Sur la convexité dans le sillage de V. Klee

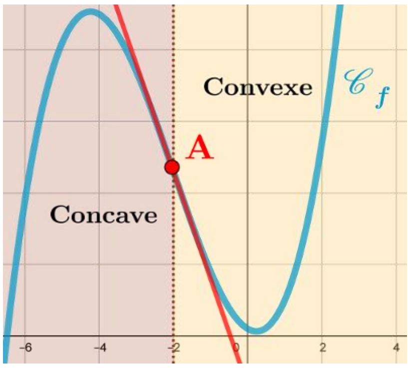
Jacques Bair

Résumé. L'objectif essentiel de ce travail consiste à faire connaître la géométrie convexe telle que la concevait Victor Klee, un éminent mathématicien américain.
Après un historique sur la notion de convexité en mathématiques est présenté un éloge à V. Klee ; ainsi, sont notamment mis en évidence les liens scientifiques étroits que l'américain a entretenus avec le liégeois F. Jongmans et ses collaborateurs.
Enfin est donné un aperçu, de manière vulgarisée, de thèmes fondamentaux abordés par V. Klee et des mathématiciens travaillant dans son sillage.

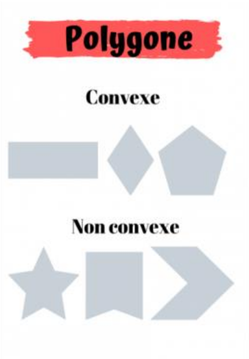
Mots clés. Convexité ; géométrie convexe ; enveloppes convexe et conique ; point extrême, profil ; point à l'infini, cône de récession ; séparation de deux ensembles ; ensemble étoilé ; Victor Klee ; François Jongmans ; Ecoles (liégeoise, belge et franco-belge) de convexité.

1. Introduction

Le mot « convexe » provient du latin *convexus*, dont le sens premier est « bombé, courbé et arrondi en dehors » ; on dit parfois qu'une courbe convexe « tourne sa concavité vers le haut », au contraire d'une courbe concave dont « la concavité est dirigée vers le bas ».
En géométrie, on étudie depuis longtemps les polygones convexes dans le plan et les polyèdres convexes dans l'espace ; un polygone est qualifié de convexe lorsque « l'un quelconque de ses côtés laisse toute la figure d'un même côté par rapport à lui ». Plus généralement, on s'intéresse aux ensembles convexes qui, intuitivement, sont caractérisés par le fait qu'ils sont dépourvus de creux.



(source : www.jaicompris.com)



(source : www.mieuxenseigner.ca)

L'étude géométrique des ensembles convexes est récente. Sous sa forme moderne, elle a été initialement impulsée par l'américain Victor Klee (1925-2007). Actuellement, elle est assez peu connue et ne l'est essentiellement que par des mathématiciens appartenant à des centres universitaires de recherches. Elle se trouve dispersée dans des articles publiés dans des revues scientifiques et, quelquefois, rassemblée (en partie) dans des monographies ; elle fait aussi l'objet de cours universitaires destinés à de futurs mathématiciens, souvent au niveau d'un Master.
Il n'est donc guère possible d'en donner ici un exposé complet.

Néanmoins, il nous semble intéressant de vulgariser cette discipline, c'est-à-dire d'en élaborer un historique succinct pour situer la problématique, puis de présenter quelques-uns de ses concepts de base et de ses résultats importants sous une forme accessible pour un vaste public.
Créée en 1987 et active depuis lors, la revue française « *Tangente*, l'aventure mathématique » a précisément pour vocation la vulgarisation de la culture mathématique.
Dans son 204$^{\text{ème}}$ numéro (mars-avril 2022, pp. 11-25), elle présente un dossier entier consacré à la « Convexité », avec les deux sous-titres « Des attraits méconnus » et « De la géométrie à l'analyse ».
Cet article se base sur le contenu de ce dossier ; il le développe et le complète (mais avec une mise en page moins élaborée).

Nous commençons notre travail en présentant un historique lié à la convexité (voir [Bair 2022 a]). Schématiquement, nous y distinguons trois étapes. La première concerne les premières apparitions timides du concept durant l'Antiquité. La deuxième se réfère à des prémices plus récentes : nous y montrons que certains illustres mathématiciens qui ont construit des théories devenues classiques de nos jours évoquaient déjà, de façon implicite, la notion de convexité. Enfin, nous attardons à l'émergence d'une théorie moderne et générale, ce qui a donné naissance d'une part à la géométrie convexe pour l'étude d'ensembles et, d'autre part, à l'analyse convexe pour celle de fonctions.
Ensuite, nous tenons à faire l'éloge de Victor Klee qui fut sans conteste un des mathématiciens des plus influents en géométrie convexe. A cet effet, nous nous appuyons sur divers documents privés de l'époque, notamment sur un discours élaboré en 1984 pour introduire l'américain lors de la cérémonie de remise du titre de Docteur Honoris Causa à l'Université de Liège. Cette partie comporte une biographie du lauréat, ainsi qu'un aperçu sur sa carrière académique et des considérations relatives à son influence sur des chercheurs belges ou français de l'époque.
Nous profitons ainsi de cette opportunité pour nous souvenir d'une tranche de l'histoire locale des mathématiques. L'épisode historique en question est la formation, en Belgique (à Liège et à Bruxelles) et en France (dans le nord du pays), d'équipes de chercheurs qui travaillaient, à l'instar de leur coryphée François Jongmans (1921-2014), sur des ensembles convexes étudiés essentiellement d'un point de vue géométrique (ou topologique).
Enfin, nous donnons un aperçu, de manière vulgarisée, de thèmes fondamentaux abordés par Victor Klee et des mathématiciens travaillant dans son sillage. Nous ne nous attardons pas sur la théorie générale, mais bien connue, des polyèdres et polytopes convexes (voir notamment [Bair-Fourneau 1980] et [Klee 1959]), mais fixons notre attention sur cinq thèmes moins courants : les enveloppes convexe et conique, la structure extrémale, le comportement à l'infini, la séparation de deux ensembles et enfin des généralisations ensemblistes ou fonctionnelles (voir [Bair 2022 b] et [Bair 2022 c]).

2. Prélude

L'idée de la convexité apparut dans le passé en deux phases.

2.1. Balbutiements antiques

Les premières traces de la convexité remontent à l'Antiquité, essentiellement chez des savants grecs, comme c'est souvent le cas en mathématiques ; elles étaient alors implicites en raison de l'absence de définitions précises et générales. Citons, de façon non exhaustive, trois apports majeurs pour notre propos.

- L'œuvre-phare d'Euclide (environ 330-275 av. J.C.), les célèbres *Eléments,* se compose de 13 livres ; elle rassemble tout le savoir géométrique alors connu et elle a servi de modèle pour toute formation mathématique durant les siècles suivants. Le quatrième livre s'intéresse aux polygones (convexes ou non) du plan, à leur construction à la règle et au compas, ainsi qu'à leur inscription dans un cercle. Les trois derniers livres sont consacrés à la géométrie dans l'espace, avec une attention particulière pour les polyèdres et, en fin d'ouvrage, pour les 5 polyèdres réguliers déjà envisagés par Théétète (environ 415-360 av. J.C.).
- On estime souvent qu'Archimède (environ 287-212 av. J.C.) a été le plus grand savant de l'Antiquité. Certaines de ses découvertes concernant des lois de la physique sont devenues légendaires. En mathématiques, il a travaillé en arithmétique et en géométrie. Il a découvert une liste de solides archimédiens : ce sont des polyèdres convexes semi-réguliers (autres que les polyèdres réguliers, les prismes et les antiprismes). Il s'est aussi intéressé aux courbes planes. Il a notamment prouvé que la longueur d'une courbe convexe est égale à la limite des chemins polygonaux qui s'en approchent. Il constata encore qu'une courbe intérieure est de longueur inférieure à celle d'une courbe extérieure, pour autant que la première soit convexe, cette propriété devenant caduque dans le cas contraire ainsi qu'en atteste la figure ci-dessous.

(source : article « *convexity* » de M. Berger, http://www.jstor.org/stable/2324573)

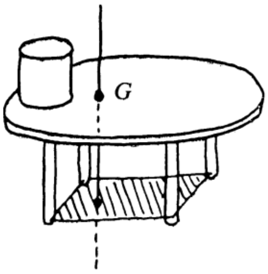
- Ptolémée (environ 100-168 ap. J.C.) est surtout réputé pour ses travaux en astronomie et en géographie. Pour les réaliser, il s'est penché sur des questions de géométrie. On lui doit notamment un théorème, qui porte aujourd'hui son nom, donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit inscrit dans un cercle (à savoir, le produit des longueurs des diagonales vaut la somme des produits des longueurs des côtés opposés).

2.2. Prémices modernes

En dehors de la géométrie classique élaborée par les savants grecs de l'Antiquité (voir ci-dessus), les autres matières mathématiques enseignées de nos jours dans le secondaire ont été construites progressivement par des mathématiciens ayant vécu essentiellement du 17ème au 19ème siècle.

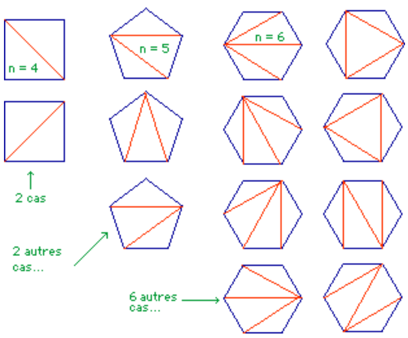
Epinglons, parmi d'autres, quelques travaux scientifiques réalisés de manière occasionnelle durant cette période : ils peuvent être aujourd'hui considérés comme annonciateurs de la théorie moderne des ensembles convexes :

- Le mathématicien et physicien français Joseph Jean-Baptiste Fourier (1736-1813) fut amené, pour des problèmes de statique, à considérer des systèmes d'inéquations linéaires, c'est-à-dire à travailler sur des polyèdres convexes.
- Son compatriote Louis Poinsot (1777-1859) nota que le centre de gravité d'une table se trouve sur la verticale passant par un point situé dans l'enveloppe convexe de l'ensemble formé sur le sol par les quatre pieds de la table :

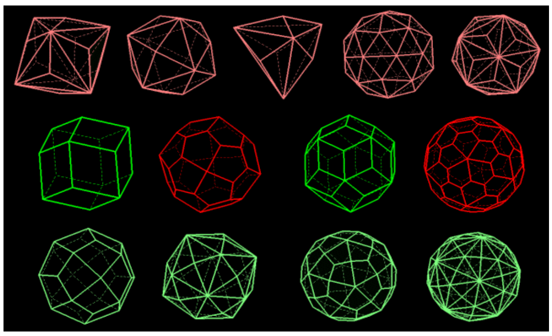


(Source : article de M. Berger, http://www.jstor.org/)

- Le suisse Leonhard Euler (1707-1783) a produit une œuvre colossale (voir le Hors Série n° 29 de la Collection « Bibliothèque Tangente »). Il a notamment démontré une propriété célèbre, énoncée initialement par René Descartes (1596-1650) et portant désormais le nom de théorème de Descartes-Euler : dans un polyèdre convexe, le nombre d'arêtes est égal à la somme du nombre de faces et du nombre de sommets, diminuée de 2. Ce résultat a été généralisé, notamment par Henri Jules Poincaré (1854-1912).
- Eugène Catalan (1814-1894), né à Bruges, est un auteur français prolifique qui a essentiellement travaillé à l'Université de Liège. Son nom est, aujourd'hui encore, attaché à certains de ses résultats en convexité. Ainsi, les nombres éponymes désignent les nombres de triangulations possibles d'un polygone convexe, tandis que les solides portant son nom sont les 13 polyèdres convexes duaux des polyèdres d'Archimède. La vie mouvementée et l'œuvre généreuse de ce mathématicien sont présentées dans l'ouvrage [Jongmans 1996], une biographie rédigée par F. Jongmans qui créa plus tard l'Ecole Liégeoise de Convexité (voir ci-après). Il est donc permis de penser que E. Catalan fut, d'une certaine manière, un précurseur de cette Ecole.



Triangulation de polygones convexes
(source : http://serge.mehl.free.fr/)



Polyèdres (semi-réguliers) de Catalan
(source : http://www.polyhedra-world.nc/)

C'est aussi durant cette période que se développa fortement l'analyse mathématique. On n'y parlait pas encore de fonctions convexes, car celles-ci n'étaient pas encore définies en général. Mais les savants de l'époque énoncèrent certaines propriétés attribuées de nos jours aux fonctions convexes. En voici quelques exemples significatifs :

- Les fondateurs de l'analyse, tels Pierre de Fermat (1601-1665) et Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716), avaient déjà constaté cette propriété importante énoncée dans un langage contemporain : sous des hypothèses peu contraignantes, le repérage d'un optimum pour une fonction d'une variable réelle exige l'annulation de la dérivée de l'objectif, mais la distinction entre un minimum et un maximum dépend de la convexité ou de la concavité du graphe autour du point repéré.
- Le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) apporta de la rigueur dans les raisonnements mathématiques ; son œuvre a fortement influencé le développement de l'analyse mathématique. En 1821 il publia un livre, intitulé *Analyse algébrique*, au sein duquel il démontrait notamment que la moyenne géométrique de plusieurs nombres positifs est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique correspondante. Cette propriété importante en analyse découle en fait de la convexité de la fonction qui associe à un nombre son carré.
- En 1888, le mathématicien anglais Leonard James Rogers (1862-1933) étendit l'inégalité obtenue par Cauchy au cas de moyennes pondérées et en déduisit également d'autres inégalités.
- En 1889, le mathématicien allemand Otto Ludwig Hölder (1859-1937) démontra que, pour toute fonction f dont la dérivée seconde est positive ou nulle sur un intervalle ouvert I, la valeur de la fonction en une moyenne pondérée de points appartenant à I est inférieure ou égale à la moyenne pondérée correspondante des valeurs de f en ces points.
- En 1893, l'autrichien Otto Stolz (1842-1905) prouva que si f est continue sur un intervalle ouvert I et vérifie l'inégalité $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$ pour tous x et y de I, alors f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point de I.
- La même année, le français Jacques Hadamard (1865-1963) montra que si f possède une dérivée croissante sur un intervalle ouvert $I =]a , b[$, alors pour tous x et y tels que $a < x < y < b$, on a $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt$.

De tels résultats étaient assez proches les uns des autres et annonçaient une théorie plus générale.

3. Emergence d'une théorie contemporaine

Comme le suggère le début de cet article, les mathématiciens d'avant le 20ème siècle abordaient parfois la convexité, mais un peu à la manière dont Monsieur Jourdain faisait de la prose, c'est-à-dire sans trop s'en rendre compte.

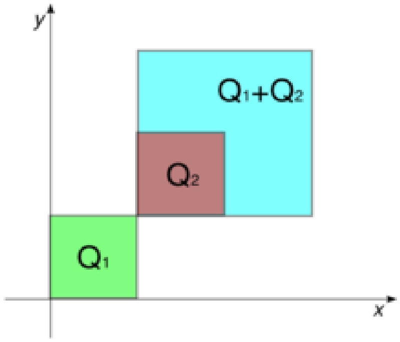
3.1. Géométrie convexe

Une première étude systématique sur les ensembles convexes et les notions apparentées fut l'œuvre du mathématicien allemand Hermann Minkowski (1864-1909). Ses recherches introduisaient les notions fondamentales, y compris une définition générale de la convexité.

La base de la théorie repose sur deux opérations introduites sur des parties d'un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ (mais c'est aussi valable dans des espace plus généraux) : la *somme de Minkowski* de deux parties et *le produit d'une partie par un scalaire* ; on les définit comme suit :

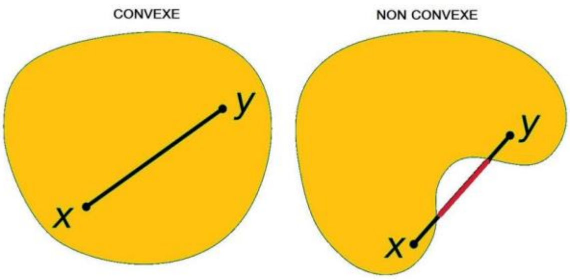
$$Q_1 + Q_2 = \{x : x = a + b, a \in Q_1 , b \in Q_2\} \text{ et } \alpha\, Q = \{x : x = \alpha\, a, a \in Q\}$$

(source : https://computus.org/minkowski-spacetime/)



Somme de Minkowski de deux ensembles
(source : Wikimedia Commons)

Un ensemble A est *convexe* lorsque $\alpha\, A + \beta\, A$ est inclus dans A quels que soient les réels α et β dont la somme vaut 1. Cela équivaut à dire que, pour toute paire $\{x , y\}$ de points appartenant à A, le segment de droite d'extrémités x et y est entièrement inclus dans A.



(source : https://www.researchgate.net/publication/278635597_DC_programming)

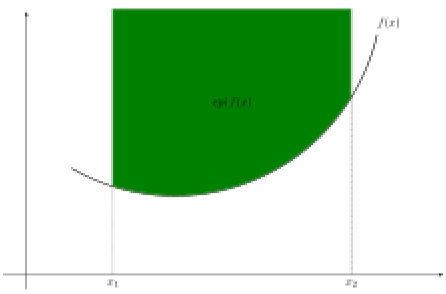
Dès que la notion générale d'ensemble convexe fut introduite, la théorie se développa en s'orientant d'abord vers la résolution de problèmes quantitatifs en dimension finie. Une excellente vue générale sur les travaux de cette époque et dans cette direction fut donnée dans l'ouvrage « *Theorie der konvexen Körper* » (Springer, Berlin, 1934), dû au mathématicien danois Tommy Bonnesen (1873-1975) et à l'allemand (qui a vécu longtemps au Danemark) Werner Fenchel (1905-1988).
Mais, depuis Minkowski, c'est assurément l'américain Victor Klee qui a le plus marqué de son empreinte l'étude moderne des ensembles convexes. Il aborda aussi bien des problèmes d'ordre quantitatif que qualitatif et il travailla en dimension quelconque (même infinie). Il a mené ses travaux en abordant des questions variées et difficiles, tant théoriques que pratiques. Il a ainsi donné une impulsion vigoureuse à ce que l'on appelle aujourd'hui la *géométrie convexe*. Vu l'importance de son œuvre en convexité, nous lui consacrons toute la quatrième section du présent article.

3.2. Analyse convexe

On vit assez tôt, particulièrement avec le développement de la recherche opérationnelle, l'intérêt d'étudier conjointement la géométrie convexe et l'analyse. Ceci donna naissance à l'*analyse convexe* consacrée à l'étude des fonctions convexes et des notions apparentées. C'est le 17 janvier 1905, lors d'une conférence donnée à la Société mathématique danoise, que le mathématicien danois autodidacte Johan Jensen (1859-1925) introduisit une notion générale de fonction convexe ; un peu plus tard, il publia un texte à ce sujet au sein d'un article rédigé en français et intitulé « *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes* », paru dans la revue *Acta mathematica* (N° 30, 1906, pp.175-193) : il y écrivit : "Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$, réelle, finie et uniforme de la variable réelle x, satisfait dans un certain intervalle à l'inégalité $\varphi(x) + \varphi(y) \geq 2\varphi(\frac{x+y}{2})$, on dit que $\varphi(x)$ est une fonction convexe dans cet intervalle". En fait, l'auteur définissait la convexité (qui est appelée ici « au sens de Jensen ») en partant d'une inégalité mise en évidence naguère par Stolz (voir ci-dessus). Géométriquement, une fonction *f* est convexe au sens de Jensen lorsque, pour deux points quelconques *A* et *B* appartenant au graphe de *f*, la droite verticale passant par le milieu *M* du segment de droite joignant *A* à *B* rencontre le graphe de *f* en-dessous de *M* (ou en ce point).
Un peu plus tard, le mathématicien allemand Georg Hamel (1877-1954) exhiba une fonction *f* discontinue vérifiant, pour tous réels x et y, l'égalité $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y)}{2})$. Il mettait ainsi en évidence le fait qu'une fonction convexe au sens de Jensen n'est pas forcément continue. Toutefois, en 1920, le mathématicien polonais Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969) démontra qu'une fonction (réelle) convexe au sens de Jensen est généralement continue (sauf éventuellement aux extrémités de l'intervalle de définition) pour autant que tout point du segment de droite joignant *A* et *B*, et pas simplement le milieu *M* comme pour l'interprétation géométrique donnée plus haut, soit situé (verticalement) au-dessus du graphe.

C'est pourquoi, de nos jours, on appelle *fonction convexe* sur un ensemble convexe *A* toute fonction *f* telle que: $f[\alpha\, x + (1-\alpha)\, y] \leq \alpha\, f(x) + (1-\alpha)\, f(y)$ pour tous x et y dans *A* et tout réel α compris entre 0 et 1. Remarquons que cette inégalité redonne celle avancée par Jensen dans le cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$. Ainsi, toute fonction convexe au sens actuel l'est également au sens de Jensen, mais la réciproque n'est pas toujours vraie, sauf dans le cas d'une fonction continue. Par ailleurs, notons encore que la définition contemporaine de la convexité prend en charge les fonctions considérées par Hölder et par Hadamard (voir ci-avant).

Cette notion de fonction convexe est étroitement liée à celle d'ensemble convexe. De fait, une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe (constitué intuitivement, pour une fonction d'une variable réelle, des points situés sur la représentation graphique et au-dessus) est lui-même convexe.



Représentation d'une portion de l'épigraphe d'une fonction $f(x)$ (en vert).
(source : wikipedia)

Depuis son apparition, la notion de fonction convexe s'est enrichie de multiples variantes et propriétés. Désormais, les fonctions convexes sont fort intéressantes d'un point de vue théorique, notamment en raison de remarquables propriétés de ''régularité'' (comme la continuité, la dérivabilité, …) qu'elles présentent. Leur étude repose aussi bien sur des techniques d'analyse que sur une certaine intuition géométrique. Au surplus, leurs applications pratiques sont variées ; par exemple, elles sont souvent exploitées par des ingénieurs, des chercheurs opérationnels, des économistes, des financiers.

3.3. Généralités sur la convexité contemporaine

De nos jours, il est aisé de trouver sur la Toile des titres plus ou moins récents de monographies sur la théorie et les applications des ensembles et des fonctions convexes. Par ailleurs, de nombreux articles ont paru ou paraissent encore aujourd'hui sur le sujet. Ils sont publiés dans des revues scientifiques internationales, généralistes ou spécialisées. Ils sont recensés par le MSC2020 (ce qui est la dernière version de « *Mathematics Subject Classification* ») sous une rubrique spécifique (n° 52 intitulée « *Convex and discrete geometry* ») pour les résultats portant sur les ensembles convexes, et sous plusieurs sous-rubriques (à savoir les n° 26A ou B, 46A et 90 C figurant dans les items 26, 49 et 90 portant respectivement sur les « *Real functions* », la « *Functional analysis* » et l' « *Operations research, mathematical programming* ») pour les travaux d'analyse convexe.

En conclusion, la convexité est devenue incontournable dans les mathématiques théoriques contemporaines. De plus, elle intervient efficacement dans de nombreuses applications concrètes, par exemple :

- en optique : les miroirs convexes « rapetissent et défigurent les objets », tandis que les miroirs concaves ont un effet contraire.
- en physique : l'analyse convexe intervient dans de nombreuses applications ; par exemple, les potentiels énergétiques sont localement convexes.
- en cristallographie : certains cristaux sont des convexes caractérisés par leurs facettes.
- en biologie : la capside d'un virus est parfois polyédrique (en forme d'icosaèdre).
- en anatomie : la description de certains os fait apparaître des parties convexes et des parties concaves.
- dans le domaine artistique : le cubisme a parfois mis à l'honneur la juxtaposition de formes convexes et concaves.
- en économie : l'on suppose souvent la convexité de l'ensemble des paniers qui peuvent être achetés par un consommateur, ainsi que celle des courbes d'indifférence

de celui-ci ; de telles hypothèses sont également de mise dans la théorie classique de la production. L'impôt d'un ménage en fonction de son revenu ou encore la courbe de Lorenz sur les salaires sont d'autres exemples économiques de fonctions convexes.
- en finance : une obligation peut être caractérisée par sa convexité.

Tout ceci confirme que la convexité est désormais devenue un sujet de recherche majeur dans la communauté des mathématiciens professionnels, qu'ils travaillent en mathématiques pures ou appliquées.

4. Eloge de Victor Klee

4.1. Courte biographie

Le mathématicien américain Victor (Vic pour les intimes) Klee est né le 16 septembre 1925 à San Francisco (en Californie). Il est mort le 17 août 2007 à Lakewood (en Ohio).
Il obtient son diplôme de *Bachelor of Arts* en 1945 au *Pomona College* et entreprend de suite des recherches en théorie des nombres. Il rédige, en 1947, son premier article qui est dans un premier temps jeté aux oubliettes. Mais, au début des années 1980, on s'aperçoit que cette note surclassait nettement des contributions présentées entretemps par d'autres auteurs.
Après cette entrée en scène dans le domaine numérique, V. Klee se tourne vers la géométrie, et spécialement vers l'étude des ensembles convexes.
Il conquiert le titre de docteur en 1949 à l'Université de Virginie, en travaillant sous la direction de l'éclectique professeur Edward James McShane (1904-1989), un réputé spécialiste notamment en calcul des variations, en théorie de l'intégration et en calcul stochastique qui présida *l'American Mathematical Society* (AMS en abrégé) et la *Mathematical Association of America* (MAA).
Sa thèse doctorale est intitulée « *Convex Sets in Linear Spaces* ». Déjà à cette époque, sa réputation de chercheur et d'enseignant est prégnante : elle lui vaut d'être retenu plusieurs années en cette institution.
En 1954, il est engagé par l'université d'Etat de Washington à Seattle. Il y est resté jusqu'à son admission à l'éméritat en 1998. Sa carrière académique fut donc aussi longue qu'exemplaire. En effet, V. Klee excellait dans les trois missions en principe dévolues à tout professeur d'université, à savoir l'enseignement, la recherche et les services à la communauté.

4.2. Enseignement

Ses cours étaient principalement orientés vers ce qu'il est convenu d'appeler les mathématiques appliquées, singulièrement vers la recherche opérationnelle et l'informatique ; ils portaient en effet sur les corps ou polyèdres convexes, sur les problèmes combinatoires en algèbre et en géométrie, et sur tous les aspects de l'optimisation, notamment l'appréciation de la complexité calculatoire.
Mais l'activité pédagogique d'un universitaire ne se réduit pas à ses cours : le professeur a aussi la tâche de former des étudiants qui à leur tour deviendront des mathématiciens professionnels. Dans ce domaine, V. Klee a parfaitement rempli sa mission, puisqu'il a guidé, à

l'Université de Washington, 34 dissertations doctorales, ses élèves ayant eux-mêmes supervisé 241 thèses. Il est à noter que tous ceux qui ont eu le privilège de travailler avec lui n'émettent que des louanges. Un de ses collègues confirme cette appréciation en écrivant à propos de ses doctorants : « il a toujours essayé de leur remonter le moral lorsque les problèmes semblaient insurmontables. […] Je crois que chaque étudiant qui a commencé des recherches avec Vic a obtenu un diplôme. » (d'après https://www.seattletimes.com/seattle-news/victor-klee-81-widely-known-as-mathematician-mentor/).
Bien plus, V. Klee avait un immense rayonnement au-delà de l'université de Washington, car il était également fort attentionné vis-à-vis des jeunes chercheurs travaillant dans son domaine partout dans le monde ; nous reviendrons ultérieurement sur ce point. Signalons ici qu'il a notamment suivi de près des chercheurs liégeois (voir ci-dessous).
Pour conclure cette section, mentionnons cette sobre citation émanant de Peter Renz, un ancien directeur des Publications au sein de la MAA : V. Klee était « un mathématicien et professeur superbe, et un bon (et très amusant) humain. »

4.3. Recherches

C'est par des recherches de haut vol que V. Klee s'est imposé à l'attention des milieux scientifiques. Il a été considéré par ses pairs comme le plus grand spécialiste de son époque en géométrie convexe ; il lui a donné une impulsion vigoureuse à l'instant même où la recherche opérationnelle, en quête d'un langage approprié, se tournait vers la notion de convexité. Si peu à peu les thèmes de ses travaux ont viré vers des problèmes combinatoires ou le savoir-faire informatique, sa production est toujours restée profondément imprégnée de géométrie convexe. Il s'est notamment inspiré de travaux plus anciens abordant certes des idées et des arguments de base, mais justifiés de manière laconique ; il a ainsi approfondi, au prix d'une longue réflexion, les principaux thèmes qui seront présentés, de manière vulgarisée, dans la section suivante. Un ouvrage écrit en l'honneur du 65ème anniversaire de V. Klee fournit un aperçu assez fidèle du large éventail de ses thèmes de recherches. Ce livre est intitulé « *Applied Geometry and Discrete Mathematics* », a été rédigé par les deux mathématiciens allemands Peter Gritzmann (PhD en 1980) et Bernd Sturmfels (PhD en 1987) et a été publié par l'AMS ; il aborde les domaines suivants :

- Convexité classique et computationnelle,
- Polytopes convexes et notions apparentées,
- Géométrie discrète et computationnelle,
- Combinatoire, combinatoire polyédrique et théorie des graphes,
- Analyse fonctionnelle,
- Programmation mathématique et optimisation,
- Informatique théorique.

Riche d'environ 240 travaux, l'œuvre de V. Klee lui a valu divers prix et distinctions. Contentons-nous d'en citer ici deux qui ont un lien avec l'objet principal de cet article, c'est-à-dire avec la large diffusion de mathématiques.

- En 1972, V. Klee a reçu le *prix Halmos-Ford* remis chaque année par la *Mathematical Association of America* à des auteurs d'articles, publiés dans *The American Mathematical Monthly* ou *Mathematics Magazine*, dont « la clarté de l'exposé est excellente ». L'article primé était [Klee 1971] ; il a vraisemblablement été le premier exposé systématique et général en géométrie convexe et a inspiré par la suite de nombreux chercheurs.

- En 1980 et en 1999, V. Klee a également été lauréat du *prix Carl B. Allendoerfer* . Il s'agit d'une distinction mathématique décernée chaque année par la *Mathematical Association of America* pour « la clarté de l'exposé excellence publié dans *Mathematics Magazine* ». Les articles récompensés étaient [Klee 1979] et [Klee-Reay 1998] ; ils mettaient notamment en évidence une particularité intéressante de la géométrie convexe : on y trouve de nombreux problèmes faciles à concevoir et à illustrer (notamment dans le plan), mais difficiles à résoudre et parfois encore ouverts.

A propos des écrits de V. Klee, mentionnons une anecdote. Au sein de la communauté des 'convexistes', on raconte qu'on lui demandait quelquefois pourquoi il n'avait pas encore rédigé une monographie sur la géométrie convexe, dont il était assurément un des plus éminents spécialistes. Il répondait qu'il y avait déjà pensé et avait même commencé un tel travail, mais qu'il trouvait toujours de nouvelles idées et obtenait des résultats sans cesse meilleurs, de sorte qu'il n'arrivait jamais à terminer cette entreprise. Cette anecdote est caractéristique de son perfectionnisme et de sa créativité ; elle est toutefois mythique, car V. Klee est le coordinateur ou un éditeur de livres, à savoir de [Klee 1970] et de [Grünbaum 2003] respectivement.

Les idées de V. Klee ont été largement transmises oralement. Il était un conférencier exceptionnel et donc très demandé. A deux reprises, il a donné une conférence au « Congrès International des Mathématiciens » : en 1974 à Vancouver avec un exposé intitulé « *Convex polyhedra and mathematical programming* » et en 1962 à Stockholm sur « *The generation of affine hulls* ».
Au surplus, V. Klee a pris la parole dans de nombreux colloques ou séminaires. Il a été professeur-invité dans diverses universités. Il a bénéficiée de différents mandats de « fellow » [1] qui l'ont mené un peu partout dans le monde (aux Etats-Unis, mais aussi en Australie, au Danemark, en Allemagne, en Belgique, …). Il a encore été nommé Docteur Honoris Causa dans trois Universités : au Pomona College en 1995, à l'université de Liège en 1984 et à l'université de Trèves en 1995.

4.4. Services

V. Klee a rendu de multiples et immenses services.
Au niveau local, il a permis à l'université de Washington, dans laquelle il a travaillé quasiment toute sa carrière professionnelle, d'acquérir une solide réputation internationale dans les domaines des mathématiques pures, des mathématiques appliquées et de l'informatique. Grâce à lui, des chercheurs du monde entier venaient y parfaire leur formation. Ce fut notamment le cas pour le mathématicien israélien Branko Grünbaum (1929-2018) qui deviendra par la suite son collègue et ami. Celui-ci écrivit au sujet de son aîné : « L'une des contributions durables de Vic au département a été le séminaire qu'il a organisé dans les années 1950 et

[1] « Fellow » est, dans le monde académique, un titre honorifique attribué, par élection ou par invitation, à une personnalité éminente dans son domaine.

dirigé pendant de nombreuses années. Le séminaire continue. […] Les participants réguliers formaient une communauté avec des contacts et des échanges fréquents. Souvent, la fréquentation a grimpé en flèche pendant le trimestre d'été, car il s'agissait de l'une des rares offres présentant de nouvelles idées et des résultats récents. […] Vic s'intéressait également à la vulgarisation des mathématiques dans des cercles plus larges. Il a rédigé plusieurs études générales et réalisé un film. »
V. Klee s'est pleinement engagé dans la vie mathématique américaine. Il a fait partie du *board of governors* de l'Association mathématique d'Amérique de 1967 à 1978, en étant notamment premier vice-président en 1968-70 et président en 1971-1972. Il a encore été responsable, pendant de nombreuses années, d'une rubrique consacrée à des problèmes ouverts dans la revue *American Mathematical Monthly*. Il a été actif dans diverses autres sociétés savantes, comme la *Society for Industrial and Applied Mathematics*, l'*American Association for the Advancement of Science*, le *Conference Board of the Mathematical Sciences*, la *National Science Foundation* et l'*Office of Naval Research*.
Cette activité intense a été récompensée par différents prix spécifiques, trop nombreux pour être mentionnés de façon exhaustive. Contentons-nous de signaler que V. Klee reçut, en 1977, le *Award for Distinguished Service to Mathematics*. Ce prix prestigieux, délivré par la MAA, « reconnaît et célèbre les réalisations exceptionnelles d'un ou plusieurs membres de la communauté scientifique et technique du Nord-Ouest. […] Les lauréats sont sélectionnés pour la persévérance, l'imagination créative, la capacité de travailler avec les gens et la nouvelle approche de la résolution de problèmes.» Au rayon international, mentionnons encore que V. Klee reçut en 1992 le *Max-Planck-Forschungspreis* qui récompense « d'excellentes personnalités de la recherche de l'étranger pour leurs réalisations scientifiques exceptionnelles ».
A l'encontre de nombreux universitaires, V. Klee ne se contenta pourtant pas d'être « un théoricien de la pratique » [De Wilde-Jongmans 1984]. A maintes reprises, il exerça à temps partiel une activité de consultant au profit de sociétés aussi célèbres que Boeing, du Pont de Nemours, RAND Corporation, Rinehart - Winston ou encore Freeman C°.

4.5. Liens avec des chercheurs belges ou français

L'œuvre scientifique de V. Klee a profondément marqué le paysage des mathématiques contemporaines. Des chercheurs de tous pays lui ont emboîté le pas, à commencer bien sûr par ses élèves à l'université de Washington. Mentionnons également l'existence, un peu partout dans le monde, de centres de recherche dont les membres ont prolongé ses travaux. Ce fut notamment le cas en Belgique et dans le Nord de la France. Attardons-nous sur ce point.

Ce courant belgo-français a été initié essentiellement par le liégeois François Jongmans. Nous ne revenons pas ici sur la biographie de ce mathématicien : elle a été développée dans [Bair 2014] pour son apport en géométrie et dans [Seneta 2015] pour celui en histoire des mathématiques.
Nous évoquons, en liaison avec la personnalité et les travaux scientifiques de V. Klee, la création de ce que l'on pourrait nommer l'ELC (ou Ecole Liégeoise de Convexité), et les contacts de ses membres avec des chercheurs appartenant à des centres de recherches voisins pour former ce que nous appelons l'EBC (Ecole Belge de Convexité) ou l'EBFC (Ecole Belgo-Française de Convexité).

Durant les années 1960, F. Jongmans était professeur ordinaire à la Faculté des Sciences de l'université de Liège, titulaire en sciences mathématiques d'une chaire en géométrie supérieure ; il était également détaché en partie à la Faculté de Droit et à l'Ecole d'Administration des Affaires annexée à celle-ci pour y assurer des cours de mathématiques générales et appliquées de base à des étudiants suivant des études en économie et en gestion. Le professeur a astucieusement exploité le côté a priori hybride de ses enseignements pour étudier la géométrie convexe ; il a très vite suivi la voie nouvelle amorcée dans les travaux de V. Klee.
A l'intention de ses étudiants en mathématiques ayant choisi de se spécialiser en géométrie supérieure ou en topologie, F. Jongmans construisit progressivement un cours inédit sur les espaces vectoriels topologiques. Il y présentait une étude complète et de pointe sur les ensembles convexes avec un double souci : « d'une part, écarter les hypothèses prématurées superflues autant que faire se pouvait sans étirer exagérément le texte ; d'autre part, mettre l'accent sur l'aspect géométrique de la théorie, aspect dont on ressent en ce moment les insuffisances et qu'on s'emploie de divers côtés à serrer de plus près. » [Jongmans 1975]. La dernière partie de cet extrait rédigé dans l'introduction du cours est précisée par cette autre citation tirée de l'article [Jongmans 1970] : « cette tendance apparaît timidement dans l'ouvrage *Convex Sets* de Valentine [2] [Valentine 1964], et sporadiquement dans l'œuvre généreuse de Victor Klee. »
Par ailleurs, la charge de F. Jongmans en Faculté de Droit influença vraisemblablement sa direction de recherches. En effet, les mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion, comprenant notamment la recherche opérationnelle alors balbutiante, accordaient une place nouvelle et grandissante à la convexité, car elles s'avéraient notamment fort utiles dans des problèmes d'optimisation qui sont cruciaux dans les deux disciples en question. Au surplus, le nombre d'étudiants suivant ces filières était conséquent, ce qui permettait au professeur de bénéficier de plusieurs collaborateurs dont les postes n'auraient pas pu être justifiés par le seul enseignement de géométrie supérieure en sciences mathématiques. Ainsi, à l'aube des années 1970, le service de F. Jongmans se composait de quatre chercheurs chevronnés pouvant épauler trois jeunes recrues commençant leur carrière professionnelle, à savoir François Jongmans, le chef de service, Jules Varlet [3], chargé de cours associé, Joseph Vangeldère [4], chef de travaux, Léopold Bragard, engagé comme assistant à l'EAA (Ecole d'Administration des Affaires) depuis la création de cette dernière en 1966, Jacques Bair et André Dessard recrutés en 1970 et René Fourneau arrivé au service en 1971.
A posteriori, on peut donc penser que le choix par F. Jongmans d'orienter ses recherches et ses enseignements vers l'étude approfondie de la convexité fut, pour lui, une opportunité perspicace de s'embarquer dans une direction originale de recherches en plein développement

[2] Frederick A. Valentine (1911-2002) fut professeur à l'*University of California*. Son livre sur les ensembles convexes a connu un vif succès et a inspiré de nombreux chercheurs, dont le liégeois Léopold Bragard (1941-2017) au sujet duquel une biographie se trouve dans [Bair 2018]) ; celui-ci a rédigé une thèse doctorale principalement consacrée à l'étude des ensembles étoilés (voir la dernière section).
[3] Jules Varlet (1922-2012) était un algébriste, auteur en 1964 d'une thèse de doctorat intitulée « Contribution à l'étude des lattis semi-complémentés et des lattis de Stone » ; il était aussi un excellent pédagogue, titulaire de plusieurs diplômes pédagogiques (instituteur, régent, licencié).
[4] Joseph Vangeldère (1934-2020) avait rédigé en 1963 une thèse de doctorat intitulée « Recherches sur la géométrie projective différentielle des V3 de S5 ».

et d’y conduire une équipe relativement large, bien soudée et adhérant parfaitement au projet prometteur du chef de service.

Revenons un peu en arrière. Les premières publications de F. Jongmans sur des notions apparentées à la convexité [5] datent des années 1960 et contiennent des réflexions sur la programmation mathématique et, en corollaire, sur la structure extrémale des convexes (voir la section suivante), ainsi que sur la séparation de deux ensembles convexes (cf. les références [Jongmans 1961], [Jongmans 1962], [Jongmans 1968a], [Jongmans 1968b] et [Bair-Jongmans 1970]).
On peut constater que les premiers articles publiés par V. Klee datent quasiment de la même époque et portent exactement sur les mêmes thèmes avec des objectifs communs (cf. les références [Klee 1957], [Klee 1968] et [Klee 1969]). En fait les travaux de l’américain sur ces sujets sont un peu antérieurs à ceux du liégeois et ont assurément été une source d’inspiration pour les recherches en géométrie convexe effectuées à l’Université de Liège. En effet, en 1969, F. Jongmans demanda à un étudiant, allant effectuer un TFE (Travail de Fin d’Etude) sous sa direction, d’analyser l’article [Klee 1968] qui était récent, rédigé par une pointure internationale dans le domaine concerné et publié dans une revue d’excellente réputation. Au surplus, le sujet abordé entrait alors parfaitement dans les préoccupations de F. Jongmans qui venait d’ailleurs de publier sur ce thème la note [Jongmans 1968]. Cet article concernait des ensembles convexes situés dans un espace euclidien fini-dimensionnel ; le sujet étudié était intéressant, notamment parce qu’il pouvait se reposer sur une certaine intuition géométrique basée sur des exemples faciles à concevoir dans le plan ou dans l’espace et aussi parce que l’auteur de l’article laissait entrevoir des possibilités d’extension de ses résultats, ce qui était bien sûr motivant ; en effet, dès le début de son article, V. Klee écrivait en substance : « L’attention est limitée aux sous-ensembles de *E* (espace euclidien de dimension finie) bien que certains des résultats aient des analogues en dimension infinie » (traduction de la deuxième phrase de l’article en question). Ce travail a donné lieu à la référence [Bair 1970], puis fut le point de départ de la carrière scientifique de son auteur. [6]
A partir de cette époque, les contacts entre V. Klee et F. Jongmans (ou ses collaborateurs) furent fréquents et constructifs ; ils devinrent même de plus en plus chaleureux. Ainsi, à titre anecdotique, signalons que l’américain signait généralement ses lettres par son prénom (en

[5] Avant de s’adonner à la géométrie convexe, F. Jongmans travaillait en géométrie algébrique, sous la direction de son ancien patron Lucien Godeaux (1887-1975) au sujet duquel il rédigea une bibliographie lorsque, après son admission à l’éméritat, il se consacra à l’histoire (surtout locale) des mathématiques (voir [Bair 2014], [Jongmans 1997] et [Seneta 2015]).
[6] Mentionnons que l’auteur de ces lignes a par la suite présenté deux autres thèses (Doctorat, Agégation de l’Enseignement supérieur) en géométrie convexe. Sur ce thème, Il a également donné des conférences dans des congrès scientifiques à l’étranger, en Allemagne (Aachen, Heidelberg, Oberwolfach, Halle), en Argentine (Buenos Aires), en France (Lille, Marne-la-Vallée, Paris, Valenciennes), en Israël (Haïfa). Il a encore rédigé plus de septante articles scientifiques, dont environ la moitié en collaboration avec d’autres chercheurs ; il a eu comme co-auteurs cinq membres de l’ELC, à savoir F. Jongmans (11 fois), André Dessard (3 fois), Joseph Vangeldère (3 fois), René Fourneau (2 fois) et René Moors (1 fois) ; il a également pu bénéficier de la collaboration de cinq co-auteurs non belges, soit trois allemands, Karl-Heinz Elster, Joachim Gwinner (2 fois) et Reinhard Nehse, ainsi que deux français, Jean-Claude Dupin (5 fois) et Jean-Luc Valein (2 fois).

entier) suivi de son nom, mais qu'il abrégeait son prénom par « Vic » lorsque son correspondant lui était plus familier, ainsi qu'en attestent les exemples repris ci-dessous :

I send best personal regards to Professor and Mrs. Jongmans, Professor de Wilde, Professor Vangeldère, Dr. and Mrs. Fourneau, and Dr. Bair. Yours sincerely, Victor Klee Victor Klee Fin de lettre envoyée au Recteur Betz	With very best regards, Vic Klee Fin de lettre envoyée à F. Jongmans

Les membres de l'ELC furent prolifiques ; ils rédigèrent une kyrielle d'articles scientifiques révisés par le directeur de l'Ecole et publiés dans des revues en Belgique ou à l'étranger ; ils multiplièrent aussi des participations à des colloques et congrès nationaux ou internationaux sur tout ce qui touche de près ou de loin à la convexité. Les plus jeunes chercheurs menèrent à un bon port une thèse sur le thème. Au total, depuis sa naissance, l'ELC a produit sept thèses de troisième cycle (au niveau de « post-master ») en géométrie convexe ; les voici par ordre chronologique, six étant doctorales et la cinquième rédigée dans le cadre des examens pour l'obtention du grade d'agrégé de l'enseignement supérieur :

- Bragard Léopold, Extensions diverses des notions de convexité, 1973, 116 pages.
- Bair Jacques, Séparation d'ensembles dans un espace vectoriel, 1975, 225 pages
- Fourneau René, Demi-lattis de convexes d'un espace vectoriel, 1975, 214 pages.
- Dessard André, La géométrie des espaces à convexité, 1976, 113 pages.
- Bair Jacques, structure asymptotique et propriétés de séparation en géométrie convexe, 1984, 199 pages.
- Goossens Pierre, Combinatorial and homological properties of some partially ordered sets arising in geometry, 1987, 142 pages.
- Bakunda Athanase, Efficacité par rapport à un cône et programmation multicritère, 1992, 174 pages

La réputation de l'ELC est en grande partie due à des séminaires semestriels, dirigés par F. Jongmans et J. Varlet et donnés chaque semaine par des membres de l'ELC. Ils portaient sur des sujets étudiés par les conférenciers. Ils faisaient l'objet de notes écrites.
Parmi celles-ci épinglons celles des séminaires du premier semestre 1974 et 1976. La première rassemblait des résultats de base, éparpillés jusqu'alors dans de nombreux articles et principalement rédigés par des membres du service de F. Jongmans ; l'objectif des auteurs était de former un ouvrage autonome et aussi complet que possible, exposant des travaux récents menés par d'autres chercheurs, dont surtout V. Klee. La seconde par contre visait à exposer de façon rigoureuse et générale l'essentiel de la théorie des polyèdres convexes quelconques et comprenait des références fondamentales à l'œuvre de Klee. Ces deux

séminaires ont donné naissance aux ouvrages [Bair-Fourneau 1975] et [Bair-Fourneau 1980] qui ont été publiés dans la réputée Série *Lecture Notes in Mathematics* visant à « rendre compte de développements récents dans la recherche et l'enseignement des mathématiques - rapidement, de manière informelle et à un haut niveau ». Ces deux livres ont conféré une bonne visibilité et une certaine réputation à l'ELC.

Les séminaires Jongmans-Varlet étaient bien entendu suivis par les membres de l'ELC et par certains étudiants ou chercheurs en mathématiques de l'Université de Liège, mais ils rassemblaient également des mathématiciens travaillant dans d'autres universités en Belgique ou à l'étranger. Ce fut notamment le cas, assez tôt et fort régulièrement, de géomètres bruxellois emmenés par Guy Valette qui avait été, en 1960, le premier doctorant du réputé savant Jacques Tits (1930-2021), puis était devenu professeur dans les deux universités de la capitale belge, l'une la VUB (Vrije Universiteit Brussel) néerlandophone, et l'autre ULB (Université Libre de Bruxelles) francophone. Il devint un participant assidu et actif des séminaires liégeois et multiplia des échanges et collaborations avec F. Jongmans, au point que les séminaires en question étaient quelquefois appelés les « séminaires Jongmans-Valette ». G. Valette était souvent accompagné de certains de ses élèves, quatre d'entre eux ayant décroché un doctorat en convexité :

- Soetens Edward, Segmentenruimten, 1971.
- Geivaerts Marcel, Ruimten van klasse van konvexe lichamen, 1973.
- Doignon Jean-Paul, Segments et ensembles convexes, 1975.
- Degreef Eric, Some results in generalized convexity, 1981.

Les excellents et fructueux rapports entre convexistes liégeois et bruxellois conduisirent certains à évoquer l'existence d'une EBC étendant ainsi l'ELC.

Trois membres de l'EBC : René Fourneau, Jean-Paul Doignon et François Jongmans (et son épouse)

Par ailleurs, à peu près en même temps que l'ELC et l'EBC se formaient, des travaux fondamentaux de géométrie convexe étaient menés à l'Université de Lille 1 par des chercheurs travaillant sous la direction de Michel Parreau (1923-2010) ; celui-ci, qui eut un rôle décisif à la tête de la Faculté des Sciences et même de l'Université, supervisa deux thèses de doctorat (dits d'Etat, c'est-à-dire du plus haut niveau possible) en géométrie convexe :

- Coquet Gérard, Sur les familles de décomposition et leurs applications à la théorie des ensembles convexes, 1973 ;
- Dupin Jean-Claude, Insérabilité des ensembles convexes, étude des hyperconvexes, applications à la séparation, 1974.

Ces deux thèses, ainsi que les travaux qui les accompagnaient, furent de suite intégrés dans les séminaires liégeois. Des contacts scientifiques furent établis entre les mathématiciens des deux pays ; par exemple, plusieurs journées de convexité furent organisées à Liège, puis au Centre Universitaire Mont-Houy de Valenciennes [7] que les deux docteurs français avaient rejoint. Au vu de la richesse des collaborations réciproques, on peut affirmer que l'EBC s'était encore agrandie pour former l'EFBC qui fut encore renforcée par l'arrivée d'un nouveau chercheur en convexité de Valenciennes, à savoir Jean-Luc Valein.

Ce développement, un peu idyllique, de la convexité en Belgique et en France s'est déroulé jusqu'en 1977, année au cours de laquelle, selon un récit de L. Bragard alors Administrateur de l'Université de Liège, « le service de M. Jongmans vit un véritable drame. Pour faire face aux sombres nuages qui planent sur elle en raison de la fin du régime de financement garanti des Universités d'Etat établi par la loi du 27 juillet 1971, l'Université de Liège décide de mettre fin à la quasi automaticité du passage au rang A des assistants n'ayant pas démérité.

[7] Le Centre Universitaire Mont-Houy est ultérieurement devenu l'Université de Valenciennes, puis l'Université Polytechnique Hauts-de-France.

MM. Jacques Bair et René Fourneau, assistants au service de M. Jongmans à la Faculté des Sciences qui assurent les répétitions de mathématiques pour les étudiants de l'Ecole et de la Faculté de Droit, sont sacrifiés malgré la qualité de leur curriculum vitae au terme d'une sorte de compétition qui releva plutôt de la loterie que d'une procédure scientifique. Ils quittent l'université. » [Bragard 2004]. L'année suivante, c'est André Dessard qui doit suivre la même voie. Comme L. Bragard avait été nommé entretemps professeur de statistique à l'Ecole d'Administration des Affaire et à la Faculté de Droit, c'est toute l'ossature de l'ELC qui s'effondre, bien que certains des chercheurs continueront sporadiquement des travaux scientifiques à titre bénévole et en fonction de leurs (assez rares, il est vrai) disponibilités. Malgré ce coup du sort, F. Jongmans s'efforça de faire fonctionner son Ecole de convexité. Il assura lui-même, lors de l'année académique 1980-1981, un séminaire consacré à l'« Etude des cônes associés à un ensemble » ; ce travail peut être considéré comme étant une synthèse remarquable et une mise au point, en vue de donner une vue d'ensemble, concernant de nombreux résultats obtenus sur le sujet par des chercheurs de l'ELC (voir [Jongmans 1980] et [Jongmans 1981]).

Sur la fin de carrière académique de F. Jongmans [8], la collaboration entre celui-ci et V. Klee déboucha sur deux cérémonies solennelles organisées dans la Salle Académique de l'Université de Liège :
1) le 30 mars 1984, V. Klee reçut le titre de Docteur Honoris Causa (DHC en abrégé) de l'Université de Liège. C'était l'aboutissement d'un processus long entamé quelques années auparavant. De nombreux échanges épistolaires furent échangés et plusieurs rencontres se produisirent entre les deux professeurs ; notamment, en 1983, l'américain profitait à cette époque d'un séjour de recherches qu'il effectuait en Allemagne pour se rendre à Liège, y donner deux conférences remarquables et recevoir la médaille de l'Université. Les professeurs Marc De Wilde et François Jongmans proposèrent à la Faculté des Sciences d'attribuer à V. Klee le grade de DHC ; dans leur requête, ils avancèrent cet argument : « des rencontres […] et des échanges épistolaires ont largement fait bénéficier les chercheurs liégeois d'appréciations, d'encouragements et de conseils qui leur ont permis d'éprouver les remarquables qualités humaines de Victor Klee […]. Notre maison rendrait un digne hommage au savant comme à l'homme en le nommant docteur honoris causa ». Cette distinction fut effectivement remise officiellement à V. Klee par E.H. Betz, le Recteur de l'époque ; en la lui remettant, ce dernier précisa que « cette marque exceptionnelle d'estime vous apporte le témoignage de l'admiration que notre Maison professe à l'égard de votre personne, de vos travaux et des services que vous avez rendus à la science ». Lors de sa seconde visite à Liège, V. Klee fit un détour par Bruxelles et une tournée en Allemagne pour y donner des conférences et rencontrer des convexistes locaux.

[8] F. Jongmans fut admis à l'éméritat en septembre 1986.

François Jongmans remet à Victor Klee la médaille de l'Université de Liège

2) Le 15 février 1985, J. Bair obtint le diplôme d'agrégé de l'enseignement supérieur ; celui-ci lui fut remis par E.H. Bez, le Recteur, et par F. Jongmans, le Secrétaire Académique [9] de l'Université de Liège. Un récit de cette aventure scientifique (mais aussi humaine) complète fait l'objet de l'article [Bair 2021]. Choisi par la Faculté des Sciences pour donner, en tant qu'expert international, son avis sur la thèse présentée par le candidat, V. Klee a envoyé un premier avis au Doyen J.A. Sporck le 12 septembre 1984; en voici des extraits : « Dr Bair is now probably the word's leading expert on these matters. […] I have absolutely no hesitation or reservation in affirming that ''the candidate'' knowledge and capacities for research and teaching are such that he is qualified to hold a post as University professor. […] In short, the dissertation certainly fulfills your stated criteria."

[9] A cette époque, le Secrétaire Académique changeait chaque année académique. Le hasard a voulu que, lors de l'année académique 1984-1985, c'était l'ancien Patron du candidat.

Suivant le massier (Bidaine), de gauche à droite, E.H. Betz, J. Bair et F. Jongmans. Ils sont suivis par J. Vangeldère, L. Nollet, M. Dewilde (et, on le devine, H. Breny dans le fond).

Lors de la leçon publique, le Doyen Sporck introduit J. Bair dans la Salle Académique

F. Jongmans partit à la retraite en 1987 avec l'esprit tranquille du devoir bien accompli. Il ne resta toutefois pas inactif intellectuellement et s'adonna ensuite à l'histoire des mathématiques, s'intéressant notamment à la vie (mouvementée) et à l'œuvre (riche) d'E. Catalan (voir la biographie [Jongmans 1996]). Ainsi, comme on le dit en pareille circonstance, « la boucle était bouclée » puisque le français, qui s'était créé une fameuse réputation scientifique à l'Université de Liège et au-delà, avait été un précurseur de l'ELC.

Ce fut J. Bair qui eut la tâche d'assurer ensuite les enseignements de F. Jongmans, sauf celui de géométrie supérieure, à la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales (en abrégé la FEGSS) qui venait d'être créée. Il fut alors le seul membre de l'ELC de la première heure à encore travailler en géométrie convexe ; il avait gardé des contacts fructueux avec des collègues du Nord de la France (J.-C. Dupin et J.-L. Valein) ainsi qu'avec un argentin (Guillermo Hansen) ; il avait continué pendant un certain temps à publier en collaboration avec ceux-ci et à travailler avec eux soit à Liège où ils venaient séjourner, soit chez eux où il était invité à donner des conférences ou des cours de troisième cycle.
Mais, il a progressivement été accaparé par la lourde charge obtenue à la FEGSS. Il s'est alors tourné vers des recherches plus en adéquation avec ses activités pédagogiques.

5. Un aperçu de thèmes fondamentaux en géométrie convexe

La géométrie convexe est une théorie à la fois récente et abondante. On y étudie une multitude de questions, variées et parfois pointues, dont la classique étude des polygones et polyèdres convexes.
Dans cette section, nous présentons d'une manière vulgarisée d'autres sujets d'étude moins courants, mais qui s'avèrent fondamentaux, intéressants intrinsèquement et utiles pour moult applications théoriques ou pratiques. Ces thèmes ont été particulièrement étudiés par V. Klee et par des membres des écoles ELC, EBC et EBFC.

Pour une bonne compréhension du texte, nous allons développer notre propos au sein d'un espace numérique $\mathbf{R}^n$ à n dimensions, mais nous pourrions l'étendre (*mutatis mutandis*) au cas général d'un espace vectoriel de dimension quelconque (même infinie), éventuellement muni d'une topologie compatible avec la structure vectorielle.
Pour rester accessible, nous étayons notre texte d'ensembles emblématiques se situant dans le plan usuel (cas particulier de $\mathbf{R}^n$ avec $n = 2$) ou dans l'espace ($n = 3$), ce qui offre l'avantage de pouvoir visualiser la situation et, le cas échéant, illustrer les notions nouvelles par une figure suggestive.

5.1. Enveloppes convexe et conique

On appelle *enveloppe convexe* d'une partie A de $\mathbf{R}^n$ l'intersection (forcément convexe) des ensembles convexes qui incluent A. De façon équivalente, c'est l'ensemble convexe minimum qui inclut A. Par exemple, si A est la réunion dans $\mathbf{R}^3$ de trois droites verticales non coplanaires, son enveloppe convexe est la colonne triangulaire admettant ces droites comme arêtes.
Un théorème, attribué au mathématicien allemand Constantin Carathéodory (1873-1950), fournit encore, dans $\mathbf{R}^2$, une autre description de l'enveloppe convexe de A : c'est la réunion des segments de droite et des triangles dont les extrémités ou sommets appartiennent à A. Une extension de ce résultat est aussi valable dans $\mathbf{R}^n$, quel que soit n.
L'enveloppe convexe d'un ensemble ouvert est toujours ouverte.
En revanche, celle d'un fermé n'est pas toujours fermée. Ainsi en témoigne, dans $\mathbf{R}^2$, l'ensemble fermé $A = \{a\} \cup D$, où D est une droite qui ne contient pas le point a ; l'enveloppe convexe de A est la bande horizontale du plan comprise entre D et sa parallèle passant par a, mais les points de cette dernière, en dehors de a lui-même, ne font pas partie de l'enveloppe convexe.
Toutefois, les fermés, lorsqu'ils sont bornés (donc compacts), font preuve de plus de docilité. En effet, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte. On peut alors se représenter intuitivement l'enveloppe convexe, si A est un ensemble de $\mathbf{R}^2$, comme la partie du plan délimitée par un lasso qui enserre A. Si par exemple A est le graphisme de la lettre majuscule W, le lasso délimite le trapèze plein dans lequel s'insère la lettre.
Tout convexe coïncide clairement avec sa propre enveloppe convexe. Il serait moins banal de pouvoir représenter un ensemble convexe comme l'enveloppe convexe d'une partie aussi réduite que possible. Un premier résultat de ce type est le suivant : à l'exception de $\mathbf{R}^n$ et d'un demi-espace, tout fermé convexe est l'enveloppe convexe de sa frontière [10] (éventuellement relative). Par exemple, dans $\mathbf{R}^2$, un disque plein est l'enveloppe convexe du cercle le délimitant. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point.

Un autre type d'enveloppe joue un rôle essentiel en géométrie convexe. Il fait appel au concept de *cône* (sous-entendu ici de sommet l'origine) : on entend par là un ensemble A de $\mathbf{R}^n$ qui n'est la réunion de demi-droites issues de l'origine.
A partir de ce concept, on définit l'*enveloppe conique* de A qui est le cône engendré par A. Formellement, l'enveloppe conique de l'ensemble A (supposé non vide) est $[0\,, +\infty[\; A$.

[10] Dans un espace vectoriel quelconque, la notion de frontière est remplacée par celle de marge.

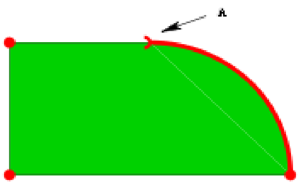
On constate notamment une forte propension de cette enveloppe conique à ne pas être fermée, même quand A l'est. L'éventuelle convexité de A ne modifie pas sensiblement ce pronostic. Des chercheurs ont essayé de résoudre ce qu'ils ont appelé l'« énigme de l'enveloppe conique fermée » : ils ont réussi à résoudre cette question dans tous les cas possibles [11], le plus intéressant étant celui où l'origine est en dehors du convexe fermé A. Ils ont ainsi démontré que l'enveloppe convexe de A est fermée si et seulement si l'enveloppe convexe de $A \cup \{O\}$ est elle-même fermée, ce qui se produit sous la condition nécessaire et suffisante que O est situé dans ce qu'on appelle la *gaine* de A ; la caractérisation précise de celle-ci dépasse le cadre de cet article.
De tels résultats admettent de multiples extensions et variantes.

5.2. Structure extrémale

On appelle *point extrême* d'un convexe A un point a qui n'est pas situé entre deux points de A, c'est-à-dire qui n'appartient à aucun segment dont les extrémités soient des points de A distincts de a. Pour faciliter le langage, on appelle quelquefois *profil* de A l'ensemble des points extrêmes de A. Par exemple, dans le plan, le profil d'un polygone convexe est l'ensemble constitué des sommets.
Le profil d'un convexe est souvent caractéristique de l'ensemble. Par exemple, un polygone convexe ou un disque plein sont les enveloppes convexes de leur profil.

Dans $\mathbf{R}^n$, énonçons (sans preuve) quelques résultats de base concernant cette notion.
Le profil d'un ensemble convexe est inclus dans la frontière de l'ensemble.
Le profil d'un convexe fermé qui contient au moins une droite est vide. Celui d'un convexe fermé non vide qui ne contient aucune droite n'est pas vide.
Tout ensemble convexe et compact est l'enveloppe convexe de son profil. Cet énoncé important, qui renforce sensiblement une propriété énoncée dans la section précédente, porte le nom de *théorème de Krein-Milman* parce qu'il a été démontré, en 1940, par le mathématicien ukrainien Mark Krein (1907-1989) et par l'israélien David Milman (1912-1982).

De tels énoncés peuvent être illustrés, dans le plan, par l'ensemble représenté ci-dessous en vert, ses points extrêmes étant tracés en rouge.



Points extrêmes d'un convexe (en rouge)
(sources : fr.wikipedia.org)

[11] Cette étude a été publiée dans l'article [Bair-Jongmans 1983]. Lorsqu'il en reçut un tiré-à-part, V. Klee écrivit à F. Jongmans le premier mai 1984 : « I appreciated your calling my attention to recent work of your school concerning closedness of cones and related questions ; I think that some of those results will be useful to me."

Dans la pratique, les propriétés énoncées ci-dessus, et leurs variantes ou généralisations, sont des indications précieuses pour l'intelligence des fondements géométriques de la programmation mathématique. Ainsi, en programmation linéaire, l'éventuel optimum de l'objectif est atteint en un point extrême de l'ensemble des programmes réalisables.

5.3. Comportement à l'infini

Dans $\mathbf{R}^n$, les ensembles non bornés sont souvent plus difficiles à manipuler que les compacts. Toutefois, les convexes fermés non bornés se laissent assez aisément étudier du fait qu'ils ont un comportement « à l'infini » assez conforme à une certaine intuition. De fait, considérons un tel convexe *A* et un de ses points x. Il apparaît que *A* inclut entièrement une demi-droite *D* issue de x, sinon il serait borné. Au surplus, la « direction » d'une telle demi-droite semble indépendante de son extrémité, en ce sens que toute demi-droite *D'* partant d'un point x' quelconque de *A* et « parallèle » à *D* est également située dans *A*. Ainsi cette direction peut être imaginée comme donnant naissance à une sorte de « point à l'infini » appartenant à *A*, de sorte que tout « segment » joignant x ou x' et ce point à l'infini (segment qui coïncide en fait avec *D* ou *D'*) est inclus dans *A*. L'ensemble de tels points à l'infini forme ce que l'on appelle le *cône de récession* de *A*. Ce cône, qui est aussi convexe, peut être défini rigoureusement. Formellement, il s'agit de l'ensemble suivant : $\{y \neq 0 : x + \alpha y \in A\}$ pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout point $x \in A$; c'est encore l'ensemble des points y tels que $A + y$ est inclus dans *A*.

Ce concept joue un rôle de premier plan dans une kyrielle de problèmes de géométrie convexe. Contenons-nous pour l'heure de signaler un résultat intéressant qui relie les enveloppes conique et convexe d'un ensemble *A* convexe fermé et non vide. Nous savons déjà que l'enveloppe conique *C* de *A* n'est pas toujours fermée, mais nous pouvons préciser que l'adhérence de *C* s'obtient en prenant la réunion de *C* avec le cône de récession de *A*. Par exemple, si *A* désigne dans le plan la demi-droite verticale vers le haut issue du point de coordonnées (1 , 0), soit $A = \{(1\,,\alpha) : \alpha \geq 0\}$, l'enveloppe conique de *A* coïncide avec tout le premier quadrant sauf l'axe vertical ; ce dernier se trouve toutefois dans l'adhérence de *C* et n'est rien d'autre que le cône de récession de *A*.
Une autre application intéressante du cône de récession est donnée ci-dessous.

5.4. Séparation de deux ensembles

La notion de séparation se base sur le fait que, dans $\mathbf{R}^n$, un hyperplan *H*, c'est-à-dire un ensemble défini par une équation du type $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha$, divise l'espace en deux, en ce sens que le complémentaire de *H* est la réunion de deux convexes ouverts qui sont disjoints : ce sont les deux demi-espaces ouverts définis par l'inégalité $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n < \alpha$ ou $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n > \alpha$. On leur associe les demi-espaces fermés caractérisés par une inégalité large au lieu d'une stricte : ceux-ci sont donc obtenus en prenant la réunion d'un demi-espace ouvert avec *H* lui-même. Dans le cas où $n = 2$, un hyperplan est une droite et les demi-espaces sont des demi-plans.

L'étude de la séparation de deux ensembles se fait essentiellement dans le cadre des ensembles convexes, puisque la séparation de deux ensembles quelconques équivaut à celle de leurs enveloppes convexes.

Considérons donc, au sein de $\mathbf{R}^n$, deux ensembles convexes A et B, supposés non vides, et présentons quelques façons de les séparer.

Les ensembles A et B sont *séparés* par un hyperplan H lorsque A est situé dans un des demi-espaces fermés associés à H et B dans l'autre. Evidemment, un hyperplan qui contient la réunion de A et de B sépare ces deux ensembles ; il s'agit alors de la *séparation triviale* qui permet même à A d'être inclus dans B. Pour éviter cette séparation triviale qui n'est guère intéressante, on introduit la *séparation franche* (on *propre*). Un ensemble A est franchement séparé de B par H lorsque A et B sont séparés par H et que celui-ci n'inclut pas $A \cup B$.

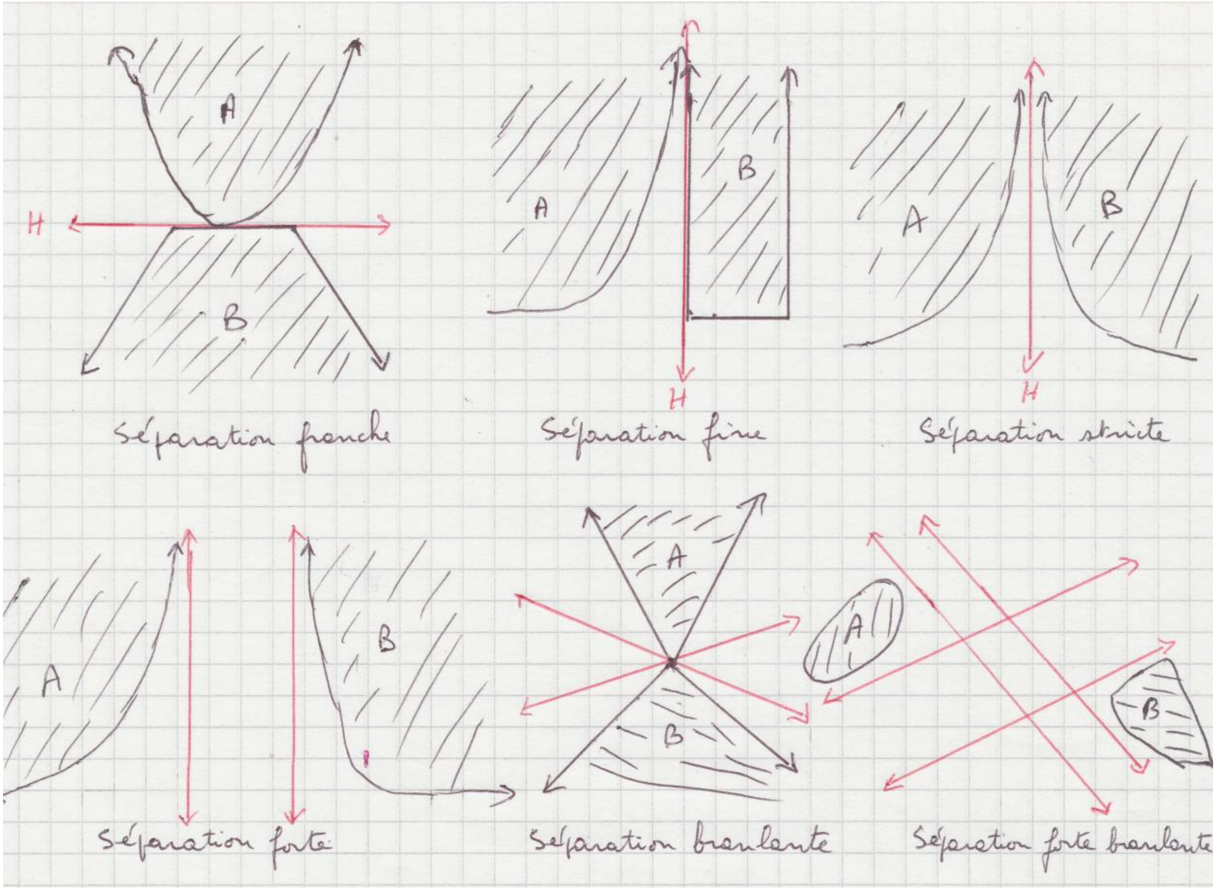
Un ensemble A est *finement séparé* de B par H lorsque A est séparé de B par H et que celui-ci est disjoint de A ou de B, ou encore, de façon équivalente, lorsqu'un des ensembles A ou B est inclus dans un demi-espace ouvert associé à H, et le second ensemble l'est dans l'autre demi-espace fermé.

Un ensemble A est *strictement séparé* de B par H lorsque A est séparé de B par H et que celui-ci est disjoint de A et de B ou, de façon équivalente, lorsque A et B sont inclus chacun dans un des deux demi-espaces ouverts associés à H.

Un ensemble A est *fortement séparé* de B par H lorsque A est séparé de B par H et que celui-ci est situé entre deux de ses translatés (c'est-à-dire parallèles) séparant également A et B.

Une séparation est qualifiée de *branlante* s'il existe des hyperplans non parallèles séparant les deux ensembles considérés.

Illustrons ces définitions par des exemples typiques dans le plan. Les ensembles convexes à séparer sont tracés en noir (avec hachures), les flèches indiquant que la courbe (ou droite) considérée peut être prolongée indéfiniment, tandis que des hyperplans séparateurs (ici des droites) sont en rouge.



Des critères de séparation abondent dans la littérature. Ils font souvent appel à des outils théoriques qui ne sont pas tous présentés dans cet article introductif. C'est pourquoi, nous nous contentons de signaler ici (encore sans preuve) trois énoncés importants qui pourraient être améliorés moyennant le recours à une certaine technicité.
1) Soient A et B deux convexes non vides. Il existe un hyperplan H séparant franchement A et B si et seulement si leurs intérieurs [12] (le cas échéant relatifs) sont disjoints.
2) Soient A et B deux convexes fermés disjoints, non vides et dont les cônes de récession ne contiennent en commun que l'origine. Dans ces conditions, A et B peuvent être fortement séparés.
3) Deux convexes compacts disjoints admettent une séparation forte branlante.

Signalons encore que la théorie de la séparation de deux ensembles s'avère très utile en analyse fonctionnelle, en théorie du contrôle, en optimisation, …. Par ailleurs, des chercheurs ont réussi à étendre l'idée de séparation de deux ensembles au cas de n'importe quelle famille finie d'ensembles.

6. Généralisations de la convexité

Cherchant à élargir leur champ d'étude, des mathématiciens proposent différentes généralisations de la convexité.

[12] Au sein d'un espace vectoriel quelconque, la notion d'intérieur est remplacée par celle d'internat.

Présentons succinctement deux d'entre elles, particulièrement naturelles : la première concerne des ensembles tandis que la seconde se rapporte à des fonctions.

Par souci de simplicité, nous nous plaçons encore dans $\mathbf{R}^n$, le classique espace numérique à n dimensions, bien que nos propos pourraient être présentés dans des espaces vectoriels plus généraux (même de dimension infinie). Nous allons y considérer un ensemble A non vide et une fonction f à valeurs réelles et définie sur A.

6.1. Ensembles étoilés

Alors que la géométrie des convexes possède une longue histoire (voir ci-dessus), celle des ensembles étoilés (*starshaped* en anglais) est récente puisqu'elle est seulement apparue durant la seconde moitié du siècle dernier. Cette notion nouvelle généralise l'ancienne tout en lui restant fort proche. En effet, comparons de manière formelle les deux définitions, en notant $[x\!:y]$ le segment de droite d'extrémités x et y :

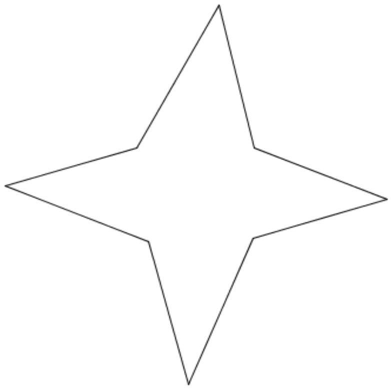
$$A \text{ est } convexe \iff \forall x \in A \text{ et } \forall y \in A, [x\!:y] \subset A$$
$$A \text{ est } étoilé \iff \exists x \in A \text{ et } \forall y \in A, [x\!:y] \subset A$$

Comme on peut le constater, les deux formulations ne diffèrent que par un seul quantificateur.

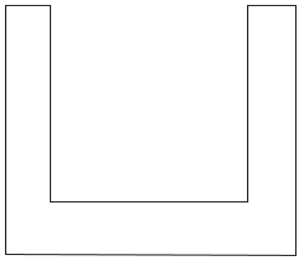
Plus intuitivement, on peut présenter la notion d'ensemble étoilé en invoquant la notion de *visibilité* : pour deux points x et y d'un ensemble A, on dit que *x voit y via* A si $[x\!:y] \subset A$. De plus, pour un point x de A, on appelle l'*étoile* (*star* en anglais) de x dans A l'ensemble $\mathrm{st}(x : A) = \{y \in A : [x : y] \subset A\}$; en d'autres termes, st(x : A) est l'ensemble de tous les points de A qui sont vus depuis x via A ; ainsi, un ensemble A est étoilé s'il existe un point $x \in A$ tel que $\mathrm{st}(x : A) = A$.

En général, on appelle *noyau* (*kernel* en anglais) de A, l'ensemble, noté ker A, composé de tous les points $x \in A$ tels que $\mathrm{st}(x : A) = A$. Il est aisé de démontrer que ker A est toujours convexe et que A est convexe si et seulement si ker $A = A$.
Conformément aux lignes précédentes, signalons que certains auteurs appellent l'ensemble ker A le *noyau convexe* ou encore le *mirador* de A.

Bien entendu, tout ensemble convexe est étoilé, mais il existe des ensembles étoilés non convexes



Un ensemble étoilé



Un ensemble non étoilé

(

(source : https://ww w.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./e/etoile.html)

Si A est étoilé, on appelle *composante convexe* de A tout sous-ensemble convexe maximal (pour l'inclusion ensembliste) de A. Plusieurs auteurs ont démontré indépendamment que A est étoilé si et seulement si l'intersection de toutes ses composantes convexes est non vide.

La plupart des thèmes abordés en géométrie peuvent être adaptés pour les ensembles étoilés.

Désormais, la géométrie des ensembles étoilés intervient de façon naturelle dans de nombreux secteurs des mathématiques, notamment en analyse fonctionnelle, en géométrie classique (par exemple, avec l'étude des polytopes étoilés), en géométrie computationnelle, en géométrie intégrale, en programmation mathématique, en recherche opérationnelle, etc.

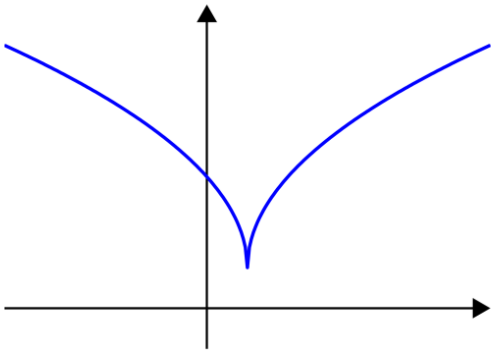
Signalons encore l'existence d'autres généralisations ensemblistes intéressantes de la convexité obtenues en retenant parmi les ensembles étoilés ceux qui possèdent certaines propriétés particulières liées à des attributs topologiques (intérieur, adhérence, frontière) ou à leurs substituts algébriques (internat, enveloppe algébrique, marge). Ainsi, des membres de l'ELC ont étudié en profondeur les ensembles irradiés ou algébriquement irradiés, ainsi que les expansés aussi bien en dimension finie qu'au sein d'un espace de dimension infinie.

6.2. Fonctions quasi-convexes

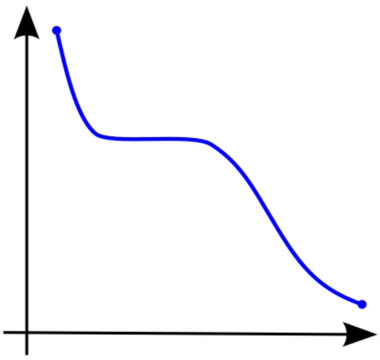
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble convexe A de $\mathbf{R}^n$.
La classique idée de convexité pour une fonction numérique (voir ci-dessus) peut être étendue en modifiant légèrement la définition donnée par Jensen. Ainsi, on introduit les notions nouvelles de fonctions *quasi-convexe* et *quasi-concave* à l'aide des définitions formelles suivantes qui peuvent être utilement comparées à celle d'une fonction convexe rappelée en premier lieu :

f convexe sur $A \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$
f quasi $-$ convexe sur $A \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq max\{f(x), f(y)\}$
f quasi-concave sur $A \Leftrightarrow -f$ quasi $-$ convexe sur A.

Il est clair qu'une fonction *f* convexe sur *A* est quasi-convexe sur *A*, mais il existe des fonctions quasi-convexes qui ne sont pas convexes. En particulier, toute fonction univariée monotone sur un intervalle de la droite numérique y est à la fois quasi-convexe et quasi-concave.



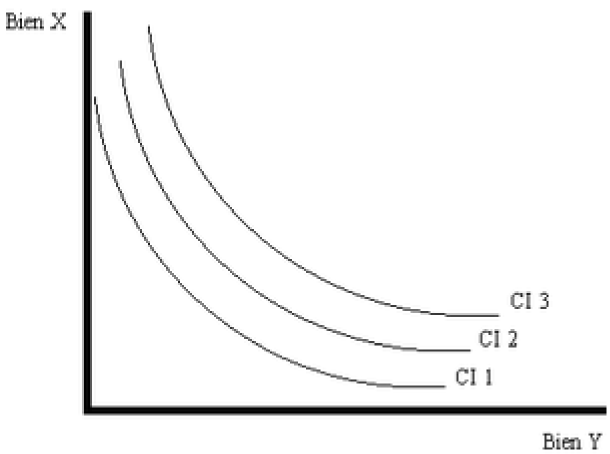
Fonction quasi-convexe, non convexe



Fonction monotone, non convexe, mais à la fois quasi-convexe et quasi-concave

(Source : Wikipedia)

De façon équivalente, on peut introduire le concept de quasi-convexité de manière assez intuitive en faisant appel aux sous-niveaux (ou sur-niveaux) de *f*, c'est-à-dire aux ensembles de la forme $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$ (ou $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$). De fait, *f* est quasi-convexe sur *A* si et seulement si, pour tout réel α, l'ensemble $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$ est convexe ; semblablement, *f* est quasi-concave sur *A* si et seulement si $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$ est convexe. Cette propriété est utile en micro-économie (voir [Justens 2022b]) : on y exploite par exemple le fait que, lorsqu'un consommateur achète deux biens *X* et *Y*, ses courbes d'indifférence, c'est-à-dire celles d'équation $f(x) = \alpha$ où *f* désigne la fonction d'utilité en question, tournent leur concavité vers le haut.



(source : wikipedia)

L'hypothèse de quasi-convexité (ou de quasi-concavité) s'avère particulièrement intéressante dans des problèmes d'optimisation (voir Tangente HS n° 72). Par exemple, tout maximum (ou minimum) local d'une fonction non constante mais quasi-convexe (ou quasi-concave) est global.

Il existe de nombreuses autres variantes des notions présentées ci-dessus. Citons par exemple les fonctions strictement quasi-convexes, approximativement convexes, pseudo-convexes, etc. Elles ont toutes leur utilité, leurs applications et leurs propriétés spécifiques.

Remerciements

Cet article a vu le jour grâce à l'équipe rédactionnelle de la revue française *Tangente, l'aventure mathématique* qui a décidé de consacrer une partie de son magazine (n° 204, mars-avril 2022) au thème de la convexité. Vu la richesse du sujet, il a été décidé de réaliser un dossier plus volumineux que d'ordinaire.
J'exprime ma reconnaissance pour leur travail à Gilles Cohen, directeur de publication, à Martine Brilleaud, directrice de la rédaction et à Edouard Thomas, le secrétaire de rédaction.
J'y associe mes collègues Bertrand Hauchecorne et Daniel Justens qui ont alimenté ce dossier ; ce dernier a, de plus, relu plusieurs jets de mes propres articles et m'a aidé à les rendre plus accessibles pour un large public.
Je tiens aussi à remercier Madame Claire Jongmans, fille de François. Elle m'a transmis divers documents originaux que possédait son père, notamment l'abondante correspondance échangée entre Victor Klee et François Jongmans durant les années 1980.
Enfin, je remercie mon ami Albert Demoulin qui m'a aidé, à différentes reprises, au niveau de la présentation matérielle de cet article.

Références

[Bair 1970] Bair J., *Différents types de séparation pour deux ensembles convexes*, mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Licencié en Sciences Mathématiques, Université de Liège, Faculté des Sciences, 1970, 84 pages.

[Bair 1975] Bair J., *Séparation d'ensembles dans un espace vectoriel,* dissertation présentée pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences Mathématiques, Université de Liège, Faculté des Sciences, 1975, 225 pages.

[Bair 1984] Bair J., *Structure asymptotique et propriétés de séparation en géométrie convexe,* dissertation présentée en vue de l'obtention du grade d'Agrégé de l'Enseignement Supérieur, Université de Liège, Faculté des Sciences, 1984, 199 pages.

[Bair 2014] Bair J., A la mémoire du géomètre François Jongmans, *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, n° 11, 2014 ; une version électronique est accessible sur le site de l'Académie de Belgique ou sur celui d'Orbi de l'Université de Liège.

[Bair 2018] Bair J., *Deux siècles de statistique à l'Université de Liège,* Atelier des Presses de l'Université de Liège, 2018, 108 pages.

[Bair 2021] Bair J., Flash-back sur l'Agrégation de l'Enseignement Supérieur obtenue par des mathématiciens à l'Université de Liège, publication électronique sur le site Orbi de l'Université de Liège, 2021, 34 pages ; URL permanente : http://hdl.handel.net/2268/258826.

[Bair 2022a] Bair J., Une théorie moderne aux origines anciennes. Dossier sur la "convexité", *Tangente 204,* 2022, pp. 12-13.

[Bair 2022b] Bair J., La géométrie convexe. Dossier sur la "convexité", *Tangente 204*, 2022, pp. 18-20.

[Bair 2022c] Bair J., Au-delà de la convexité. Dossier sur la "convexité", *Tangente 204,* 2022, pp. 24-25.

[Bair-Fourneau 1975] Bair J. – Fourneau R., *Etude géométrique des espaces vectoriels*. Lecture Notes in Mathematics . Tome 1 : *Une Introduction*, Vol. 489, Springer Verlag, Berlin etc. 1975, 185 pages.

[Bair-Fourneau 1980] Bair J. – Fourneau R., *Etude géométrique des espaces vectoriels*. Lecture Notes in Mathematics . Tome 2 : *Polyèdres et Polytopes Convexes*, Vol. 802, Springer Verlag, Berlin etc., 1980, 283 pages.

[Bair-Jongmans 1970] Bair J. – Jongmans F., Séparation franche dans un espace vectoriel, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 39, 1970, pp. 474-477.

[Bair-Jongmans 1983] Bair J. – Jongmans F., Sur l'énigme de l'enveloppe conique fermée, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 52, 1983, pp. 285-294.

[Berger1978] Berger M., *Géométrie 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes,* 1978, CEDIC : F. Nathan, 176 pages.

[Berger 2006] Berger M., *Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà. De la puissance à la complexité d'une notion simple* - Volume 2, Ellipses, Paris, 144 pages.

[Bragard 2004] Bragard L., Le développement de l'enseignement des méthodes quantitatives au sein de l'Ecole d'Administration des Affaires de l'Université de Liège. 1965-2005 : Historique rédigé à l'occasion du départ à la retraite des professeurs Christian De Bruyn et René Moors. Dans *Regards croisés sur les méthodes quantitatives de gestion*. Ouvrage coordonné par coord. J. Bair et V. Henry, Les Editions de l'Université de Liège, 2004, pp. 1-18.

[De Wilde M. – Jongmans F. 1983] De Wilde M. – Jongmans F., Proposition de décerner le titre de docteur honoris causa au professeur Victor Klee, Université de Liège, Faculté des Sciences, documentation personnelle de F. Jongmans, 1983.

[De Wilde M. – Jongmans F. 1984] De Wilde M. – Jongmans F., Eloge du docteur honoris causa Victor Klee, Université de Liège, documentation personnelle de F. Jongmans, 1984.

[Deumlich *et al* 1978] Deumlich R. – Elster K.-H. – Nehse R., Recent Results on Separation of Convex Sets, *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, Vol. 9, 1978, n° 2, pp. 273-296.

[Greenberg-Perskalla 1971] Greenberg H.J. – Pierskalla W.P., A review of quasi-convex functions , *Operations Research*, vol. 19, n^o 7, 1971, pp. 1553-1570; adresse électronique : https://doi.org/10.1287/opre.19.7.1553.

[Grünbaum 2003] Grünbaum B., *Convex polytopes*. Editors : V. Kaldel, V. Klee, G.M. Ziegler. Collection “Graduate Texts in Mathematics”, Springer, 2003, 489 pages.

[Grünbaum *et al* 2007] Grünbaum B., Phelps R. -Renz P. - Ross K., Remembering Vic Klee , *Mathematical Association of America*, Washington, DC, vol. 27, n^o 8, 2007, pp. 20–22.

[Hansen *et al* 2020] Hansen G. – Herburt I. – Martini H. – Mozynska M., Starshaped sets, *Aequationes mathematicae*, volume 94, 2020, pp. 1001–1092 ; adresse électronique : https://link.springer.com/article/10.1007/s00010-020-00720-7.

[Hauchecorne 2022] Hauchecorne B., Des fonctions utiles en analyse – fonctions convexes et inégalités. Dossier sur la “convexité”, *Tangente 204*, 2022, pp. 14-15, 17.

[Jongmans 1961] Jongmans F., Variations sur le thème des extrema, *Bull. Soc. Roy. Sciences de Liège*, 30, 1961, pp. 229-242.

[Jongmans 1962] Jongmans F., Remarque sur le problème des extrema, *Bull. Soc. Roy. Sciences de Liège,* 31, 1962, pp. 334-335.

[Jongmans 1968a] Jongmans F., Théorème de Krein-Milman et programmation mathématique, *Bull. Soc. Roy. Sciences de Liège,* 37, 1968, pp. 261-270.

[Jongmans 1968b] Jongmans F., Petit choral et fugue sur le thème de la séparation, *Bull. Soc. Roy. Sciences de Liège*, 37, 1968, pp. 539-541.

[Jongmans 1970] Jongmans F., Quelques développements récents liés à la notion de convexité, *Comptes Rendus des journées nationales*, Centre belge de recherches mathématiques, 1970, pp. 22-36.

[Jongmans 1975] Jongmans F., Espaces vectoriels topologiques, syllabus de cours, Faculté des Sciences de l’université de Liège, 1975, 237 pages.

[Jongmans 1980] Jongmans F., Cris et chuchotements des cônes, *Bull. Soc. Roy. Sciences de Liège*, 49, 1980, pp. 261-270.

[Jongmans 1981] Jongmans F., *Etude des cônes associés à un ensemble*. Notes d’un séminaire donné à la Faculté des Science de l’Université de Liège, année académique 1980-1981, 220 pages.

[Jongmans 1996] Jongmans F., *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie – Républicain sans république*, Société Belge des Professeurs de Mathématique d’expression française, Mons, 1996, 222 pages.

[Jongmans 1997] Jongmans F., Godeaux Lucien. *Nouvelle biographie nationale,* Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, tome 4,1997, pp. 188-191.

[Justens 2022a] Justens D., La convexité en finance. Dossier sur la "convexité", *Tangente 204*, 2022, p. 21.

[Justens 2022b] Justens D., Optimiser la consommation. Dossier sur la "convexité", *Tangente 204,* 2022, pp. 22-23.

[Klee 1957] Klee V., Extremal structure of convex sets, *Arch. Math.*, 8, 1957, pp. 234-240.

[Klee 1963] Klee V., Convexity, Proc. Symp. Pure Math., *Ameri. Math. Monthly*, 7, 1963, 516 pages.

[Klee 1968] Klee V., Maximal separation theorems for convex sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 134, 1968, pp. 133-147.

[Klee 1969] Klee V., Separation and support properties of convex sets – A survey, in Balkrishnan, *Control theory and the calculus of variations*, Acad. Press, New York, 1969.

[Klee 1970] Klee V., Convexité, *Encyclopédie Universalis*, Paris, 1970, pp. 982-985.

[Klee 1971] Klee V., What is convex set ?, *Amer. Math. Monthly*, 78, 1971, pp. 613-631.

[Klee 1979] Klee V., Some Unsolved Problems in Plane Geometry, *Mathematics Magazine*, vol. 52, 1979, p. 131–145.

[Klee-Reay 1998] Klee V. – Reay J.R., Surprising but easily proved geometric decomposition theorem, *Mathematics Magazine*, vol. 71 (1), 1998, pp. 3-11.

[Papadopoulos 2019] Papadopoulos A., Convexity in Greek Antiquity. Dans *Geometry in History* (éd. S.G. Dani – A. Papadolouos, Springer Verlag, 2019, 750 pages), pp. 131-152; version électronique : arXiv :1905.08519v1 [math.HP], 21 mai 2019.

[Seneta 2015] Seneta E., In memoriam François Jongmans (1921-2014), mathematical historian, *Math. Scientist*, 40, 2015, pp. 67-79.

[Valentine 1964] Valentine F., *Convex sets*, Mc Graw-Hill, New York, 1964, 238 pages.