



DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES

**Simulations numériques d'écoulement
granulaire dans un tambour rotatif**

Mémoire présenté par Nicolas Preud'homme
en vue de l'obtention du grade de Master en
Sciences physiques à finalité didactique.

Promoteur :
G. LUMAY
Co-promoteur :
E. OPSOMER

Comité de lecture :
E. BOUSQUET
J.MARTIN
N.VANDEWALLE

Année académique 2018-2019

Table des matières

Remerciements	1
1 Introduction	2
2 Écoulement granulaire : théorie	5
2.1 Contact solide	5
2.2 Collision inélastique	7
2.3 Temps de collision	8
2.4 Friction solide	9
2.4.1 Stick-slip	11
2.5 Cohésion	12
2.5.1 Adhésion	13
2.5.2 Cohésion capillaire	14
2.5.3 Cohésion électrostatique	15
3 Simulations numériques	15
3.1 Discrétisation de la dynamique d'écoulement	16
3.1.1 Méthode d'Euler	17
3.1.2 Méthode des trapèzes	18
3.1.3 Méthode du leapfrog	18
3.2 Détection des contacts	19
3.3 Résolution des contacts	21
3.3.1 Base au contact	22
3.3.2 Forces au contact	24
3.3.3 Force cohésive	27
3.3.4 Pas de temps	28
3.4 Paramètres de simulation	28
4 Mesures numériques et résultats	28
4.1 Profils de vitesse	30
4.2 Plug flow	35
4.3 Angles d'écoulement dynamique	38
4.4 Rapport isopérimétrique	49
4.5 Fluctuations de la surface	51
5 Conclusion	56

Remerciements

Avant de rentrer dans le vif du sujet, j'aimerais remercier l'ensemble des personnes qui sont intervenues directement ou indirectement lors de ce travail final de ma vie d'étudiant.

J'aimerais premièrement remercier mon promoteur, Monsieur Lumay pour l'enthousiasme qu'il m'a montré depuis l'annonce de ce travail. Cela a été pour moi un vecteur de motivation et m'a permis de mener à bien ce travail de longue haleine. Chacune de mes idées et mes résultats ont toujours été accueillis très favorablement mais aussi objectivement. C'était en effet toujours par des remarques très justes, auxquelles j'ai toujours adhéré, que tout le travail s'est construit. J'apprécie également la grande liberté cadrée qui m'a été laissée sur l'avancement de ce travail. Que ce soit sur les décisions ou sur l'organisation du travail, je me suis toujours senti sur la même longueur d'onde que Monsieur Lumay et le travail était donc très agréable, sans aucune pression ni tension.

Je voudrais également remercier Monsieur Opsomer sans qui ce travail n'aurait pas été possible. Ses connaissances affûtées de la programmation et de la physique des granulaires m'ont permis d'avoir un code numérique mais aussi un modèle théorique très efficaces. Son investissement pour m'expliquer les secrets du monde numérique était spontané et sans limite. J'ai également ressenti une passion très communicative pour ce pan de la physique qui a rendu le travail captivant. Ses apports et son encadrement lors de ce travail ont été pour moi indispensables.

Je tiens également à citer mes camarades physiciens : Adrien, Grégoire et Anouchka avec lesquels nous nous sommes serrés les coudes du premier au dernier jour. En progressant ensemble sur ce travail qui n'avait de commun que la forme, nous avons partagé nos craintes par nos traditionnelles questions "Et toi, t'en es où?" qui avaient pour don de me stresser mais aussi de me stimuler. Nous avons aussi partagé nos conseils qui ont été d'une grande aide pour la mise en forme de ce travail. Ce travail aurait certainement été plus difficile sans leur présence.

Il a aussi été agréable de ressentir l'entrain des membres du comité de lecture : Monsieur Bousquet, Monsieur Martin et Monsieur Vandewalle lors de ma demande de participer à la lecture de ce mémoire. Je leur suis également reconnaissant de participer à la défense de ce travail. Mention spéciale à Monsieur Vandewalle pour l'organisation de sa terrible Garden Party qui a rassemblé une grande partie des physiciens et qui m'a aussi indirectement aidé. Cela m'a en effet permis d'obtenir de bons conseils de la part des doctorants autour d'une bière rafraîchissante mais aussi de décompresser en pleine période de rédaction du manuscrit.

Je me dois aussi de remercier les membres de ma famille et en tout particulier ma maman qui se plie toujours en quatre et remue ciel et terre pour me faire gagner du temps. J'ai évité grâce à elle des périodes de stress dont je n'avais nullement besoin. Mon frère, mes soeurs et mon papa m'ont également toujours soutenu et encouragé dès le début.

Enfin, je ne peux terminer ces remerciements sans évoquer celle qui a subi mes sautes d'humeur, qui a assisté à mes déceptions, qui a tenté de me remonter le moral dès que je baissais les bras mais surtout qui a égayé mes journées par son petit sourire, sa bonne humeur et ses intentions simples qui me font toujours autant plaisir : ma petite Caro.

1 Introduction

Dans l'échelle des priorités pour l'activité humaine, les matériaux granulaires se classent en deuxième position, juste après l'eau [1]. Ils sont d'une importance cruciale et omniprésents dans de nombreux domaines tels que les domaines industriel, alimentaire ou pharmaceutique. Dans certains cas, leur extraction ou production représente la quasi totalité de leur valeur et le traitement n'apporte que peu de valeur ajoutée. Actuellement, de plus en plus souvent dans les domaines spécifiques et sophistiqués, le traitement¹ de la matière en grain apporte une haute valeur ajoutée. Par les enjeux économiques que cela suscite, il est dès lors de plus en plus urgent de comprendre et de caractériser les empilements et l'écoulement des grains lors de leur traitement.

La simple étude de la statique des empilements granulaires révèle déjà un grand nombre de phénomènes complexes. Par exemple, l'empilement statique de grains dit *en boulets de canon* paraît ordonné alors qu'il présente en réalité une forte non linéarité des points de contact lorsque le diamètre des grains ou leur coefficient de friction varie [1]. D'autre part, lorsqu'une contrainte est appliquée à un empilement granulaire statique, on observe des chemins de contrainte complexes dans le matériau. Ce phénomène a été mis en évidence pour la première fois par Dantu par une expérience de photoélasticimétrie [1]. On peut également créer des voûtes avec des empilements statiques qui ont permis à nos ancêtres de construire des aqueducs. On peut constater la dilatance de Reynolds lorsque, en marchant sur la plage, le sable s'assèche autour de nos pas par dilatation du matériau granulaire ainsi comprimé. On peut enfin évoquer le problème du silo ayant causé de gros dommages avant de comprendre que les contraintes verticales étaient redirigées vers les parois jusqu'à ce qu'elles se déchirent (effet appelé *effet Janssen*).

À la frontière entre la statique des empilements et la dynamique des écoulements, il a été observé la présence d'un seuil de contrainte pour cisailer un matériau granulaire et la dilatation de l'empilement qui s'en suit.

Le matériau granulaire en mouvement est souvent appelé *granulaire liquide*, mais l'analogie avec les fluides s'arrête là. Une modélisation par les lois de la physique des fluides n'est en effet pas adéquate car la rhéologie des matériaux granulaires est plus complexe. Contrairement aux fluides, l'écoulement des matériaux granulaires ne peut être caractérisé par une seule grandeur physique à savoir la viscosité.

Différentes géométries peuvent être utilisées pour étudier les écoulements granulaires. L'ensemble de ces géométries a été synthétisé par le Groupe De Recherche des Milieux Divisés (GDR MiDi) [2] et est représenté sur la Figure 1. Alors que les trois premiers dispositifs (*a-c*) sont caractérisés par un confinement du milieu granulaire, les trois suivants (*d-f*) ont la particularité de présenter une interface grains-air. Les contraintes sur les parois sont donc particulièrement plus fortes dans les premières géométries que dans les deuxièmes. Mis à part cette classification, chaque dispositif présente ses particularités et doit être étudié indépendamment.

Prenons le cas du tambour rotatif. Contrairement au cisaillement ou au plan incliné, ce dispositif a la particularité d'être un système fermé : aucun grain ne rentre/sort du tambour lorsque l'écoulement a lieu. Un écoulement continu de grains non confinés peut être généré pendant un temps aussi long que voulu. Le tambour rotatif est donc le dispositif idéal pour étudier l'écoulement des matériaux granulaires non confinés [3]. Cette particularité d'être un système fermé est aussi un avantage lorsqu'il s'agit de simuler numériquement l'écoulement granulaire. Il n'est

1. Par traitement, on comprend le mélange, le stockage ou encore le transport des poudres.

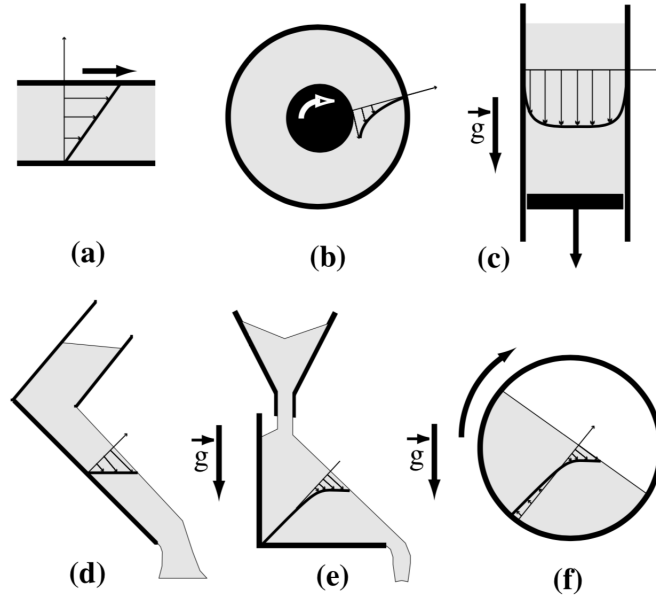


FIGURE 1: Six différentes configurations d'étude d'écoulement granulaire : (a) cisaillement, (b) cisaillement annulaire, (c) chute verticale, (d) plan incliné, (e) écoulement en tas et (f) tambour rotatif.

en effet pas nécessaire d'implémenter des conditions périodiques permettant de réinjecter, au début de l'écoulement, un grain qui sortirait du dispositif.

L'autre avantage des simulations numériques pour reproduire un écoulement granulaire est qu'elles donnent directement accès à la position et la vitesse de chaque grain. Ces paramètres sont difficilement accessibles expérimentalement et nécessitent l'emploi de techniques complexes telles que l'imagerie par résonance magnétique [4], le Radioactive Particle Tracking (RPT) [5], le Positron Emission Particle Tracking (PEPT) [6, 7], la Laser Doppler Velocimetry (LDV) [8] ou encore les images couleurs [9]. Enfin, l'accès aux paramètres microscopiques tels que le coefficient de friction des grains ou encore leur rayon est très aisé numériquement.

L'objectif de ce travail était donc de reproduire numériquement, d'analyser et de modéliser l'écoulement granulaire qui se produit dans les cylindres rotatifs mais également d'être en mesure, sur base d'une observation macroscopique comme par exemple la forme de la surface, de déduire les paramètres microscopiques de la poudre insérée dans le dispositif. Pour effectuer cette caractérisation de la dynamique des grains, les mesures généralement réalisées sont les mesures de l'angle d'écoulement dynamique et des profils de vitesse. On retrouve en effet un grand nombre de publications sur les poudres non-cohésives mesurant les profils de vitesse expérimentalement [10, 11] ou par simulations numériques [12, 13]. Les angles d'écoulement des poudres non-cohésives ont également été largement étudiés expérimentalement [10, 14, 15] et numériquement [12, 16]. Des modèles sont même établis pour les profils de vitesse [11, 12, 13] et pour les angles d'écoulement [15, 17, 18].

Ces mesures générales sont aujourd'hui complétées par des mesures plus spécifiques au tambour rotatif. Il a notamment été observé que, selon la vitesse de rotation du cylindre, différents régimes d'écoulements pouvaient apparaître [7, 13, 15, 16, 18, 19]. À faible vitesse de rotation, les grains glissent sur la paroi. En augmentant progressivement la vitesse de rotation, on passe dans l'ordre par les régimes suivants : écroulement, roulement, en cascade, versement et à très grande vitesse de rotation, la centrifugation (voir Figure 2).

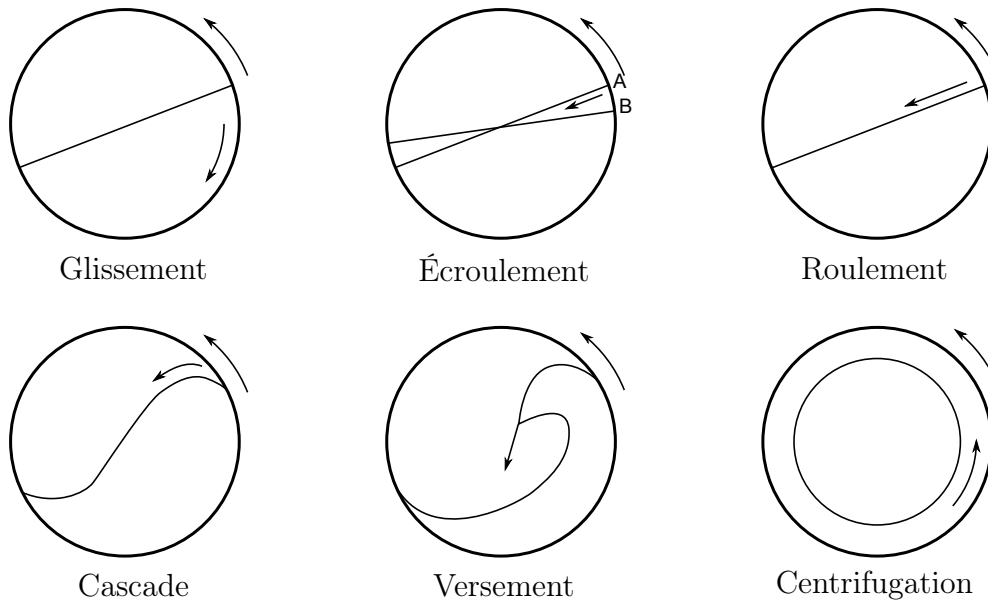


FIGURE 2: Différents régimes d'écoulement observables dans les tambours rotatifs lorsque la vitesse de rotation varie. La vitesse de rotation augmente de gauche à droite et de haut en bas. Inspiré de [19].

Les parois latérales du cylindre rotatif ont également été étudiées car il a été montré [13, 14, 15, 16, 17] qu'elles ont un effet sur l'empilement des grains dans le tambour. Plus les couvercles du cylindre ont un coefficient de frottement élevé, plus la forme S-shape de la surface (voir Figure 2, régime d'écoulement en cascade) apparaît pour des vitesses de rotation faibles. Récemment, les publications sur le sujet se sont diversifiées. L'effet sur l'écoulement de la forme des grains [20, 21, 22] et de la forme du cylindre [23] ont notamment été étudiés.

Les domaines pharmaceutique et industriel ont ensuite donné une application à ce dispositif : le mélange. De nombreuses publications ont dès lors été rédigées pour répondre à cette demande. En effet, les domaines pharmaceutiques et industriels emploient largement les tambours rotatifs comme outil de mélange de référence [24]. Il a dès lors été reporté qu'une poudre contenant des grains de tailles différentes (distribution polydisperse) ne se mélange pas car la ségrégation des grains y est observée [25, 26, 27]. Par contre, si la poudre contient des grains de taille identique (distribution monodisperse), le tambour rotatif semble être un outil adéquat pour le mélange [9, 13, 25]. Toujours dans le but de caractériser le cylindre rotatif comme outil de mélange, l'efficacité des transferts de chaleur a été étudiée [27, 28].

Les publications sur l'écoulement granulaire dans les tambours rotatifs sont donc déjà très nombreuses et diversifiées. On cherche à présent à comprendre des phénomènes très particuliers s'y produisant, ceci est donc une indication de la bonne compréhension des phénomènes généraux. Par contre, la plupart des recherches traitent de poudres non cohésives (par exemple billes en acier, billes de verre ou sable). Ces poudres représentent une partie des poudres réelles mais une autre grande majorité des poudres auxquelles nous sommes confrontés sont des poudres cohésives comme par exemple les farines ou le sucre en poudre. De plus, il a récemment été montré que lorsque les grains initialement non cohésifs se frottent, ils accumulent une charge électrique par un phénomène appelé triboélectricité. Ce phénomène se produit lorsque les grains roulent, glissent ou collisionnent [29]. Les grains ainsi chargés vont alors rendre la poudre cohésive et considérablement modifier ses propriétés d'écoulement. Il est donc également nécessaire de se pencher sur les poudres cohésives car elles représentent un groupe non négligeable de la grande

famille des poudres. Le travail qui suit a donc pour objectif de reproduire et compléter la démarche d’investigation déjà réalisée pour les poudres non-cohésives, avec des poudres cohésives. Bien qu’on trouve quelques articles traitant des poudres magnétiques [30] et de l’effet de l’humidité [31, 32], les phénomènes induits par la cohésion ne sont aujourd’hui pas bien caractérisés. La recherche sur le sujet a toutefois été amorcée par Brewster [13] qui a réalisé des simulations numériques de poudres cohésives mais aucune modélisation n’a, à notre connaissance, été faite jusqu’à présent.

La méthode d’étude choisie est la simulation numérique pour les avantages énoncés ci-dessus qui lui sont liés. La simulation à deux dimensions a été préférée à la simulation à trois dimensions et des grains sphériques ont été choisis afin de revenir sur l’écoulement granulaire dans sa plus simple expression et éviter tout effet précédemment exposé. Il s’agit donc d’un pas en arrière volontaire par rapport à la direction prise actuellement par les recherches sur le sujet mais cela permet d’asseoir correctement les fondamentaux des poudres cohésives jusque là peu connus.

2 Écoulement granulaire : théorie

Tout comme un modèle météorologique, afin de simuler numériquement un écoulement granulaire s’approchant au maximum de la réalité, il est nécessaire d’implémenter l’ensemble des interactions qui peuvent se dérouler au sein du système. C’est en implémentant les moindres détails qu’on obtient des résultats cohérents et transposables. Lorsqu’un matériau granulaire s’écoule, les différentes interactions qui peuvent se produire sont : des contacts solides et de la friction entre les grains, des contacts solides et de la friction entre les grains et la paroi ou de la cohésion. La théorie qui suit sur les interactions lors de l’écoulement des grains est en grande partie inspirée du livre d’Andreotti, Forterre et Pouliquen [33].

2.1 Contact solide

Considérons deux grains identiques de rayon R en contact et comprimés l’un sur l’autre par une force externe F_N . Il en résulte une déformation des deux grains sur une distance δ (voir Figure 3). La dépendance $F_N(\delta)$ fait partie de la théorie de Hertz (1896) et peut être obtenue en partant de la loi de Hooke. Dans la zone de contact, la loi de Hooke donne une relation entre la contrainte appliquée sur deux objets et la déformation qui en résulte :

$$\text{contrainte} = E \times \text{déformation}$$

où la contrainte s’exprime en Pascals ($\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$), E est le module de Young du matériau et la déformation est définie par rapport à une longueur de référence et donc sans dimension. La loi de Hooke devient donc

$$\frac{F_N}{a^2} = E \frac{\delta}{a} \quad (1)$$

La taille caractéristique de la zone de contact, a , peut être réexprimée en fonction de δ et R en appliquant Pythagore :

$$a^2 + (R - \delta)^2 = R^2$$

Comme $\delta \ll R$, on obtient

$$a \sim \sqrt{2\delta R}$$

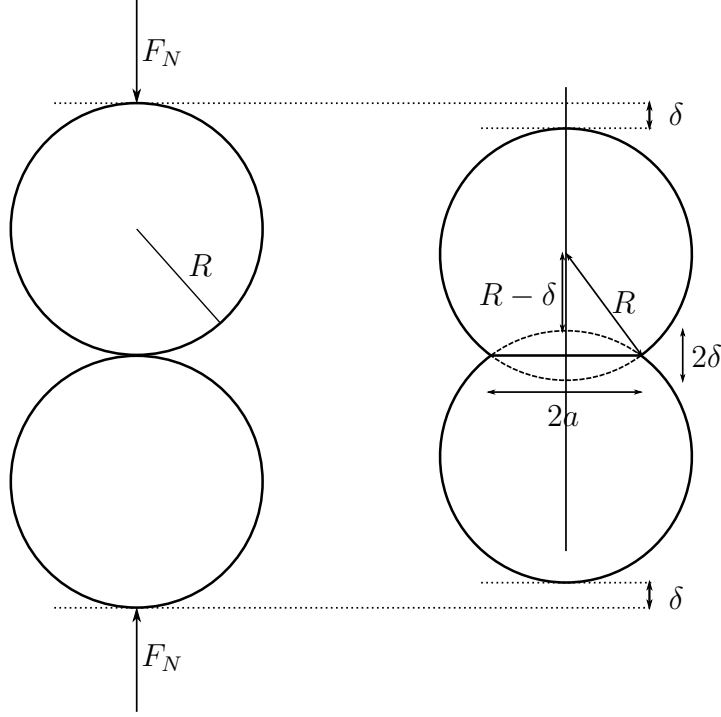


FIGURE 3: Deux grains comprimés par une force externe F_N . Chaque grain se déforme sur une distance δ . Reproduit de [33].

L'équation (1) devient alors

$$\begin{aligned}
 \frac{F_N}{2\delta R} &= E \frac{\delta}{\sqrt{2\delta R}} \\
 \Rightarrow F_N &= \frac{2}{\sqrt{2}} E \sqrt{R} \delta^{3/2} \\
 \Rightarrow F_N &\sim E \sqrt{R} \delta^{3/2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Le préfacteur exact fut découvert par Heinrich Hertz en 1880 en utilisant une solution générale des équations d'élasticité linéaire. D'après la théorie de Hertz des contacts élastiques, on obtient alors que la force est donnée par

$$F_N = \frac{4E\sqrt{R}}{3(1-\nu_p^2)} \delta^{3/2}$$

où ν_p est le coefficient de Poisson du matériau². On définit alors $k = \frac{4E\sqrt{R}}{3(1-\nu_p^2)}$ pour obtenir une autre forme de la loi de Hertz :

$$F_N = k\delta^{3/2} \tag{3}$$

On constate alors que la force de contact ne dépend pas linéairement de la distance d'interpénétration des deux grains mais suit une loi en $\delta^{3/2}$. Cela s'explique par le fait que, lorsque la force de contact augmente, l'aire de contact augmente. En généralisant cette loi de Hertz au problème à deux dimensions, on obtient une dépendance linéaire de la force normale F_N en

2. Le coefficient de Poisson caractérise le rétrécissement relatif d'un matériau perpendiculairement à la direction d'allongement : $\nu_p = \frac{\text{rétrécissement transversal relatif}}{\text{allongement transversal relatif}}$.

fonction de l'interpénétration δ [34].

La loi de Hertz permettra alors de gérer numériquement les contacts entre les grains. À titre d'information, on a l'ordre de grandeur suivant pour δ : si $R = 1\text{mm}$, $F_N = 10\text{g}$ et $E = 5.10^{10}\text{Pa}$ (verre), alors $\delta \simeq 0.1\mu\text{m}$.

2.2 Collision inélastique

Lors d'une collision, la force de répulsion des deux grains ainsi déformés est égale en intensité à la force F_N qui vient d'être obtenue. Si la collision est élastique, l'énergie cinétique est entièrement convertie en énergie élastique ($E_{elast} = \int_0^\delta F_N d\delta$), sans aucune dissipation. Les deux grains conservent leur énergie cinétique après le choc.

Il suffit de penser au simple cas de la balle de tennis qui rebondit sur le sol pour se rendre compte que ce cas idéal ne reflète pas la réalité. De l'énergie cinétique est toujours dissipée dans les matériaux granulaires lors d'une collision. La vitesse des grains après contact v' est plus faible que leur vitesse initiale v :

$$v' = -ev \quad (4)$$

où $0 \leq e < 1$ est le coefficient de restitution (normal) ou encore coefficient inélastique. La valeur de ce coefficient dépend de la nature des matériaux en contact. Pour citer quelques exemples, il est de 0.9 pour une collision entre deux billes en acier, 0.8 pour des billes en verre et 0.6 pour des billes en aluminium. Plus ce coefficient est petit, plus la dissipation est importante.

Considérons la collision quelconque entre deux grains représentée sur la Figure ci-dessous.

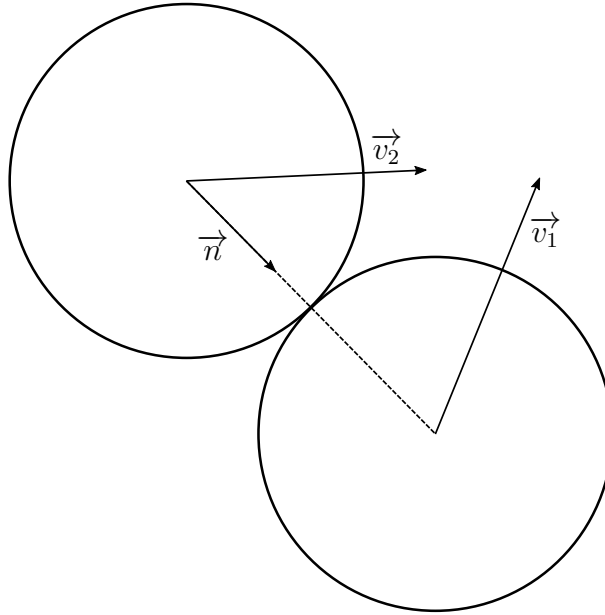


FIGURE 4: Collision quelconque entre deux grains où \vec{n} est le vecteur normal au contact et \vec{v}_1 , \vec{v}_2 sont les vitesses de chacun des grains au moment du contact.

Par définition du coefficient de restitution, on obtient alors

$$(\vec{v}_2' - \vec{v}_1') \cdot \vec{n} = -e(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n} \quad (5)$$

où \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont les vitesses initiales des grains, \vec{v}_1' et \vec{v}_2' sont les vitesses après collision des grains et \vec{n} est le vecteur unitaire normal au contact défini à partir du centre de la deuxième particule

et se dirigeant vers le centre de la première. On peut alors déterminer la quantité de mouvement communiquée à chacune des billes lors de la collision par $\vec{p}_\alpha = \int_{\text{contact}} \vec{F}_\alpha dt = m(\vec{v}'_\alpha - \vec{v}_\alpha)$ où \vec{F}_α est la force instantanée exercée sur la particule α et m est la masse de chacune des particules. Par conservation de la quantité de mouvement, on a nécessairement

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \\ \Rightarrow \vec{v}'_2 - \vec{v}_2 &= -(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) \end{aligned} \quad (6)$$

Si on considère que la quantité de mouvement lors du contact n'a pas de composante tangentielle (i.e. pas de frottements entre les grains) alors $\vec{p} = p\vec{n}$ et on obtient en injectant la définition du coefficient inélastique de l'équation (5)

$$\begin{aligned} p &= m(v'_2 - v_2) \\ &= \frac{m}{2}[(v'_2 - v_2) + (v'_2 - v_2)] \\ &= \frac{m}{2}[(v'_2 - v_2) - (v'_1 - v_1)] \\ &= \frac{m}{2} \frac{v_1 - v_2 + v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} (v_1 - v_2) \\ &= \frac{m}{2} \left(1 + \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}\right) (v_1 - v_2) \\ &= \frac{m}{2} (1 + e)(v_1 - v_2) \end{aligned}$$

Les vitesses des grains après la collision sont alors données par

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \frac{1+e}{2} [(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}] \cdot \vec{n} \quad (7a)$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \frac{1+e}{2} [(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}] \cdot \vec{n} \quad (7b)$$

Cette variation des vitesses des grains s'accompagne par conséquent d'une variation de l'énergie cinétique totale du système donnée par

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2} m (v_1'^2 + v_2'^2 - v_1^2 - v_2^2) \\ &= -\frac{m}{4} (1 - e^2) [(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}]^2 \end{aligned}$$

Une collision inélastique s'accompagne donc toujours d'une dissipation d'énergie cinétique du système.

Afin d'éviter que la simulation numérique ne soit instable et diverge, il sera donc nécessaire d'insérer le coefficient inélastique dans l'algorithme de résolution des contacts.

2.3 Temps de collision

Considérons à nouveau deux grains de rayon R et de masse m se déplaçant l'un vers l'autre à vitesse v . L'énergie cinétique totale du système est alors donnée par $E_c = 2 \times 1/2mv^2$ et est transformée, lors du contact en énergie élastique $E_{elast} \sim F_N \delta$ où l'interpénétration δ est égale

à vt_c avec t_c le temps de collision et la force F_N est obtenue par l'équation (2). En faisant le bilan d'énergie, nous obtenons alors l'expression du temps caractéristique de collision :

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2}mv^2 &\simeq E\sqrt{R}\delta^{3/2}\delta \\ \Rightarrow mv^2 &\simeq E\sqrt{R}(vt_c)^{5/2} \\ \Rightarrow t_c &\simeq \left(\frac{m^2}{RE^2v}\right)^{1/5} \\ \Rightarrow t_c &\simeq \frac{R}{c}\left(\frac{c}{v}\right)^{1/5} \end{aligned}$$

où $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ est la vitesse caractéristique de propagation des ondes élastiques dans le matériau, avec ρ la densité volumique du matériau. Ce temps caractéristique peut également être réexprimé en remplaçant les constantes par le paramètre k défini à l'équation (3) :

$$t_c = \left(\frac{m^2}{k^2v}\right)^{1/5}$$

On constate donc que le temps de collision dépend de la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le matériau avec une faible dépendance de la vitesse des grains lors de la collision : plus cette vitesse de propagation est élevée, plus le temps de collision est petit.

Pour donner un ordre de grandeur, reprenons les billes en verre dont le module de Young $E = 5.10^{10}$ Pa, le rayon $R = 1$ mm et la masse volumique est de $\rho = 2500$ kg.m⁻³ et considérons que ces billes se déplacent à une vitesse $v = 1$ cm.s⁻¹. On obtient alors un temps caractéristique de collision $t_c \sim 10$ μ s.

L'expression ainsi établie du temps de collision sera très utile pour l'algorithme de détection des contacts. Connaissant le temps caractéristique de collision, on pourra éviter de déplacer les grains sur des intervalles trop longs et donc rater les collisions de certains grains. Nous y reviendrons en détails plus tard.

2.4 Friction solide

Seule la composante normale lors de la collision a été traitée jusqu'à présent. Il est évident que lors d'un contact quelconque comme illustré sur la Figure 4, les grains frottent l'un sur l'autre et il y aura également une force dans la direction tangentielle au contact (i.e. dans la direction perpendiculaire à \vec{n}).

La friction entre deux solides a été caractérisée expérimentalement en faisant glisser des blocs solides. C'est Léonard de Vinci qui fut le premier à réaliser trois observations fondamentales concernant la friction entre solides :

1. La force qu'il faut appliquer pour déplacer les blocs ne dépend ni de l'aire des surfaces en contact ni de la façon de disposer les blocs. On applique en effet une même force pour les déplacer que les blocs soient empilés les uns sur les autres ou qu'ils soient attachés les uns aux autres.
2. La force appliquée pour déplacer les blocs dépend linéairement de la force normale.
3. La force de friction est grande lorsque les blocs sont à l'arrêt puis diminue lorsqu'ils sont en mouvement.

Ces observations ont mené plus tard aux lois du frottement solide développées par Amontons et Coulomb en 1785 :

1. Pour mettre un bloc en mouvement, il est nécessaire de lui appliquer une force minimale appelée force de frottement statique et donnée par $F_f = \mu_s F_N$ où μ_s est le coefficient de frottement statique des deux solides en contact. Tant que le bloc n'est pas en mouvement, la force de frottement ne peut être déterminée. On a seulement l'inégalité $F_f \leq \mu_s F_N$.
2. Quand le bloc glisse, l'intensité de la force de frottement devient $F_f = \mu_d F_N$ où μ_d est le coefficient de frottement dynamique.
3. Les coefficients de friction sont constants et dépendent des matériaux en contact. On a $0.1 \leq \mu_d \leq \mu_s \leq 1$.

On a donc deux régimes : un régime statique et un régime dynamique dont l'explication a été apportée en 1950 par Bowden et Tabor par une interprétation microscopique des frottements solides. Si l'on s'intéresse aux propriétés physiques des surfaces en contact, on se rend compte que ces surfaces ne sont pas parfaitement lisses et qu'elles contiennent un certain nombre d'aspérités. Quand les deux solides sont en contact, la surface de contact réelle est donc bien plus petite que la surface apparente (voir Figure 5).

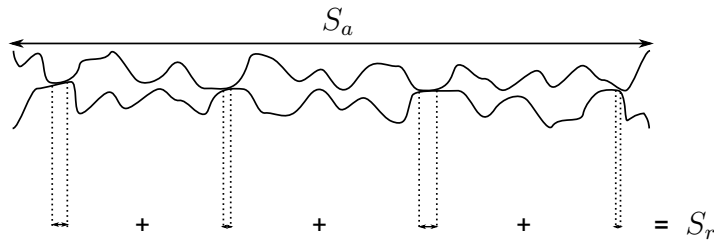


FIGURE 5: Observation microscopique de la zone de contact entre deux solides. On constate que les surfaces ne sont pas parfaitement lisses. Seules les plus hautes aspérités sont en contact de telle façon que la surface réelle des solides en contact S_r est bien plus petite que la surface apparente S_a .

Si les deux blocs sont comprimés par une force externe F_N , la contrainte ressentie par les aspérités est donnée par :

$$\sigma = \frac{F_N}{S_r} \quad (8)$$

Cette contrainte est bien plus élevée qu'elle ne paraît car $S_r \ll S_a$. On considère d'ailleurs que cette contrainte est si grande que les aspérités sont en déformation plastique³. Dans ce régime, on observe une déviation de la loi de Hertz : la contrainte ne dépend plus linéairement de δ comme démontré dans l'équation(1) mais devient constante et égale à $\frac{F_N}{\pi a^2}$. Cette valeur est appelée dureté du matériau et notée H . En injectant cette valeur dans (8), on obtient

$$S_r = \frac{F_N}{H} \quad (9)$$

De plus, Bowden et Tabor ont considéré que la contrainte était telle que les deux solides en contact étaient soudés par un joint solide. Un taux de cisaillement critique τ_c est alors nécessaire

3. La déformation plastique correspond à une déformation irréversible. D'autre part, la déformation élastique correspond à une déformation réversible (exemple : trombone légèrement plié revient à sa position initiale = déformation élastique, trombone fortement plié reste plié = déformation plastique).

pour casser ces joints et les séparer. La force tangentielle qu'il faut appliquer pour atteindre cette valeur de cisaillement critique est alors

$$F_T = \tau_c S_r$$

En injectant ce résultat dans (9), on obtient

$$F_T = \left(\frac{\tau_c}{H} \right) F_N$$

On retrouve donc la relation entre la force tangentielle de friction et la normale appliquée sur les blocs d'Amontons-Coulomb et on déduit par conséquent que le coefficient de frottement statique est donné par $\mu_s = \frac{\tau_c}{H}$. C'est donc par ce développement que Bowden et Tabor ont été en mesure d'expliquer l'origine du frottement statique et la force de frottement seuil pour mettre un objet en mouvement.

Cette modélisation des frottements sera également intégrée dans le code pour gérer les situations de glissement des grains.

2.4.1 Stick-slip

Si un bloc est soumis à une force suffisamment grande que pour vaincre les frottements statiques, il se met en mouvement. Si on tire ce bloc à vitesse constante, on observe que le bloc s'arrête à nouveau puis redémarre. C'est le cas par exemple lorsque l'on ouvre une porte lentement pour la faire grincer, lorsqu'un grincement est émis en écrivant avec une craie au tableau ou encore par le violoniste avec son archet lorsqu'il désire produire des sons. Ce phénomène s'appelle logiquement le stick-slip et peut être interprété par analogie avec un bloc tiré par l'intermédiaire d'un ressort. Considérons un bloc de masse m auquel est attaché un ressort de raideur k et tiré à vitesse constante v (voir Figure 6).

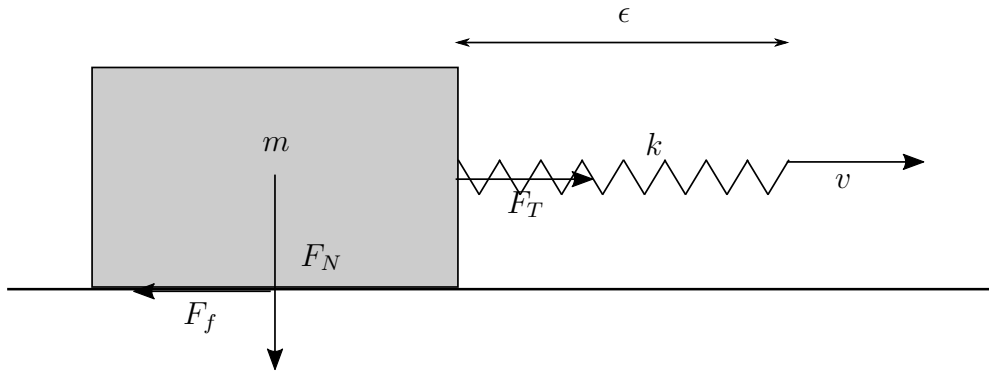


FIGURE 6: Dispositif de reproduction du phénomène stick-slip : un bloc de masse m tiré par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k .

Au temps $t = 0$, le bloc est au repos et le ressort est tiré à vitesse v . L'élongation du ressort au cours du temps est donnée par $\epsilon(t) = vt - x(t)$ où $x(t)$ est la position du bloc. La force exercée par le ressort F_T étant proportionnelle à son élongation, elle augmente jusqu'à dépasser le seuil où le bloc commence à glisser : $F_T = \mu_s F_N$. Conformément aux lois d'Amontons-Coulomb, la force de frottement devient alors $F_f = \mu_d F_N$ avec $\mu_d < \mu_s$. L'évolution de la position du bloc est ensuite obtenue en appliquant la deuxième loi de Newton dans cette configuration :

$$m\ddot{x} = k\epsilon - \mu_d F_N$$

En exprimant les positions en terme d'élongation du ressort, cette équation devient

$$\ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}\epsilon = \frac{\mu_d F_N}{m}$$

La solution générale de cette équation est donnée par

$$\epsilon(t) = A \exp\left(i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{\mu_d F_N}{k} \quad (10)$$

où A et B sont des constantes. Cette solution indique que l'élongation du ressort oscille autour d'une valeur moyenne $\frac{\mu_d F_N}{k} = \frac{\mu_d mg}{k}$ à la fréquence $\sqrt{\frac{k}{m}}$ comme illustré sur le graphique de la Figure 7. Cela correspond à un déplacement saccadé du bloc : les phases de glissement du bloc sur la surface sont entrecoupées de phases statiques. Ce phénomène constitue un très bon exemple de phénomène non-linéaire car une action constante sur le système (ressort tiré à vitesse constante v) fournit une réponse non-linéaire (oscillations de l'élongation du ressort).

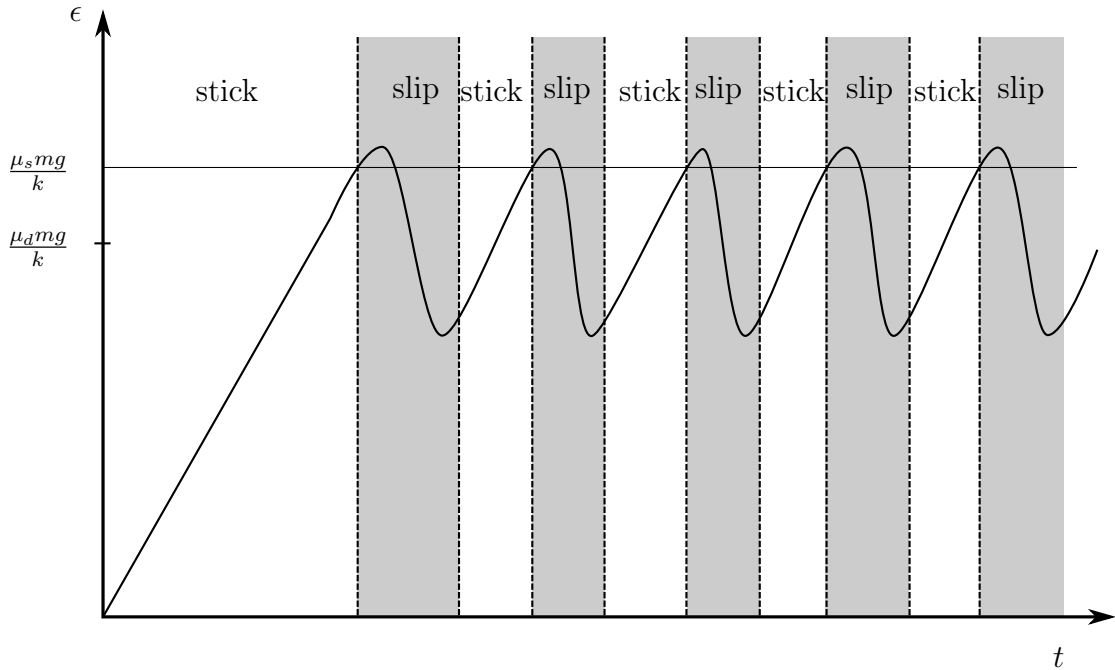


FIGURE 7: Élongation du ressort en fonction du temps (équation (10)) montrant le régime stick-slip.

Le dispositif étudié présentant des caractéristiques similaires (à savoir un mouvement à vitesse constante et des objets ayant un coefficient de friction non nul), ce phénomène pourrait très bien s'y produire.

2.5 Cohésion

L'ensemble des interactions exposées jusqu'à présent n'ont lieu que lorsque deux grains sont en contact. Or, dans les poudres, divers types d'interactions attractives à distance peuvent avoir lieu : adhésion, cohésion capillaire, cohésion électrostatique [33] ou encore magnétique [30].

On parle dans ce cas de poudres cohésives. Généralement, l'intensité de la cohésion des grains

de ces poudres est caractérisée par le nombre sans dimension de Bond. Le nombre de Bond, noté Bo , est défini par le rapport entre la force cohésive entre les grains F_c et la force de pesanteur mg . On a donc

$$Bo = \frac{F_c}{mg}$$

2.5.1 Adhésion

L'adhésion englobe plusieurs types d'interactions à courte distance entre objets macroscopiques. Deux objets proches l'un de l'autre (\sim taille moléculaire) vont en effet ressentir la force de Van der Waals, des interactions dipôle-dipôle et créer des ponts hydrogène. Au total, le potentiel d'interaction entre deux molécules comporte une partie répulsive et une partie attractive. Ce potentiel est appelé potentiel de Lennard-Jones et est représenté sur la Figure 8.

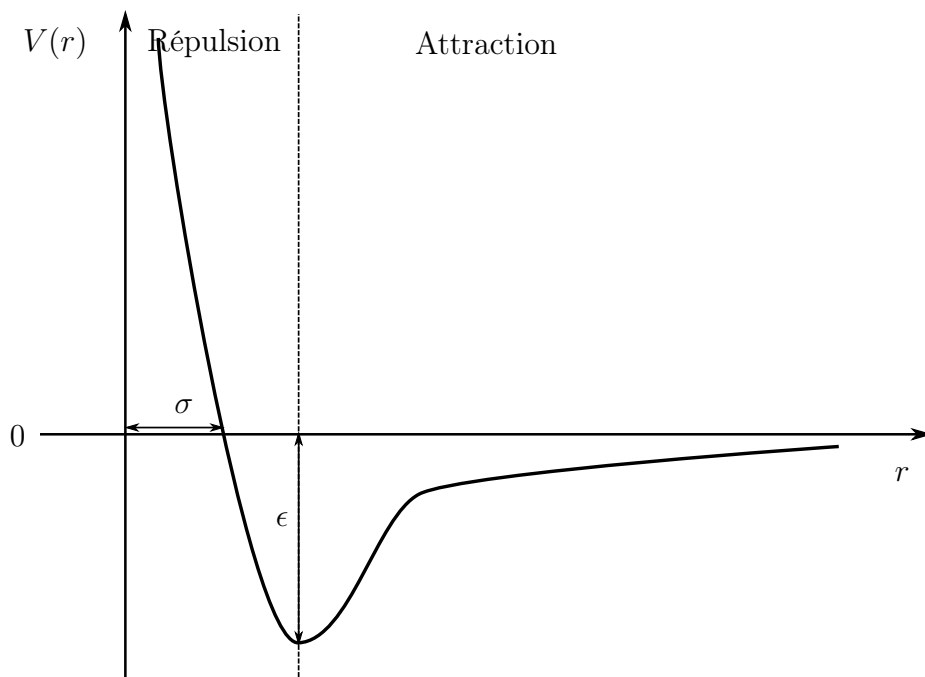


FIGURE 8: Potentiel d'interaction entre deux molécules appelé potentiel de Lennard-Jones montrant la répulsion à très faible distance et l'attraction à plus grande distance.

Le potentiel de Lennard-Jones est donné par l'équation suivante :

$$V(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

où ϵ correspond à la profondeur du puits de potentiel et donne donc une intensité à l'interaction entre les molécules et σ est la distance à laquelle le potentiel d'interaction entre les deux molécules vaut 0. On remarque donc une répulsion à très courte portée (dépend de σ) et une attraction à plus grande distance.

Cette force attractive ayant une portée de l'ordre moléculaire, pour les objets macroscopiques, cette interaction n'est significative que lorsqu'ils sont très proches l'un de l'autre ou en contact.

2.5.2 Cohésion capillaire

Deux grains d'une poudre s'attirent par capillarité si des ponts liquides se créent entre ces grains. C'est notamment ce type de cohésion qui est produite en ajoutant un peu d'eau dans le sable pour parvenir à construire des châteaux de sable. L'ajout de liquide dans une poudre a pour effet l'apparition de ponts capillaires entre les grains dont la représentation est effectuée sur la Figure 9. Par la présence de ce pont capillaire, une différence de pression apparaît entre

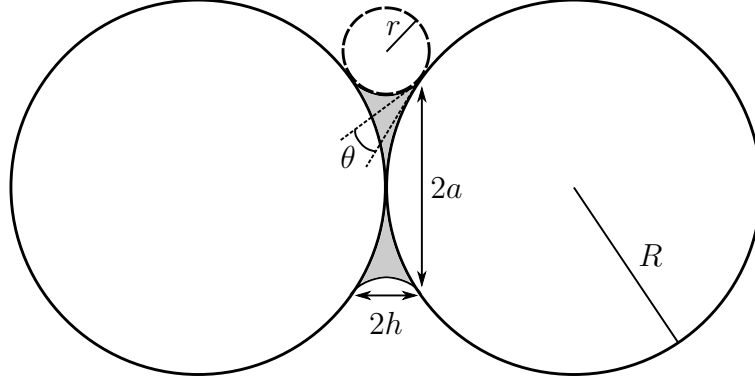


FIGURE 9: Pont capillaire à l'origine de la cohésion entre deux grains mouillés.

l'intérieur et l'extérieur du ménisque dont le rayon de courbure est r . Cette différence de pression est donnée par l'équation de Young-Laplace :

$$\Delta P = \gamma_{LV} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right]$$

où a est la largeur du pont capillaire et γ_{LV} est la tension de surface liquide/air. Vu que le ménisque est petit par rapport à la taille du grain ($a \gg r$), cette différence de pression est négative $\sim -\gamma_{LV}/r$ et cela signifie donc que la force capillaire est une force attractive dont l'intensité est donnée par

$$F_{cap} \sim \frac{\gamma_{LV}}{r} \pi a^2 \quad (11)$$

Du fait que le ménisque est petit face au grain, on a aussi $h \ll R$. Par conséquent, le rayon et la hauteur du ménisque sont reliés par $h \sim r \cos \theta$. En injectant la relation géométrique $a^2 \sim 2hR$ dans (11), on obtient

$$F_{cap} = 2\pi\gamma_{LV}R \cos \theta$$

Ce résultat est valable pour deux grains en contact mais il est également intéressant de mesurer l'évolution de la force capillaire lorsque les deux grains sont séparés d'une distance d . On constate alors que lorsque d augmente, la force capillaire décroît très rapidement et dépend du volume du pont capillaire [33]. Ce type d'interaction est donc aussi plus important à très courte distance ou au contact entre les deux grains qu'à relativement longue portée.

Le nombre de Bond peut être calculé avec cette force cohésive F_{cap} . On obtient

$$\begin{aligned} Bo &= \frac{F_{cap}}{\rho g R^3} \\ &\simeq \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

Par ce résultat, on en déduit que plus les grains sont petits, plus la poudre est cohésive.

2.5.3 Cohésion électrostatique

Contrairement aux deux types d'interaction précédemment discutés, l'attraction électrostatique a toujours un effet à relativement longue portée. La loi de Coulomb permet d'obtenir l'intensité de la force existant entre deux particules chargées :

$$F_{elec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (12)$$

où ϵ_0 est la permittivité de l'air, q_1 et q_2 sont les charges des deux particules et r est la distance centre à centre séparant les deux particules.

Dans les poudres, il a été montré que la friction entre les grains générant un échange de charges entre ceux-ci [35]. Or, lorsqu'une poudre s'écoule, les grains se frottent, roulent et entrent en collision. Il est donc fréquent d'observer une poudre se charger lorsqu'elle s'écoule dans un dispositif d'écoulement de la Figure 1. Ce phénomène de chargement de deux corps identiques par frottements est appelé chargement triboélectrique. Les grains de la poudre ainsi chargée vont alors s'attirer selon la loi de Coulomb (12) et rendre la poudre cohésive. Bien qu'il ait été observé dans de nombreuses situations et depuis bien longtemps, ce phénomène est à ce jour toujours difficilement interprété [36, 37].

Peut-être serait-ce dû au fait que comparer un grain à une particule chargée n'est pas correct. Les charges sont certainement réparties d'une façon complexe à la surface des grains et rend le problème de modélisation compliqué. Le comportement de ces poudres dans les tambours est toutefois semblable à celui des poudres cohésives.

3 Simulations numériques

Afin de répondre aux objectifs des simulations numériques avancés dans la section d'introduction (reproduction fidèle de la réalité avec un accès aisé aux paramètres microscopiques), les simulations numériques doivent tenir compte de toutes les interactions qui viennent d'être exposées et fournir comme résultat la position et la vitesse de chaque grain ainsi que d'autres paramètres microscopiques tels que le coefficient de frottement. La méthode de programmation *Discrete Element Method* (DEM) permet d'obtenir ce type de variables car elle considère chaque grain individuellement et les fait évoluer conformément aux lois de l'écoulement granulaire. Pour ce faire, il existe différents algorithmes dont notamment l'*event-driven* et le *soft-particle*.

Le premier consiste à placer d'abord tous les grains à des positions connues et avec des vitesses connues. Ensuite, la plus imminente des collisions entre deux grains ou entre un grain et une paroi est déterminée. Tous les grains sont alors déplacés jusqu'à cet instant et les lois de la collision inélastique données par les équations (7) sont appliquées pour calculer les vitesses après collision.

La méthode *soft-particle* rafraîchit à chaque pas de temps les paramètres de chacun des grains et applique les lois de Newton pour calculer leurs trajectoires. Elle autorise également l'interpénétration des grains pour modéliser au mieux les forces au contact.

Dans le but de simuler l'écoulement granulaire dans les tambours rotatifs, il est préférable de recourir à la deuxième méthode. En effet, l'*event-driven* ne convient pas pour simuler l'écoulement des milieux denses car la fréquence des collisions devient trop élevée. Il n'est donc pas adéquat pour la simulation de matériaux comme les poudres mais convient par contre très bien

pour les matériaux gazeux [33]. C'est donc la méthode *soft-particle* qui a été mise en place pour cette étude.

La description des éléments clés de l'algorithme qui suit a été développée dans le cadre du cours *PHYS3020-1 : Outils numériques de la matière molle*.

3.1 Discrétisation de la dynamique d'écoulement

La discrétisation de l'écoulement continu consiste à calculer, à intervalles de temps réguliers, les nouvelles trajectoires des grains. Elle est indispensable dans un système aussi complexe que celui qui est étudié où les interactions changent sans cesse.

La première étape de la méthode *soft-particle* consiste à placer tous les grains dans le tambour rotatif. Toutes les positions initiales sont dès lors connues et données par x_0 . Supposons dans un premier temps que les grains commencent à se déplacer à vitesse constante v dans une direction x . Dans ce cas, l'évolution de leur position en fonction du temps est donnée par $x(t) = vt$. Il est dès lors aisé d'obtenir la position des grains après un intervalle de temps Δt puis après un deuxième intervalle de temps et ainsi de suite. La trajectoire des grains est donc facilement déterminée et donnée par les points x_1, x_2, \dots (voir Figure 10).

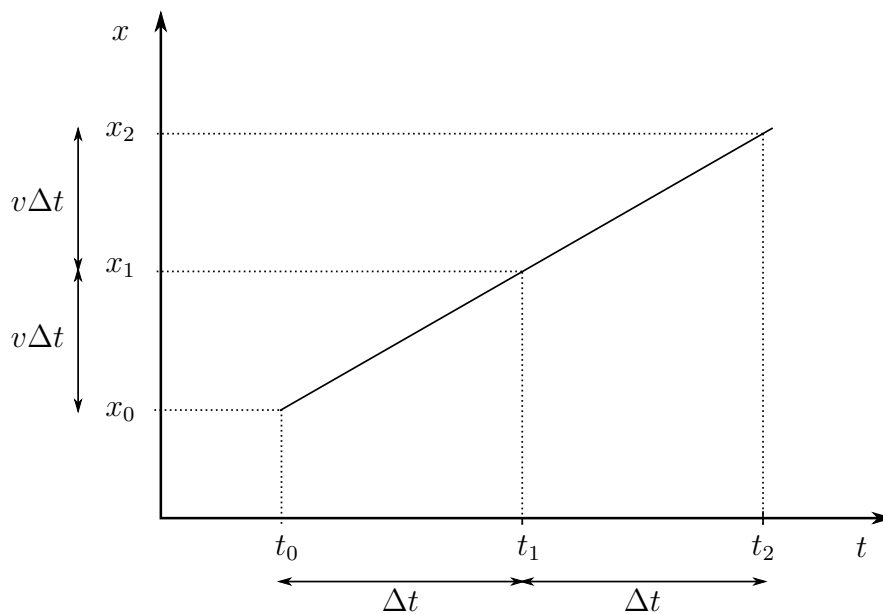


FIGURE 10: Évolution de la position d'un grain en déplacement à vitesse constante v . Les positions des grains après chaque intervalle de temps Δt sont facilement calculées et données par $x_1 = x_0 + v\Delta t$, $x_2 = x_1 + v\Delta t$, ...

De la même façon, les positions du grain se déplaçant à accélération constante peuvent être facilement déterminées à chaque pas de temps. La loi régissant l'évolution de la position de cet objet est la loi du Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA) et donnée par $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$. La trajectoire des grains peut donc à nouveau être discrétisée aux points x_1, x_2, \dots correspondant aux temps $t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots$ (voir Figure 11).

Supposons à présent que le grain soit soumis à une force qui dépend de sa position comme par exemple pour un cas qui nous intéresse des particules chargées. Dans ce cas, ce sont les lois de Newton et celle du MRUA qui vont permettre de déterminer une fonction quelconque

approchée de la trajectoire réelle du grain. Trois méthodes de calcul numérique de la trajectoire à chaque pas de temps sont alors possibles : la méthode d'Euler, la méthode des trapèzes ou la méthode du leapfrog.

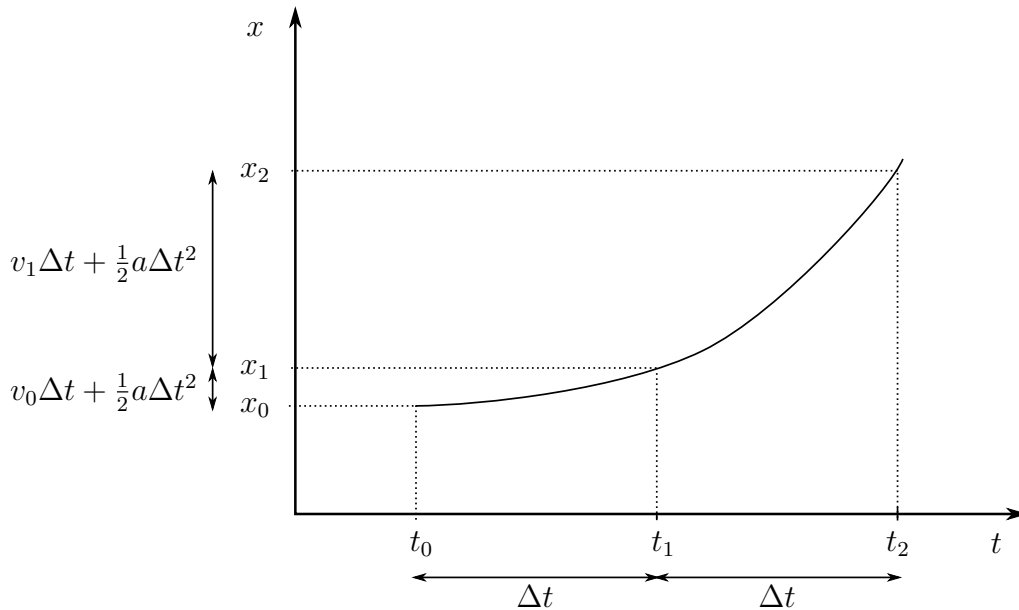


FIGURE 11: Évolution de la position d'un grain en déplacement à accélération constante a . Les positions des grains après chaque intervalle de temps Δt sont facilement calculées et données par $x_1 = x_0 + v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$, $x_2 = x_1 + v_1\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$, ...

3.1.1 Méthode d'Euler

Cette méthode utilise les lois de Newton

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= f(x)\end{aligned}$$

avec $f(x)$ la force réduite (c'est-à-dire la force appliquée sur le grain divisée par sa masse) dépendant de la position du grain, pour prédire les nouvelles positions des grains :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + v_n\Delta t \\ v_{n+1} &= v_n + f(x_n)\Delta t\end{aligned}$$

où x_n et v_n sont les position et vitesse d'un grain après n pas de temps Δt et x_{n+1} et v_{n+1} sont les position et vitesse de ce grain au pas de temps suivant.

Le problème de la méthode d'Euler est qu'elle manque de précision et de stabilité car la trajectoire calculée peut rapidement diverger de la trajectoire réelle (voir trajectoire rouge de la Figure 12).

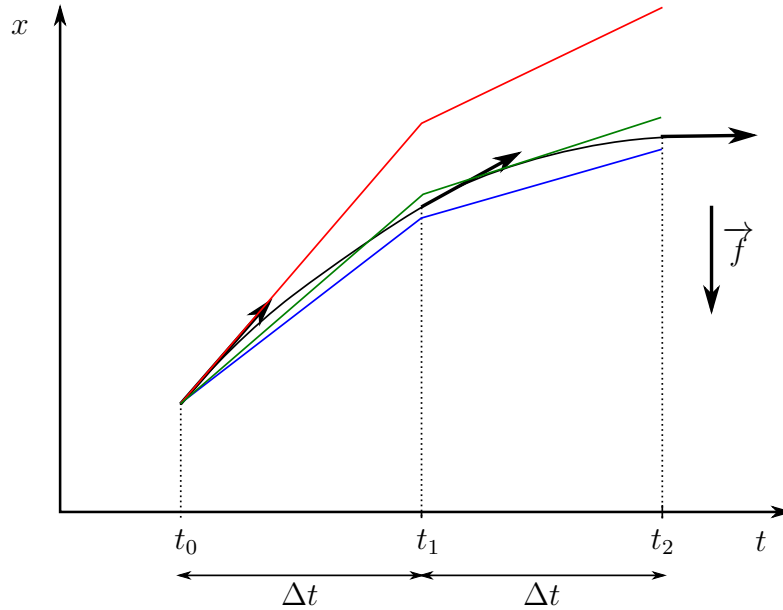


FIGURE 12: Fonctions approchées de la trajectoire des grains soumis à une force f . Noir : trajectoire réelle, rouge : trajectoire approchée par la méthode d'Euler, vert : trajectoire approchée par la méthode des trapèzes et bleu : trajectoire approchée par la méthode du leapfrog.

3.1.2 Méthode des trapèzes

Cette méthode apporte une première amélioration à celle d'Euler en effectuant une évaluation pondérée de la vitesse :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + f(x_n)\Delta t \\ \tilde{v} &= \frac{v_n}{2} + \frac{v_{n+1}}{2} \\ x_{n+1} &= x_n + \tilde{v}\Delta t \end{aligned}$$

Cette méthode est plus stable que la méthode d'Euler car elle est du second ordre (voir trajectoire verte de la Figure 12).

3.1.3 Méthode du leapfrog

Cette dernière méthode est encore plus stable lorsque la force dépend de la position. Il s'agit également d'une méthode du second ordre basée sur le décalage de l'évaluation de la vitesse :

$$\begin{aligned} v_{n+1/2} &= v_n + f(x_n)\frac{\Delta t}{2} \\ x_{n+1} &= x_n + v_{n+1/2}\Delta t \\ v_{n+1} &= v_{n+1/2} + f(x_{n+1})\frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

Par cette méthode, l'évaluation de la position est effectuée sur base de la vitesse au milieu du pas de temps et est par conséquent plus stable pour le cas étudié d'une force dépendant de la position du grain (voir trajectoire bleue de la Figure 12).

Une alternative basée sur cette même méthode consiste à décaler l'évaluation des positions

plutôt que celle des vitesses :

$$\begin{aligned}x_{n+1/2} &= x_n + v_n \frac{\Delta t}{2} \\v_{n+1} &= v_n + f(x_{n+1/2}) \Delta t \\x_{n+1} &= x_{n+1/2} + v_{n+1} \frac{\Delta t}{2}\end{aligned}$$

C'est cette dernière méthode qui a été implémentée pour le calcul de la trajectoire des grains dans la simulation utilisée.

3.2 Détection des contacts

Lorsque l'ensemble des grains se déplace dans le tambour rotatif, il est fort probable que les trajectoires de deux d'entre eux coïncident en un temps donné et par conséquent qu'ils entrent en collision. Les grains vont également inévitablement entrer en collision avec les parois du dispositif. Il y a donc deux types de contact mais qui seront gérés de la même façon : conformément à la théorie sur les contacts solides (section 2.1) et la méthode *soft-particle*. Il nous faut donc détecter les contacts.

Considérons deux grains i et j de rayons respectifs R_i et R_j . Ces deux grains sont en contact si

$$\delta = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - (R_i + R_j) \leq 0 \quad (13)$$

où δ est la distance surface à surface entre deux grains et x et y sont les composantes de la position de chacun des grains dans un repère à deux dimensions. Considérons un ensemble de grains en mouvement. Pour déterminer si deux grains sont en contact et leur appliquer les lois du contact solide de l'équation (3), il faudrait calculer δ à chaque pas de temps et pour chaque couple de grain. Cela implique donc une grande quantité de tests à effectuer et devient rapidement trop conséquent lorsque le nombre de grains augmente.

Le nombre de calculs à effectuer peut être réduit en détectant, pour chaque grain, les candidats avec lesquels une future collision est possible. L'ensemble de ces grains susceptibles d'entrer en contact avec un grain donné se trouve dans un cercle de rayon R_V centré sur le grain comme illustré à la Figure 13. Une liste de voisins peut alors être constituée et utilisée pour réduire le nombre de tests de contact à effectuer. Cette liste est appelée *liste de Verlet*. Néanmoins, pour établir cette liste, un grand nombre de calculs de distance est nécessaire. De plus, lorsque les grains se déplacent, leurs listes de Verlet changent car les grains voisins ne seront plus les mêmes. La durée de validité de la liste de Verlet d'un grain est donnée par

$$T_V = \frac{R_V}{\langle v \rangle}$$

où $\langle v \rangle$ est la vitesse moyenne des grains. Plus on prend un petit voisinage, plus le temps de validité de la liste est petit et moins on doit effectuer de tests de collision. Si le voisinage est grand, la liste doit être actualisée moins souvent mais le nombre de tests à effectuer est plus grand. Ce compromis n'est pas aisé car il dépend fortement du système étudié.

Plutôt que de chercher les voisins dans une région circulaire autour des grains, une méthode plus efficace consiste à les repérer dans les cellules d'une grille placée sur le système. Comme illustré sur la Figure 14, les grains foncés, ayant leurs cellules de grille propres, sont susceptibles

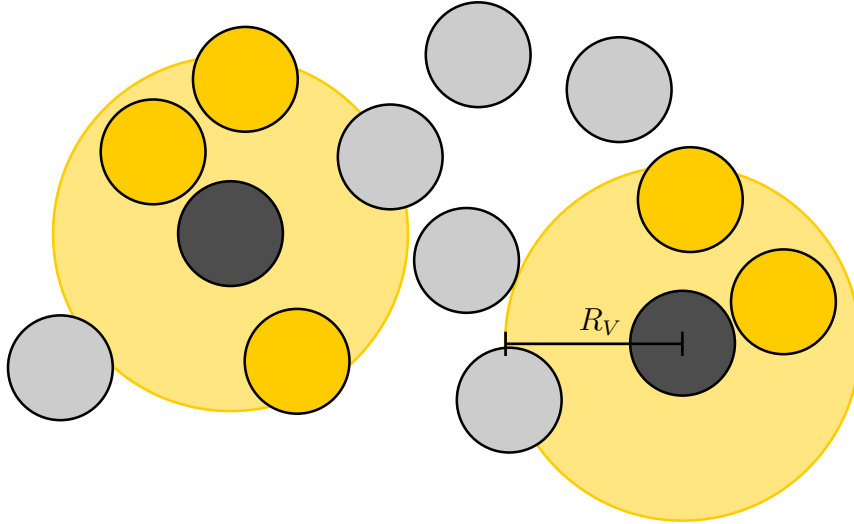


FIGURE 13: Candidats (grains jaunes) pour une future collision avec les grains foncés. Ces grains se trouvent dans un cercle de rayon R_V centré sur les grains foncés.

de rencontrer les grains se trouvant dans des cellules adjacentes. L'avantage de cette méthode est que le classement des grains dans les cellules est beaucoup plus rapide. Il suffit en effet de connaître la position des grains pour obtenir l'index de la cellule dans laquelle il se trouve.

Soit un grain i à la position (x_i, y_i) . L'index selon x de la cellule dans laquelle il se trouve est donné par $i_x = x_i \% d_x$ et l'index y par $i_y = y_i \% d_y$ où d_x et d_y sont les dimensions des cellules selon x et y et typiquement choisies égales à un diamètre de grain⁴. Ces index peuvent notamment être réduits à un seul : l'index $k = i_y.m + i_x$ où m est le nombre de cellules selon x . L'information que ce grain appartient à la cellule k est alors stockée pour ensuite tester les contacts.

Pour stocker cette information, la méthode optimisée est celle des listes liées. Elle consiste à déterminer, pour chaque cellule, un grain qui serait le premier de la liste de tous les grains appartenant à la cellule. Lorsque l'index de la cellule dans laquelle un grain se trouve a été calculé, il en devient la tête de liste. Cette information est sauvegardée par la cellule au même titre que son indice ou sa taille. Si un autre grain est détecté dans cette même cellule, il en devient la tête de liste et retient qui était tête de liste avant lui. De cette façon, chaque cellule a dans ses paramètres sa tête de liste, qui connaît elle-même une autre particule qui se trouve dans la même cellule et ainsi de suite. C'est pour cette raison que cette méthode est appelée *méthode des listes liées* car tous les grains appartenant à une cellule sont liés pour former la liste complète. Cette méthode est optimisée car chaque cellule ne doit connaître que sa tête de liste. Par conséquent la liste des grains connue par la cellule est beaucoup plus courte que si elle contenait l'ensemble des grains de la cellule.

La même méthode est appliquée pour les parois qui sont par contre stockées dans plusieurs cellules.

4. L'opérateur $\%$ est l'opérateur *modulo* dont l'action est identique à l'opérateur division mais ne conserve que la partie entière du résultat. Exemple : $7\%2 = 3$.

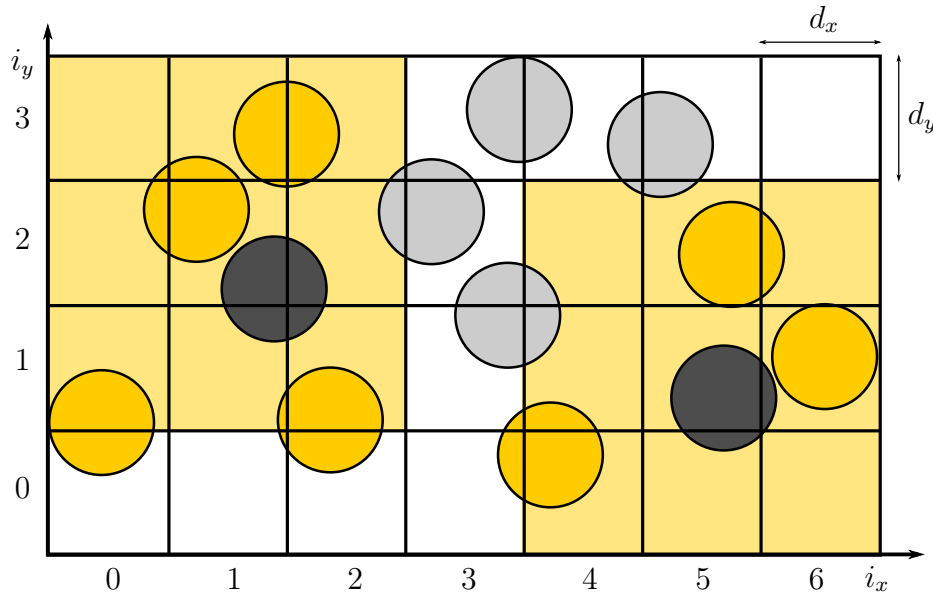


FIGURE 14: Pour trouver les grains voisins des grains foncés, une grille dont les cellules sont de taille $d_x \times d_y$ et dont les indices sont $\{i_x, i_y\}$ est placée sur le système. Les cellules voisines à la cellule du grain foncé contiennent tous les candidats potentiels (en jaune foncé) pour une future collision avec ce grain.

Pour résumer,

1. Une grille dont les cellules ont une taille de l'ordre d'un diamètre de grain est placée sur le système.
2. Les grains sont classés dans les cellules en leur assignant à chacun l'index k de la cellule dans laquelle ils se trouvent. Le premier grain à être assigné à une cellule en devient la tête de liste. Si un nouveau grain est détecté dans cette cellule, il prend la place du précédent mais garde en mémoire la tête de liste précédente.
3. À cette étape, chaque cellule a dans ses paramètres sa tête de liste et chaque grain a dans ses paramètres son index de cellule et éventuellement la tête de liste dont il a pris la place.
4. Au moment de la détection des contacts avec un grain donné, on regarde quel est son index de cellule. Les contacts peuvent alors potentiellement se produire avec des grains qui se trouvent dans les cellules voisines. Dans chaque cellule voisine, on regarde qui est tête de liste et on calcule δ par l'équation (13) pour déterminer s'il y a ou non un contact. On répète l'opération pour d'éventuels autres grains appartenant à la cellule en regardant si la tête de liste connaît un autre grain.

3.3 Résolution des contacts

Maintenant qu'un contact a été détecté, il faut calculer les forces qui s'appliquent sur les grains impliqués. Une fois ces forces déterminées, par la méthode leapfrog, les grains pourront être déplacés précisément.

Les interactions possibles au contact ont été exposées dans la section 2. Les grains peuvent subir une force normale de répulsion au contact ou une force tangentielle de frottement. Il est donc premièrement nécessaire de définir ces directions normales et tangentielles.

3.3.1 Base au contact

Par définition,

Le vecteur normal au contact entre deux grains sphériques i et j est le vecteur unitaire reliant les centres des grains. Il est noté \vec{n}_{ij}

Le vecteur joignant les centres est le vecteur $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ où \vec{r}_i et \vec{r}_j sont les vecteurs positions de chacun des grains dans la base du laboratoire (voir Figure 15). Pour rendre ce vecteur unitaire, il suffit alors de le diviser par sa norme pour obtenir le vecteur normal unitaire au contact

$$\vec{n}_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Les composantes de ce vecteur sont alors

$$n_{ijx} = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}$$

$$n_{ijy} = \frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}$$

où $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ et $\vec{r}_j = (x_j, y_j)$. Ces composantes permettent alors d'implémenter le vecteur normal numériquement. Le vecteur unitaire tangentiel est défini par rapport à la vitesse relative de glissement des deux grains. Considérons deux grains i et j de rayons R_i et R_j en déplacement à vitesses respectives \vec{v}_i et \vec{v}_j . Leur vitesse relative est

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$$

Considérons à présent que ces grains soient uniquement en rotation sur eux-même aux vitesses

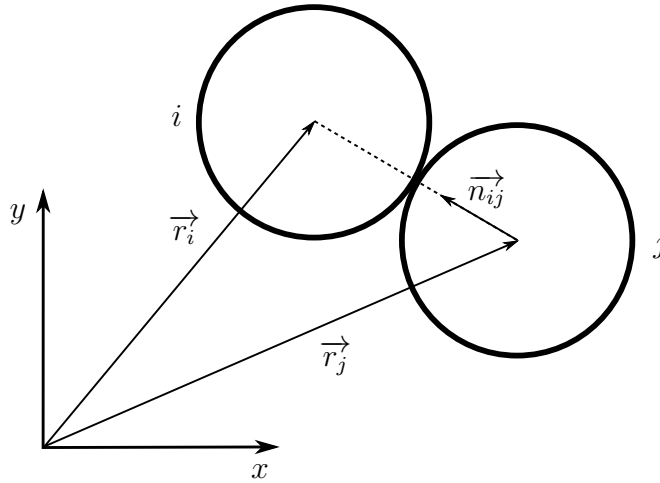


FIGURE 15: Définition du vecteur normal au contact \vec{n}_{ij} pour établir la base au contact.

angulaires respectives $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_j$. Dans ce cas, leur vitesse relative au point de contact est

$$\vec{v}_{ij} = \vec{\omega}_i \times (-\vec{n}_{ij}R_i) - \vec{\omega}_j \times \vec{n}_{ij}R_j$$

Par conséquent, si les deux grains sont en déplacement l'un par rapport à l'autre et en rotation sur eux-même comme illustré sur la Figure 16, leur vitesse relative au point de contact ou vitesse de glissement devient

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times (-\vec{n}_{ij}R_i) - (\vec{v}_j + \vec{\omega}_j \times \vec{n}_{ij}R_j) \quad (14)$$

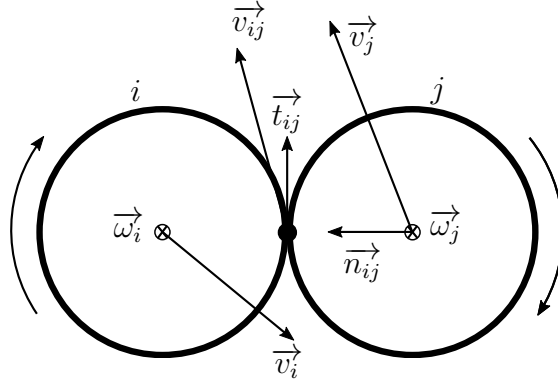


FIGURE 16: Définition du vecteur tangent unitaire au contact \vec{t}_{ij} à partir de la vitesse de glissement \vec{v}_{ij}

et est représenté à la Figure 16. Les composantes de ce vecteur sont alors

$$\begin{aligned} v_{ijx} &= v_{ix} - v_{jx} + R_i \omega_i n_{ijy} + R_j \omega_j n_{ijy} \\ v_{ijy} &= v_{iy} - v_{jy} - R_i \omega_i n_{ijx} - R_j \omega_j n_{ijx} \end{aligned}$$

Pour déterminer le vecteur unitaire tangent au contact, il faut alors retirer au vecteur vitesse de glissement sa composante normale puis le normaliser :

$$\vec{t}_{ij} = \frac{\vec{u}_{ij}}{|\vec{u}_{ij}|}$$

où $\vec{u}_{ij} = \vec{v}_{ij} - (\vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij})\vec{n}_{ij}$. On obtient par conséquent les composantes du vecteur tangent unitaire :

$$\begin{aligned} t_{ijx} &= \frac{v_{ijx} - v_{ijx}^{\parallel}}{\sqrt{(v_{ijx} - v_{ijx}^{\parallel})^2 + (v_{ijy} - v_{ijy}^{\parallel})^2}} \\ t_{ijy} &= \frac{v_{ijy} - v_{ijy}^{\parallel}}{\sqrt{(v_{ijx} - v_{ijx}^{\parallel})^2 + (v_{ijy} - v_{ijy}^{\parallel})^2}} \end{aligned}$$

où $(\vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij})\vec{n}_{ij} = (v_{ijx}^{\parallel}, v_{ijy}^{\parallel})$. Ces composantes peuvent alors également être implémentées dans le code. Dans le cas d'un contact d'un grain i avec la paroi du tambour rotatif, la détermination du vecteur normal est plus rapide car il s'agit simplement du vecteur $-\vec{r}_i$ normalisé (voir Figure 17). Le vecteur tangent est obtenu de la même façon que pour le contact grain-grain en remplaçant l'expression de la vitesse de glissement (14) par la vitesse de glissement entre le grain i et le tambour d (pour *drum*)

$$\vec{v}_{id} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times (-\vec{n}_{id}R_i) + \vec{\omega}_d \times \vec{n}_{id}R_d$$

avec R le rayon du tambour et $\vec{\omega}_d$ la vitesse angulaire de rotation du tambour.

Maintenant que les directions normales et tangentielles sont définies, la direction et le sens des forces de contact sont connus. La prochaine étape clé de l'algorithme consiste à déterminer l'intensité de ces forces.

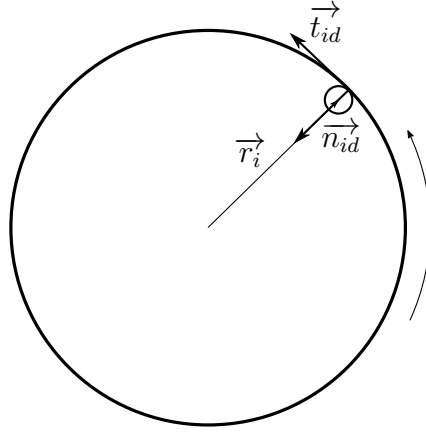


FIGURE 17: Définition de la base au contact avec la paroi du tambour : vecteur normal \vec{n}_{id} et vecteur tangent \vec{t}_{id} .

3.3.2 Forces au contact

Le choix de la méthode *soft-particle* implique que l'interpénétration des grains est autorisée. Suite à cette superposition des grains, une force répulsive apparait entre les grains. Il a été discuté dans la section de théorie sur l'écoulement granulaire que, dans le cas 2D, cette force était proportionnelle à la distance d'interpénétration des grains δ et à une constante que l'on notera ici k_n , la constante de raideur dans la direction normale au contact. On a donc que la force de répulsion de deux grains superposés sur une distance δ est de type ressort et donnée par

$$\vec{F}_N = -k_n \delta \vec{n}_{ij}$$

où \vec{n}_{ij} est le vecteur normal unitaire au contact défini précédemment et $\delta = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - (R_i + R_j)$ avec \vec{r}_i et \vec{r}_j les positions des deux grains dans le référentiel du laboratoire (voir Figure 18, gauche). Si le contact a lieu avec la paroi, la force de répulsion est identique mais la distance

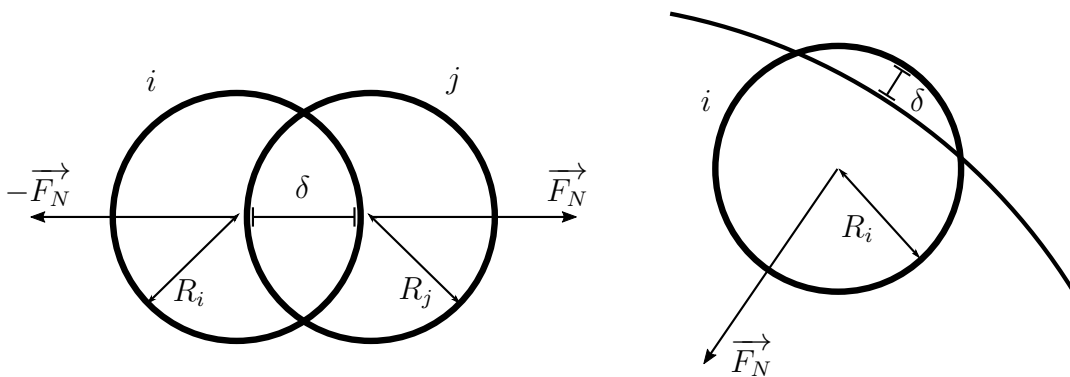


FIGURE 18: Force de répulsion entre deux grains (gauche) ou entre un grain et la paroi du tambour (droite).

d'interpénétration devient $\delta = R - |\vec{r}_i + R_i|$ avec R le rayon du tambour (voir Figure 18 droite). Il reste donc à déterminer la constante de raideur k_n . Cette constante a été définie théoriquement à partir du module de Young du matériau et de son coefficient de Poisson (voir section 2.1). Pour plus de simplicité et de prédictabilité, la constante de raideur est définie

à partir de la conservation de l'énergie lors de la collision et du choix de l'interpénétration maximale. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}k_n\delta_{max}^2 &= \frac{1}{2}mv^2 \\ \Rightarrow k_n &= \frac{mv^2}{\delta_{max}^2}\end{aligned}$$

En choisissant $\delta_{max} = -R/100$, on autorise, en utilisant cette valeur de la constante de raideur, une interpénétration maximale entre deux grains de l'ordre d'un centième de rayon de grain.

Lorsque les grains sont déplacés par la méthode leapfrog, la valeur de δ est actualisée à chaque pas de temps et par conséquent l'intensité de cette force de répulsion également. En intégrant cette force à présent connue à la méthode leapfrog, on déplace correctement les deux grains qui se repoussent. Il manque toutefois l'aspect inélastique du contact.

Afin de modéliser cet aspect, un amortissement visqueux est ajouté au modèle du ressort utilisé pour la répulsion. On a donc le modèle du ressort amorti et la résultante des forces normales s'appliquant sur un grain devient

$$F_N = \vec{F}_N \cdot \vec{n}_{ij} = -\eta \frac{d\delta}{dt} - k_n\delta$$

où la valeur de η est à déterminer. Cette valeur étant logiquement liée au coefficient de restitution défini par $\epsilon = \left| \frac{\vec{v}' \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \right|$ (voir section 2.2), il suffit alors de déterminer ϵ pour obtenir la valeur de η .

En appliquant Newton, on obtient l'équation différentielle décrivant le mouvement d'un oscillateur amorti :

$$m \frac{d^2\delta}{dt^2} + \eta \frac{d\delta}{dt} + k_n\delta = 0$$

En fixant les conditions initiales $t = 0$, $\delta = 0$ et $\dot{\delta} = v$, on obtient la solution générale suivante

$$\delta(t) = \frac{v}{\omega} \exp\left(-\frac{\eta}{2m}t\right) \sin(\omega t)$$

où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\eta}{2m}\right)^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_n}{m}}$ la pulsation propre de l'oscillateur. On dérive ensuite cette équation afin d'obtenir les expressions des vitesses nécessaires à la définition de ϵ :

$$\dot{\delta}(t) = \frac{v}{\omega} \exp\left(-\frac{\eta}{2m}t\right) \left[\omega \cos(\omega t) - \frac{\eta}{2m} \sin(\omega t) \right]$$

Vu que la vitesse après contact v' est atteinte après une demi-période d'oscillation $T/2$, on a

$$v' = \dot{\delta}\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{\delta}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -v \exp\left(-\frac{\eta}{2m} \frac{\pi}{\omega}\right)$$

car $T = \frac{2\pi}{\omega}$. On obtient alors une expression pour le coefficient de restitution :

$$\epsilon = \frac{v'}{v} = \exp\left(-\frac{\eta}{2m} \frac{\pi}{\omega}\right)$$

En injectant dans cette équation l'expression de ω , on obtient une autre façon d'exprimer le coefficient de restitution :

$$\epsilon = \exp\left(\frac{-\pi\eta}{\sqrt{4mk_n - \eta^2}}\right)$$

On trouve alors l'expression de la viscosité à partir de cette dernière équation :

$$\eta = -2 \ln(\epsilon) \sqrt{\frac{mk_n}{\ln^2(\epsilon) + \pi^2}}$$

Remarque : la masse dont il est question ici est soit la masse du grain dans le cas d'une collision entre un grain et la paroi, soit la masse effective $m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ dans le cas d'une collision entre deux grains.

Lorsque deux grains sont en collision et commencent à se superposer, ils sont donc soumis à une force de répulsion $-k_n \delta$ et une force d'amortissement $-\eta v_n$ (où v_n est la vitesse normale des grains) dont les constantes k_n et η ont été définies ci-dessus. Ces deux forces sont recalculées après chaque pas de temps de la simulation numérique puis appliquées par la méthode leapfrog pour déplacer les grains adéquatement.

Pour que l'ensemble des forces soient correctement intégrées au code, il ne manque alors plus que la force de friction tangentielle. D'après les lois d'Amontons-Coulomb, cette force est donnée par

$$F_f = \mu F_N$$

où μ est le coefficient de friction et a été défini dans la section 2.4. C'est donc cette force qui est également utilisée pour les simulations numériques en choisissant arbitrairement le paramètre μ qui sera une variable de simulation.

Pour résumer l'ensemble des forces de contact, on pourrait modéliser le contact entre les deux grains par le ressort amorti ou *spring-dashpot*. Ce modèle correspond bien aux forces qui viennent d'être définies car il considère une force de répulsion de type ressort entre les deux grains lorsqu'ils se superposent couplée à un amortissement visqueux (*dashpot*). Les forces de frottement sont modélisées par une résistance constante. Ce modèle est illustré à la Figure 19.

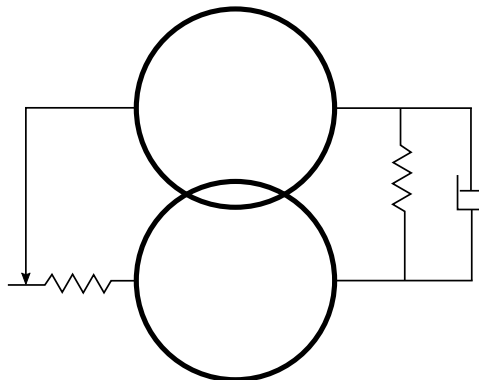


FIGURE 19: Modélisation des forces au contact par le modèle du *spring-dashpot*.

3.3.3 Force cohésive

La particularité de ce travail consiste à considérer que les grains peuvent s'attirer pour simuler une poudre cohésive. Il manque donc une force d'attraction à longue portée entre les grains. Différents paramètres doivent être définis pour implémenter cette force : son intensité, sa portée et la forme du puits d'interaction.

L'intensité de la force cohésive est donnée par $Bo.mg$ (par définition du nombre de Bond). La portée p de la force est choisie arbitrairement à un rayon de grain (de surface à surface) et le puits choisi est un puits en δ^2 pour éviter toute discontinuité autour de $\delta = 0$ (voir Figure 20).

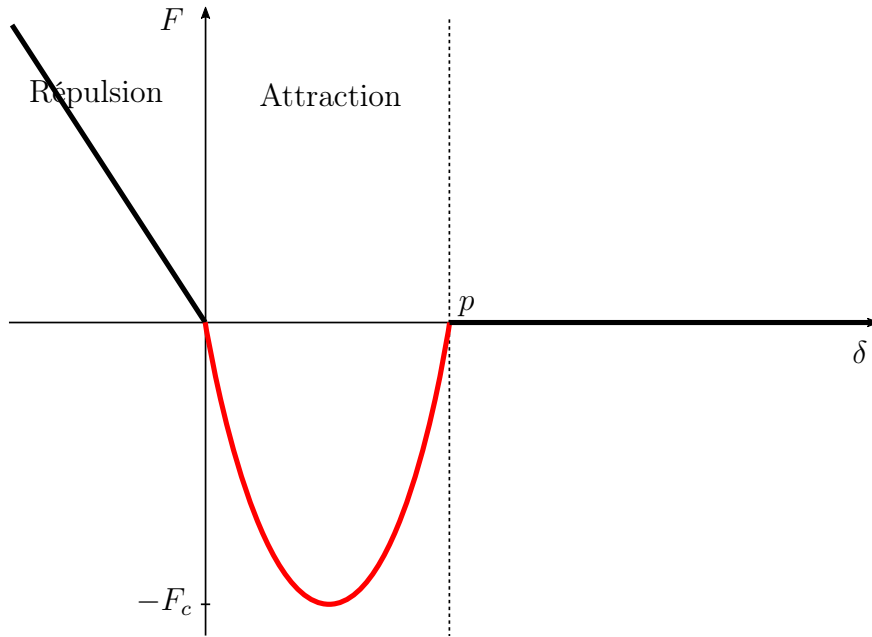


FIGURE 20: Potentiel d'interaction entre deux grains : répulsion lorsqu'ils s'interpénètrent ($\delta < 0$) comme attendu par le modèle ressort amorti décrit précédemment et attraction lorsqu'ils sont à une distance inférieure à la portée de la force cohésive p .

Pour répondre à ces conditions, le puits d'interaction suivant est implémenté :

Si $\delta \leq p$ et $\delta \geq 0$ (partie rouge du profil de force),

$$F = F_c \left(\left(\frac{2\delta}{p} - 1 \right)^2 - 1 \right)$$

où $F_c = Bo.mg$.

L'ajout de cette force à longue portée nécessite la modification de la taille des cellules dans lesquelles les grains sont classés. En effet, jusqu'à présent, les cellules ont la taille d'un diamètre de grain. Vu que l'algorithme consiste à repérer les grains des cellules voisines pour effectuer les tests d'interaction, il est nécessaire d'augmenter la taille des cellules pour que les interactions avec les grains situés à une distance p soient aussi considérées. Pour cette raison, les cellules sont adaptées pour avoir une taille de $2R_i + p$.

L'inventaire complet des interactions possibles est terminé. La méthode du leapfrog va alors permettre de calculer les nouvelles vitesse et position des grains après un intervalle de temps Δt . Ce dernier paramètre doit également être soigneusement défini.

3.3.4 Pas de temps

La définition du pas de temps de la simulation est primordiale : s'il est trop grand, des collisions peuvent être ratées ou le système peut devenir instable. Imaginons en effet que deux grains qui ne sont initialement pas superposés le soient entièrement au pas de temps suivant. Dans ce cas, la force de répulsion sera tellement grande que les grains vont être expulsés à une vitesse bien trop grande. Ce problème peut être évité en choisissant un pas de temps plus petit. À contrario, s'il est trop petit, les calculs seront très fréquents et cela risque de nuire fortement à la rapidité des simulations.

Il a été démontré dans la section 2.3 que le temps de collision était proportionnel à $t_c \sim \left(\frac{m}{k}\right)^{2/5}$. Afin de s'assurer que ce problème lié au pas de temps soit évité, une marge de sécurité est considérée, au détriment de la rapidité de la simulation. Le pas de temps implémenté est alors le suivant :

$$t_c = c\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

avec $c \leq 0.05$ pour qu'une collision dure au moins une vingtaine de pas de temps.

Tous les éléments nécessaires à la simulation numérique par la méthode soft-particle et leapfrog sont alors définis pour reproduire un écoulement granulaire proche de la réalité. Les fichiers de sortie des simulations numériques exécutées fournissent l'index de chaque grain, sa position, sa vitesse, sa vitesse de rotation angulaire et son rayon à un instant donné. Cet instant est fixé par le nombre d'images par seconde de l'écoulement voulu. Cette valeur communément notée *fps* donne le nombre de fichiers de sortie qui seront générés par seconde de simulation numérique.

3.4 Paramètres de simulation

Les valeurs des constantes qui ont été utilisées lors des simulations numériques sont reprises dans la table 1.

ϵ	μ	k	Δt	temps de simulation	<i>fps</i>	R	ω	# grains
0.9	variable	200	5.10^{-6} s	50s	4s^{-1}	0.05m	variable	4000

m	R_i	Bo	p	η
4.10^{-6} kg	$5.10^{-4} \pm 10\%$ m	variable	5.10^{-4} m	$-2 \ln(\epsilon) \sqrt{\frac{mk}{\ln^2(\epsilon) + \pi^2}}$

TABLE 1: Valeurs des paramètres utilisés pour les simulation numériques.

Pour chaque simulation réalisée, il y avait par conséquent $50 * 4$ fichiers de sortie contenant chacun les positions, vitesses, ... des 4000 grains.

Plutôt que d'exprimer la vitesse angulaire du tambour par ω en rad/s, elle a été adimensionnée en la remplaçant par le nombre de Froude $Fr = \omega^2 \frac{R}{g}$ où $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

4 Mesures numériques et résultats































































Comme annoncé dans la section d'introduction, la caractérisation de l'écoulement granulaire est généralement réalisée par la mesure des profils de vitesse et de l'angle d'écoulement. Ces deux

mesures fournissent en effet beaucoup d'informations sur les régimes d'écoulement et le mélange [13, 15]. En comparant différentes situations, elles permettent aussi de mettre en évidence l'effet de paramètres tels que la taille, la forme [20] ou la nature des grains [15] et la vitesse de rotation du tambour [13].

Ce sont donc ces mesures numériques qui ont été réalisées sur les résultats numériques pour étudier l'effet du coefficient de friction entre les grains, de la vitesse de rotation du tambour et de la cohésion entre les grains.

De nouvelles mesures ont été rajoutées pour mettre en évidence des phénomènes nous paraissant intéressants.

Les valeurs des paramètres variables sont représentées dans le tableau récapitulatif de la Figure 21. Il a premièrement été observé que pour une vitesse de rotation du tambour de 200rpm (soit un nombre de Froude égal à 2.23), l'écoulement se trouvait dans le régime de centrifugation (voir Figure 2). Ce cas n'a donc pas été étudié car aucun écoulement granulaire n'a lieu : l'ensemble des grains est collé à la paroi.

Bo rpm \	0	1	2	3	4	5	10	15	20
10									
20									
30	    					    			
40									
50									
60									
70									
80									
90									
100									
200									







 $\mu = 1$
 $\mu = 0.8$
 $\mu = 0.6$
 $\mu = 0.4$
 $\mu = 0.2$
 $\mu = 0$

FIGURE 21: Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations numériques.

Une première analyse qui sera utile pour différentes mesures numériques qui suivent est la détermination d'un ajustement linéaire de la surface moyenne d'écoulement (voir Figure 22). La méthode employée pour obtenir l'équation de cette droite est celle de l'ajustement par la méthode des moindres carrés. Pour obtenir cet ajustement linéaire de la surface, il faut d'abord créer la liste des points se trouvant à la surface à chaque pas de temps de la simulation. La création de cette liste de points d'ordonnée maximale est réalisée en divisant le système en colonnes de la largeur d'un diamètre de grains. La recherche suivante est alors menée : dans la j^{eme} colonne ($1 \leq j \leq \frac{R}{2R_i}$), quel est le grain qui a l'ordonnée maximale? Cette opération est répétée pour les 200 fichiers de sortie (soit l'ensemble de la simulation de 50s) et l'ajustement linéaire est réalisé sur la liste complète ainsi créée.

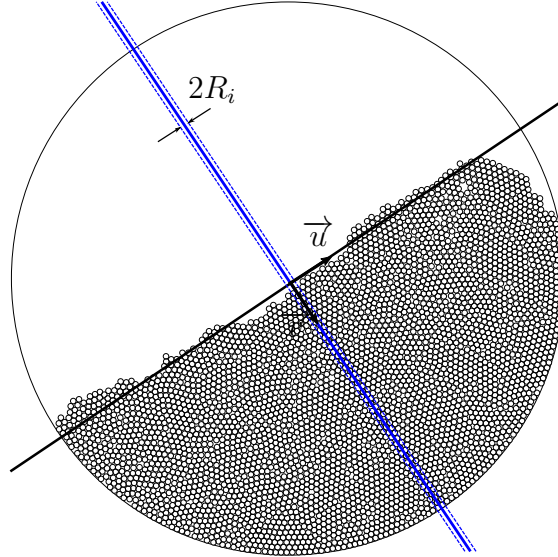


FIGURE 22: Résultat de la simulation numérique : grains en écoulement dans le tambour. Droite noire : ajustement linéaire de la surface de l'écoulement pour la mesure des profils de vitesse et de l'angle d'écoulement. Droite bleue : normale à la surface moyenne. Tirets : classe de largeur d'un diamètre de grain pour la détection des grains et le calcul du profil de vitesse.

4.1 Profils de vitesse

Dans un écoulement granulaire, le profil de vitesse est la mesure de la vitesse moyenne des grains dans une région de l'écoulement. Elle s'obtient en sélectionnant une tranche de grain et en mesurant la vitesse moyenne des grains passant dans cette tranche. Différents exemples sont illustrés sur la Figure 1 pour tous les systèmes d'écoulement.

Par convention, les profils de vitesse dans les tambours rotatifs sont mesurés dans la tranche perpendiculaire à la surface moyenne et passant par son milieu [11, 12, 13]. Les profils de vitesse s'obtiennent en trois étapes. D'abord, la normale à la surface de vecteur unitaire \vec{v} est déterminée (voir Figure 22). Cette normale est ensuite divisée en classes de largeur d'un diamètre de grain dans lesquelles les vitesses des grains sont moyennées. Enfin, les vitesses moyennes de chaque classe sont projetées selon le vecteur unitaire de la surface \vec{u} . Un changement de base est ensuite effectué pour se placer dans le référentiel tournant du tambour et permet de supprimer la composante de rotation du tambour. Ce changement vers la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est effectué en retirant ωd à la vitesse projetée où d est la distance de l'origine du système à la position d'une cellule. Le résultat est illustré sur la Figure 23. Pour plus de facilité d'interprétation et d'analyse, les profils de vitesse ont également été représentés graphiquement en représentant la vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement par rapport au rayon du tambour (d/R). En $d/R = 1$, on obtient alors la vitesse des grains contre la paroi du tambour et en $d/R = 0$, celle des grains à la surface de l'empilement.

La première étude porte sur l'effet de la vitesse de rotation sur l'écoulement granulaire. Trois cas de cohésion ont été étudiés : $Bo = 0$, $Bo = 5$ et $Bo = 10$ à coefficient de friction constant (voir colonnes 0, 5 et 10 du tableau de la Figure 21) . Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 24.

Sans cohésion, il a déjà été constaté que l'écoulement granulaire pouvait être divisé en trois parties : une région statique, une région d'écoulement et une région de surface [11, 12, 13, 18].

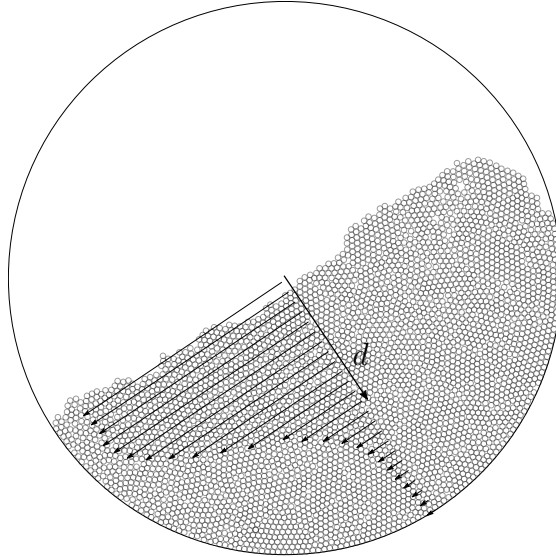
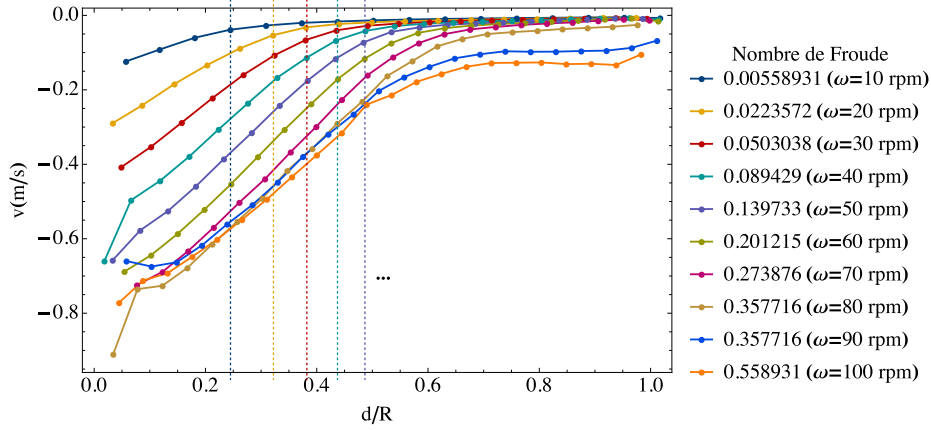


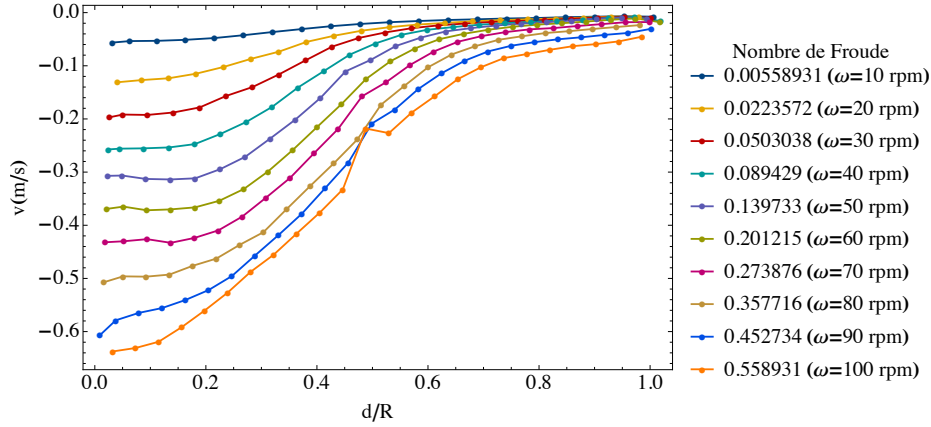
FIGURE 23: Résultat du calcul d'un profil de vitesse en fonction de la profondeur dans l'empilement d .

La région statique correspond à la portion nulle du profil de vitesse. Dans cette région, l'ensemble des grains se comporte comme un solide et remonte vers le haut du tambour à la même vitesse. En effet, si les grains sont collés à la paroi du tambour et ont donc une vitesse égale à ωR dans le référentiel du laboratoire, leur vitesse dans le référentiel tournant est nulle. Quant à la région d'écoulement, elle est caractérisée par un profil de vitesse linéaire. Dans cette région, la vitesse des grains est donc proportionnelle à la profondeur dans l'écoulement. La dernière région est la mince couche de surface dont l'épaisseur est proche du diamètre des grains. Dans cette région, les grains glissent sur l'empilement de grains sous-jacent. Ces trois régions sont présentes dans les profils de vitesse mesurés (voir Figure 24(a)). Avec ces profils de vitesse, il est dès lors possible de mesurer l'épaisseur de la couche d'écoulement (qui est la largeur de la région linéaire du profil de vitesse). Lorsque la vitesse de rotation augmente, on remarque que cette épaisseur semble augmenter. Ceci est en accord avec les observations déjà menées sur les poudres non-cohésives [14].

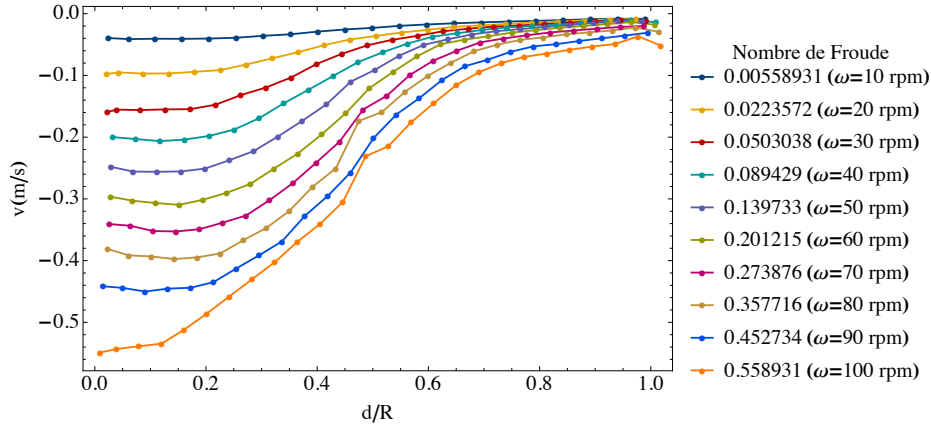
En rajoutant de la cohésion, la région de surface semble s'élargir au détriment de la région linéaire. Dans cette région de surface, il se produit un phénomène appelé *plug flow* : les grains ne s'écoulent non plus un par un comme dans le cas sans cohésion mais plutôt en paquets [13]. L'observation du profil de vitesse permet de remarquer que l'écoulement se fait par paquets à la surface si le profil de vitesse présente une vitesse d'écoulement constante à la surface. Ce phénomène est mis en évidence par la Figure 25. On observe clairement que la région d'écoulement de surface a la même couleur. Cela indique donc bien que tout le paquet de surface s'écoule à la même vitesse.



(a) Vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement. Profils de vitesse obtenus à friction constante $\mu = 0.6$ et cohésion constante $Bo = 0$. Les tirets représentent la limite entre la région d'écoulement et la région statique pour différentes valeurs du nombre de Froude.



(b) Vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement. Profils de vitesse obtenus à friction constante $\mu = 0.6$ et cohésion constante $Bo = 5$.



(c) Vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement. Profils de vitesse obtenus à friction constante $\mu = 0.6$ et cohésion constante $Bo = 10$.

FIGURE 24: Étude de l'effet de la vitesse de rotation sur l'écoulement granulaire à coefficient de friction et cohésion constants. (a) Mesure numérique des profils de vitesse à nombre de Froude variable, nombre de Bond constant égal à 0 et coefficient de friction constant égal à 0.6 (b) Mesure numérique des profils de vitesse à nombre de Froude variable, nombre de Bond constant égal à 5 et coefficient de friction constant égal à 0.6 (c) Mesure numérique des profils de vitesse à nombre de Froude variable, nombre de Bond constant égal à 10 et coefficient de friction constant égal à 0.6

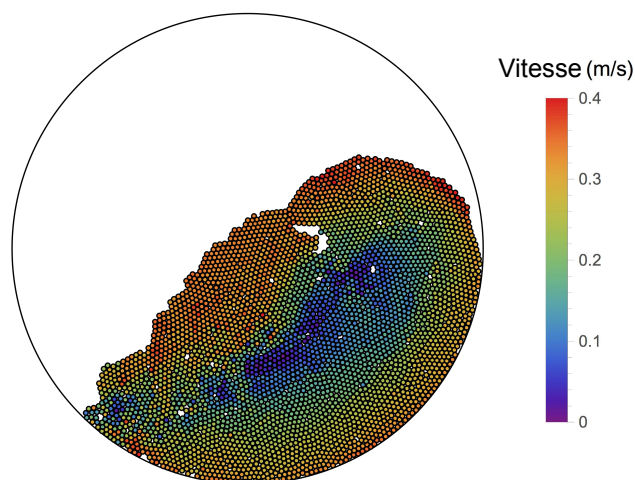


FIGURE 25: Snapshot d'un écoulement cohésif ($Bo = 15$). La couleur des grains donne leur vitesse dans le référentiel du laboratoire, selon l'échelle représentée à droite.

La quantification de ce phénomène n'a pas été trouvée dans les recherches précédentes et fait par conséquent l'objet de la section suivante.

On constate également sur les Figures 24(b) et 24(c) que plus la poudre est cohésive, plus la vitesse des grains à la surface (c'est-à-dire pour $d/R = 0$) est faible. Ceci peut s'expliquer par un raisonnement sur la conservation de la masse réalisée dans le cadre des poudres non-cohésives [15]. Ce raisonnement est développé pour déterminer la condition d'équilibre de l'écoulement de surface. Il repose sur le fait que le flux de grains montants dans le tambour lorsqu'il est en rotation est égal au flux de grains descendants dans l'écoulement. Par conséquent, si la masse des grains qui redescend en écoulement est plus importante (car écoulement en *plug flow*), la vitesse des grains en surface doit diminuer. Cela expliquerait donc pourquoi la vitesse des grains de surface passe de $\sim -0.8\text{m/s}$ dans le cas sans cohésion à $\sim -0.5\text{m/s}$ pour le cas le plus cohésif.

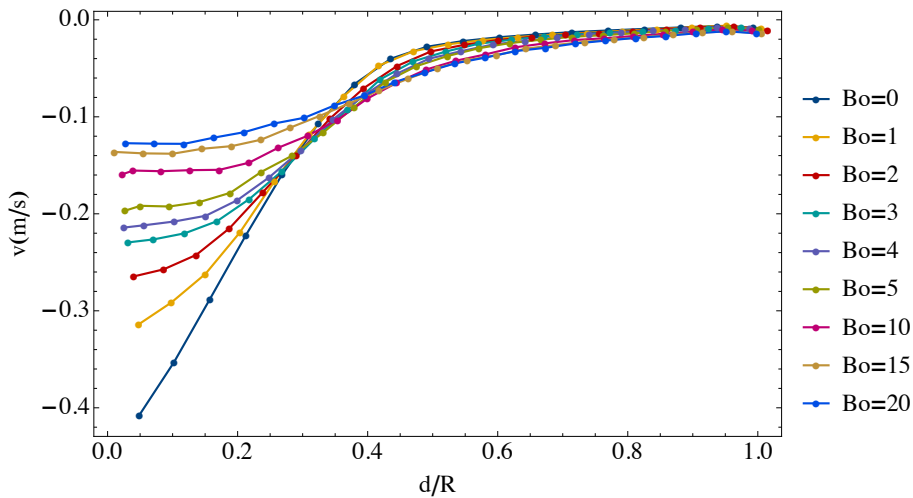
Si on se concentre sur les deux cas cohésifs, on constate aussi que si la vitesse de rotation augmente, la vitesse d'écoulement augmente. Cette observation peut également s'expliquer par le principe de conservation de masse. On remarque d'ailleurs que la vitesse d'écoulement semble dépendre linéairement de la vitesse de rotation car les courbes sont toutes espacées de la même valeur à la surface.

La deuxième étude concerne l'effet de la cohésion à vitesse de rotation constante. Cette étude a été réalisée pour deux vitesses de rotation du tambour différentes : à $Fr = 0.05$ (soit 30 rpm) et $Fr = 0.27$ (soit 70 rpm) (voir lignes 30 et 70 de la Figure 21). Les profils de vitesse à nombre de Bond variable sont représentés sur la Figure 26. C'est sur ces graphiques que le *plug flow* est le plus visible. La partie constante du profil de vitesse caractéristique du *plug flow* apparaît en effet lorsque la cohésion augmente.

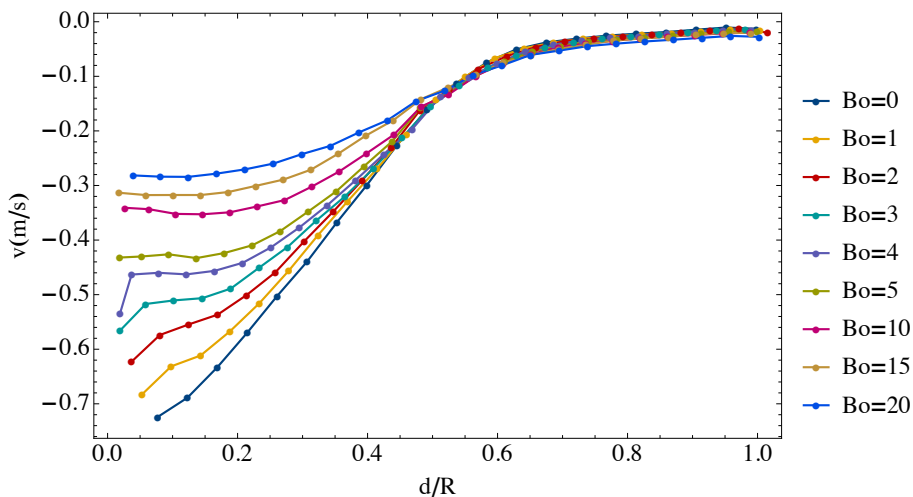
On constate à nouveau que la vitesse d'écoulement diminue lorsque la cohésion augmente. Par l'argument de conservation de la masse, si l'écoulement est dans le régime *plug flow*, la masse des grains qui s'écoule augmente mais la vitesse de rotation reste constante. Par conséquent, les grains qui s'écoulent ont une vitesse moindre par conservation du flux de grains dans le système.

On constate également une légère remontée de la surface moyenne dans le tambour lorsque

la cohésion augmente (voir le décalage vers la gauche du premier point du profil de vitesse lorsque Bo augmente). Cela semble également en accord avec le plug flow : lorsque la poudre est cohésive, la couche de surface en plug flow est plus importante et la surface moyenne est par conséquent plus haute que dans le cas sans cohésion.



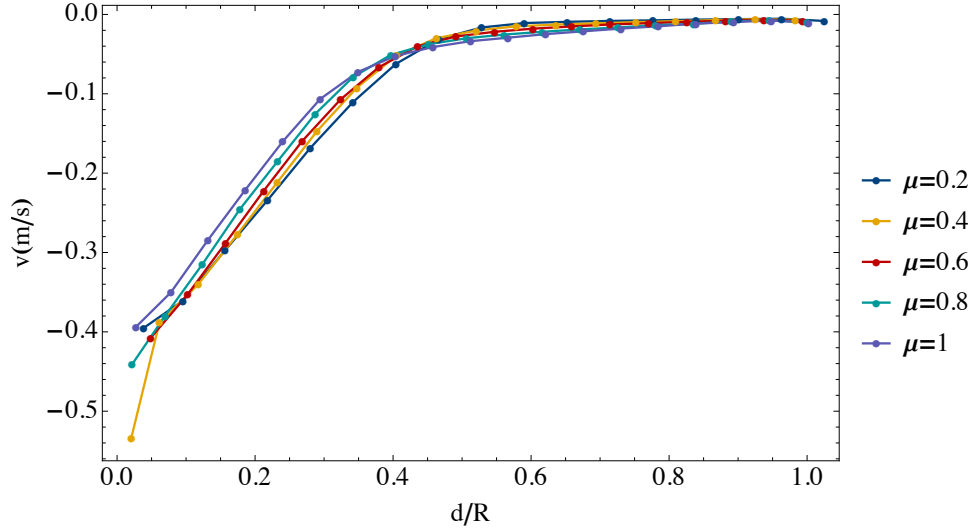
(a) Vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement. Profils de vitesse obtenus à friction constante $\mu = 0.6$ et nombre de Froude constant $Fr = 0.05$.



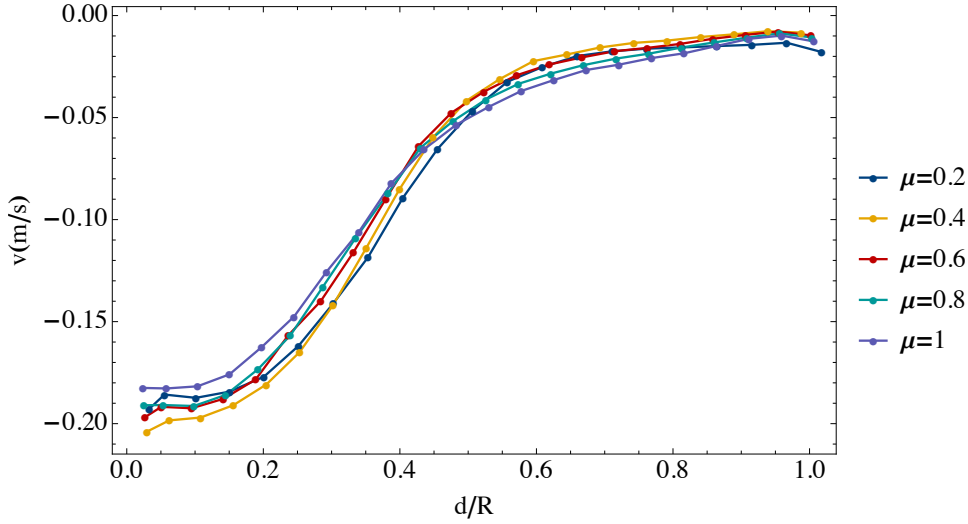
(b) Vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement. Profils de vitesse obtenus à friction constante $\mu = 0.6$ et nombre de Froude constant $Fr = 0.27$.

FIGURE 26: Étude de l'effet de la cohésion sur l'écoulement granulaire à coefficient de friction et vitesse de rotation du tambour constants. (a) Mesure numérique des profils de vitesse à nombre de Bond variable, nombre de Froude constant égal à 0.05 et coefficient de friction constant égal à 0.6 (b) Mesure numérique des profils de vitesse à nombre de Bond variable, nombre de Froude constant égal à 0.27 et coefficient de friction constant égal à 0.6.

Enfin, la dernière étude réalisée porte sur l'effet du coefficient de friction pour deux intensités de cohésion entre les grains : à $Bo = 0$ et $Bo = 5$ (voir cases multicolores de la Figure 21). Les résultats sont représentés sur la Figure 27. Il semble que, peu importe que la poudre soit cohésive ou pas, le coefficient de friction n'a pas un effet remarquable sur l'écoulement granulaire. Nous y reviendrons plus tard, ce résultat ne semble pas réaliste vis-à-vis des résultats expérimentaux.



(a) Vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement. Profils de vitesse obtenus à cohésion constante $Bo = 0$ et nombre de Froude constant $Fr = 0.05$.



(b) Vitesse d'écoulement dans le référentiel tournant en fonction de la profondeur dans l'empilement. Profils de vitesse obtenus à cohésion constante $Bo = 5$ et nombre de Froude constant $Fr = 0.27$.

FIGURE 27: Étude de l'effet du coefficient de friction sur l'écoulement granulaire à cohésion et vitesse de rotation du tambour constants. (a) Mesure numérique des profils de vitesse à coefficient de friction variable, nombre de Bond constant et égal à 0 et nombre de Froude constant égal à 0.05. (b) Mesure numérique des profils de vitesse à coefficient de friction variable, nombre de Bond constant et égal à 5 et nombre de Froude constant égal à 0.05.

4.2 Plug flow

La particularité de l'écoulement dans le régime plug flow est qu'il présente un profil de vitesse avec une région de surface quasi constante. La vitesse d'écoulement des grains diminue ensuite pour atteindre la valeur nulle dans le référentiel tournant. Le calcul de la dérivée des profils de vitesse permettrait donc d'avoir une idée de l'ampleur de ce phénomène. Les dérivées des profils de vitesse dans un cas d'étude de la cohésion sont représentées sur la Figure 28.

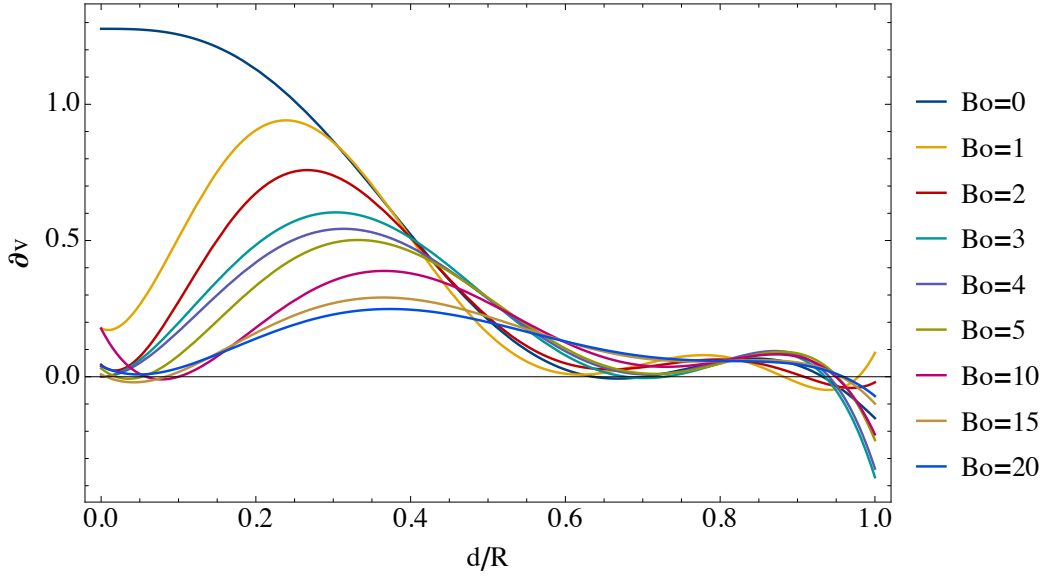


FIGURE 28: Dérivées des profils de vitesse de la Figure 26 concernant l'étude de la cohésion, à vitesse de rotation constante $\omega = 30\text{rpm}$ et friction constante $\mu = 0.6$.

Dans la région d'écoulement qui nous préoccupe (c'est-à-dire à $d/R < \sim 0.5$), on constate en comparant les Figures 26(a) et 28 que dans les cas cohésifs, tant que la dérivée est croissante, l'écoulement se fait par paquets. La dérivée présente ensuite un maximum qui correspond à un point d'inflexion du profil de vitesse. La dérivée est ensuite décroissante et cela marque alors la transition de la région d'écoulement à la région statique. Le point d'inflexion du profil de vitesse donne donc un bon ordre de grandeur du phénomène plug flow. Il est intéressant de remarquer que la dérivée du profil de vitesse sans cohésion ne met pas en évidence un point d'inflexion du profil de vitesse. Le maximum de la dérivée est d'ailleurs en $d/R = 0$. Cela signifie qu'il n'y a pas d'écoulement par paquets dans les poudres non cohésives. Il n'y a pas de contradiction avec les interprétations réalisées jusqu'à présent. L'étude du plug flow dans les poudres non cohésives n'a donc pas de sens.

L'influence du nombre de Froude sur le plug flow est représentée sur la Figure 29. On constate que le nombre de Froude n'a pas beaucoup d'effet sur le plug flow car la taille de cette région $\epsilon = d/R$ est quasi constante. Cela paraît logique lorsqu'on fait le lien avec la mesure des profils de vitesse : en observant les différentes courbes de la Figure 24(b) ou 24(c), on constate qu'elles sont toutes espacées de la même façon proche de $d/R = 0$. Cela implique donc que si la vitesse de rotation augmente, la vitesse d'écoulement en surface augmente linéairement. Par conservation du flux dans le tambour, la quantité de matière qui s'écoule ne devrait donc pas varier et par conséquent le plug flow devrait rester constant. Par contre, on remarque un décalage vers le haut de cette courbe lorsque la cohésion augmente. La cohésion semble donc par contre avoir un effet sur la taille de la région de plug flow dans l'écoulement granulaire.

Cet effet est illustré sur la Figure 30 qui met en évidence l'influence de la cohésion sur la taille caractéristique du plug flow. À vitesse de rotation moyenne, on retrouve l'inexistence de plug flow sans cohésion. En augmentant la cohésion, la taille de la région de plug flow augmente rapidement puis sature à environ un tiers de l'empilement. Cela signifie donc que l'écoulement n'est non plus continu mais bien discrétisé en paquets et que la taille de ces paquets sature lorsque la cohésion est forte. Si on choisit une vitesse de rotation plus grande (voir Figure 30), ce phénomène est moins marqué. De plus, le plug flow semble également avoir lieu sans cohésion. Ce résultat contradictoire pourrait s'expliquer par les résultats obtenus sur les poudres

non cohésives et plus spécifiquement sur les régimes d'écoulements illustrés sur la Figure 2. À vitesse de rotation élevée, le système pourrait se trouver dans le régime nommé *versement*. Il est donc possible de mesurer des régions à la surface de l'écoulement où la vitesse est constante. Le profil de vitesse ressemblerait par conséquent à celui des poudres cohésives mais le phénomène qui se produit n'est pas un écoulement discrétisé caractéristique du *plug flow*.

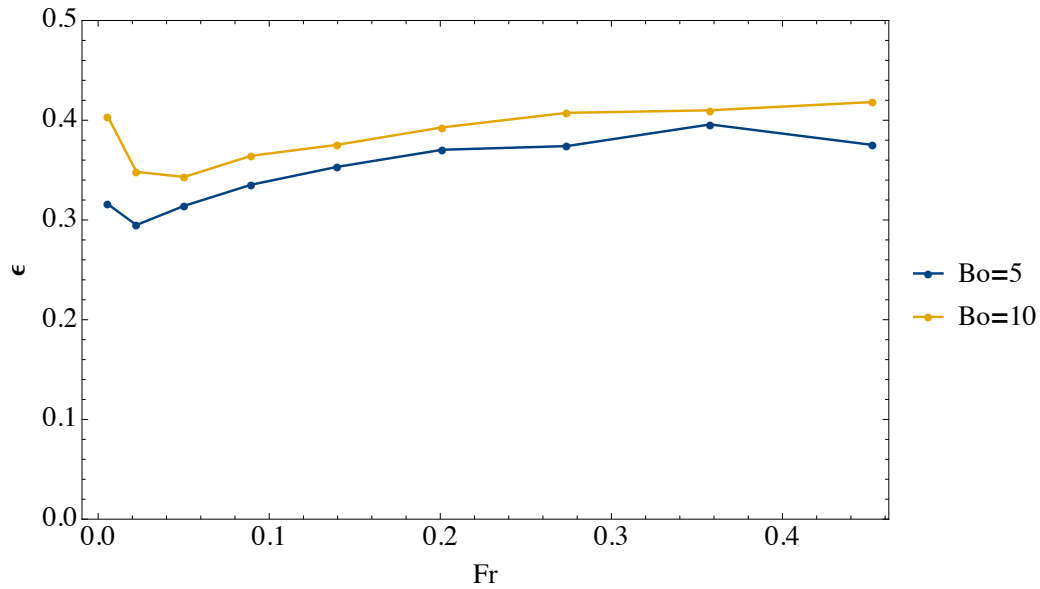


FIGURE 29: Épaisseur du *plug flow* en fonction du nombre de Froude pour deux poudres cohésives.

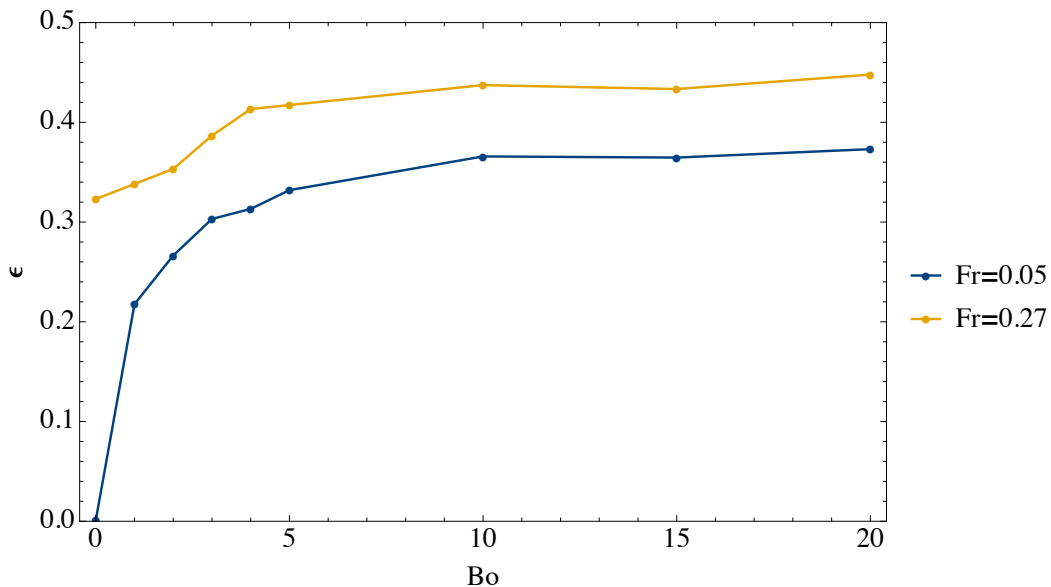


FIGURE 30: Épaisseur du *plug flow* en fonction de l'intensité de cohésion entre les grains pour deux nombres de Froude différents.

Cette mesure numérique du *plug flow* en dérivant les profils de vitesse permet donc de montrer la dépendance du nombre de Bond sur la taille de la région de *plug flow*. Cette observation

avait déjà été réalisée auparavant qualitativement par Brewster [13] qui était également arrivé à la même conclusion. Il avait également remarqué que la vitesse de rotation avait un effet sur la région de plug flow. Cet effet est également observable mais est toutefois bien moins important que celui de la cohésion.

4.3 Angles d'écoulement dynamique

L'angle d'écoulement est aussi une mesure qui fournit des informations sur l'écoulement granulaire. Pour obtenir cet angle, la convention est de mesurer l'angle entre la surface de l'écoulement et l'horizontale au milieu du tambour [14, 16] (voir Figure 31). Cet angle est appelé *dynamique* car il s'agit de l'angle mesuré lorsque le tambour est en rotation contrairement à l'angle de repos qui est mesuré lorsque le tambour est à l'arrêt. L'ajustement de la surface moyenne réalisé

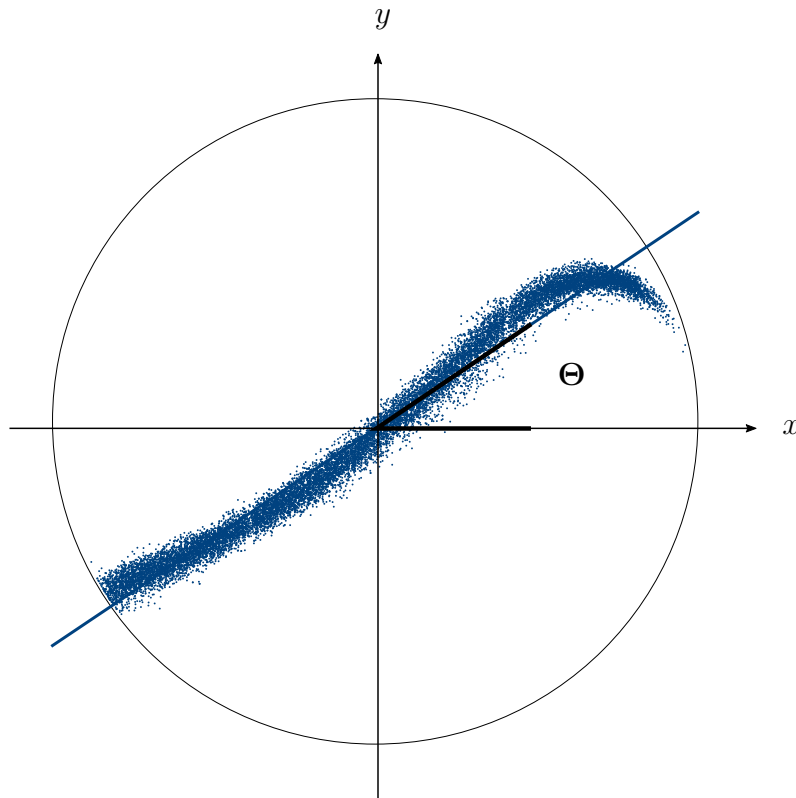


FIGURE 31: Convention pour la mesure de l'angle d'écoulement global Θ .

précédemment permet d'obtenir rapidement cet angle d'écoulement. Il est en effet directement donné par

$$\Theta = \arctan(a)$$

où l'équation de la surface moyenne est $y = ax + b$. Néanmoins, lorsque la surface commence à se déformer et n'est plus rectiligne, la mesure numérique de l'angle d'écoulement par cette méthode n'est plus très adéquate (voir Figure 32). Une autre convention proposée par Brewster [13] consiste alors à mesurer deux angles d'écoulements : un angle au sommet de l'écoulement et un angle à la base de l'écoulement. La méthode qui a été adoptée dans ce travail consiste à rajouter un troisième angle au milieu de l'écoulement (voir Figure 33). Un premier ajustement linéaire est réalisé sur le premier quart des grains de surface, un deuxième sur la partie centrale de l'écoulement et une dernière régression linéaire est effectuée pour le dernier quart des

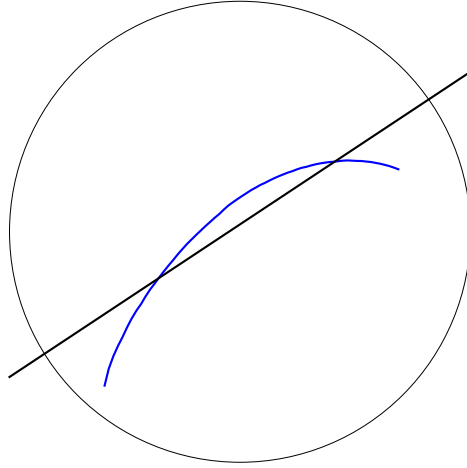


FIGURE 32: Régression linéaire pour la mesure de Θ (noir) de la surface moyenne de l'écoulement (bleu).

grains. Ces trois ajustements linéaires réalisés également par la méthode des moindres carrés permettent alors de calculer les angles θ_{bottom} , θ_{mid} et θ_{top} . Ces angles sont alors appelés *angles locaux d'écoulement* alors que la méthode précédente fournit *l'angle d'écoulement global*. La mesure des angles d'écoulement locaux est plus adéquate pour les poudres cohésives qui ont la caractéristique d'avoir une surface d'écoulement qui n'est pas rectiligne.

Différents phénomènes peuvent alors être mis en évidence en étudiant l'effet de la vitesse de rotation, de la cohésion et du coefficient de friction. Les angles locaux d'écoulement en fonction du nombre de Froude sont représentés aux Figures 34, 35 et 36 pour différentes valeurs de cohésion. Concernant la première étude de la vitesse de rotation représentée sur la Figure 34, on constate que lorsque le nombre de Froude augmente, l'angle d'écoulement inférieur θ_{bottom} diminue. Cela signifie donc que cette partie de la surface se rapproche de l'horizontale lorsque la vitesse de rotation augmente. L'angle du milieu θ_{mid} augmente peu importe l'intensité de la cohésion et enfin l'angle supérieur θ_{top} dépend de la cohésion entre les grains mais finit toujours par diminuer, voire même devenir négatif. Une fois ces trois effets combinés, on remarque que la surface passe d'une forme rectiligne (voire convexe dans les cas cohésifs) à une forme concave (voir insets des Figures 34, 35 et 36).

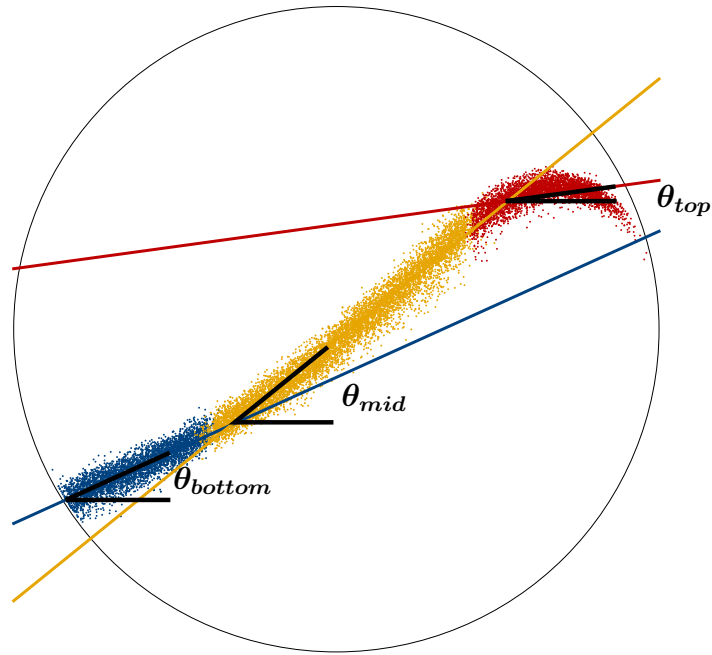


FIGURE 33: Convention de mesure des angles locaux d'écoulement à partir des régressions linéaires des trois parties de la surface moyenne.

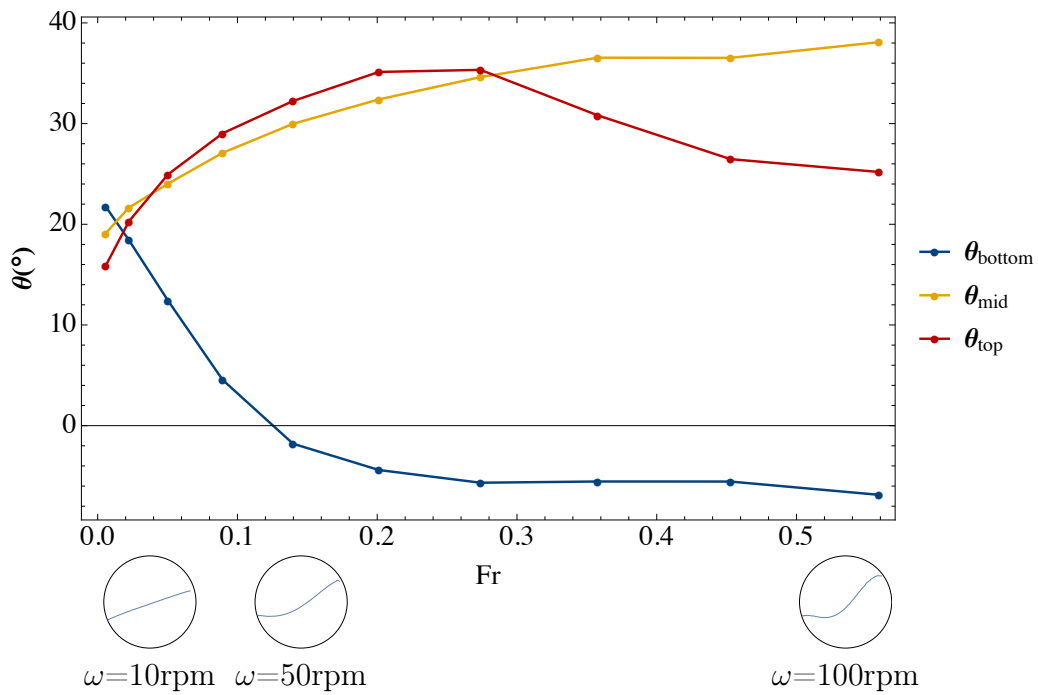


FIGURE 34: Mesure numérique des angles locaux d'écoulement en fonction du nombre de Froude sans cohésion.

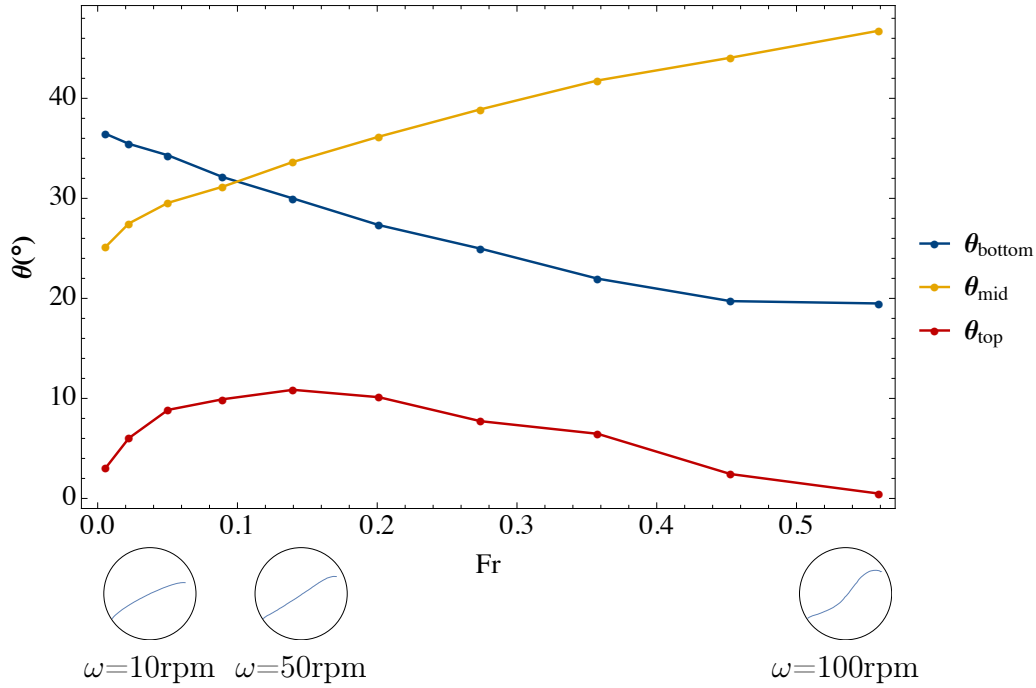


FIGURE 35: Mesure numérique des angles locaux d'écoulement en fonction du nombre de Froude, avec cohésion ($Bo = 5$).

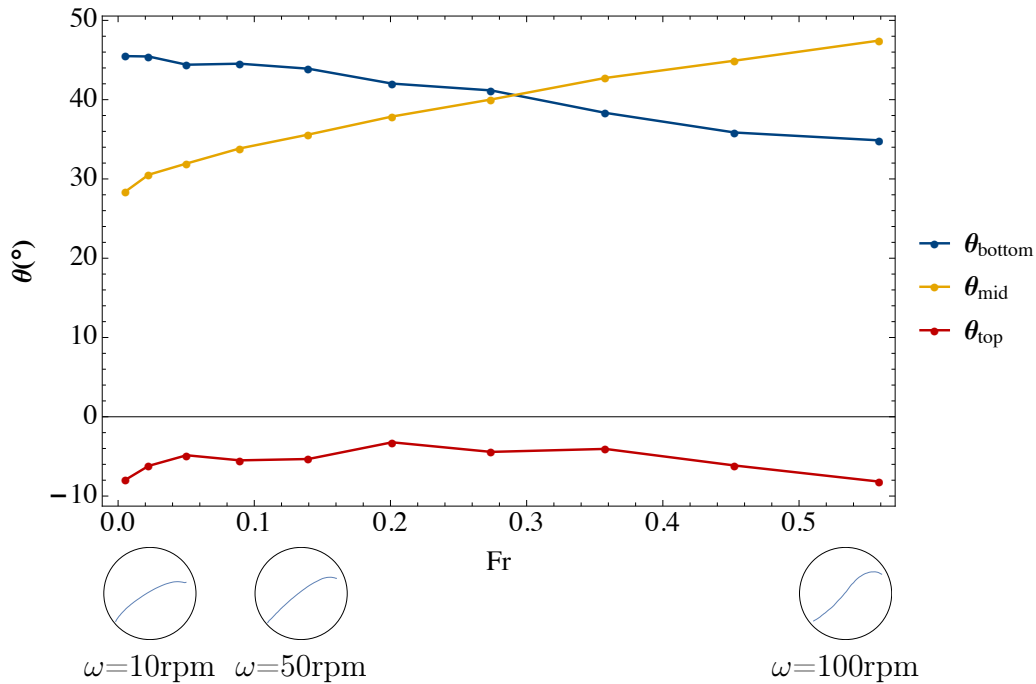


FIGURE 36: Mesure numérique des angles locaux d'écoulement en fonction du nombre de Froude, avec cohésion ($Bo = 10$).

Ce changement de la forme de la surface libre d'écoulement a été mis en évidence dans de nombreux articles [2, 4, 13, 14, 15, 17]. La nouvelle forme concave qu'adopte la surface est nommée *S shape*. Les mesures réalisées ci-dessus démontrent que l'augmentation du nombre de Froude est un facteur propice à l'apparition du S shape qu'on pourrait comparer au régime en cascade

de la Figure 2 observé dans les poudres non cohésives.

Un autre constat remarquable est que l'angle d'écoulement central augmente lorsque le nombre de Froude augmente. Des modèles ont été développés [13, 14, 15, 16, 17, 18] pour cette croissance mais ils concernaient l'angle d'écoulement global. Ces modèles seront donc testés sur les mesures d'angle d'écoulement global qui suivent.

L'étude de l'effet de la cohésion indique un effet contraire à celui de la vitesse de rotation. Les angles locaux d'écoulement qui le montrent sont représentés aux Figures 37 et 38. On observe que lorsque la cohésion augmente, l'angle inférieur augmente et l'angle supérieur diminue. Alors que l'angle inférieur diminuait avec un nombre de Froude croissant, on constate ici qu'il augmente pour une cohésion croissante. L'angle d'écoulement central reste constant. Ces variations d'angles modifient donc la forme de la surface pour la rendre convexe et non plus concave. Alors que le nombre de Froude était un facteur propice à l'apparition du S shape, il semblerait que la cohésion ait un effet contraire vu qu'elle amène la surface vers une forme convexe (voir insets des Figures 37 et 38). On a donc une compétition entre le nombre de Froude Fr qui fait tendre la surface vers le S shape et le nombre de Bond Bo qui tend à modifier la surface vers une forme convexe. Cet effet a également été mis en évidence par Brewster [13].

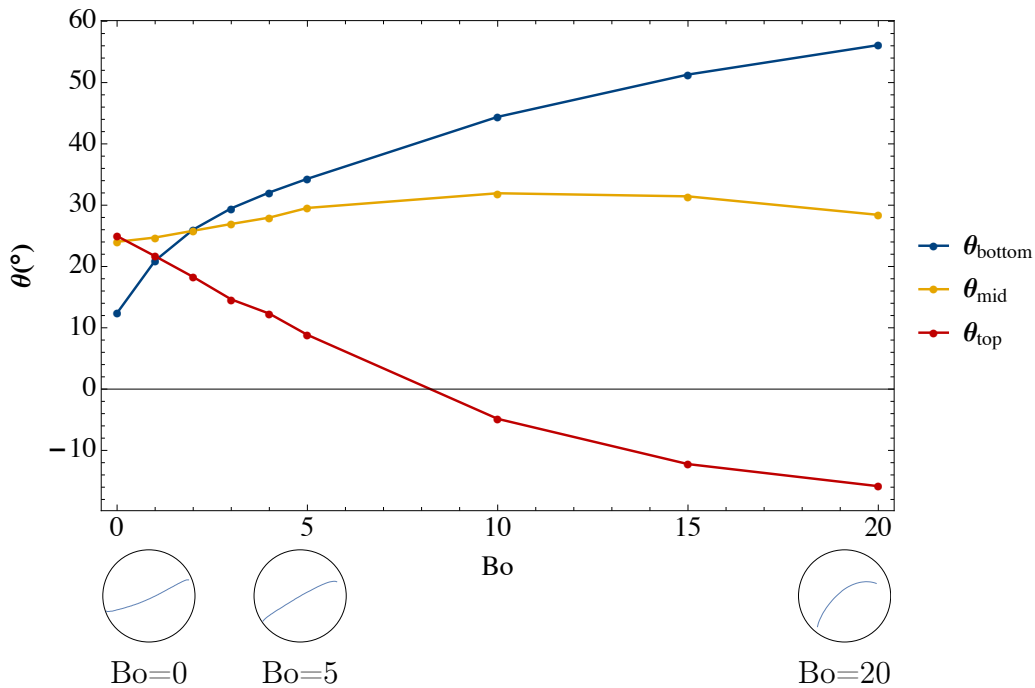


FIGURE 37: Mesure numérique des angles locaux d'écoulement en fonction de la cohésion à vitesse de rotation modérée ($Fr = 0.05$).

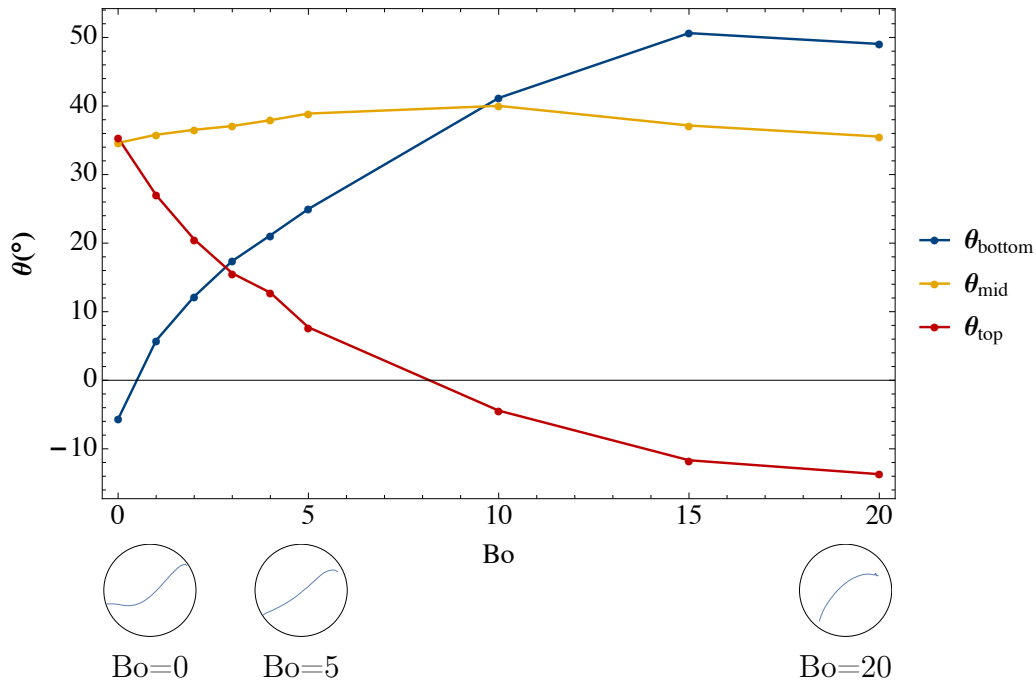


FIGURE 38: *Mesure numérique des angles locaux d'écoulement en fonction de la cohésion à vitesse de rotation élevée ($Fr = 0.27$).*

Ces effets sont également visibles en mesurant numériquement l'angle d'écoulement global dans chaque cas. Les trois cas de cohésion différents pour l'étude sur l'effet de la vitesse de rotation sont représentés sur la Figure 39. On retrouve l'augmentation de l'angle d'écoulement comme pour l'angle central. Un modèle pour cette dépendance de l'angle global en fonction de la vitesse de rotation a été établi par Dury [15].

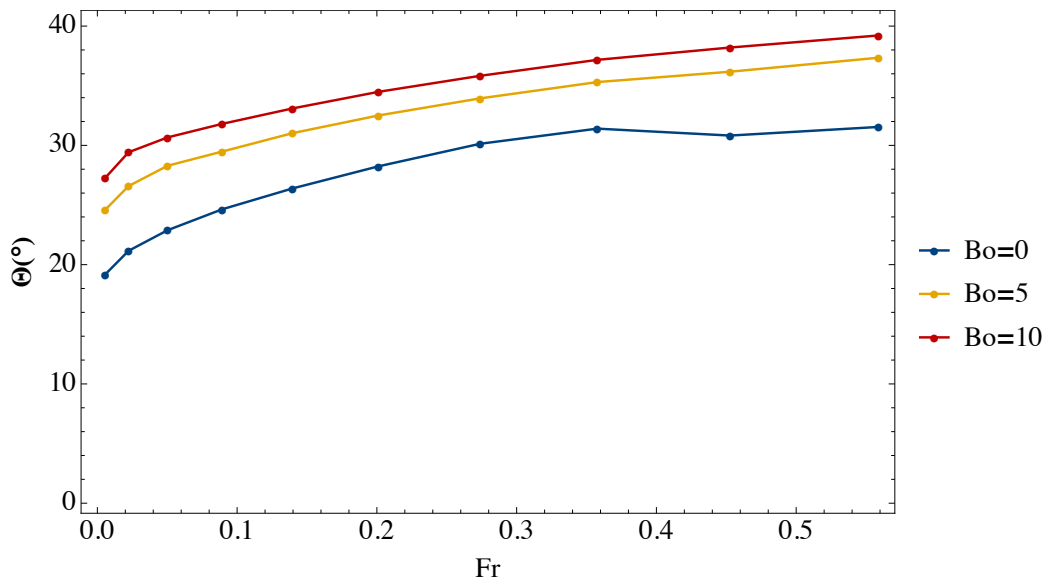


FIGURE 39: *Mesure numérique de l'angle d'écoulement global en fonction du nombre de Froude pour trois cas de cohésion différents.*

Leur raisonnement est basé sur la conservation du flux dans le tambour et sur un plan incliné. Par conservation de la masse, ils obtiennent l'expression suivante pour le flux de surface dans

le tambour

$$j = \rho \frac{\omega}{2} (R^2 - r^2) \quad (15)$$

où j est le flux de particules, ρ représente la densité de particules et r est la position le long de la surface depuis le centre du tambour. On peut ensuite considérer que l'écoulement granulaire de surface dans le tambour est équivalent à un écoulement sur un plan incliné d'un angle θ d'un fluide visqueux de viscosité η . Le flux de particules à la surface d'un plan incliné est alors donné par

$$j = \frac{\rho g}{3\eta} h_0^3 \cos \theta (\tan \theta - \tan \theta_0) \quad (16)$$

où g est l'accélération de gravité, h_0 est la profondeur dans l'écoulement où la pression est constante et $\theta_0 = \arctan \mu$ avec μ le coefficient de friction des grains. En égalant les deux expressions et en utilisant les relations $\tan \theta = dy/dx = y'$ où $y(x)$ est l'ordonnée des grains de surface et $\cos \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + (y')^2}$, on obtient

$$(y')^3 - (y')^2 \tan \theta_0 + y' + c\omega(y^2 + x^2 - R^2) = \tan \theta_0 \quad (17)$$

où $c = 3\eta g^2 / 2\rho p_0^3$. Ce modèle ne tient pas compte de l'aspect cohésif de la poudre. Une modification a donc du être apportée. L'adaptation consiste à remplacer la définition de $\mu = \tan \theta_0$.

En effet, Dury considère une poudre non cohésive. Lorsque cette poudre s'écoule sur un plan incliné, seul un grain est impliqué (voir Figure 40(a)). Lorsqu'une poudre cohésive s'écoule, comme il a été démontré dans la section précédente, des agglomérats de plusieurs grains se forment à la surface de l'écoulement (voir Figure 40(b)). Dans le cas cohésif, il faut aussi consi-

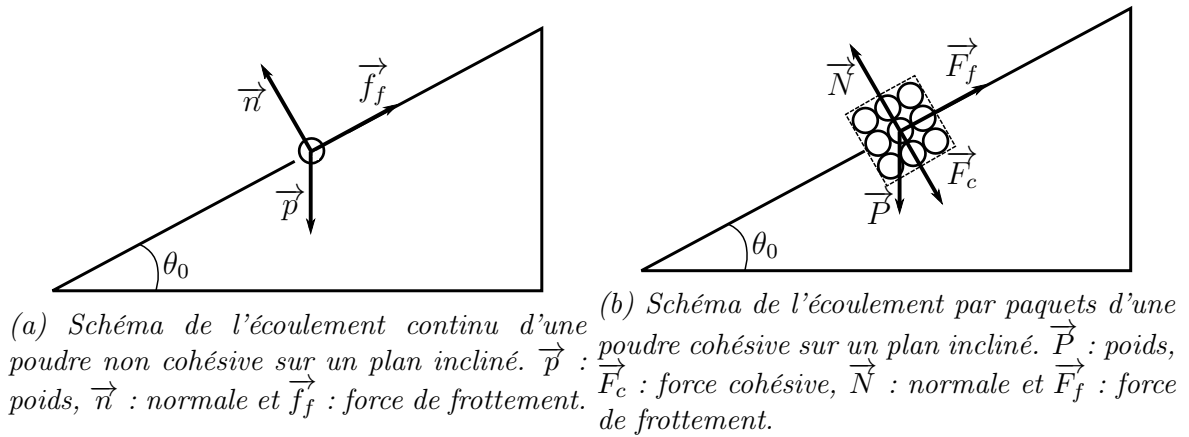


FIGURE 40: Adaptation apportée au modèle de Dury : sans cohésion, les grains s'écoulent un par un alors qu'avec cohésion, ils s'écoulent en paquets. θ_0 : angle de repos de l'empilement.

dérer une force cohésive supplémentaire entre l'agglomérat et l'empilement. Les forces agissant sur les objets en écoulement sont également représentées à la figure 40. En appliquant Newton, on obtient alors selon la direction parallèle au plan incliné

$$F_f - P \sin \theta_0 = 0 \quad (18)$$

Par définition, on a $F_f = \mu N$ et $N = F_c + P \cos \theta_0$. L'équation (18) devient alors

$$\begin{aligned}
\mu(F_c + P \cos \theta_0) - P \sin \theta_0 &= 0 \\
\Rightarrow \mu &= \frac{P \sin \theta_0}{F_c + P \cos \theta_0} \\
&= \frac{\sin \theta_0}{\frac{F_c}{P} + \cos \theta_0} \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_0} \\
&= \frac{\tan \theta_0}{\frac{F_c}{P} \frac{1}{\cos \theta_0} + 1}
\end{aligned} \tag{19}$$

Si on considère que l'agrégat en écoulement a une taille c (taille du carré pointillé de la Figure 40(b)) et que la force cohésive entre deux grains est f_c , alors la force cohésive F_c est donnée par

$$F_c = \frac{c}{2R_i} f_c \tag{20}$$

où R_i est le rayon d'un grain. Si l'aire de l'agrégat est $S = c^2$ et qu'il est composé de N^* grains, alors l'expression (20) devient

$$F_c = \frac{\sqrt{S}}{2r} f_c = \frac{\sqrt{N^* \pi R_i^2}}{2R_i} f_c = \frac{\sqrt{N^* \pi}}{2} f_c$$

Vu que $P = N^* mg$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{F_c}{P} &= \frac{\sqrt{N^* \pi} mg Bo}{2N^* mg} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{N}} Bo
\end{aligned} \tag{21}$$

Le nombre de grains dans l'agrégat N^* peut être déterminé par un argument géométrique : lorsque $Bo = 0$, tous les grains s'écoulent un par un. N^* , le nombre de grains dans l'agrégat, vaut donc 1. Lorsque $Bo = 1$, chaque grain peut en attirer un autre. En effet, par définition du nombre de Bond, si $Bo = 1$, alors $F_c/mg = 1 \Rightarrow F_c = mg$. On peut alors former un carré de 3 grains de côté et donc avoir un paquet de 9 grains. Et ainsi de suite pour un nombre de Bond de plus en plus grand : une nouvelle couche est rajoutée pour chaque incrémentation de Bo . On a donc

$$N^* = (1 + kBo)^2$$

où $k = 1$ lorsque $Bo = 0$ et $k = 2$ lorsque $Bo \geq 1$. L'équation (21) devient alors

$$\frac{F_c}{P} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{Bo}{1 + kBo} = f(Bo)$$

En injectant cette expression dans (19), on obtient

$$\mu = \frac{\tan \theta_0}{\frac{f(Bo)}{\cos \theta_0} + 1} \tag{22}$$

On obtient donc finalement une nouvelle définition pour le coefficient de friction. En injectant la relation trigonométrique $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$, l'expression (22) devient

$$\mu = \frac{\tan \theta_0}{f(Bo) \sqrt{1 + \tan^2 \theta_0} + 1}$$

Afin d'insérer cette expression dans le modèle de l'équation (17), cette expression est résolue par rapport à $\tan \theta_0$ et deux solutions sont obtenues :

$$\tan \theta_{0\pm} = \frac{-\mu \pm f(Bo)\sqrt{1 + \mu^2 - f(Bo)^2\mu^2}}{-1 + f(Bo)^2\mu^2}$$

Vu que $\mu < 1$, seul le premier terme du développement en série de la solution positive peut être conservé. On obtient alors finalement

$$\tan \theta_0 = (1 + f(Bo))\mu + \mathcal{O}[\mu]^3$$

que l'on peut injecter dans le modèle à l'équation (17). La résolution de cette équation selon y' au centre du tambour ($x = 0$ et $y = 0$) donne trois solutions dont une seule est réelle :

$$y' = \frac{\mu}{3}(1 + f(Bo)) - \frac{A}{3} \left(\frac{2}{B + \sqrt{4A^3 + B^2}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{B + \sqrt{4A^3 + B^2}}{2} \right)^{1/3}$$

avec

$$A = 3 - (\mu + f(Bo)\mu)^2$$

$$B = 18\mu + 18f(Bo)\mu + 2\mu^3 + 6f(Bo)\mu^3 + 6f(Bo)^2\mu^3 + 2f(Bo)^3\mu^3 + 27cR^2\omega$$

On a donc finalement une fonction pour l'angle d'écoulement qui dépend de la vitesse de rotation ω , de la cohésion par la fonction $f(Bo)$ et du coefficient de friction μ soit les trois paramètres des simulations réalisées dans le cadre de ce travail. Le paramètre de fit est le paramètre c .

L'application de ce modèle théorique sur les mesures numériques est illustré sur la Figure 41. Le

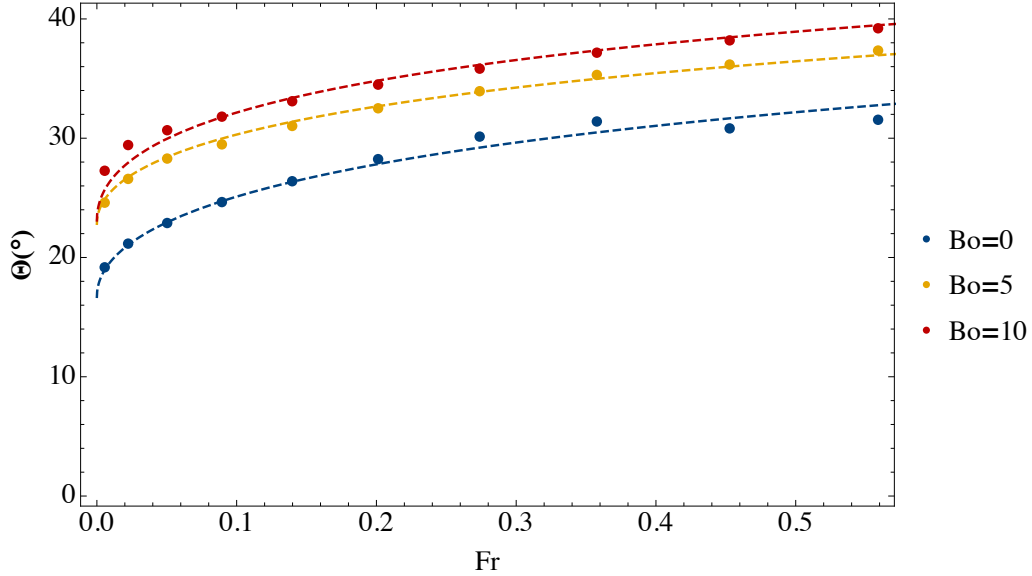


FIGURE 41: Mesures numériques de l'angle d'écoulement global en fonction du nombre de Froude et modèle théorique (traits pointillés).

modèle théorique prédit donc une croissance de l'angle d'écoulement avec la vitesse de rotation en accord avec les résultats numériques et les résultats expérimentaux [14]. Cette croissance est maintenant précisée par le modèle : on remarque que $\tan \theta \sim \omega^{1/3}$.

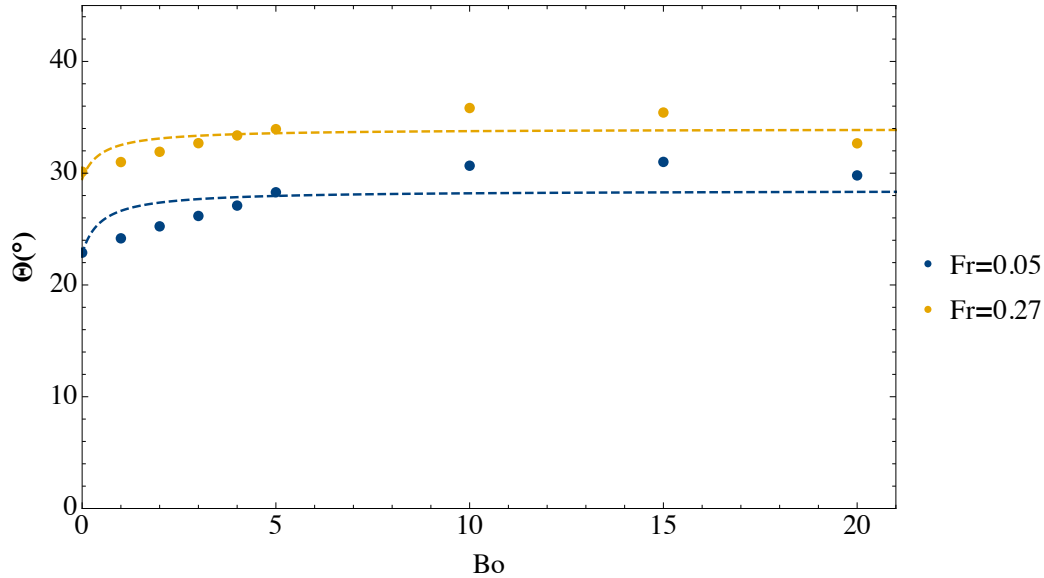


FIGURE 42: Mesures numériques de l'angle d'écoulement global en fonction de la cohésion et modèle théorique (traits pointillés).

L'adaptation apportée au modèle permet également de le rendre efficace pour prédire l'évolution de l'angle d'écoulement global en fonction de la cohésion. L'effet de la cohésion sur l'angle d'écoulement global est représenté sur la Figure 42. Alors que le modèle prédit une évolution presque constante, les résultats montrent un léger maximum. Remarquons que les angles centraux en fonction du nombre de Bond sont aussi presque constants (voir Figures 37 et 38). La technique de mesure de l'angle d'écoulement atteint donc probablement ses limites lorsque la cohésion est trop élevée comme discuté précédemment et l'angle partiel central conviendrait alors mieux.

La mesure des angles d'écoulement pour un coefficient de friction variable est représentée aux Figures 43 et 44. Il est important de faire remarquer qu'une mesure a été effectuée sans friction ($\mu = 0$). Dans cette situation, le coefficient de friction entre les grains étant le même qu'entre les grains et la paroi, les grains ne frottent pas non plus sur la paroi du tambour en rotation. Par conséquent, l'empilement reste statique dans le fond du tambour et aucun écoulement granulaire ne se produit. Ce point ne sera donc pas considéré.

On constate donc à partir des angles locaux que le coefficient a une légère tendance à aplanir la surface (voir Figure 43) voire à la rendre convexe (voir Figure 44). L'effet du coefficient de friction semble donc équivalent à celui du nombre de Bond mais dans une bien moindre mesure.

La mesure de l'angle d'écoulement global (voir Figure 45) montre que cet angle ne semble pas influencé par le coefficient de friction. D'ailleurs le modèle théorique ne fonctionne qu'avec une valeur constante de μ .

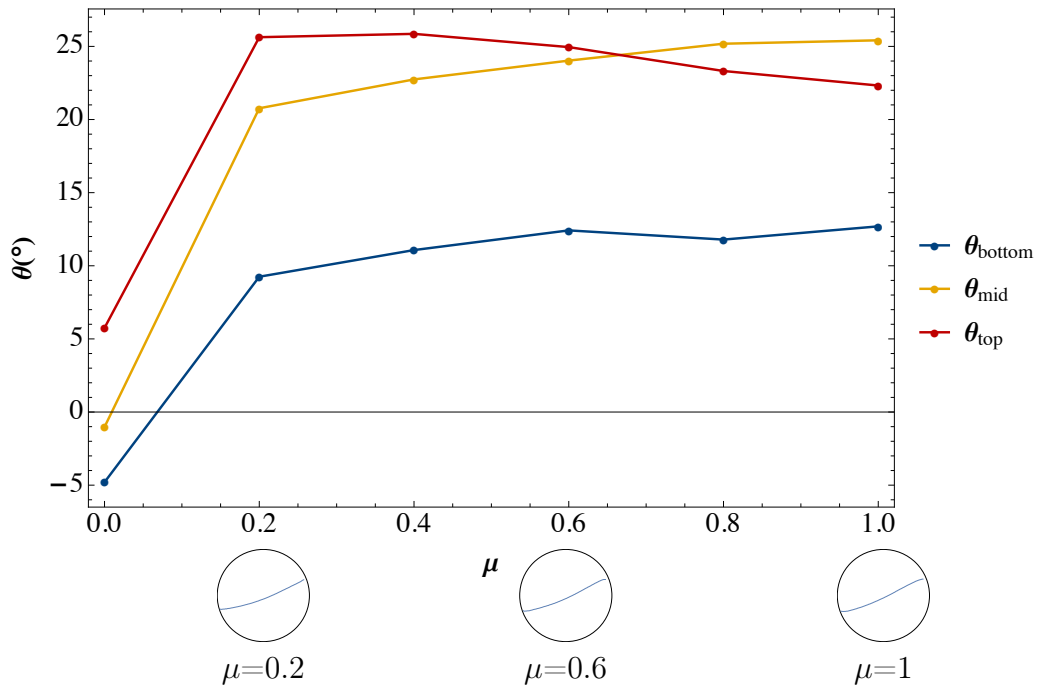


FIGURE 43: Mesure numérique des angles locaux d'écoulement en fonction du coefficient de friction entre les grains sans cohésion.

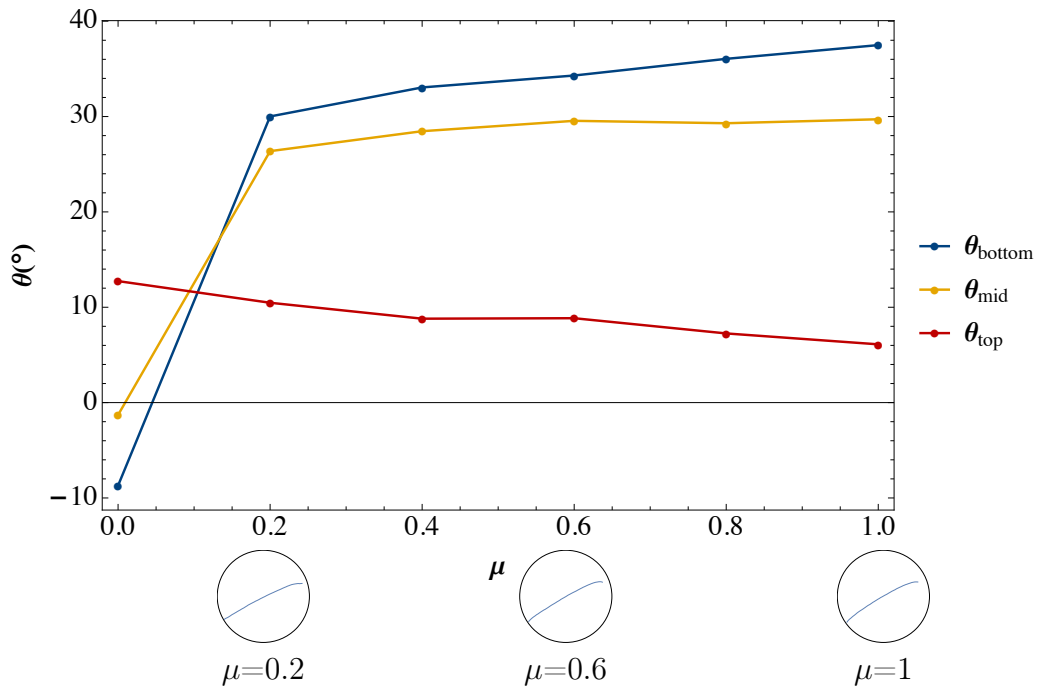


FIGURE 44: Mesure numérique des angles locaux d'écoulement en fonction du coefficient de friction entre les grains avec cohésion ($Bo = 5$).

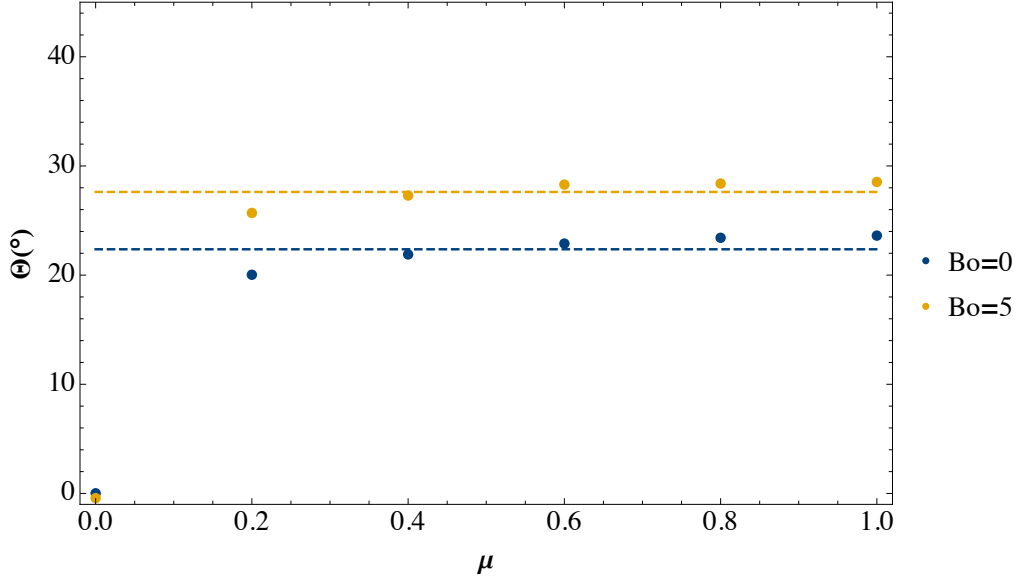


FIGURE 45: *Mesure numérique de l'angle d'écoulement global en fonction du coefficient de friction entre les grains et modèle théorique (traits pointillés).*

4.4 Rapport isopérimétrique

Afin de souligner la compétition entre la vitesse de rotation du tambour et la cohésion des grains discutée dans la section précédente, le calcul du rapport isopérimétrique peut être effectué. Ce rapport permet d'étudier les propriétés d'une forme géométrique (dans notre cas, la forme de l'empilement) en la comparant à un disque. En effet, on sait que pour un périmètre donné, c'est le disque qui est la forme géométrique maximisant l'aire. Si une autre forme géométrique de périmètre P a une aire A qui s'approche de celle du disque de même périmètre, alors le rapport isopérimétrique est proche de 1 et cette forme géométrique est quasi circulaire. Le rapport isopérimétrique est donc défini comme

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi A}{P^2}$$

S'il vaut 1, alors la forme géométrique d'aire A et de périmètre P est un disque.

En calculant l'aire et le périmètre de l'empilement de grains (voir Figure 46), ce paramètre va donc permettre de caractériser la forme de la surface : plus il est grand, plus la surface est convexe, plus il est petit, plus la surface est S shape.

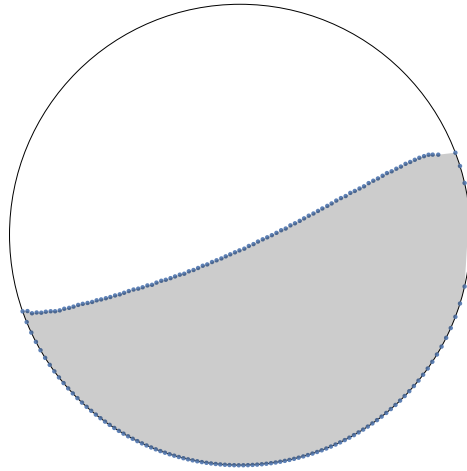


FIGURE 46: Calcul de l'aire et du périmètre pour le rapport isopérimétrique.

La mesure numérique du rapport isopérimétrique en fonction de la vitesse de rotation est représentée sur la Figure 47. On constate que lorsque la vitesse de rotation augmente, le rapport isopérimétrique diminue. Cela signifie donc que la surface devient de moins en moins convexe (forme de boule) mais de plus en plus S shape. Cette mesure confirme donc la même interprétation fournie dans l'analyse des angles locaux d'écoulement. D'ailleurs, cette décroissance est non-linéaire : le rapport isopérimétrique diminue fortement à faible cohésion puis se stabilise si on continue à augmenter la vitesse de rotation. Ensuite, si la cohésion augmente, les courbes se décalent vers le haut. La cohésion semble donc être responsable de la formation d'une surface convexe. D'ailleurs, ces courbes n'étant pas espacées de la même distance, cet effet de la cohésion ne semble pas linéaire.

Cette interprétation est confirmée par la mesure du rapport isopérimétrique en fonction de la cohésion représentée sur la Figure 48. On constate que plus la cohésion est importante, plus le rapport est grand et donc plus la surface est convexe. L'effet de la cohésion qui rend la surface plus convexe a été observé avec la mesure numérique des angles locaux est bien confirmé par la mesure du rapport isopérimétrique.

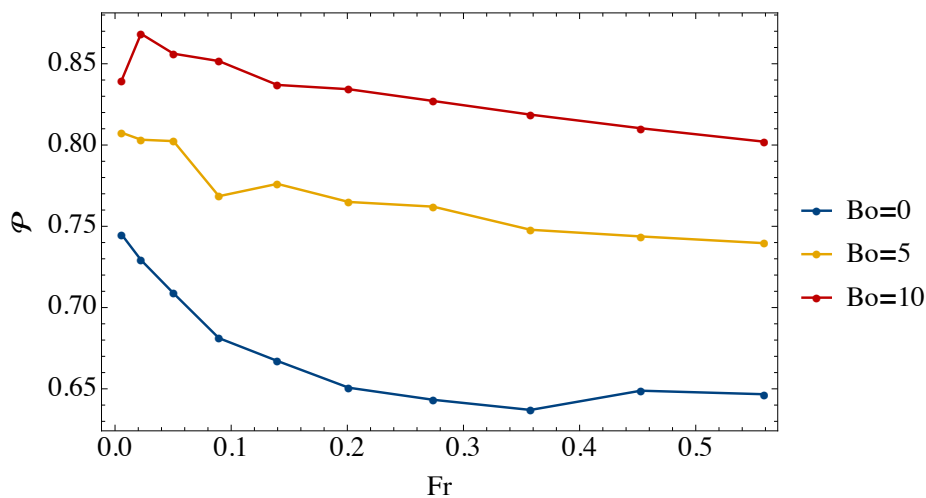


FIGURE 47: Mesure numérique du rapport isopérimétrique en fonction du nombre de Froude pour différentes intensités de cohésion.

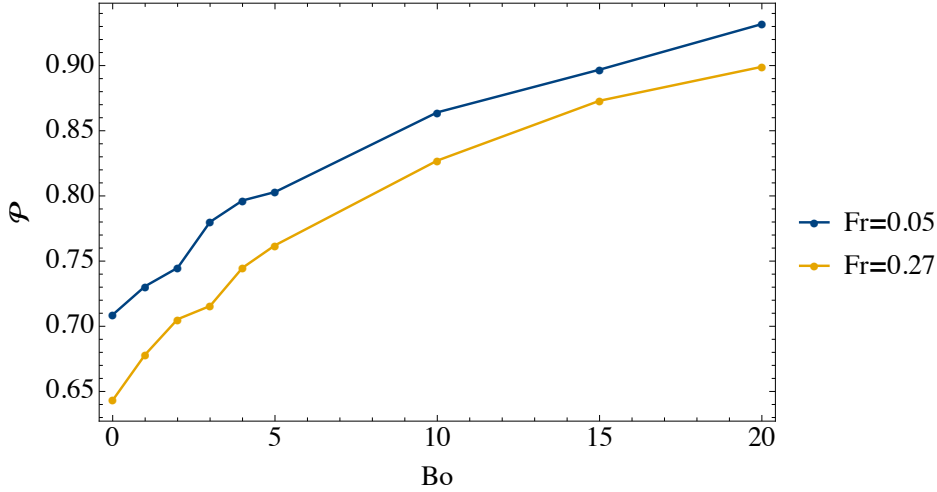


FIGURE 48: Mesure numérique du rapport isopérimétrique en fonction de la cohésion pour différentes vitesses de rotation.

4.5 Fluctuations de la surface

L'ensemble des mesures numériques réalisées jusqu'à présent donnent des informations sur un écoulement moyen. Avec ces résultats, on remplace en effet l'écoulement instantané par des phénomènes qui se produisent en moyenne dans le tambour. Prenons, par exemple, la mesure des profils de vitesse et l'effet remarqué de la cohésion (qui génère du plug flow). Cette mesure numérique permet de dire qu'en moyenne, les grains s'écoulent dans le tambour tous à la même vitesse à la surface, à une vitesse proportionnelle à la profondeur dans la région d'écoulement et comme un solide dans la région statique. On n'a donc aucune information sur d'éventuelles fluctuations temporelles de l'écoulement. Cette dernière mesure permet d'apporter cette information manquante.

Pour obtenir les fluctuations temporelles dans l'écoulement, deux méthodes sont proposées. La première consiste à mesurer les fluctuations spatio-temporelles dans la partie centrale de l'écoulement. Les fluctuations spatio-temporelles sont définies par la moyenne des écart-types de la surface moyenne dans la région centrale :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

où $\sigma_i = \sqrt{\langle y_{max_i}^2 \rangle - \langle y_{max_i} \rangle^2}$ avec y_{max_i} l'ordonnée maximale des grains dans la classe i et $N =$ nombre de classes de largeur $2R_i$ (voir Figure 49). Afin de rendre cette grandeur physique plus lisible, elle est adimensionnée par le diamètre d'un grain. Par conséquent, si les fluctuations spatio-temporelles sont égales à 1, cela signifie que la surface varie au cours du temps sur une hauteur égale à deux diamètres de grain.

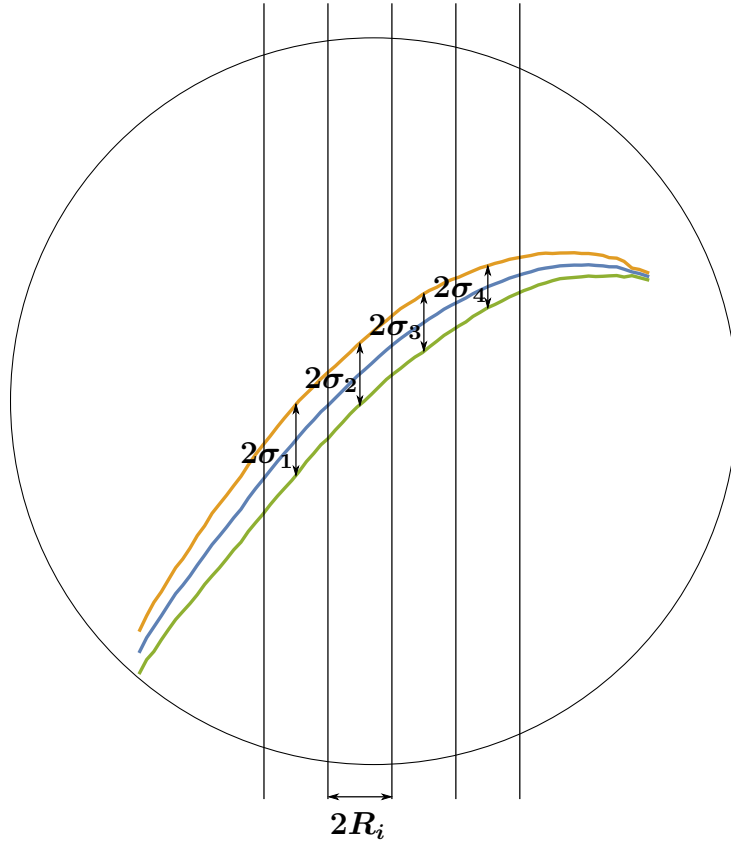


FIGURE 49: Fluctuations spatio-temporelles de la surface moyenne (courbe bleue) dans la partie centrale (soit 50% de la surface).

Les fluctuations spatio-temporelles sont représentées en fonction du nombre de Froude sur la Figure 51. On remarque que, peu importe l'intensité de la cohésion, les variations sont plus importantes lorsque le nombre de Froude augmente. Que la poudre soit cohésive ou pas, l'écoulement sera donc nécessairement intermittent. Certes un peu plus pour les poudres les plus cohésives mais l'effet sera présent dans tous les cas.

La deuxième mesure des fluctuations consiste à mesurer les fluctuations de l'angle partiel central θ_{mid} en fonction du temps. Ces fluctuations temporelles sont définies par

$$\sigma_{\theta_{mid}} = \sqrt{\langle \theta_{mid_i}^2 \rangle - \langle \theta_{mid_i} \rangle^2}$$

où $\langle \theta_{mid_i} \rangle = \frac{dt}{t} \sum_{i=1}^{t/dt} \theta_{mid_i}$ avec θ_{mid_i} l'angle central après i pas de temps (voir Figure 50).

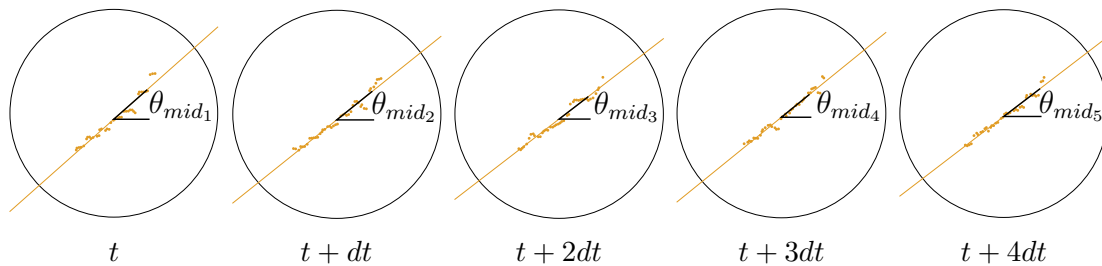


FIGURE 50: Variations temporelles de la surface dans la partie centrale.

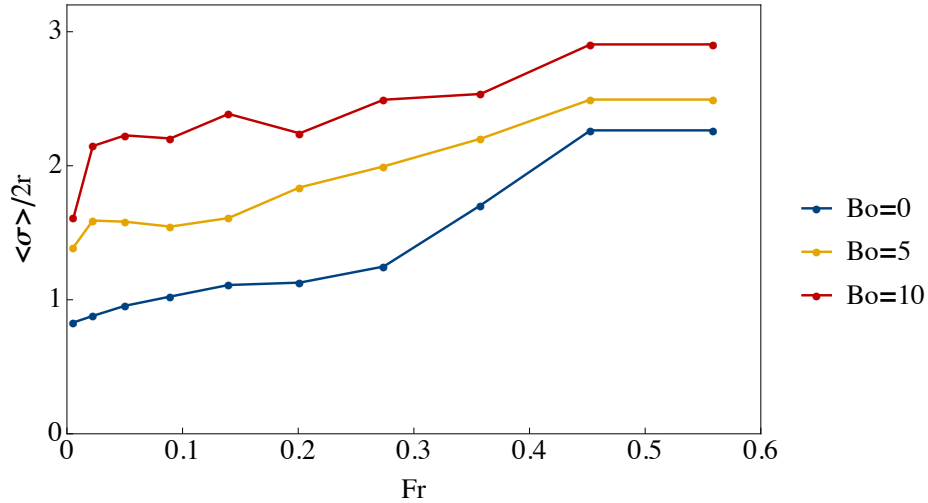


FIGURE 51: Variations spatio-temporelles en fonction du nombre de Froude pour trois intensités de cohésion différentes.

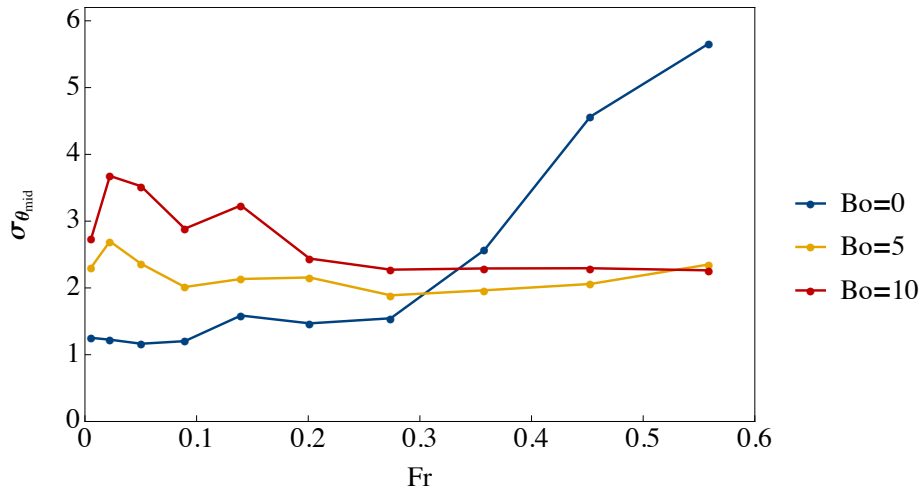


FIGURE 52: Variations temporelles en fonction du nombre de Froude pour trois intensités de cohésion différentes.

Pour obtenir cette grandeur, on mesure donc l'écart-type de l'angle central. Son évolution en fonction du nombre de Froude est représentée par la Figure 52. Alors que la surface semble se stabiliser dans les cas cohésifs à nombre de Froude élevé, elle continue à osciller de plus en plus fort dans le cas non cohésif.

L'intermittence de l'écoulement cohésif a été appelée *avalanching* dans les dernières recherches [7]. Elle apparaît toutefois à basse vitesse de rotation, dans le régime d'écroulement (voir Figure 2). L'observation des vidéos de simulation permet d'éclaircir ce point. En observant l'écoulement granulaire à grande vitesse de rotation et aucune cohésion, on remarque que l'empilement glisse de temps en temps sur une couche constituée d'une seule épaisseur de grain remontant le long de la paroi. L'empilement retombe par conséquent dans le tambour. Ce phénomène est illustré sur la Figure 53. Par frottements, les grains raccrochent ensuite petit à petit à la couche collée à la paroi et l'angle d'écoulement commence à augmenter jusqu'à ce que l'empilement se remette à glisser et ainsi de suite. Ceci explique donc pourquoi les fluctuations temporelles sont si importantes. Vu que la poudre est non cohésive, l'écoulement de surface est par contre

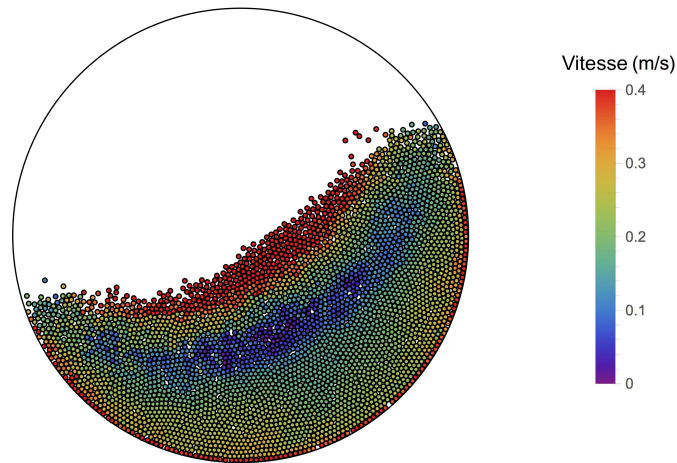


FIGURE 53: Photo d'une simulation numérique pour la mise en évidence du glissement de l'empilement sur une couche de grains à grande vitesse de rotation ($\omega = 100\text{rpm}$) et aucune cohésion.

relativement constant d'où les variations spatio-temporelles faibles.

L'intermittence à grande vitesse de rotation des poudres cohésives est différente. En effet, l'angle d'écoulement varie sur une amplitude beaucoup plus faible mais la surface semble faire des sauts. L'observation de l'écoulement permet aussi d'y fournir une explication. On constate qu'à vitesse de rotation élevée, la couche de surface d'une poudre cohésive se déchire fréquemment en des portions plus petites appelées *cracks* [32] (voir Figure 54). Les fluctuations spatio-temporelles sont donc élevées car dans certaines régions de l'écoulement, la surface est à un moment basse et juste après plus haute suite à l'arrivée d'un crack. Par contre, l'ajustement linéaire de la surface n'est pas fortement modifié et par conséquent l'angle d'écoulement non plus. D'où les différences de variations.

La taille de ces cracks est par conséquent facilement obtenu en représentant les fluctuations

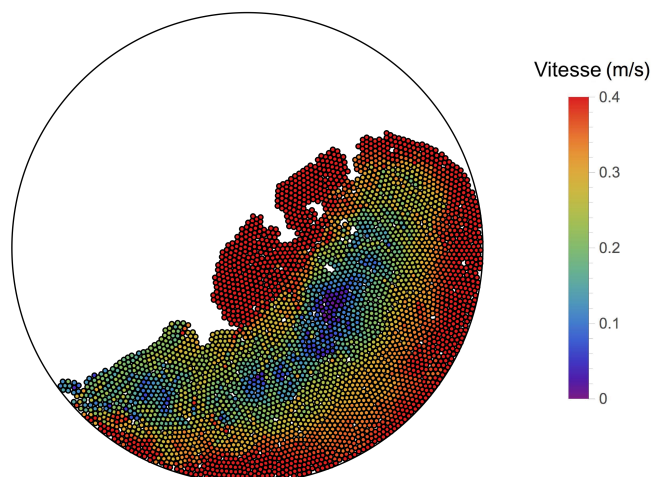


FIGURE 54: Photo d'une simulation numérique pour la mise en évidence du déchirement du packing en surface dans une poudre cohésive ($Bo = 10$) et à grande vitesse de rotation ($\omega = 100\text{rpm}$).

spatio-temporelles en fonction du nombre de Bond. Ce résultat est illustré sur la Figure 55. Par

définition des fluctuations spatio-temporelles, la valeur de $\langle \sigma \rangle / 2r$ donne les variations verticales de la surface au cours du temps, on a par conséquent directement un ordre de grandeur pour les cracks dégringolant le long de la surface. En conclusion, on retrouve l'intermittence observée

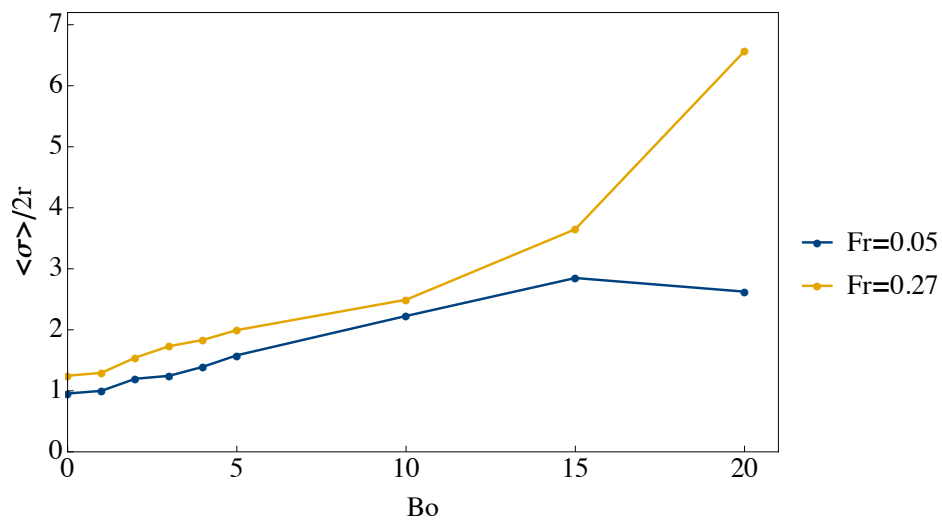


FIGURE 55: Variations spatio-temporelles en fonction de l'intensité de la cohésion entre les grains pour deux valeurs de la vitesse de rotation.

expérimentalement mais on constate que différentes formes de fluctuations peuvent avoir lieu lorsque la poudre est cohésive ou non.

5 Conclusion

Ce travail a permis de caractériser l'écoulement granulaire des poudres cohésives et de le comparer au cas non cohésif. Un inventaire de l'ensemble des interactions se produisant à l'échelle du grain a été réalisé et expliqué. La façon de les implémenter numériquement a ensuite été développée et un traitement des résultats des simulations numériques a permis d'étudier l'écoulement granulaire cohésif.

La mesure numérique des profils de vitesse a permis de mettre en évidence le plug flow et le principe de conservation du flux. Le plug flow est un phénomène se produisant typiquement dans les poudres cohésives et modifie considérablement l'écoulement à la surface de l'empilement de grains. Il a en effet été observé qu'en introduisant de la cohésion, les grains ne s'écoulaient non plus un par un mais plutôt par paquets pour former le plug flow. La conservation du flux est liée à ce phénomène car elle impose une balance entre la masse en écoulement et sa vitesse : si la quantité de matière qui s'écoule augmente, alors sa vitesse doit diminuer par conservation du flux de grains dans le tambour.

Cet effet a ensuite été quantifié par une mesure de la dérivée des profils de vitesse. Il a été observé que le facteur le plus important produisant du plug flow est bien entendu l'intensité de cohésion entre les grains. Le nombre de Froude ne semble pas avoir d'influence sur le plug flow.

La forme de la surface a ensuite été décrite par la mesure numérique des angles d'écoulement. Il a été observé que deux formes pouvaient apparaître dans les poudres : une forme convexe ou une forme appelée S shape. Les deux facteurs déterminant laquelle sera présente sont le nombre de Froude et le nombre de Bond. Il a en effet été constaté que ces deux paramètres étaient en compétition pour appliquer une forme à la surface. Alors que le nombre de Froude semble créer une surface concave en S shape, le nombre de Bond semble faire l'inverse en créant une surface convexe. Cet effet a ensuite été mis en évidence par la mesure numérique du rapport isopérimétrique et s'est révélé en accord avec les interprétations réalisées avec les angles d'écoulement. Un modèle repris à un article de Dury basé sur la conservation du flux a également été modifié afin de le rendre compatible avec les poudres cohésives. Ce modèle s'est montré efficace lors de la comparaison avec les données numériques.

Enfin, une caractérisation de la dynamique d'écoulement a été réalisée en mesurant les fluctuations spatio-temporelles et temporelles de la surface. Un résultat surprenant d'intermittence importante à haute vitesse de rotation et sans cohésion a été expliqué par un argument comparable à la théorie du stick-slip. L'interprétation des cas cohésifs par observation de la dynamique d'écoulement s'est focalisée sur les cracks de la surface d'écoulement traduisant de fortes fluctuations spatio-temporelles mais peu de fluctuations temporelles.

Ce qui est très intéressant avec ces mesures réside dans le fait qu'elles sont toutes liées. Le résultat sur la forme convexe qui est un phénomène facilement observable à l'oeil nu permet d'obtenir des informations complexes sur les profils de vitesse des grains dépendant directement des paramètres microscopiques du système à savoir l'intensité de leur interaction de cohésion. Il pourrait donc être tout à fait concevable, sur base de l'observation de la surface et du modèle présenté, de prédire avec quelle intensité la poudre qui est testée est cohésive.

Il semblerait toutefois qu'une petite modification de l'algorithme devrait être faite. Les résultats obtenus sur l'effet de la friction semblent ne pas toujours s'accorder avec les résultats expérimentaux obtenus dans d'autres articles [9, 14, 32]. La modélisation de la friction telle que présentée ici ne convient par conséquent peut-être pas. La particularité de cette modélisation est qu'au-

cune force de friction n'est appliquée aux grains lorsqu'ils sont au repos les uns par rapport aux autres car la définition du vecteur tangent sur lequel la force est projetée est donnée à partir de la vitesse de glissement des grains. Or, si l'on s'en tient aux lois d'Amontons-Coulomb développées dans la deuxième section de ce travail, il existe une force de frottement lorsque deux objets sont immobiles l'un par rapport à l'autre. Cette force est appelée force de frottement statique. Il pourrait d'ailleurs être intéressant de suivre la tendance actuelle des recherches sur les écoulements granulaires dans les tambours rotatifs, à savoir l'effet de la forme des grains. Les situations où les grains sont parfaitement sphériques ne sont dans la pratique pas souvent rencontrées. L'ajout dans la modélisation de la forme des grains pourrait par conséquent être un paramètre supplémentaire à prendre en compte pour améliorer la précision des simulations numériques.

Une autre perspective à ce travail qui mériterait beaucoup d'attention est la simulation d'écoulement à 3 dimensions et la généralisation des mesures numériques à cette situation. Il a en effet été démontré que la longueur du tambour avait un effet non négligeable sur les mesures qui ont été présentées dans le cadre de ce travail. La simulation des liquides pourrait également être de grand intérêt. Les lois régissant l'écoulement des liquides étant également bien connues, il paraît tout à fait réalisable de les implémenter pour les simuler numériquement.

Avec un tel dispositif (et d'autant plus en recourant aux simulations numériques), l'imagination du chercheur est la seule limite . . .

Références

- [1] J. Duran, *Sables, poudres et grains* (Eyrolles Science, 1997).
- [2] G. MiDi, The European Physical Journal E **14**, 341 (2004).
- [3] G. Lumay *et al.*, Powder Technology **224**, 19 (2012).
- [4] M. Nakagawa, S. A. Altobelli, A. Caprihan, E. Fukushima, and E.-K. Jeong, Experiments in Fluids **16**, 54 (1993).
- [5] M. Rasouli, O. Dubé, F. Bertrand, and J. Chaouki, American Institute of Chemical Engineers **62**, 2622 (2016).
- [6] D. Parker, A. Dijkstra, T. Martin, and J. Seville, Chemical Engineering Science **52**, 2011 (1997).
- [7] S.-Y. Lim *et al.*, Powder Technology **138**, 25 (2003).
- [8] S. Longo and A. Lamberti, Experiments in Fluids **32**, 313 (2002).
- [9] A. Aissa, C. Duschesne, and D. Rodrigue, Powder Technology **212**, 340 (2011).
- [10] N. Taberlet, P. Richard, A. Valance, W. Losert, and J. Pasini, Physical Review Letters **91**, 1 (2003).
- [11] D. Bonamy, F. Daviaud, and L. Laurent, Physics of fluids **14**, 1666 (2002).
- [12] M. Renouf, D. Bonamy, F. Dubois, and P. Alart, Physics of fluids **17**, 103303 (2005).
- [13] R. Brewster, G. S. Grest, and A. J. Levine, Physical Review E **79**, 1 (2009).
- [14] A. Orpe and D. Khakkar, Physical Review E **64**, 1 (2001).
- [15] C. Dury, G. Ristow, J. Moss, and M. Nakagawa, Physical Review E **57**, 4491 (1998).
- [16] R. Yang, A. Yu, L. McElroy, and J. Bao, Powder Technology **188**, 170 (2008).
- [17] N. Taberlet, P. Richard, and E. Hinch, Physical Review E **73**, 1 (2006).
- [18] J. Rajchenbach, Physical Review Letters **65**, 2221 (1990).
- [19] H. Henein, J. Brimacombe, and A. Watkinson, Metallurgical Transactions B **14**, 191 (1983).
- [20] O. Dubé, E. Alizadeh, J. Chaouki, and F. Bertrand, Chemical Engineering Science **101**, 486 (2013).
- [21] N. Gui, X. Yang, J. Tu, S. Jiang, and Z. Zhang, Particuology **39**, 1 (2018).
- [22] H. Norouzi, R. Zarghami, and N. Mostoufi, Chemical Engineering Research and Design **102**, 12 (2015).
- [23] D. Li *et al.*, Powder Technology **291**, 86 (2016).
- [24] D. Khakkar, J. McCarthy, T. Shinbrodt, and J. Ottino, Physics of fluids **9**, 31 (1996).
- [25] E. Clement, J. Rajchenbach, and J. Duran, Materials Research Society Symposium Proceedings **367**, 513 (1995).
- [26] E. Alizadeh, O. Dubé, F. Bertrand, and J. Chaouki, American Institute of Chemical Engineers **59**, 1894 (2013).
- [27] E. Yazdani and S. Hashemabadi, Granular Matter **21**, 1 (2019).
- [28] H. Komossa, S. Wirtz, V. Sherer, F. Herz, and E. Specht, Powder Technology **286**, 722 (2015).
- [29] A. Rescaglio, J. Schockmel, N. Vandewalle, and G. Lumay, EPJ Web of Conferences **140**, 1 (2017).

- [30] A. Forsyth, S. Hutton, M. Rhodes, and C. Osborne, *Physical Review E* **63**, 1 (2001).
- [31] A. Jarray, V. Magnanimo, and S. Luding, *Powder Technology* **341**, 126 (2019).
- [32] A. W. Alexander *et al.*, *Powder Technology* **164** (2006).
- [33] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen, *Granular media : between fluid and solid* (Cambridge University Press, 2013).
- [34] K. Han and D. Peric, *Engineering Computations* **17**, 593 (2000).
- [35] S. Waitikaitis, V. Lee, J. Pierson, S. Forman, and H. Jaeger, *Physical Review Letters* **112**, 1 (2014).
- [36] D. Lacks, *Nature Physics* **6**, 324 (2010).
- [37] A. Rescaglio, F. D. Smet, L. Aerts, and G. Lumay, *Particulate Science and Technology* (Article in press) , 1 (2019).
- [38] E. Opsomer, *PHYS3020-1 : Outils numériques de la matière molle* (ULiège, 2019).