UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

THEORIE DES ERREURS DE RECTITUDE ET DE PLANEITE

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D49 – Septembre 2008

THÉORIE DES ERREURS DE RECTITUDE ET DE PLANÉITÉ

1. Encadrement d'un compact de R^n par deux hyperplans parallèles

Dans ce qui suit, nous traiterons la rectitude dans R^2 et la planéité dans R^3. Comme les formalismes sont extrêmement voisins, nous ferons l'exposé dans le cadre général R^n. Etant donné un vecteur unitaire $\mathbf{a} \in R^n$, l'équation

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = c, \qquad \text{avec} \quad c \in R$$

définit un *hyperplan* de cet espace (à deux dimensions, il s'agit d'une droite et à trois dimensions, il s'agit d'un plan). Soit alors K un compact de R^n. Comme la fonction

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$$

est continue sur le compact K, elle y atteint ses bornes supérieure et inférieure. En d'autres termes, il existe un point de $\mathbf{y}$ de K tel que

$$\mathbf{a}^T \mathbf{y} = \sup_{x \in K} \mathbf{a}^T \mathbf{x} \overset{\Delta}{=} M(K, \mathbf{a})$$

et un point $\mathbf{z}$ de K tel que

$$\mathbf{a}^T \mathbf{z} = \inf_{x \in K} \mathbf{a}^T \mathbf{x} \overset{\Delta}{=} m(K, \mathbf{a})$$

Il est clair que pour tout point $\mathbf{x}$ de K, on a

$$m(K, \mathbf{a}) \le \mathbf{a}^T \mathbf{x} \le M(K, \mathbf{a})$$

ce qui signifie que K est tout entier du côté pointé par $\mathbf{a}$ par rapport à l'hyperplan d'équation

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = m(K, \mathbf{a})$$

et tout entier du côté pointé par ($-\mathbf{a}$) par rapport à l'hyperplan d'équation

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = M(K, \mathbf{a})$$

c'est-à-dire que ces deux plans *encadrent* le compact K. On ne peut en trouver de meilleurs, puisque chacun touche K. Nous appellerons *valeur d'encadrement de K pour la direction* **a** le nombre

$$\text{enc}(K,\mathbf{a}) = M(K,\mathbf{a}) - m(K,\mathbf{a})$$

qui n'est autre que la distance des deux hyperplans.

2. Passage à l'enveloppe convexe de K

2.1 – Ensembles convexes de R^n

2.1.1 – Définition

Un ensemble B de R^n est dit *convexe* si pour tout couple de points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de B, on a

$$(1-\theta)\mathbf{x} + \theta\mathbf{y} \in B$$

chaque fois que $\theta \in [0,1]$. Géométriquement, cela signifie que le segment qui joint deux points de B est entièrement contenu dans B.

2.1.2 - Théorème

Un ensemble B de R^n est convexe si et seulement si pour tout ensemble fini de nombres α_i tels que

$$\alpha_i \in [0,1], \quad i = 1,\dots,r \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$$

on a

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i \in B$$

chaque fois que les $\mathbf{x}_i$ *sont des éléments de B.*

Cette condition est évidemment suffisante, puisqu'elle contient la définition de la convexité comme cas particulier. Montrons qu'elle est nécessaire. Si B est convexe, elle est évidemment vraie pour r = 2. Montrons que si elle est vraie pour $r \le k$, elle est vraie pour $r = k+1$. On a

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i + \alpha_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right) \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j} \mathbf{x}_i\right] + \alpha_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}$$

Or, l'expression entre crochets est un élément de B par hypothèse, et la somme de son coefficient et de celui de $\mathbf{x}_{k+1}$ vaut l'unité.

2.2 – Définition de l'enveloppe convexe

Etant donné un ensemble A de R^n, on appelle *enveloppe convexe de A* et on note conv(A) l'ensemble des points de la forme

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i \in A \\ \alpha_i \in [0,1] \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1 \end{cases}$$

2.3 – Premières propriétés

2.3.1 – Convexité

Commençons par montrer que l'enveloppe convexe de A est convexe. Soient deux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de conv(A). On a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{y}_j \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in A,$$

les α_i et β_i suivant les règles ci-dessus. Alors, pour θ compris entre 0 et 1, on a

$$(1-\theta)\mathbf{x} + \theta\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{r} (1-\theta)\alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{s} \theta\beta_j \mathbf{y}_j \in \mathrm{conv}(K)$$

car

$$(1-\theta)\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \theta \sum_{j=1}^{s} \beta_j = (1-\theta) + \theta = 1$$

2.3.2 – Minimalité de l'enveloppe convexe

Montrons que *tout ensemble convexe B qui contient A contient également* conv(*A*). Soit en effet un point de conv(*A*). Il est de la forme

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

où les coefficients α_i répondent aux règles ci-dessus et les $\mathbf{x}_i$ sont éléments de *A*. Comme *B* contient *A,* les $\mathbf{x}_i$ sont également éléments de *B*. Mais alors, il en est de même de **x** du fait que *B* est convexe (théorème 2.1.2)

.Soit alors *K* un compact de R^n. *Montrons d'abord que son enveloppe convexe est également compacte*.

2.4 – Théorème de Carathéodory

D'une certaine manière, tout point de l'enveloppe convexe d'un ensemble *A* de R^n est la moyenne pondérée d'un certain nombre fini *r* de points de *A*. A priori, *r* peut être aussi grand que l'on veut. Le théorème de Carathéodory exprime que ce nombre peut toujours être ramené à $n+1$, où *n* est la dimension de l'espace. Très précisément,

Dans R^n, tout point de l'enveloppe convexe d'un ensemble A est de la forme

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

où les coefficients α_i sont positifs ou nuls et de somme 1 et où les $\mathbf{x}_i$ sont des éléments de A.

Pour démontrer ce théorème, considérons un point quelconque de l'enveloppe convexe de *A*. Il a évidemment la forme

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

où chaque $\mathbf{x}_i$ est élément de *A*, chaque α_i est non négatif, et $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$. Quitte à recalculer *r*, on peut supposer qu'aucun des α_i n'est nul. Supposons que $r > n+1$ (sinon, il n'y a rien à prouver). Nous allons montrer que l'on peut ramener la moyenne à $(r-1)$ points de *A*. En effet, comme l'espace est de dimension $n < (r-1)$, les $(r-1)$ points $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_1$ sont linéairement dépendants, ce qui signifie qu'il existe des nombres réels λ_2, …, λ_r non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{r} \lambda_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = 0$$

En posant

$$\lambda_1 = -\sum_{i=2}^{r} \lambda_i$$

on peut transformer cette relation en

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}_i = 0$$

où les λ_i ne sont pas tous nuls et vérifient par ailleurs

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$$

Pour que cette relation soit possible, l'un au moins des λ_i doit être strictement positif. Pour tout nombre réel β, on a alors

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i - \beta \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i - \beta\lambda_i) \mathbf{x}_i$$

En particulier, si l'on choisit pour β le nombre défini par la relation

$$\frac{1}{\beta} = \max_{1 \le i \le r} \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right\} = \frac{\lambda_j}{\alpha_j}$$

(ce qui implique forcément que λ_j est positif). On remarque que pour cette valeur de β, on a pour tout i allant de 1 à r

$$\alpha_i - \beta\lambda_i = \alpha_i - \frac{\alpha_j}{\lambda_j} \lambda_i \ge 0$$

En effet, si λ_i est négatif ou nul, c'est évident et si λ_i est strictement positif, cela résulte du fait que

$$\frac{\alpha_i}{\lambda_i} \ge \frac{\alpha_j}{\lambda_j}$$

Par ailleurs, il est clair que

$$\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - \beta\lambda_i) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i - \beta\sum_{i=1}^{r}\lambda_i = 1 - \beta.0 = 1$$

Enfin, comme par construction, $\alpha_j - \beta\lambda_j = 0$, on obtient

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1\,à\,r,\,i\neq j}(\alpha_i - \beta\lambda_i)\mathbf{x}_i$$

soit une moyenne de (r – 1) points.

On peut répéter ce processus jusqu'à obtenir une moyenne de (n + 1) points au plus, ce qui démontre le théorème.

2.5 – Corollaire

Ce théorème admet un corollaire important : *l'enveloppe convexe d'un compact de R^n est compacte.*

En effet, soit K un compact de R^n. En vertu du théorème de Carathéodory, son enveloppe convexe est

$$\text{conv}(K) = \left\{ \mathbf{x} \in R^n : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\mathbf{x}_i \;\; avec \;\; \mathbf{x}_i \in K,\; \alpha_i \geq 0,\; \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i = 1 \right\}$$

Or, l'ensemble Δ de R^{n+1} défini par

$$\Delta = \left\{ (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{n+1}) : \alpha_i \geq 0,\; i = 1, \ldots. n+1 \;\; et \;\; \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i = 1 \right\}$$

est compact. Dès lors, conv(K) est l'image dans R^n du compact $\Delta \,\mathrm{x}\, K^{n+1}$ de R^{2n+2}, par la fonction continue $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\mathbf{x}_i$. Or, on sait que l'image d'un compact par une fonction continue est compacte.

2.6 – Identité des encadrements de *K* et de conv*(K)*

Si nous avons introduit l'enveloppe convexe, c'est parce qu'elle possède la propriété suivante : *Soit K un compact de R^n. Pour un vecteur unitaire* **a** *donné, K et* conv(K) *ont les mêmes hyperplans encadrants* $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = m(K, \mathbf{a})$ *et* $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = M(K, \mathbf{a})$.

Soient en effet $m(K,\mathbf{a})$ et $M(K,\mathbf{a})$ les valeurs obtenues pour K. Il suffit de montrer que pour tout point $\mathbf{x}$ de conv(K), on a $m(K,\mathbf{a}) \le \mathbf{a}^T\mathbf{x} \le M(K,\mathbf{a})$. Or, ceci est évident, car pour

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

avec les α_i non négatifs et de somme égale à l'unité, on a

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i \begin{cases} \le \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M(K,\mathbf{a}) = M(K,\mathbf{a}) \\ \ge \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m(K,\mathbf{a}) = m(K,\mathbf{a}) \end{cases}$$

La conséquence de cette proposition est que, dans tout ce qui suit, on peut supposer K convexe.

3. Continuité de la valeur d'encadrement par rapport à la direction a

Nous allons montrer que lorsque **a** varie sur la sphère unité, la valeur d'encadrement enc(K,**a**) du compact K varie continûment. Le point de départ de la démonstration est le fait que pour $\mathbf{x} \in K$,

$$\left|\mathbf{a}^{*T}\ \mathbf{x} - \mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| \le \|\mathbf{a}^* - \mathbf{a}\|\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{a}^* - \mathbf{a}\| \sup_{\mathbf{x}\in K}\|\mathbf{x}\|$$

ce qui constitue une borne *uniforme*. Dès lors,

$$\sup_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathbf{a}^{*T}\ \mathbf{x} - \mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| \le \|\mathbf{a}^* - \mathbf{a}\| \sup_{\mathbf{x}\in K}\|\mathbf{x}\|$$

On a alors

$$\begin{aligned} M(K,\mathbf{a}^*) = \sup_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}^{*T}\ \mathbf{x}\right) &= \sup_{\mathbf{x}\in K}\left[\mathbf{a}^T\mathbf{x} + \left(\mathbf{a}^{*T}\ \mathbf{x} - \mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)\right] \\ &\le \sup_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right) + \sup_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathbf{a}^{*T}\ \mathbf{x} - \mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| \\ &\le M(K,\mathbf{a}) + \|\mathbf{a}^* - \mathbf{a}\| \sup_{\mathbf{x}\in K}\|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
M(K,\mathbf{a}) = \sup_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right) &= \sup_{\mathbf{x}\in K}\left[\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}-\left(\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}-\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)\right] \\
&\le \sup_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}\right)+\sup_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}-\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| \\
&\le M(K,\mathbf{a}^*)+\left\|\mathbf{a}*-\mathbf{a}\right\|\sup_{\mathbf{x}\in K}\left\|\mathbf{x}\right\|
\end{aligned}
$$

si bien que

$$
M(K,\mathbf{a})-\left\|\mathbf{a}*-\mathbf{a}\right\|\sup_{\mathbf{x}\in K}\left\|\mathbf{x}\right\| \le M(K,\mathbf{a}^*) \le M(K,\mathbf{a})+\left\|\mathbf{a}*-\mathbf{a}\right\|\sup_{\mathbf{x}\in K}\left\|\mathbf{x}\right\|
$$

ce qui signifie que $M(K,\mathbf{a})$ est une fonction continue de **a**.

Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
m(K,\mathbf{a}^*) = \inf_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}\right) &= \inf_{\mathbf{x}\in K}\left[\mathbf{a}^T\mathbf{x}-\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}-\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}\right)\right] \\
&\ge \inf_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)-\sup_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathbf{a}^T\mathbf{x}-\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}\right| \\
&\ge m(K,\mathbf{a})-\left\|\mathbf{a}*-\mathbf{a}\right\|\sup_{\mathbf{x}\in K}\left\|\mathbf{x}\right\|
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
m(K,\mathbf{a}) = \inf_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right) &= \inf_{\mathbf{x}\in K}\left[\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}-\left(\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}-\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)\right] \\
&\ge \inf_{\mathbf{x}\in K}\left(\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}\right)-\sup_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathbf{a}*^T\ \mathbf{x}-\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| \\
&\ge m(K,\mathbf{a}^*)-\left\|\mathbf{a}*-\mathbf{a}\right\|\sup_{\mathbf{x}\in K}\left\|\mathbf{x}\right\|
\end{aligned}
$$

donc

$$
m(K,\mathbf{a})-\left\|\mathbf{a}*-\mathbf{a}\right\|\sup_{\mathbf{x}\in K}\left\|\mathbf{x}\right\| \le m(K,\mathbf{a}^*) \le m(K,\mathbf{a})+\left\|\mathbf{a}*-\mathbf{a}\right\|\sup_{\mathbf{x}\in \mathbf{K}}\left\|\mathbf{x}\right\|
$$

et $m(K,\mathbf{a})$ est également continue.

La proposition découle alors du fait que $\operatorname{enc}(K,\mathbf{a}) = M(K,\mathbf{a}) - m(K,\mathbf{a})$..

4. Existence d'un encadrement optimal

Nous dirons que l'encadrement par des plans de normale **a** est *optimal* si pour toute autre orientation **a*** de la normale, on a

$$\text{enc}(M,\mathbf{a}^*) \geq \text{enc}(M,\mathbf{a})$$

Un tel encadrement *existe,* car la fonction enc(K,**a**), continue sur la sphère unité de R^n qui est compacte, y atteint ses bornes supérieure et inférieure. C'est cette valeur optimale de la valeur d'encadrement qui mesure le *défaut* (de planéité à trois dimensions et de rectitude à deux dimensions) :

$$\text{def}(K) = \min_{\|\mathbf{a}\|=1} \text{enc}(K,\mathbf{a})$$

5. Un critère de non-optimalité

La recherche du défaut est assez délicate dans le cas général. Mais en pratique, on dispose d'un nombre fini de points de mesure, ce qui ramène K à un nombre fini de points. L'enveloppe linéaire de K est alors un polyèdre dans l'espace ou un polygone dans le plan. Le contact de cette enveloppe avec l'un des hyperplans formant un encadrement peut alors être :

● Dans le plan : un sommet ou un côté de l'enveloppe.

● Dans l'espace ; un sommet, une arête ou une face de l'enveloppe.

On conçoit que dans un certain nombre de situations, il peut être possible de donner à la normale une petite perturbation sans modifier la zone de contact des deux hyperplans d'encadrement. Cela étant, on peut énoncer le théorème suivant :

Si le contact de l'enveloppe avec deux hyperplans encadrants de normale **a** *reste inchangé pour une direction de perturbation* **b**, *c'est-à-dire pour*

$$\mathbf{a}^* = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\mathbf{a} + \varepsilon\mathbf{b} \qquad \text{avec} \quad \varepsilon \in \left]-\eta,\eta\right[\quad , \quad \eta \neq 0 \quad , \quad \|\mathbf{b}\| = 1$$

alors l'encadrement n'est pas optimal.

Choisissons en effet **y** et **z** dans conv(K) tels que

$$\mathbf{y} \in \left\{\mathbf{x} : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = m(K,\mathbf{a})\right\} \quad \text{et} \qquad \mathbf{z} \in \left\{\mathbf{x} : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = M(K,\mathbf{a})\right\}$$

On a

$$enc(K,\mathbf{a}^*) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\mathbf{a}^T(\mathbf{z}-\mathbf{y}) + \varepsilon\mathbf{b}^T(\mathbf{z}-\mathbf{y}) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\text{enc}(K,\mathbf{a}) + \varepsilon\mathbf{b}^T(\mathbf{z}-\mathbf{y})$$

Dans le cas où $\mathbf{b}^T(\mathbf{z}-\mathbf{y}) \neq 0$, l'encadrement de normale **a** n'est pas optimal, car en choisissant ε de signe contraire à ce produit et suffisamment petit, on obtient

$$\text{enc}(K,\mathbf{a}^*) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\text{enc}(K,\mathbf{a}) - |\varepsilon|\left|\mathbf{b}^T(\mathbf{z}-\mathbf{y})\right| < \text{enc}(K,\mathbf{a})$$

Et si $\mathbf{b}^T(\mathbf{z}-\mathbf{y})=0$, on obtient

$$\mathrm{enc}(K,\mathbf{a}^*)=\sqrt{1-\varepsilon^2}\;\mathrm{enc}(K,\mathbf{a})<\mathrm{enc}(K,\mathbf{a})$$

Donc, dans les deux cas, l'encadrement n'est pas optimal.

6. Application dans le plan

Dans le plan, un polygone convexe peut être encadré par deux droites de trois manières différentes :

M1 – Les deux droites encadrantes contiennent chacune un côté du polygone.

M2 – Un des droites encadrantes contient un côté du polygone et l'autre n'en contient qu'un sommet.

M3 – Le contact du polygone avec les deux droites encadrantes est limité à un sommet de chaque côté.

Il résulte du critère de non-optimalité que la situation M3 n'est pas optimale. Dès lors, on peut affirmer que *l'encadrement ne peut être optimal que si l'un au moins des deux plans contient un côté du polygone.* Ceci limite la recherche à un nombre fini de directions. La stratégie est donc la suivante : pour chaque côté, d'équation $\mathbf{a}^T\mathbf{x}=c$, on calcule les distances aux sommets $\mathbf{x}_i$ par

$$d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_i)=\left|\mathbf{a}^T\mathbf{x}_i-c\right|$$

et la valeur

$$\mathrm{enc}(K,\mathbf{a})=\max_{\textit{sommets } i} d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_i)$$

Le défaut de rectitude est donné par

$$\mathrm{def}(K)=\min_{\textit{côté de normale } \mathbf{a}} \mathrm{enc}(K,\mathbf{a})$$

● *Exercice – Dans le cas M2, soit AB le côté situé sur une des droites d'encadrement (droite n°1) et soit C le sommet situé sur l'autre droite d'encadrement (droite n°2). Montrer que l'encadrement ne sera optimal que si la projection orthogonale de C sur la droite n°1 est contenue dans le segment* ouvert $]A,B[$.

(Remarque : on peut changer les axes pour que les deux droites soient horizontales et que la droite n°2 soit située au-dessus de la droite n°1. Supposons qu'une masse unitaire soit placée en C. Le problème posé a un rapport direct avec la stabilité du système soumis à la gravité.)

7. Application dans l'espace

Dans l'espace à trois dimensions, l'encadrement d'un polyèdre convexe peut se faire selon les schémas suivants :

S1 – L'un au moins des plans d'encadrement contient une face du polyèdre et l'autre, un sommet de celui-ci.

S2 – Les deux plans d'encadrement ont chacun une arête commune avec le polyèdre, et ces arêtes sont gauches.

S3 – Les deux plans d'encadrement ont chacun une arête en commun avec le polyèdre, et ces arêtes sont coplanaires (et donc, parallèles).

S4 – Un des plans d'encadrement a une arête en commun avec le polyèdre et l'autre, un sommet seulement.

S5 – Les deux plans d'encadrement ont leur contact avec le polyèdre limité à un sommet.

Les schémas S3, S4 et S5 donnent lieu à des perturbations possibles de la direction des plans sans modification des contacts ; ces encadrements ne sont donc pas optimaux. En définitive, l'encadrement doit correspondre au schéma S1 ou au schéma S2, c'est-à-dire que *l'ensemble des deux plans doit contenir au moins quatre sommets du polyèdre.*

● *Exercice - Montrer que dans le cas S1, si le plan n°1 contient une face ABC et le plan n°2 contient le sommet D, il faut encore que la projection orthogonale de D sur le plan n°1 soit* intérieure *au triangle ABC. (Analogue à l'exercice précédent).*

8. Algorithme de recherche de la valeur optimale d'encadrement d'un polyèdre *K* de R^3

a) Pour chaque face $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, on calcule la normale unitaire

$$\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)}{\|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)\|}$$

où le signe $\times$ représente le produit vectoriel. L'équation du plan contenant la face est alors

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \overset{\Delta}{=} C_1$$

Pour chaque sommet $\mathbf{x}_i$, on calcule alors sa distance au plan

$$|d_i| \quad \text{où} \quad d_i = \mathbf{a}^T \mathbf{x} - C_i$$

La plus grande de ces valeurs, obtenues pour un sommet $\mathbf{x}_{i0}$, est enc(K,$\mathbf{a}$).

La projection du point $\mathbf{x}_{i0}$ dans la face ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$) est donnée par

$$\mathbf{y}_{i0} = \mathbf{x}_{i0} - d_i \mathbf{a}$$

Cette projection vérifie

$$\mathbf{y}_{i0} = \alpha(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \beta(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)$$

les coefficients α et β s'obtenant par les équations

$$\begin{aligned} \alpha\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 + \beta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) &= (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{y}_{i0} \\ \alpha(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \beta\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|^2 &= (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{y}_{i0} \end{aligned}$$

Les conditions pour que la projection soit *intérieure* au triangle ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$) sont

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta < 1$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, il faut écarter l'encadrement correspondant, car il n'est certainement pas optimal.

En parcourant toutes les faces, on peut déterminer

$$\mathrm{def}_{\mathrm{faces}}(K) = \inf_{\textit{faces non exclues}} \mathrm{enc}(\mathrm{K}, \mathbf{a})$$

b) Il faut alors examiner les couples d'arêtes, et ne retenir que les arêtes *gauches*. Un couple d'arêtes est à exclure s'il relève d'un des cas suivants :

Cas 1 : Les deux arêtes ont un sommet commun. Elles sont donc *concourantes*.

Ce cas étant exclu, on calcule le produit vectoriel

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)$$

On peut alors reconnaître les cas suivants :

Cas 2 : $\|\mathbf{v}\| = 0$: les arêtes sont alors *parallèles.*

Ce cas exclu, la normale unitaire au plan contenant la direction des deux arêtes est donnée par

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Le plan contenant l'arête ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$) a pour équation

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x}_1$$

L'équation du plan contenant l'arête ($\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$) est

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x}_3$$

Cas 3 : $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^T \mathbf{x}_3$: les arêtes sont *concourantes* (ou leur prolongement l'est).

Ce dernier cas exclu, nos sommes sûr que les deux arêtes sont *gauches*. Posant

$$m = \inf\left(\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1, \mathbf{a}^T \mathbf{x}_3\right)$$
$$M = \sup\left(\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1, \mathbf{a}^T \mathbf{x}_3\right)$$

il faut alors vérifier que les plans d'équation $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = m$ et $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = M$ encadrent le polyèdre, c'est-à-dire que pour tout sommet $\mathbf{x}_i$, on ait

$$m \le \mathbf{a}^T \mathbf{x}_i \le M$$

ce qui mène au dernier cas d'exclusion :

Cas 4 : il existe un sommet $\mathbf{x}_i$ tel que $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i < m$ ou $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i > M$. Dans ce cas, les deux arêtes *ne définissent pas un encadrement.*

Ayant passé avec succès ces quatre cas d'exclusion, on obtient une nouvelle valeur

$$\mathrm{enc}(K, \mathbf{a}) = M - m$$

à comparer aux précédentes. Si $\mathrm{def}_{\text{arêtes}}(K)$ est la plus petites de cesvaleurs pour les différents couples d'arêtes retenus, on a finalement

$$\mathrm{def}(K) = \inf\left(\mathrm{def}_{\text{faces}}(K), \mathrm{def}_{\text{arêtes}}(K)\right)$$

9. Exercices

1) En pratique, l'ensemble de points dont on veut déterminer le défaut de planéité est naturellement fort plat, ce qui pose des problèmes de précision lors de la détermination de l'enveloppe convexe. Si l'on admet que l'ensemble de points est approximativement *horizontal, on est tenté de dilater les coordonnées z, c'est-à-dire d'opérer la transformation suivante :*

$$X = x\,,\qquad Y = y\,,\qquad Z = \alpha z\,,\quad \text{avec}\ \ \alpha\quad \text{relativement grand}$$

Deux questions se posent alors :

a) Cette transformation préserve-t-elle l'enveloppe convexe ?

b) Comment se transforment les composantes de la normale obtenue pour le meilleur plan ?

2) Dans le cas d'une surface en secteur de cylindre, quelle est la direction des plans formant le meilleur encadrement ?