$\square : B \rightarrow RC(Y_l) : b \mapsto \{\Gamma \in Y_l \mid \Gamma \ni b\}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Boole et un plongement d'ordre qui est dense.

Démonstration. Procédons par étapes.

L'application $\square$ est un plongement d'ordre :

Si $a, b \in B$ sont tels que $a \leq b$, vu la définition d'un l-clan, il est clair que tout l-cluster contenant a contient b , d'où $\square(a) \subseteq \square(b)$. Montrons à présent que si $a, b \in B$ sont tels que $\square(a) \subseteq \square(b)$, on a $a \leq b$. Procédons par l'absurde et supposons que $a \not\leq b$. Dans ce cas, en appliquant l'axiome $\mathcal{C}7$, on trouve un $c \in B$ tel que $a \mathcal{C} c$ et $b \perp c$. Posons $I := \perp(-, c)$. Par la proposition 3.2.5, on sait que I est un idéal. De plus, $a \notin I$. Par le théorème de Stone 2.1.31 (appliqué à l'idéal I et au filtre engendré par a), il existe un ultrafiltre P de B tel que $a \in P$ et $P \cap I = \emptyset$. Posons à présent

$$J := \perp(P, -) = \bigcup_{x \in P} \perp(x, -).$$

Alors J est un idéal de B . En effet,

- $0 \in J$, car $a \in P$, $1 \perp 0$ par $\perp 4$ et $a \leq 1$, $0 \geq 0$ donc vu $\perp 1$, on a $a \perp 0$;
- si $i, j \in J$ alors il existe $x, y \in P$ tels que $x \perp i$ et $y \perp j$. Comme $x \wedge y \leq x$, $i \geq i$, $x \wedge y \leq y$ et $j \geq j$, on voit que $x \wedge y \perp i$ et $x \wedge y \perp j$ en appliquant l'axiome $\perp 1$. A l'aide de l'axiome $\perp 2$, on trouve $x \wedge y = (x \wedge y) \vee (x \wedge y) \perp i \vee j$. De plus, P étant un ultrafiltre, c'est un filtre et donc $x \wedge y \in P$. On en tire que $i \vee j \in J$;
- si $j \in J$ et $d \in B$ sont tels que $d \leq j$, alors il existe $x \in P$ tel que $x \perp j$. Puisque $x \leq x$ et $j \geq d$, on tire de l'axiome $\perp 1$ que $x \perp d$, d'où $d \in J$.

L'ensemble J est donc bien un idéal. De plus, $c \notin J$ sinon il existe $x \in P$ tel que $x \perp c$. Autrement dit, il existe $x \in P \cap I$, ce qui contredit $P \cap I = \emptyset$. En appliquant le théorème de Stone à l'idéal J et au filtre engendré par c , on trouve un ultrafiltre Q contenant c et ne rencontrant pas J .

Montrons que $P \times Q \subseteq \mathcal{C}$. Soient $p \in P$ et $q \in Q$. Comme $Q \cap J = \emptyset$, on a $x \mathcal{C} q$ pour tout $x \in P$. En particulier, $p \mathcal{C} q$.

Vu que P et Q sont des ultrafiltres, $B \setminus P$ et $B \setminus Q$ sont des idéaux propres. Par ce qui précède, on a $P \times Q \subseteq \mathcal{C}$. On en tire que (P, Q) est un 2-clan. Par la proposition 3.2.13, il existe un 2-cluster (Γ, Δ) contenant (P, Q) . Comme $a \in P$ et $c \in Q$, on a $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$. On en tire que $\Gamma \in \Box(a)$. Vu que $\Box(a) \subseteq \Box(b)$, on a $\Gamma \in \Box(b)$, i.e. $b \in \Gamma$. De $\Gamma \times \Delta \subseteq \mathcal{C}$, on tire que $b \mathcal{C} c$, d'où une contradiction.

Si $a \in B$, on a $(\Box(a))^\circ = Y_l \setminus \Box(a')$:

Procédons par double inclusion. Supposons que $\Gamma \in (\Box(a))^\circ$, alors il existe $b \in B$ tel que $\Gamma \in Y_l \setminus \Box(b) \subseteq \Box(a)$. On en tire que $\Box(a) \cup \Box(b) = Y_l$, c'est-à-dire que $\Box(a \vee b) = Y_l = \Box(1)$. Vu l'injectivité montrée au point précédent, on a $a \vee b = 1$, d'où $b \geq a'$. On a alors $\Box(b) \supseteq \Box(a')$ et finalement, $\Gamma \in Y_l \setminus \Box(b) \subseteq Y_l \setminus \Box(a')$. Soit à présent $\Lambda \in Y_l \setminus \Box(a')$. Alors $a' \notin \Lambda$. De plus, $a \in \Lambda$, car sinon $a \in B \setminus \Lambda$ et donc $1 = a \vee a' \in B \setminus \Lambda$ puisque ce dernier ensemble est un idéal. Or, il s'agit d'un idéal propre donc il ne peut pas contenir 1. On a donc bien $a \in \Lambda$ comme annoncé. On en tire que $\Lambda \in \Box(a)$, d'où $Y_l \setminus \Box(a') \subseteq \Box(a)$. Vu que $Y_l \setminus \Box(a')$ est un ouvert (de base), on a finalement $Y_l \setminus \Box(a') \subseteq (\Box(a))^\circ$.

Si $a \in B$, on a $(Y_l \setminus \Box(a))^- = \Box(a')$:

On a $(Y_l \setminus \Box(a))^- = Y_l \setminus (\Box(a))^\circ = \Box(a')$.

Si $a \in B$, on a $\Box(a) \in \text{RC}(Y_l)$:

En effet, on a $(\Box(a))^{\circ-} = (Y_l \setminus \Box(a'))^- = \Box(a)$.

L'application $\Box$ respecte le complément :

Soit $a \in B$. On a $\Box(a') = (Y_l \setminus \Box(a))^- = \neg \Box(a)$, au vu du théorème 2.1.7.

L'application $\Box$ respecte le supremum :

Cela découle de la proposition 3.2.22.

Ce plongement est dense :

Soit C un fermé régulier de Y_l non vide. Alors il existe une famille d'indices I et des éléments $a_i \in B$ pour tout $i \in I$ tels que $C = \bigcap_{i \in I} \Box(a_i)$. De plus, C étant un fermé régulier

non vide, on a $C = C^{\circ-}$ et donc $C^{\circ} \neq \emptyset$. Soit $\Gamma \in C^{\circ}$. On sait qu'il existe $b \in B$ tel que

$$\Gamma \in Y_I \setminus \Box(b) \subseteq C = \bigcap_{i \in I} \Box(a_i).$$

On trouve donc $Y_I \setminus \Box(b) \subseteq \Box(a_i)$ pour tout $i \in I$. Comme $\Box(a_i)$ est fermé pour tout $i \in I$, on a $\Box(b) = (Y_I \setminus \Box(b))^{-} \subseteq \Box(a_i)$ pour tout $i \in I$. On en tire que $\Box(b) \subseteq \bigcap_{i \in I} \Box(a_i) = C$.

Montrons que $\Box(b) \neq \emptyset$, ce qui permettra de conclure. On a $\Gamma \in Y_I \setminus \Box(b)$. Si $b = 1$, $\Box(b) = Y_I$ donc $\Gamma \in \emptyset$. On a donc $b \neq 1$, d'où $b' \neq 0$. Le filtre engendré par b' est alors propre et il existe un ultrafiltre P contenant $b' \uparrow$. Par la proposition 3.2.18, (P, P) est un 2-clan. Il est donc inclus dans un 2-cluster (Γ_0, Δ_0) . On voit alors que $b' \in P \subseteq \Gamma_0$ et puisque Γ_0 est un l-cluster, on a bien $\Box(b') \neq \emptyset$.

L'espace topologique Y_I est semi-régulier :

Vu que $\Box(a)$ est un fermé régulier pour tout $a \in B$, $Y_I \setminus \Box(a)$ est un ouvert régulier pour tout $a \in B$. De plus, $\{Y_I \setminus \Box(a) \mid a \in B\}$ est une base de topologie pour Y_I . On en tire que l'espace topologique Y_I est semi-régulier. ■

Remarque 3.2.26. La preuve de la proposition 3.2.25 peut être plus courte. En effet, sous les hypothèses de la proposition précédente, si $a, b \in B$ sont tels que $\Box(a) \subseteq \Box(b)$, nous devons prouver que $a \leq b$. Si $a \not\leq b$, par $\mathcal{C}7$, on peut trouver $c \in B$ tel que $a \mathcal{C} c$ et $b \perp c$. Via la proposition 3.2.14, on sait qu'il existe un 2-cluster (Γ, Δ) tel que $a \in \Gamma$ et $c \in \Delta$. On a donc $\Gamma \in \Box(a)$, d'où $\Gamma \in \Box(b)$. On en tire que $b \in \Gamma$ et puisque $\Gamma \times \Delta \subseteq \mathcal{C}$, on a $b \mathcal{C} c$, d'où une contradiction.

Nous avons choisi de laisser la preuve plus longue dans la proposition 3.2.25, car il s'agit de celle trouvée en premier.

Etant donné que dans une algèbre de Boole de pré-contact $(B, \mathcal{C})$, rien n'indique que la relation de contact est symétrique, on n'aura pas $a \mathcal{C} b$ si, et seulement si, $\Box(a) \cap \Box(b) \neq \emptyset$ pour tous $a, b \in B$. En effet, pour tous $a, b \in B$, on a

$$\Box(a) \cap \Box(b) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \Box(b) \cap \Box(a) \neq \emptyset,$$

donc une symétrie « forcée ». Il paraît donc naturel d'introduire des « espaces d'ombre » avec des « relations d'ombre » pour retirer ce caractère symétrique.

Remarque 3.2.27. Jusqu'ici, nous n'avons défini de topologie que sur les l-clusters d'une algèbre de Boole. On peut cependant également faire de l'ensemble des demi-clusters et des r-clusters des espaces topologiques. Soit $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et notons DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters.

Considérons l'application

$$\boxminus : B \rightarrow \mathcal{P}(DY) : b \mapsto \{\Lambda \in DY \mid \Lambda \ni b\}.$$

Soient $a, b \in B$. On a $\boxminus(a \vee b) = \boxminus(a) \cup \boxminus(b)$. En effet, si $\Lambda_1 \in \boxminus(a \vee b)$, alors $a \vee b \in \Lambda_1$. Comme $B \setminus \Lambda_1$ est un idéal, on a $a \in \Lambda_1$ ou $b \in \Lambda_1$, i.e. $\Lambda_1 \in \boxminus(a) \cup \boxminus(b)$. De plus, si

$\Lambda_2 \in \Xi(a) \cup \Xi(b)$, alors $a \in \Lambda_2$ ou $b \in \Lambda_2$. Puisque $a \leq a \vee b$ et $b \leq a \vee b$ et vu que $B \setminus \Lambda_2$ est un idéal, dans tous les cas on a $a \vee b \in \Lambda_2$, c'est-à-dire $\Lambda_2 \in \Xi(a \vee b)$.

On a aussi $\emptyset = \Xi(0)$. En effet, sinon il existe $\Lambda \in DY$ tel que $0 \in \Lambda$, i.e. $0 \notin B \setminus \Lambda$. Comme $B \setminus \Lambda$ est un idéal, on a $0 \in B \setminus \Lambda$, d'où une contradiction.

On peut donc définir une topologie sur DY : il s'agit de la topologie dont une base est donnée par

$$\{DY \setminus \Xi(a) \mid a \in B\}.$$

Notons que l'application $\sqsubset$ n'est rien d'autre que la restriction de l'application Ξ (définie au début de cette remarque) à l'ensemble des l-clusters de B . Sur Y_r , on donne la base de topologie suivante :

$$\{Y_r \setminus (\Xi(a) \cap Y_r) \mid a \in B\}.$$

Remarque 3.2.28. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. La proposition 3.2.25 indique que l'application

$$\sqsubset : B \rightarrow \text{RC}(Y_l) : b \mapsto \{\Gamma \in Y_l \mid \Gamma \ni b\}$$

est un plongement d'ordre qui est dense et un homomorphisme d'algèbres de Boole. Si on considère la relation $\mathcal{C}^*$ définie sur B par $a \mathcal{C}^* b$ si, et seulement si, $b \mathcal{C} a$, alors $(B, \mathcal{C}^*)$ est une algèbre de Boole de pré-contact. En effet, les axiomes $\perp 1$, $\perp 2$ et $\perp 5$ sont symétriques, les axiomes $\perp 3$ et $\perp 4$ sont le symétrique l'un de l'autre et il en va de même pour les axiomes $\perp 7$ et $\perp 8$. Les l-clusters de $(B, \mathcal{C}^*)$ sont les r-clusters de $(B, \mathcal{C})$ et les r-clusters de $(B, \mathcal{C}^*)$ sont les l-clusters de $(B, \mathcal{C})$. Considérons l'application

$$\sqsubset^* : B \rightarrow \text{RC}(Y_r) : b \mapsto \{\Delta \in Y_r \mid \Delta \ni b\}.$$

En appliquant la proposition 3.2.25 à l'algèbre de Boole de pré-contact $(B, \mathcal{C}^*)$, on voit qu'il s'agit d'un plongement d'ordre qui est dense et un homomorphisme d'algèbres de Boole.

Définitions 3.2.29. Un *espace d'ombre* est un triplet (Y, sh, h) où Y est un espace topologique, sh une application interne appelée *application d'ombre*, i.e. une application $\text{sh} : Y_1 \rightarrow \mathcal{P}(Y_2)$ avec Y_1 et Y_2 des sous-espaces de Y tels que $Y = Y_1 \cup Y_2$ (cette union n'est pas nécessairement disjointe) et où h est une bijection entre les fermés réguliers de Y_1 et les fermés réguliers de Y_2 , appelée *fonction d'ambivalence*. Les éléments de Y_1 sont appelés *point* et ceux de Y_2 sont dénommés *point d'ombre*. Si $E \subseteq Y_1$, alors $\text{sh}(E)$ est dit *l'ombre de E*. Les *régions* de Y sont les fermés réguliers de Y_1 . On définit une relation binaire $\mathcal{D}_{\text{sh}}$ sur les régions de Y comme suit : pour tous $C, D \in \text{RC}(Y_1)$, on a

$$C \mathcal{D}_{\text{sh}} D \quad \text{si, et seulement si,} \quad \text{sh}(C) \cap h(D) \neq \emptyset.$$

Rappelons que si $(B, \mathcal{C})$ est une algèbre de Boole de pré-contact et si Y_l (resp. Y_r) désigne l'ensemble de ses l-clusters (resp. r-clusters), comme l'ensemble $\{Y_l \setminus \sqsubset(a) \mid a \in B\}$

(resp. $\{Y_r \setminus \square^*(a) \mid a \in B\}$) est une base de topologie pour Y_l (resp. Y_r), pour tout C dans $\text{RC}(Y_l)$ (resp. $C \in \text{RC}(Y_r)$), il existe une famille d'indices I et des éléments $B_i \in B$ pour tout $i \in I$ tels que $C = \bigcap_{i \in I} \square(b_i)$ (resp. $C = \bigcap_{i \in I} \square^*(b_i)$).

Définitions 3.2.30. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. On définit l'application sh^* de la manière suivante :

$$\text{sh}^* : Y_l \rightarrow \mathcal{P}(Y_r) : \Gamma \mapsto \{\Delta \in Y_r \mid (\Gamma, \Delta) \text{ est un 2-cluster}\}.$$

On définit également l'application h^* comme suit :

$$\text{h}^* : \text{RC}(Y_l) \rightarrow \text{RC}(Y_r) : C = \bigcap_{i \in I} \square(b_i) \mapsto \text{h}^*(C) = \bigcap_{i \in I} \square^*(b_i).$$

Proposition 3.2.31. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. Alors $(DY, \text{sh}^*, \text{h}^*)$ est un espace d'ombre.

Démonstration. Il suffit de prouver que h^* est une bijection. L'application $(\text{h}^*)^{-1}$ est donnée par

$$(\text{h}^*)^{-1} : \text{RC}(Y_r) \rightarrow \text{RC}(Y_l) : D = \bigcap_{i \in I} \square^*(b_i) \mapsto \bigcap_{i \in I} \square(b_i),$$

d'où la conclusion. ■

Nous sommes à présent en mesure de fournir un théorème de représentation pour les algèbres de Boole de pré-contact.

Théorème 3.2.32 (Théorème de représentation (AC)). Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, DY l'ensemble de ses demi-clusters, Y_l l'ensemble de ses l-clusters et Y_r l'ensemble de ses r-clusters. Alors l'application $\square$ est un plongement d'ordre qui est dense et un homomorphisme d'algèbres de Boole entre B et l'ensemble des régions de l'espace d'ombre $(DY, \text{sh}^*, \text{h}^*)$. De plus, Y_l est un espace topologique semi-régulier et pour tous a, b dans B , on a

$$a \mathcal{C} b \quad \text{si, et seulement si,} \quad \square(a) \mathcal{D}_{\text{sh}^*} \square(b).$$

Démonstration. La plupart de ces affirmations ont été démontrées à la proposition 3.2.25. Il nous reste à prouver que pour tous $a, b \in B$, on a $a \mathcal{C} b$ si, et seulement si, $\square(a) \mathcal{D}_{\text{sh}^*} \square(b)$, i.e. si, et seulement si $\text{sh}^*(\square(a)) \cap \text{h}^*(\square(b)) \neq \emptyset$. Soient $a, b \in B$.

Supposons que $a \mathcal{C} b$. Par la proposition 3.2.14, il existe un 2-cluster (Γ, Δ) tel que $a \in \Gamma$ et $b \in \Delta$. Par définition, Δ est un r-cluster contenant b . On a donc $\Delta \in \square^*(b) = \text{h}^*(\square(b))$. De plus, $\Delta \in \text{sh}^*(\square(a))$, car $\Delta \in \text{sh}^*(\Gamma)$. On a donc $\text{sh}^*(\square(a)) \cap \text{h}^*(\square(b)) \neq \emptyset$.

Supposons à présent que $\text{sh}^*(\square(a)) \cap \text{h}^*(\square(b)) \neq \emptyset$. Alors on peut trouver $\Gamma \in \square(a)$ et $\Delta \in \text{sh}^*(\Gamma) \cap \text{h}^*(\square(b))$. On sait donc que (Γ, Δ) est un 2-cluster et que $a \in \Gamma$. De plus, comme $\Delta \in \text{h}^*(\square(b)) = \square^*(b)$, on a $b \in \Delta$. Par définition d'un 2-cluster, on a $a \mathcal{C} b$. ■

Chapitre 4

Perspectives

Dans ce dernier chapitre, nous présentons des questions qui sont une suite possible pour ce mémoire.

4.1 Autour du théorème de représentation des algèbres de Boole de pré-contact

Le théorème 3.2.32 qui conclut le chapitre précédent n'est pas nécessairement une extension du théorème de représentation 3.1.24 bien connu. En effet, si $(B, \mathcal{C})$ est une algèbre de Boole de contact et si on pose $Y := \text{Clust}(B)$ et si Z est l'ensemble des 2-clusters de B , tout clan peut être vu comme un 2-clan (cf. proposition 3.2.20), mais rien ne nous indique que l'application f définie sur Y par

$$f : \Gamma \mapsto (\Gamma, \Gamma)$$

est à valeurs dans Z . Deux possibilités s'offrent à nous :

1. On parvient à prouver que f est à valeurs dans Z .
2. On trouve un exemple d'algèbre de Boole de contact dans laquelle il existe un cluster Γ tel que (Γ, Γ) n'est pas un 2-cluster.

Notons que pour trouver un tel exemple, il nous semble plus simple de travailler dans l'espace dual (X, R) de l'algèbre de Boole de contact $(B, \mathcal{C})$.

De plus, si $f(Y) \subseteq Z$, rien ne nous garantit que f est une bijection.

Question 1. Si le théorème de représentation du cas non symétrique n'est pas une extension du théorème 3.1.24, quels sont les différents apports de chacun de ces théorèmes ?

Dans le théorème de représentation 3.1.24, on dispose d'une caractérisation de l'ensemble des clusters d'une algèbre de Boole de contact : il est accessible et faiblement régulier. Dans le théorème 3.2.32, on montre que l'ensemble des l-clusters d'une algèbre de Boole de pré-contact est semi-régulier.

Question 2. Peut-on trouver d'autres caractéristiques de ces ensembles ?

Pour terminer, dans le théorème de représentation des algèbres de Boole de contact, l'ensemble des fermés réguliers des clusters de toute algèbre de Boole peut être munie d'une relation qui en fait une algèbre de Boole de contact. Dans le cas non symétrique, nous n'avons pas une relation de contact définie sur les fermés réguliers de Y_l . Nous avons défini une relation sur cet ensemble et nous savons que certains éléments de $RC(Y_l)$ vérifient les axiomes de pré-contact.

Question 3. Quelles conditions devons-nous imposer dans la définition d'un espace d'ombre afin que l'ensemble de ses régions muni de la relation $\mathcal{D}_{sh}$ soit une algèbre de Boole de pré-contact ?

4.2 Enlever d'autres axiomes

Nous avons choisi de travailler en ôtant l'axiome de symétrie. Toutefois, on aurait pu enlever un autre axiome, comme $\perp 5$.

Question 4. Existe-t-il un théorème de représentation pour les algèbres de Boole munies d'une relation vérifiant les axiomes $\perp 1$ à $\perp 4$, $\perp 6$ et $\perp 7$?

Question 5. Peut-on démontrer un théorème de représentation pour les algèbres de Boole munies d'une relation vérifiant les axiomes $\perp 1$ à $\perp 4$ ainsi que l'axiome $\perp 7$?

4.3 Théorème de représentation dans le dual

La dualité de Stone des algèbres multimodales établie à la section 2.2.2 nous permet d'étudier les caractéristiques des algèbres de Boole de pré-contact via leur espace dual (pour voir comment dualiser une relation de contact, nous renvoyons le lecteur à la section 3.2.1). On peut s'intéresser à la version topologique du théorème de représentation des algèbres de Boole de pré-contact 3.2.32. Pour ce faire, nous introduisons une définition de clan à gauche et de clan à droite dans le cadre topologique. Nous gardons les mêmes appellations que dans le cadre algébrique. Toutefois, si le contexte n'est pas clair, on précisera si on parle de demi-clans (ou demi-clusters) algébriques ou topologiques.

Définitions 4.3.1. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Si $\Gamma \subseteq X$, alors on dit que Γ est un *l-clan* ou *clan à gauche* si c'est un fermé tel que $\Gamma' := \bigcap_{x \in \Gamma} R(x, -) \neq \emptyset$.

Si $\Delta \subseteq X$, alors Δ est appelé *r-clan* ou *clan à droite* si c'est un fermé de X tel que ${}'\Delta := \bigcap_{y \in \Delta} R(-, y) \neq \emptyset$.

Si Λ est un l-clan ou un r-clan, on dit que c'est un *demi-clan*.

Question 6. Nos définitions topologiques des demi-clans sont-elles la version duale des demi-clans booléens ?

Question 7. Si la réponse est non, quelle est la bonne définition duale des demi-clans booléens ?

Tout comme dans les algèbres de Boole de pré-contact, on introduit un terme particulier pour définir un demi-clan maximal.

Définitions 4.3.2. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Un *cluster* est une paire ordonnée (Γ, Δ) maximale pour l'inclusion, où Γ est un l-clan, Δ un r-clan et $\Gamma \times \Delta \subseteq R$.

Un *l-cluster* ou *cluster à gauche* est la première composante d'un cluster. L'ensemble des l-clusters est noté C_l .

Un *r-cluster* ou *cluster à droite* est la deuxième composante d'un cluster. L'ensemble des r-clusters est noté C_r .

La proposition suivante démontre l'existence de clusters topologiques dans une algèbre de Boole de pré-contact.

Proposition 4.3.3 (AC). *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact, (X, R) son espace dual et Γ_0 un l-clan, Δ_0 un r-clan tels que $\Gamma_0 \times \Delta_0 \subseteq R$. Alors il existe un cluster contenant (Γ_0, Δ_0) .*

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{P} := \{(\Gamma, \Delta) \mid \Gamma, \Delta \text{ sont des fermés de } X, \Gamma \times \Delta \subseteq R \text{ et } (\Gamma, \Delta) \supseteq (\Gamma_0, \Delta_0)\}$$

ordonné par inclusion. Comme $(\Gamma_0, \Delta_0) \in \mathcal{P}$, cet ensemble est non vide. Soit $\mathcal{D}$ une chaîne de $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{D}$ est vide, tout élément de $\mathcal{P}$ majore $\mathcal{D}$. Supposons donc que $\mathcal{D}$ est non vide. Il existe alors une famille I d'indices telle que $\mathcal{D} = \bigcup_{i \in I} (\Gamma_i, \Delta_i)$ avec Γ_i, Δ_i des fermés de X , $(\Gamma_i, \Delta_i) \supseteq (\Gamma_0, \Delta_0)$ et $\Gamma_i \times \Delta_i \subseteq R$ pour tout $i \in I$. Posons

$$T := \left(\left(\bigcup_{i \in I} \Gamma_i \right)^-, \left(\bigcup_{i \in I} \Delta_i \right)^- \right).$$

Par construction, tout élément de $\mathcal{D}$ est inclus dans T . De plus, $T \supseteq (\Gamma_0, \Delta_0)$. On a aussi $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i \times \bigcup_{i \in I} \Delta_i \subseteq R$. En effet, si $x \in \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ et si $y \in \bigcup_{i \in I} \Delta_i$, alors il existe $i_1, i_2 \in I$ tels que $x \in \Gamma_{i_1}$ et $y \in \Delta_{i_2}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ étant une chaîne, on a $(\Gamma_{i_1}, \Delta_{i_1}) \subseteq (\Gamma_{i_2}, \Delta_{i_2})$ ou $(\Gamma_{i_2}, \Delta_{i_2}) \subseteq (\Gamma_{i_1}, \Delta_{i_1})$. Dans le premier cas, on a $(x, y) \in (\Gamma_{i_2}, \Delta_{i_2})$, dans le second, on a $(x, y) \in (\Gamma_{i_1}, \Delta_{i_1})$. Puisque $\Gamma_i \times \Delta_i \subseteq R$ pour tout $i \in I$, on a bien xRy . D'où $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i \times \bigcup_{i \in I} \Delta_i \subseteq R$. Comme R est fermé, on a $T \subseteq R$ et on voit que toute chaîne de $\mathcal{P}$ est majorée. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{P}$ admet un élément maximal. ■

Les demi-clans et clusters topologiques possèdent plusieurs propriétés. Nous en avons démontré certaines dans le cadre booléen du chapitre 3, mais tant que nous n'avons pas répondu à la question 6, rien ne nous permet d'affirmer qu'elles sont également vraies du point de vue topologique sans démonstration. De plus, nous pouvons prouver des propriétés des clusters topologiques encore non prouvées dans les algèbres de Boole de pré-contact.

Définition 4.3.4. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Soit E une partie de X . On pose

$$E' := \bigcap_{x \in E} R(x, -) \quad \text{et} \quad {}'E := \bigcap_{y \in E} R(-, y).$$

Proposition 4.3.5. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Soient E_1 et E_2 des parties de X . On a

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 \subseteq R &\Leftrightarrow E_2 \subseteq E_1' \\ &\Leftrightarrow E_1 \subseteq {}'E_2. \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons la première équivalence. Supposons que $E_1 \times E_2 \subseteq R$. Soit $y \in E_2$. Alors pour tout $x \in E_1$, on a xRy . Comme $E_1' = \bigcap_{x \in E_1} R(x, -)$, on a $y \in E_1'$.

Supposons à présent que $E_2 \subseteq E_1'$. On a $E_1 \times E_1' \subseteq R$ puisque si $y \in E_1'$, alors $xRy \forall x \in E_1$. On en tire que $E_1 \times E_2 \subseteq R$.

On procède de même pour montrer l'équivalence entre $E_1 \times E_2 \subseteq R$ et $E_1 \subseteq {}'E_2$. ■

Proposition 4.3.6. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Soient E_1, E_2 des parties de X telles que $E_1 \subseteq E_2$. Alors $E_1' \supseteq E_2'$ et $'E_1 \supseteq {}'E_2$.

Démonstration. C'est clair puisque plus l'ensemble sur lequel on prend l'intersection est grand, plus l'intersection est petite. ■

Proposition 4.3.7. Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Soit $\Gamma \subseteq X$. Alors Γ est un l-cluster si, et seulement si, Γ est un l-clan tel que $\Gamma = {}'(\Gamma')$. Dans ce cas, Γ' est l'unique Δ tel que (Γ, Δ) est un cluster.

Démonstration. Supposons que Γ est un l-cluster. Alors il s'agit bien évidemment d'un l-clan. Montrons que $\Gamma = {}'(\Gamma')$. Soit $x \in \Gamma$. On cherche à prouver que $x \in \bigcap_{y \in \Gamma'} R(-, y)$. Or, si $y \in \Gamma'$, alors zRy pour tout $z \in \Gamma$, par définition de Γ' . En particulier, on a xRy . Comme on a pris y quelconque dans Γ' , on a bien démontré que $x \in {}'(\Gamma')$. À présent, supposons que $x \in {}'(\Gamma')$ et montrons que $x \in \Gamma$. On sait que pour tout $y \in \Gamma'$, xRy et zRy pour tout $z \in \Gamma$. Si $x \notin \Gamma$, alors $\{x\} \cup \Gamma \supset \Gamma$ et il s'agit d'un l-clan. En effet, il s'agit d'un fermé (par la proposition A.4.5) et $(\{x\} \cup \Gamma)' \neq \emptyset$ par ce qui précède. Cela contredit la maximalité de Γ . En effet, si Δ est tel que (Γ, Δ) est un cluster, alors $\Gamma \times \Delta \subseteq R$ et donc $\Delta \subseteq \Gamma'$ par la proposition 4.3.5. Vu ce qui précède, on a xRy pour tout $y \in \Gamma'$. Donc $(\{x\} \cup \Gamma, \Gamma') \subseteq R$ et $(\{x\} \cup \Gamma, \Gamma') \supseteq (\Gamma, \Gamma')$.

Supposons à présent que Γ est un l-clan tel que $\Gamma = '(\Gamma')$. Montrons que (Γ, Γ') est un cluster. Supposons qu'il existe un cluster (Γ_0, Δ_0) tel que $(\Gamma, \Gamma') \subseteq (\Gamma_0, \Delta_0)$. Notons que par la première partie de la preuve, on a $\Gamma_0 = '(\Gamma'_0)$. De $\Gamma \subseteq \Gamma_0$, on tire que $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma' \subseteq \Delta_0$, via la proposition 4.3.6. De plus, on a $\Gamma_0 \times \Delta_0 \subseteq R$, donc $\Delta_0 \subseteq \Gamma'_0$ vu la proposition 4.3.5. D'où $\Gamma' = \Gamma'_0 = \Delta_0$. Finalement, on a $\Gamma_0 = '(\Gamma'_0) = '(\Gamma') = \Gamma$.

Enfin, montrons que dans ce cas, Γ' est l'unique Δ tel que (Γ, Δ) est un cluster. Tout d'abord, Γ' est un r-clan, car

- si $x \in \Gamma$, $R(x, -)$ est un fermé puisque R est une relation fermée. On en tire que $\Gamma' = \bigcap_{x \in \Gamma} R(x, -)$ est fermé ;
- $\emptyset \neq \Gamma = '(\Gamma')$.

De plus, si Δ est tel que (Γ, Δ) est un cluster, alors $\Gamma \times \Delta \subseteq R$ et $\Delta \subseteq \Gamma'$, par la proposition 4.3.5. Finalement, on a $\Delta = \Gamma'$ par maximalité. ■

La proposition suivante se démontre de façon analogue.

Proposition 4.3.8. *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Soit $\Delta \subseteq X$. Alors Δ est un r-cluster si, et seulement si, Δ est un r-clan tel que $\Delta = ('\Delta)'$. Dans ce cas, $'\Delta$ est l'unique Γ tel que (Γ, Δ) est un cluster.*

Comme dans le cas booléen, nous devons définir une topologie sur l'ensemble des clusters à gauche. Ici, les clusters sont des fermés de l'espace dual de l'algèbre de Boole de départ. Il paraît donc naturel de définir une topologie sur les fermés et ensuite d'utiliser la topologie induite.

Définition 4.3.9. Soient X un espace topologique et $\Gamma(X)$ l'ensemble de ses fermés. On définit l'application $\square_X$ comme suit :

$$\square_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) : E \mapsto \square_X(E) := \{C \in \Gamma(X) \mid C \subseteq E\}.$$

Notation. Pour ne pas alourdir l'écriture, on omettra l'indice X dans l'application définie ci-dessus lorsque le contexte est clair. De plus, on notera simplement $\square E$ au lieu de $\square(E)$ lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Proposition 4.3.10. *Soient X un espace topologique et O, U des parties de X . Alors*

$$\square(O \cap U) = \square O \cap \square U \quad \text{et} \quad \Gamma(X) = \square X.$$

Démonstration. La deuxième assertion est évidente. Prouvons la première. On a

$$\begin{aligned} \square O \cap \square U &= \{C \in \Gamma(X) \mid C \subseteq O\} \cap \{C \in \Gamma(X) \mid C \subseteq U\} \\ &= \{C \in \Gamma(X) \mid C \subseteq O \cap U\} \\ &= \square(O \cap U), \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

Définition 4.3.11. Soit X un espace topologique. La *topologie de Scott* définie sur $\Gamma(X)$ est la topologie admettant $\{\Box O \mid O \in \text{of}(X)\}$ comme base.

Concluons cette section par une dernière question.

Question 8. Dans la démonstration du théorème de représentation des algèbres de Boole de pré-contact 3.2.32, l'axiome $\mathcal{C}7$ joue un rôle dominant. Il paraît donc naturel que le dual de cet axiome soit important dans la démonstration d'un théorème similaire du point de vue topologique. Mais quel est ce dual? Rappelons que si $(B, \mathcal{C})$ est une algèbre de Boole de pré-contact, l'axiome $\mathcal{C}7$ est donné par

$$a \not\leq b \Rightarrow \exists c \in B \text{ tel que } a \mathcal{C} c \text{ et } b \not\mathcal{C} c$$

pour tous $a, b \in B$. Si on note (X, R) l'espace dual de notre algèbre de Boole de pré-contact, l'équivalent de l'axiome $\mathcal{C}7$ est-il donné par

$$\Box O \cap C_l \subseteq \Box U \cap C_l \Rightarrow O \subseteq U \quad (4.1)$$

pour tous $O, U \in \text{of}(X)$?

Expliquons brièvement pourquoi 4.1 nous semble être le bon candidat comme axiome dual de $\mathcal{C}7$. Avant de démontrer la proposition 3.2.25, nous avons tenté de prouver l'énoncé suivant : *Soient $(B, \mathcal{C})$ une algèbre de Boole de pré-contact et (X, R) son espace dual. Alors l'application*

$$\boxtimes : \text{of}(X) \rightarrow RO(C_l) : O \mapsto \Box O \cap C_l$$

est un plongement d'ordre qui est dense et un homomorphisme d'algèbres de Boole. Toutefois, pour montrer qu'il s'agit bien d'un plongement, nous devons notamment prouver que pour tous $O, U \in \text{of}(X)$, si $\boxtimes O \subseteq \boxtimes U$, alors $O \subseteq U$. Désirant mimer la démonstration du théorème 3.1.24, il nous « fallait » appliquer l'axiome $\mathcal{C}7$. Ceci nous a amenés à penser que 4.1 est peut-être l'axiome dual de l'axiome $\mathcal{C}7$.

4.4 Treillis de contact

Tout au long de ce travail, un des objectifs était d'établir un théorème de représentation dans les algèbres de Boole de pré-contact. Cependant, on peut également définir des treillis de contact.

Définition 4.4.1. Un *treillis de contact* est un treillis borné L muni d'une relation de disjonction $\perp$ binaire telle que pour tous $x, y, z, t \in L$,

- $\perp 1$: si $x \leq y$, $z \geq t$ et $y \perp z$, alors $x \perp t$;
- $\perp 2$: si $x \perp z$, $x \perp t$, $y \perp z$ et $y \perp t$, alors $x \vee y \perp z \vee t$;
- $\perp 3$: $0 \perp 1$;
- $\perp 4$: $1 \perp 0$;

$\perp 5$: si $x \perp x$, alors $x = 0$;

$\perp 6$: si $x \perp y$, alors $y \perp x$;

$\perp 7$: si $x \neq 1$, alors il existe $u \in L$ tel que $u \neq 0$ et $x \perp u$.

Question 9. Peut-on établir un théorème de représentation dans les treillis de contact ?

Question 10. Si la réponse à la question précédente est oui, peut-on également enlever l'axiome de symétrie ?

Annexes

Annexe A

Rappels topologiques

Cette première annexe reprend toutes les notions topologiques utilisées dans ce travail. On y trouve donc la définition de base, de sous-base, d'intérieur, d'adhérence, d'application continue, de compact, etc. Quelques propriétés sont énoncées sans démonstration, pour d'autres, la preuve est fournie. Pour les propositions non démontrées ici, le lecteur intéressé pourra consulter par exemple [4] et [18].

A.1 Topologie, voisinage et base

Définition A.1.1. Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est une partie $\mathcal{T}$ de X telle que

- toute union d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$;
- toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

On appelle les éléments de $\mathcal{T}$ les *ouverts* de la topologie. On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Lorsque le contexte est clair, on note simplement X l'espace topologique.

Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, comme l'ensemble vide $\emptyset$ est une partie finie de $\mathcal{T}$, on a en particulier

- $\emptyset = \bigcup \{O \in \mathcal{T} : O \subseteq \emptyset\} \in \mathcal{T}$;
- $X = \bigcap \{O \in \mathcal{T} : O \subseteq X\} \in \mathcal{T}$.

Définition A.1.2. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et Y une partie de X . La *topologie induite* par X sur Y est la topologie

$$\mathcal{T}_{\text{ind}} = \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}.$$

On dit que $(Y, \mathcal{T}_{\text{ind}})$ est un *sous-espace* de $(X, \mathcal{T})$.

Définitions A.1.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Une partie V de X est un *voisinage* de x s'il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subseteq V$.

Le *système de voisinages* de x , noté $\mathcal{V}_x$, est l'ensemble des voisinages de x .

Une *base de voisinages* de x est une partie $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{V}_x$ telle que tout élément de $\mathcal{V}_x$ contient un élément de $\mathcal{B}_x$.

Proposition A.1.4. *Soit X un espace topologique. Un ensemble $O \subseteq X$ est ouvert si, et seulement si, O est un voisinage de chacun de ses points.*

Définition A.1.5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une *base* de la topologie $\mathcal{T}$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ telle que tout élément de $\mathcal{T}$ est union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition A.1.6. *Soient X un ensemble et $\mathcal{B} \subseteq X$. Si X est union d'éléments de $\mathcal{B}$ et si l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$ est union d'éléments de $\mathcal{B}$, alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que $\mathcal{B}$ soit une base de $\mathcal{T}$.*

Définition A.1.7. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie C de X est *fermée* si $X \setminus C$ est ouvert.

Proposition A.1.8. *Dans un espace topologique, toute intersection de fermés est fermée et toute union finie de fermés est fermée.*

A.2 Intérieur et adhérence

Définition A.2.1. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Un point $x \in A$ est *intérieur* à A si $A \in \mathcal{V}_x$. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé *intérieur* de A et est noté A° .

Proposition A.2.2. *Soient X un espace topologique et A une partie de X . L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A .*

Proposition A.2.3. *Soient X un espace topologique et A une partie de X . Alors $A^{\circ\circ} = A^\circ$.*

Proposition A.2.4. *Soient X un espace topologique et A, B des parties de X . Alors*

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

Démonstration. Procédons par double inclusion. Comme $A^\circ \subseteq A$ et $B^\circ \subseteq B$, on a

$$A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$$

et vu que l'intersection de deux ouverts est un ouvert, il est clair que $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. De plus, on a $A \cap B \subseteq A$ donc $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$. De même, $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$. Donc

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ.$$

■

Proposition A.2.5. *Soient X un espace topologique et A, B des parties de X . Alors*

$$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ.$$

Démonstration. Comme $A^\circ \subseteq A$ et $B^\circ \subseteq B$, on a $A^\circ \cup B^\circ \subseteq A \cup B$. De plus, comme toute union d'ouverts est ouverte, $A^\circ \cup B^\circ$ est ouvert et donc $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. ■

L'inclusion dans cette dernière proposition peut être stricte. Il suffit de choisir par exemple $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie euclidienne, $A =]1; 2]$ et $B =]2; 3]$. On a alors

$$A^\circ \cup B^\circ =]1; 2[\cup]2; 3[\neq]1; 3[= (A \cup B)^\circ.$$

Définition A.2.6. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Un point $x \in A$ est *adhérent* à A si $A \cap V \neq \emptyset \ \forall V \in \mathcal{V}_x$ ou, de façon équivalente, si x n'est pas intérieur à $X \setminus A$. L'ensemble des points adhérents à A est appelé *adhérence* de A et est noté A^- ou $\overline{A}$.

Proposition A.2.7. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Alors

$$\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ.$$

Proposition A.2.8. Soient X un espace topologique et A une partie de X . L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A .

Proposition A.2.9. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Alors

$$A^{--} = A^-.$$

Proposition A.2.10. Soient X un espace topologique et A, B des parties de X . Alors

$$A^- \cup B^- = (A \cup B)^-.$$

Démonstration. Procédons par double inclusion. Comme $A \subseteq A^-$ et $B \subseteq B^-$, on a

$$A \cup B \subseteq A^- \cup B^-$$

et vu que l'union de deux fermés est fermée, il est clair que $(A \cup B)^- \subseteq A^- \cup B^-$. De plus, on a $A \subseteq A \cup B$, donc $A^- \subseteq (A \cup B)^-$. De même, $B^- \subseteq (A \cup B)^-$. On en tire que $A^- \cup B^- \subseteq (A \cup B)^-$. ■

Proposition A.2.11. Soient X un espace topologique et A, B des parties de X . Alors

$$(A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-.$$

Démonstration. Comme $A \subseteq A^-$ et $B \subseteq B^-$, on a $A \cap B \subseteq A^- \cap B^-$. De plus, comme une intersection de fermés est fermée, $A^- \cap B^-$ est fermé et donc $(A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-$. ■

L'inclusion dans cette dernière proposition peut être stricte. Il suffit de choisir par exemple $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie euclidienne, $A =]0; 1[$ et $B =]1; 2[$. On a alors

$$(A \cap B)^- = \emptyset \neq \{1\} = A^- \cap B^-.$$

Proposition A.2.12. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Alors

$$A^{-\circ-\circ} = A^{-\circ}.$$

Démonstration. On a clairement $A^{-\circ} \subseteq A^{-\circ-\circ}$.

Montrons l'autre inclusion. On sait que $A^{-\circ}$ est le plus grand ouvert inclus dans A^- . Or, $A^{-\circ-\circ}$ est un ouvert. Prouvons qu'il est inclus dans A^- . L'ouvert $A^{-\circ}$ est inclus dans le fermé A^- , donc l'adhérence de $A^{-\circ}$, $A^{-\circ-}$, est aussi incluse dans le fermé A^- . On en tire que

$$A^{-\circ-\circ} \subseteq A^{-\circ-} \subseteq A^-.$$

Donc $A^{-\circ-\circ} \subseteq A^{-\circ}$.

Au final, on a $A^{-\circ-\circ} = A^{-\circ}$. ■

Proposition A.2.13. Soient X un espace topologique, A une partie de X et un ouvert O . Alors

$$O \cap \bar{A} \subseteq (O \cap A)^- \quad \text{et} \quad O \cap A^{-\circ} \subseteq (O \cap A)^{-\circ}.$$

Démonstration. Soit $x \in O \cap \bar{A}$. Alors $x \in O$ et tout voisinage de x rencontre A . Comme $x \in O$, tout voisinage de x rencontre également O . Donc si V est un voisinage de x , on a $V \cap O \neq \emptyset$ et $V \cap A \neq \emptyset$. On en tire que $V \cap O \cap A \neq \emptyset$. Comme V est un voisinage arbitraire de x , on en tire que tout voisinage de x rencontre $O \cap A$. On a donc $O \cap \bar{A} \subseteq (O \cap A)^-$. Prouvons à présent la deuxième inclusion. Vu que l'intersection de deux ouverts est un ouvert, $O \cap A^{-\circ}$ est ouvert. De plus, comme $A^{-\circ} \subseteq A^-$, on a $O \cap A^{-\circ} \subseteq O \cap A^- \subseteq (O \cap A)^-$ par la première inclusion. Donc $O \cap A^{-\circ} \subseteq (O \cap A)^{-\circ}$, ce qui permet de conclure. ■

Proposition A.2.14. Soient X un espace topologique et O, U deux ouverts de X . Alors

$$(O \cap U)^{-\circ} = O^{-\circ} \cap U^{-\circ}.$$

Démonstration. Procédons par double inclusion. On a $O \cap U \subseteq O$, donc $(O \cap U)^- \subseteq O^-$, d'où $(O \cap U)^{-\circ} \subseteq O^{-\circ}$. De même, $(O \cap U)^- \subseteq U^-$. On en tire que

$$(O \cap U)^{-\circ} \subseteq O^{-\circ} \cap U^{-\circ}.$$

Montrons à présent la deuxième inclusion. Vu la proposition précédente, on a

$$O^{-\circ} \cap U^{-\circ} \subseteq (O^{-\circ} \cap U)^{-\circ} \subseteq (O \cap U)^{-\circ-\circ} = (O \cap U)^{-\circ}$$

en appliquant la proposition A.2.12. ■

Définition A.2.15. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un *ouvert régulier* de X est un ouvert O tel que $O^{-\circ} = O$.

Définition A.2.16. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *semi-régulier* s'il admet une base d'ouverts réguliers.

Définition A.2.17. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *faiblement régulier* s'il est semi-régulier et si pour tout ouvert non vide O , il existe un ouvert non vide U tel que $U^- \subseteq O$.

A.3 Topologie produit

Définition A.3.1. Soient A une famille d'indices et $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ une collection d'ensembles. Le *produit cartésien* des ensembles X_α est l'ensemble

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \mid x_\alpha \in X_\alpha \forall \alpha \in A\}.$$

Définition A.3.2. Soient A une famille d'indices et $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ une collection d'ensembles. Pour tout $\alpha_0 \in A$, on appelle *projection canonique* et on note p_{α_0} l'application

$$p_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_{\alpha_0} : (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_{\alpha_0}.$$

Définition A.3.3. Soient A une famille d'indices et $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ une collection d'ensembles. Pour toute partie finie $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de A et tous sous-ensembles B_{α_i} de X_{α_i} ($i \in \{1, \dots, n\}$), on définit

$$\pi_A(B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}) := p_{\alpha_1}^{-1}(B_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(B_{\alpha_n}).$$

On a donc

$$\pi_A(B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \mid x_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i} \forall i \leq n\}.$$

Définition A.3.4. Soient A une famille d'indices et $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ une famille d'espaces topologiques. La *topologie produit* sur $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ est la topologie dont une base est donnée par les ensembles $\pi_A(O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_n})$ où O_{α_i} est un ouvert de X_{α_i} pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ et où on considère toutes les parties finies $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de A .

Proposition A.3.5. Soient A une famille d'indices et $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $\alpha \in A$, soit F_α un fermé de X_α . L'ensemble $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé dans $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

A.4 Séparation et continuité

Définition A.4.1. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *accessible* si pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe un voisinage V de x ne contenant pas y .

Proposition A.4.2. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est accessible si, et seulement si, les singletons de X sont fermés.

Définition A.4.3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Cet espace topologique est *séparé* si pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}_x$ et $V' \in \mathcal{V}_y$ tels que $V \cap V' = \emptyset$.

Proposition A.4.4. Un espace topologique séparé est accessible. En particulier, dans un espace topologique séparé, les singletons sont fermés.

Proposition A.4.5. Soient X un espace topologique séparé, O un ouvert de X et $x \in O$. Alors $O \setminus \{x\}$ est un ouvert de X .

Démonstration. Comme X est séparé, $\{x\}$ est fermé. Donc $X \setminus \{x\}$ est ouvert. On a

$$O \setminus \{x\} = O \cap (X \setminus \{x\})$$

et comme l'intersection de deux ouverts est un ouvert, on peut conclure. ■

Définition A.4.6. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est *continue au point* $x \in X$ si $f^{-1}(B)$ est un voisinage de x pour tout $B \in \mathcal{V}_{f(x)}$.

Définition A.4.7. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est *continue* si elle est continue en tout point de X .

Proposition A.4.8. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Soit une application $f : X \rightarrow Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- l'application f est continue ;
- pour tout ouvert O de Y , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X ;
- pour tout fermé C de Y , $f^{-1}(C)$ est un fermé de X ;
- si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{T}'$, alors pour tout $x \in X$ et tout $B \in \mathcal{B}'$ tel que $f(x) \in B$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $x \in A$ et $f(A) \subseteq B$.

A.5 Compacité

Définition A.5.1. Soit X un espace topologique. Un *recouvrement* de X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Un recouvrement est dit *ouvert* si chaque élément du recouvrement est un ouvert.

Définition A.5.2. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *compact* si de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un recouvrement fini.

Proposition A.5.3. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact si, et seulement si, de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire une famille finie d'intersection vide.

Définition A.5.4. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et Y une partie de X . Alors Y est *compact* si $(Y, \mathcal{T}_{\text{ind}})$ est compact.

Proposition A.5.5. Toute image d'un compact par une application continue est compacte.

Proposition A.5.6. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Alors tout fermé C est compact.

Proposition A.5.7. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Alors tout sous-ensemble compact de X est fermé.

Annexe B

Lien entre algèbre de Boole et anneau

Dans nombre d'articles sur les algèbres de Boole, ces dernières sont définies avec les opérations $+$ (addition) et $\cdot$ (multiplication) (sens anneau) et non pas avec $\vee$ et $\wedge$ (sens algébrique). C'est le cas notamment dans [9] et [5]. Dans notre travail, nous avons privilégié le côté algébrique des algèbres de Boole, qui nous paraissait plus simple. Il existe évidemment un lien entre les deux points de vue.

L'objectif de cette annexe est double : prouver que toute algèbre de Boole est un anneau commutatif et expliquer le choix du terme *idéal* dans les algèbres de Boole. La première partie de cette annexe est consacrée à la comparaison des structures d'algèbre de Boole et d'anneau commutatif. Dans un second temps, nous montrerons que dans une algèbre de Boole, un idéal d'anneau est équivalent à un idéal d'algèbre de Boole.

B.1 Structure

Rappelons qu'une algèbre de Boole B est un treillis borné distributif complété. On dispose donc de deux lois $\vee$ et $\wedge$ qui sont idempotentes, commutatives, associatives, qui vérifient les lois d'absorption et qui sont distributives. L'ensemble B possède un minimum 0 et un maximum 1. De plus, tout élément possède un unique complément.

Définition B.1.1. Un *groupe* G est un ensemble muni d'une opération binaire, interne et partout définie

$$+ : G \times G \rightarrow G$$

telle que

- l'opération $+$ est associative ;
- l'opération $+$ possède un (unique) neutre, noté 0 ;
- tout élément g de G possède un (unique) opposé, noté $-g$.

Le groupe est dit *commutatif* si l'opération $+$ est commutative.

Définition B.1.2. Un *anneau* est un ensemble A muni de deux opérations internes et partout définies

$$+ : A \times A \rightarrow A \quad \text{et} \quad \cdot : A \times A \rightarrow A$$

telles que

- $(A, +)$ est un groupe commutatif (on notera le neutre pour $+$ par 0 et l'opposé d'un élément a de A par $-a$) ;
- l'opération $\cdot$ est associative ;
- l'opération $\cdot$ possède un (unique) neutre (on le notera 1) ;
- l'opération $\cdot$ est distributive à gauche et à droite par rapport à l'opération $+$, i.e.

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

pour tous $a, b, c \in A$.

L'anneau est dit *commutatif* si l'opération $\cdot$ est commutative. On notera souvent ab au lieu de $a \cdot b$ si $a, b \in A$.

Définition B.1.3. Un *anneau booléen* A est un anneau dont la multiplication est idempotente (i.e. $a^2 = a \ \forall a \in A$).

Remarques B.1.4. Notons que dans un anneau booléen A , tout élément est son propre opposé. En effet, si $a \in A$, alors $(a + a)^2 = a + a$, donc $a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a$ et comme $a^2 = a$, on a $a + a = 0$.

Remarquons également que la multiplication dans un anneau booléen A est commutative. En effet, soient $a, b \in A$. Alors $(a + b)^2 = a + b$, donc $a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b = a + b$, donc $ab + ba = 0$ et par ce qui précède, on en tire que $ab = ba$.

Théorème B.1.5. Toute algèbre de Boole B est un anneau booléen commutatif pour les opérations $+$ et $\cdot$ définies par

$$a + b := (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \quad \text{et} \quad a \cdot b := a \wedge b$$

pour tous $a, b \in B$.

Démonstration. Soit B une algèbre de Boole et posons

$$a + b := (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \quad \text{et} \quad a \cdot b := a \wedge b$$

pour tous $a, b \in B$. Alors

- $(B, +)$ est un groupe commutatif :
 - si a, b sont deux éléments de B , alors

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (b \wedge a') \vee (b' \wedge a) = b + a$$

donc $+$ est commutatif,

- pour tous $a, b, c \in B$, on a

$$\begin{aligned}
(a + b) + c &= [((a \wedge b') \vee (a' \wedge b)) \wedge c'] \vee [((a \wedge b') \vee (a' \wedge b))' \wedge c] \\
&= [(a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c')] \vee [((a \wedge b')' \wedge (a' \wedge b)') \wedge c] \\
&= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee [(a' \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge c] \\
&= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee [((a' \vee b) \wedge a) \vee ((a' \vee b) \wedge b')] \wedge c] \\
&= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee [(a \wedge b) \vee (a' \wedge b')] \wedge c] \\
&= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c)
\end{aligned}$$

et comme cette dernière ligne est invariante par permutation de $\{a, b, c\}$, on en tire que $(a + b) + c = a + (b + c)$ en utilisant le point précédent,

- l'élément 0 est neutre pour $+$, car pour tout $a \in B$, on a

$$a + 0 = (a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0) = (a \wedge 1) \vee (a' \wedge 0) = a \vee 0 = a$$

et

$$0 + a = (0 \wedge a') \vee (0' \wedge a) = (0 \wedge a') \vee (1 \wedge a) = 0 \vee a = a,$$

- tout élément est son propre opposé car si a est un élément de B , alors

$$a + a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a) = 0 \vee 0 = 0;$$

- si a, b, c sont des éléments de B , alors

$$a(bc) = a(b \wedge c) = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = (ab)c$$

donc $\cdot$ est associatif;

- l'élément 1 est neutre pour $\cdot$, car pour tout $a \in B$, on a

$$a.1 = a \wedge 1 = a \quad \text{et} \quad 1.a = 1 \wedge a = a;$$

- l'opération $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à l'opération $+$, car pour tous $a, b, c \in B$, on a

$$\begin{aligned}
ab + ac &= [(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)'] \vee [(a \wedge b)' \wedge (a \wedge c)] \\
&= [a \wedge b \wedge (a' \vee c')] \vee [(a' \vee b') \wedge a \wedge c] \\
&= (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge c \wedge a') \vee (a \wedge c \wedge b') \\
&= (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge c \wedge b') \\
&= a \wedge [(b \wedge c') \vee (b' \wedge c)] \\
&= a(b + c);
\end{aligned}$$

- l'opération $\cdot$ est commutative, car pour tous $a, b \in B$, on a $ab = a \wedge b = b \wedge a = ba$;

- l'opération $\cdot$ est distributive à droite par rapport à l'opération $+$, car pour tous $a, b, c \in B$, on a

$$\begin{aligned} ac + bc &= [(a \wedge c) \wedge (b \wedge c)'] \vee [(a \wedge c)' \wedge (b \wedge c)] \\ &= [(c \wedge a) \wedge (c \wedge b)'] \vee [(c \wedge a)' \wedge (c \wedge b)] \\ &= ca + cb \\ &= c(a + b) \\ &= (a + b)c; \end{aligned}$$

- l'opération $\cdot$ est idempotente, car pour tout $a \in B$, on a $a^2 = a.a = a \wedge a = a$. ■

Remarquons que si B est une algèbre de Boole et si pour tous $a, b \in B$ on définit $a + b := (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$, alors $a + 1 = (a \wedge 1') \vee (a' \wedge 1) = (a \wedge 0) \vee (a' \wedge 1) = 0 \vee a' = a'$.

Théorème B.1.6. *Tout anneau booléen A est une algèbre de Boole en définissant les opérations*

$$a \wedge b := ab \quad \text{et} \quad a \vee b := a + b + ab$$

pour tous $a, b \in A$.

Démonstration. Soit A un anneau booléen et posons $a \wedge b := ab$ et $a \vee b := a + b + ab$ pour tous $a, b \in A$. Alors

- la loi $\wedge$ est idempotente, commutative et associative vu sa définition ;
- la loi $\vee$ est
 - idempotente, car pour tout $a \in A$, on a

$$a \vee a = a + a + a^2 = a + a + a = (a + a) + a = 0 + a = a,$$

- commutative, car pour tous $a, b \in A$, on a $a \vee b = a + b + ab = b + a + ba = b \vee a$,
- associative, car pour tous $a, b, c \in A$, on a

$$a \vee (b \vee c) = a + b + c + bc + a(b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$$

et cette expression est invariante par permutation de $\{a, b, c\}$ puisque la multiplication est commutative, donc $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

- les lois $\vee$ et $\wedge$ vérifient les lois d'absorption : pour tous $a, b \in A$, on a
 - $a \wedge (a \vee b) = a(a + b + ab) = a^2 + ab + a^2b = a + ab + ab = a$,
 - $a \vee (a \wedge b) = a + ab + a^2b = a + ab + ab = a$.

Alors par le théorème 1.2.9, on sait que A est un treillis pour la relation d'ordre

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \quad (a, b \in A).$$

De plus, le treillis A est

- distributif : pour tous $a, b, c \in A$, on a

$$a \wedge (b \vee c) = a(b + c + bc) = ab + ac + abc$$

et

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = ab + ac + abac = ab + ac + abc;$$

- borné : pour tout $a \in A$, on a $a \wedge 0 = a.0 = 0$ donc $0 \leq a$ et $a \wedge 1 = a.1 = a$ donc $a \leq 1$;
- complémenté : soit $a \in A$. Alors $a \wedge (a + 1) = a(a + 1) = a^2 + a = a + a = 0$ et $a \vee (a + 1) = a + (a + 1) + a(a + 1) = a + a + 1 + a^2 + a = a + a + 1 + a + a = 1$, donc $a' = a + 1$.

■

B.2 Idéal

Dans cette section, nous montrons que dans une algèbre de Boole, un idéal au sens algèbre de Boole est équivalent à un idéal au sens anneau. On peut donc appliquer tous les théorèmes connus sur les idéaux en théorie des anneaux aux idéaux dans les algèbres de Boole.

Rappelons qu'un idéal d'une algèbre de boole B est une partie I non vide de B telle que

- si $i \in I$ et $a \in B$ sont tels que $a \leq i$, alors $a \in I$;
- si $i \in I$ et $j \in I$, alors $i \vee j \in I$.

Définition B.2.1. Soit A un anneau commutatif. Un sous-ensemble I de A est un idéal si

- I est un sous-groupe additif de A , i.e.
 - $0 \in I$,
 - $\forall i, j \in I, i + j \in I$,
 - $\forall i \in I, -i \in I$;
- pour tous $a \in A, i \in I, a.i \in I$.

Proposition B.2.2. Si B est une algèbre de Boole, les notions d'idéal dans B au sens des algèbres de Boole et d'idéal dans B au sens des anneaux coïncident.

Démonstration. Supposons que I est un idéal de B au sens des algèbres de Boole. Alors

- I est un sous-groupe additif de B , car
 - $0 \in I$ car I est non vide et décroissant,
 - si $i, j \in I$, alors $i + j = (i \wedge j') \vee (i' \wedge j)$ et comme $i \wedge j' \leq i$ et $i' \wedge j \leq j$, on a $i \wedge j' \in I, i' \wedge j \in I$, d'où $i + j \in I$,

- comme dans un anneau booléen tout élément est son propre opposé, pour tout $i \in I$, on a $-i = i \in I$;
- si $i \in I$ et $a \in B$, alors $a.i = a \wedge i \leq i$ donc $a.i \in I$.

Donc I est un idéal de B au sens des anneaux.

Supposons à présent que J est un idéal de B au sens des anneaux. Alors

- J est non vide car $0 \in J$;
- si $j \in J$ et $a \in B$ sont tels que $a \leq j$, alors $a = a \wedge j = a.j \in J$;
- si $i \in J$ et $j \in J$, alors $i \vee j = i + j + ij \in J$.

Donc J est un idéal de B au sens des algèbres de Boole. ■

Annexe C

Rudiments de théorie des catégories

Cette annexe donne les définitions basiques de théorie des catégories nécessaires pour la compréhension de ce travail, ainsi que quelques exemples de catégories. D'autres exemples sont donnés dans la section 2.2 du deuxième chapitre de ce travail. Nous renvoyons le lecteur aux livres [15] et [17] pour un développement assez complet sur la théorie des catégories.

C.1 Définitions de base

Définition C.1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée

- d'une classe d'*objets* $\text{Ob}(\mathcal{C})$;
- pour tous $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, d'une classe de *morphismes* $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de X dans Y .

De plus pour tous $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on dispose d'une *loi de composition*

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

telle que

- pour tous $X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ et pour tout $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (*associativité*) ;
- pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, il existe $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tel que pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a $f \circ \text{id}_X = f$ pour tout $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $g = \text{id}_X \circ g$ pour tout $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ (*existence d'un neutre*).

Si $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on dit que id_X est le *morphisme identité*, ou plus simplement l'*identité* de X .

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on dira que X est l'*origine* de f et Y est l'*extrémité*. On parlera également de *flèche* plutôt que de morphisme afin d'éviter les confusions.

Notations. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on notera souvent $f : X \rightarrow Y$ au lieu de $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Exemples C.1.2. On a la catégorie Top des espaces topologiques dont les flèches sont les applications continues, ou encore la catégorie Ens des ensembles dont les flèches sont les applications entre ensembles.

Définition C.1.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée*, notée $\mathcal{C}^{\text{op}}$ est la catégorie définie de la façon suivante :

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ pour tous $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- si $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z)$, on définit la loi de composition $\overset{\text{op}}{\circ}$ dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$ par

$$g \overset{\text{op}}{\circ} f = f \circ g.$$

Définition C.1.4. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Une flèche $f : X \rightarrow Y$ est un *isomorphisme* s'il existe une flèche $g : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ g = \text{id}_Y$ et $g \circ f = \text{id}_X$. Un tel g est unique, noté f^{-1} et appelé l'*inverse* de f . Dans ce cas, on dit que X et Y sont *isomorphes*.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on peut vouloir en représenter certains éléments. On le fait à l'aide de diagrammes. Par exemple, si $X, Y, Z, T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et si $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : X \rightarrow T$ et $l : T \rightarrow Z$, on représente la situation par le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ T & \xrightarrow{l} & Z \end{array}$$

On dit que ce diagramme est *commutatif* si, et seulement si, $g \circ f = l \circ h$.

C.2 Foncteur et équivalence de catégories

Définition C.2.1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur*, noté $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée d'une application $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ et pour tous $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, d'une application $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ telle que

- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \forall X \in \mathcal{C}$;
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ pour tous $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$.

Un foncteur *contravariant* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est un foncteur F de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ dans $\mathcal{D}$. Autrement dit, pour tous $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, on a $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Définition C.2.2. Deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont *dualement équivalentes* s'il existe des foncteurs contravariants $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tels que pour tous $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$, il existe des isomorphismes $r_X : X \rightarrow G \circ F(X)$ et $\varepsilon_Y : Y \rightarrow F \circ G(Y)$ tels que pour tous $C, C' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $D, D' \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ et toutes flèches $f : C \rightarrow C'$ et $g : D \rightarrow D'$, les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{r_C} & G \circ F(C) \\
 f \downarrow & & \downarrow G \circ F(f) \\
 C' & \xrightarrow{r_{C'}} & G \circ F(C')
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\varepsilon_D} & F \circ G(D) \\
 \varrho \downarrow & & \downarrow F \circ G(\varrho) \\
 D' & \xrightarrow{\varepsilon_{D'}} & F \circ G(D')
 \end{array}$$

Bibliographie

- [1] Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative*, vol. I-II, Eléments de mathématique, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [2] Stanley Burris et H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2012.
- [3] Nathalie Caspard, Bruno Leclerc et Bernard Monjardet, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, Mathématiques et applications, n° 60, Springer, Berlin, 2007.
- [4] Marc De Wilde, *Topologie générale*, Université de Liège, 1997.
- [5] Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova et Dimitar Vakarelov, *A Generalization of the Stone Duality Theorem*, submitted. Disponible via l'URL <<http://arxiv.org/pdf/1603.00932.pdf>>.
- [6] Georgi Dimov et Dimitar Vakarelov, *Topological representation of precontact algebras*, Relational methods in computer science (St. Catharines, Ontario, Canada, 22–26 février 2005)(Ivo Düntsch, Wendy MacCaull et Michael Winter, éd.), Lecture notes in computer science, 3929, Springer, Berlin, 2006, p. 1–16. Disponible via l'URL <https://www.researchgate.net/publication/221134882_Topological_Representation_of_Precontact_Algebras>.
- [7] Ivo Düntsch, Sabine Koppelberg et Michael Winter, *Remarks on contact relations on Boolean algebras*, submitted. Disponible via l'URL <https://www.researchgate.net/publication/257315721_Remarks_on_contact_relations_on_Boolean_algebras>.
- [8] Ivo Düntsch et Dimitar Vakarelov, *Region-based theory of discrete spaces : A proximity approach*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence **49** (2007), 1, p. 5–14. Disponible via l'URL <https://www.researchgate.net/publication/220202565_Dynamic_logics_of_the_region-based_theory_of_discrete_spaces>.
- [9] Ivo Düntsch et Michael Winter, *A representation theorem for Boolean contact algebras*, Theoretical Computer Science **347** (2005), 3, p. 498–512.
- [10] Steven Givant, *Duality Theories for Boolean Algebras with Operators*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2014.
- [11] Steven Givant et Paul Halmos, *Introduction to Boolean Algebras*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2009.

- [12] Paul Halmos, *Lectures on boolean algebras*, Van Nostrand mathematical studies, D. Van Nostrand Compagny, Princeton, New Jersey, 1963.
- [13] Georges Hansoul, *Mereotopological distributive lattices*.
- [14] Georges Hansoul, *Topologie et algèbre booléenne*, Université de Liège, 2004–2005.
- [15] Masaki Kashiwara et Pierre Schapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, n° 332, Springer, New York, 2000.
- [16] Serge Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, n° 211, Springer, New York, 2002.
- [17] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, n° 5, Springer, New York, 1971.
- [18] Pierre Mathonet *Topologie générale*, Université de Liège, 2013–2014. Disponible via l'URL <<http://www.geodiff.ulg.ac.be/topologie/NotesTopologie.pdf>>.
- [19] Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*, CAPES/AGREG Mathématiques, Ellipses, Paris, 1996.
- [20] Daniel Ponasse et Jean-Claude Carrega, *Algèbre et topologie booléennes*, Masson, Paris, 1979.
- [21] Claire Poussart, *Dualités de Stone et de Priestley pour les demi-treillis distributifs*, Mémoire de master, Université de Liège, Liège, 2005.
- [22] Michel Rigo, *Algèbre linéaire*, Université de Liège, 2009–2010. Disponible via l'URL <http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_math.pdf>.
- [23] Marshall Harvey Stone, *The theory of representations for boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936), p. 37–111. Disponible via l'URL <<http://www.ams.org/journals/tran/1936-040-01/S0002-9947-1936-1501865-8/S0002-9947-1936-1501865-8.pdf>>.
- [24] Dimiter Vakarelov, *Dynamic Mereotopology. III. Whiteheadian Type of Integrated Point-Free Theories of Space and Time. I*, Algebra and Logic **53** (2014), 3, p. 191–205.