UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

DEFAUTS D'ORIENTATION ET DE BATTEMENT

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D50, Octobre 2009

Défauts d'orientation et battement

1. Formulation du problème

Les défauts d'orientation se caractérisent, comme les défauts de forme, par une fonction d'encadrement $f(\mathbf{x};\lambda)$, mais *à paramètres donnés*. Pour un compact K à mesurer, la donnée des paramètres constitue la *référence*, et le défaut d'orientation, par rapport à cette référence est tout simplement la valeur d'encadrement

$$enc(K;\lambda) = \sup_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x};\lambda) - \inf_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x};\lambda)$$

Bien entendu, la signification des paramètres dépend de ce que l'on veut tester : parallélisme, perpendicularité, etc .

2. Relation avec le défaut de forme

La même fonction d'encadrement définit donc aussi un défaut de forme qui, rappelons-le, est donné par

$$def(K) = \inf_{\lambda} enc(K;\lambda)$$

Par exemple, c'est la même fonction d'encadrement qui définit le défaut de planéité et le défaut de parallélisme. En fait, le défaut de planéité est la plus petite valeur des défauts de parallélisme à toutes les orientations de plans possibles. Il en découle que pour λ donné, on a la relation

$$def(K) = \inf_{\mu} enc(K;\mu) \leq enc(K;\lambda)$$

ce qui signifie que *le défaut d'orientation est toujours au moins égal au défaut de forme associé*. Ceci justifie la règle de bonne pratique selon laquelle le défaut de forme doit être plus petit que le défaut d'orientation si l'on veut que ce dernier conserve sa valeur intuitive.

Ce résultat signifie aussi que si l'on recherche par exemple le défaut de planéité d'une surface en testant en fait le *parallélisme au marbre* après *dégauchissage* approximatif de la surface (c'est la pratique traditionnelle), on obtiendra toujours une approximation *par excès* du défaut de planéité.

3. Cas de la référence imparfaite

Dans le cas où la référence choisie est une surface physique elle-même entachée d'un défaut de forme, il est de pratique courante d'utiliser une *référence simulée*, surface de même type, mais parfaite, qui s'ajuste « au mieux » à la surface réelle. Les règles spécifiées dans les normes [NFE04-554] sont d'ailleurs assez discutables. À notre sens, la surface devant être prise pour référence est la surface que l'on ajuste en minimisant *l'écart maximum* selon la procédure de recherche du défaut de forme et non pas, comme le préconisent certains (pour des raisons de simplicité) en minimisant l'écart quadratique moyen (ou la norme d'ordre 2 du jeu d'écarts, ce qui est équivalent).

Mais, dira-t-on, cela change-t-il beaucoup le résultat ? C'est ce que nous nous proposons d'étudier dans quelques cas pratiques.

4. Cas de l'orientation d'une droite dans le plan

Dans ce cas, la fonction d'encadrement est, rappelons-le,

$$f(x, y; \varphi) = x \cos\varphi + y \sin\varphi$$

où $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ est le vecteur normal à la droite de référence. Pour une *petite* variation de φ on peut naturellement se limiter au premier ordre de la variation de f,

$$\delta f(x, y; \varphi, \delta\varphi) = (-x \sin\varphi + y \cos\varphi)\delta\varphi$$

Notant que

$$\sup_K (f + \delta f) \leq \sup_K f + \sup_K \delta f$$
$$\inf_K (f + \delta f) \geq \inf_K f + \inf_K \delta f$$

on obtient immédiatement, en notant *enc** la valeur d'encadrement obtenue avec $f+\delta f$,

$$enc^*(K; \varphi, \delta\varphi) \leq enc(K; \varphi) + \sup_K \delta f - \inf_K \delta f$$

A l'inverse, on a

$$\sup_K f \leq \sup_K (f + \delta f) - \inf_K \delta f$$
$$\inf_K f \geq \inf_K (f + \delta f) - \sup_K \delta f$$

d'où

$$enc(K; \varphi) \leq enc^*(K; \varphi, \delta\varphi) + \sup_K \delta f - \inf_K \delta f$$

Rassemblant ces deux résultats, on obtient

$$\left|enc^*(K;\varphi,\delta\varphi)-enc(K,\varphi)\right|\leq \sup_K \delta f-\inf_K \delta f$$

Soient alors deux points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) de K. On a

$$\delta f(x_1,y_1;\varphi,\delta\varphi)-\delta f(x_2,y_2;\varphi,\delta\varphi)=\left(-(x_1-x_2)\sin\varphi+(y_1-y_2)\cos\varphi\right)\delta\varphi$$

et par l'inégalité du produit scalaire,

$$\left|\delta f(x_1,y_1;\varphi,\delta\varphi)-\delta f(x_2,y_2;\varphi,\delta\varphi)\right|\leq\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,|\delta\varphi|\leq diam(K)|\delta\varphi|$$

où $diam(K)$ est la diamètre de l'ensemble K. Ceci étant vrai quels que soient les points 1 et 2, on a encore

$$\left|\sup_{(x_1,y_1)\in K}\delta f(x_1,y_1;\varphi,\delta\varphi-\delta f(x_2,y_2;\varphi,\delta\varphi)\right|\leq diam(K)|\delta\varphi|$$

quel que soit le point 2, et donc aussi

$$\left|\sup_{(x_1,y_1)\in K}\delta f(x_1,y_1;\varphi,\delta\varphi)-\inf_{(x_2,y_2)\in K}\delta f(x_2,y_2;\varphi,\delta\varphi\right|\leq diam(K)|\delta\varphi|$$

Il en résulte que

$$\left|enc^*(K;\varphi,\delta\varphi-enc(K;\varphi)\right|\leq diam(K)|\delta\varphi|$$

En pratique, $diam(K)$ représente approximativement la longueur de la pseudo droite mesurée. Il est alors aisé de se rendre compte que la présente estimation est à peu près optimale.

5. Cas de l'orientation d'un plan

Le principe d'évaluation est le même. La fonction d'encadrement est ici

$$f(x,y,z;\theta,\varphi)=x\cos\theta+y\sin\theta\cos\varphi+z\sin\theta\sin\phi$$

On a immédiatement

$$\begin{aligned}&\delta f(x,y,z;\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi)=\\&(-x\sin\theta+y\cos\theta\cos\varphi+z\cos\theta\sin\varphi)\delta\theta+(-y\sin\theta\sin\varphi+z\sin\theta\cos\varphi)\delta\varphi\end{aligned}$$

Cette expression est linéaire en *x,y,z*. On notera que

$$\left|-x\sin\theta + y\cos\theta\cos\varphi + z\cos\theta\sin\varphi\right| = \left|-x\sin\theta + \cos\theta(y\cos\varphi + z\sin\varphi\right|$$
$$\leq \sqrt{x^2 + (y\cos\varphi + z\sin\varphi)^2}$$

et que

$$\left|-y\sin\theta\sin\varphi + z\sin\theta\right| \leq \left|\sin\theta\right|\left|-y\sin\varphi + z\cos\varphi\right| \leq \left|-y\sin\varphi + z\cos\varphi\right|$$

ce qui entraîne

$$\left|\delta f(x,y,z;\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi)\right| \leq \sqrt{x^2 + (y\cos\varphi + z\sin\varphi)^2}\left|\delta\theta\right| + \left|-y\sin\varphi + z\cos\varphi\right|\left|\delta\phi\right|$$
$$\leq \sqrt{x^2 + (y\cos\varphi + z\sin\varphi)^2 + (-y\sin\varphi + z\cos\varphi)^2}\sqrt{(\delta\theta)^2 + (\delta\varphi)^2}$$
$$\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{(\delta\theta)^2 + (\delta\varphi)^2}$$

Posant dans cette relation $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ et $z = z_1 - z_2$, on obtient de la même façon que pour une droite

$$\left|enc^*(K;\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi) - enc(K;\theta,\varphi)\right| \leq diam(K)\sqrt{(\delta\theta)^2 + (\delta\varphi)^2}$$

Ici encore, *diam*(*K*) représente approximativement la plus grande longueur entre deux points du pseudo plan mesuré.

6. Battement d'un cercle imparfait

Le battement consiste en ceci : un centre **C** étant donné d'avance, on calcule pour chaque point **P** du cercle imparfait K la distance $\|\mathbf{P}-\mathbf{C}\|$. Le battement est la valeur d'encadrement

$$enc(K;\mathbf{C}) = \sup_K \|\mathbf{P}-\mathbf{C}\| - \inf_K \|\mathbf{P}-\mathbf{C}\|$$

Comment varie le battement lorsqu'on modifie le centre ? Soit **C*** un nouveau centre. On a d'abord, quel que soit $\mathbf{P} \in K$,

$$\|\mathbf{P}-\mathbf{C}^*\| \leq \|\mathbf{P}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\| \leq \sup_K \|\mathbf{Q}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\|$$

Le dernier membre étant une borne uniforme, on a encore

$$\sup_K \|\mathbf{P}-\mathbf{C}^*\| \leq \sup_K \|\mathbf{P}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\| \qquad (*)$$

On a également, pour tout **P** de *K*,

$$\|\mathbf{P}-\mathbf{C}\| \leq \|\mathbf{P}-\mathbf{C}^*\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\|$$

d'où

$$\|\mathbf{P}-\mathbf{C}^*\| \geq \|\mathbf{P}-\mathbf{C}\| - \|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\| \geq \inf_K \|\mathbf{Q}-\mathbf{C}\| - \|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\|$$

ce qui permet de conclure que

$$\inf_K \|\mathbf{P}-\mathbf{C}^*\| \geq \inf_K \|\mathbf{P}-\mathbf{C}\| - \|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\| \qquad (**)$$

Soustrayant (**) de (*), on obtient

$$enc(K,\mathbf{C}^*) \leq enc(K,\mathbf{C}) + 2\|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\|$$

En permutant les rôles de **C** et **C***, on obtient de même

$$enc(K,\mathbf{C}) \leq enc(K,\mathbf{C}^*) + 2\|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\|$$

de sorte que, finalement,

$$|enc(K,\mathbf{C}^*) - enc(K,\mathbf{C})| \leq 2\|\mathbf{C}-\mathbf{C}^*\|$$

C'est-à-dire que la variation du battement est au plus égale à deux fois la distance des deux centres. Cette évaluation est optimale, car elle est atteinte si les deux rayons extrêmes sont opposés et située sur la ligne joignant les deux centres.