

**UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION**

THEORIE DE L'ERREUR DE CIRCULARITE

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D48 – Août 2008

THÉORIE DE L'ERREUR DE CIRCULARITÉ

1. Définitions

Soit K un ensemble *fini* de points $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$ de R^2 . Soit encore $\mathbf{C} = (a, b)$ un point quelconque du même plan. Nous appellerons *valeur d'encadrement de K de centre \mathbf{C}* la grandeur

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}) = \sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| - \inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\|$$

2. Continuité de la valeur d'encadrement

Il est assez facile de montrer que la valeur d'encadrement dépend continûment du point \mathbf{C} . En effet,

a) On a pour tout point \mathbf{P} de K

$$\|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| = \|(\mathbf{P} - \mathbf{C}) + (\mathbf{C} - \mathbf{C}^*)\| \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \leq \sup_{\mathbf{Q} \in K} \|\mathbf{Q} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

et cette dernière borne est indépendante de \mathbf{P} . Par conséquent,

$$\sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| \leq \sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

En intervertissant les rôles de \mathbf{C} et de \mathbf{C}^* , on obtient

$$\sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| \leq \sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

Il résulte de ces deux inégalités que

$$\sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| - \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \leq \sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| \leq \sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \quad (1)$$

b) Puisque

$$\|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

on a, pour tout point \mathbf{P} de K ,

$$\|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| \geq \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| - \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \geq \inf_{\mathbf{Q} \in K} \|\mathbf{Q} - \mathbf{C}^*\| - \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

et cette borne est indépendante du point \mathbf{P} considéré. Dès lors,

$$\inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| \geq \inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| - \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

En intervertissant les rôles de \mathbf{C} et \mathbf{C}^* on obtient encore

$$\inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| \geq \inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| - \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

La combinaison de ces deux inégalités donne

$$\inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| - \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \leq \inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| \leq \inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

soit, après changement de signe du tout,

$$-\inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \leq \inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}^*\| \leq -\inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| + \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \quad (2)$$

c) En additionnant les relations (1) et (2), on obtient

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}) - 2\|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\| \leq \text{enc}(K, \mathbf{C}^*) \leq \text{enc}(K, \mathbf{C}) + 2\|\mathbf{C} - \mathbf{C}^*\|$$

Ainsi, la valeur d'encadrement de K , $\text{enc}(K, \mathbf{C})$, considérée comme fonction du centre \mathbf{C} , est non seulement continue, mais encore *lipschitzienne*, la constante de Lipschitz valant 2. On sait que les fonctions lipschitziennes admettent presque partout des dérivées *bornées*.

3. Borne inférieure de la valeur d'encadrement ; notion de meilleur centre

Comme de toute évidence,

$$\sup_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\| \geq \inf_{\mathbf{P} \in K} \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\|$$

il est clair que la valeur d'encadrement vérifie toujours

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}) \geq 0$$

La nullité de la valeur d'encadrement ne se produit que si le point \mathbf{C} est le centre d'un cercle passant par *tous* les points de K , ce qui suppose en particulier que ceux-ci forment un cercle parfait. Dans le cadre d'une mesure des *erreurs* de circularité, ce cas doit évidemment être considéré comme exceptionnel. Dans tous les cas intéressants, on a

$$E_0 = \inf_{\mathbf{C} \in R^2} \text{enc}(K, \mathbf{C}) > 0$$

La question qui se pose alors est de savoir si cette borne est atteinte, c'est-à-dire s'il existe un point \mathbf{C}_0 de coordonnées finies tel que

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}_0) = E_0$$

Si tel est le cas, nous qualifierons \mathbf{C}_0 de *meilleur centre* de l'ensemble K et la valeur E_0 sera appelée *défaut de circularité de l'ensemble K* et notée $\text{def}(K)$:

$$\text{def}(K) = \text{enc}(K, \mathbf{C}_0)$$

Remarque – L'existence d'un meilleur centre n'implique pas son *unicité* ! Cette dernière ne pourra être prouvée que plus loin, sur base des propriétés des meilleurs centres (section 7).

4. Existence d'un meilleur centre

4.1 – Valeur d'encadrement pour un centre situé à l'infini

Considérons pour commencer un centre $\mathbf{C}_\infty(\mathbf{e})$ situé à l'infini sur un axe quelconque de vecteur unitaire \mathbf{e} . Si z est une coordonnée décrivant cet axe, soit z_1 la plus petite valeur de cette coordonnée atteinte dans K et soit z_2 la plus grande. Il est clair que

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}_\infty(\mathbf{e})) = z_2 - z_1$$

c'est-à-dire la valeur d'encadrement de K par des droites perpendiculaires à l'axe des z . La plus petite valeur possible d'un tel encadrement, lorsque l'on fait varier la direction de l'axe \mathbf{e} s'identifie au défaut de rectitude de l'ensemble K :

$$\min_{\|\mathbf{e}\|=1} \text{enc}(K, \mathbf{C}_\infty(\mathbf{e})) = \text{def}_{\text{rect}}(K)$$

(Il s'agit bien d'un *minimum* parce que la fonction valeur d'encadrement en rectitude est continue sur l'ensemble de variation de \mathbf{e} , c'est-à-dire la boule unité, qui est compacte.)

Ceci posé, nous sommes en mesure d'établir le théorème d'existence d'un meilleur centre.

4.2 – Théorème d'existence d'un meilleur centre

Supposons qu'il existe un centre \mathbf{C}_1 non situé à l'infini tel que

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}_1) < \text{def}_{\text{rect}}(K)$$

Alors, il existe un meilleur centre.

Démonstration – Posons

$$\mu = \text{def}_{\text{rect}}(K) - \text{enc}(K, \mathbf{C}_1)$$

Traçons par \mathbf{C}_1 une droite quelconque et notons ξ les coordonnées prises sur cette droite avec \mathbf{C}_1 comme origine et η les coordonnées perpendiculaires à cette droite, avec la même origine. Le sens de l'axe des η est sans importance. Soient dans ce système d'axes (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) les points réalisant

$$\xi_1 = \min_K \xi \quad \text{et} \quad \xi_2 = \max_K \xi$$

Soit alors un centre \mathbf{C} situé sur la droite en question, à une coordonnée

$$\xi = \ell > \rho_2 = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}$$

Le point de K le plus proche de \mathbf{C} est à une distance de ce centre

$$r_m \leq r_2 = \sqrt{(\ell - \xi_2)^2 + \eta_2^2}$$

Le point de K le plus distant de \mathbf{C} est à une distance de celui-ci égale à

$$r_M \geq r_1 = \sqrt{(\ell - \xi_1)^2 + \eta_1^2}$$

On a donc

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}) \geq r_1 - r_2$$

Or,

$$\begin{aligned} r_2 - (\ell - \xi_2) &= \sqrt{(\ell - \xi_2)^2 + \eta_2^2} - (\ell - \xi_2) \\ &= \frac{(\ell - \xi_2)^2 + \eta_2^2 - (\ell - \xi_2)^2}{\sqrt{(\ell - \xi_2)^2 + \eta_2^2} + (\ell - \xi_2)} = \frac{\eta_2^2}{r_2 - (\ell - \xi_2)} \end{aligned}$$

et de même,

$$r_1 - (\ell - \xi_1) = \frac{\eta_1^2}{r_1 - (\ell - \xi_1)}$$

On a donc

$$r_1 - r_2 = (\ell - \xi_1) - (\ell - \xi_2) + \frac{\eta_1^2}{r_1 - (\ell - \xi_1)} - \frac{\eta_2^2}{r_2 - (\ell - \xi_2)}$$

ce qui entraîne

$$r_1 - r_2 \geq \xi_2 - \xi_1 - \frac{\eta_2^2}{r_2 + (\ell - \xi_2)}$$

Notant à présent que

$$\eta_2 \leq \rho_2 = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}$$

et que

$$r_2 + (\ell - \xi_2) \geq 2(\ell - \xi_2) \geq 2(\ell - \rho_2)$$

on obtient

$$r_1 - r_2 \geq \xi_2 - \xi_1 - \frac{\rho_2^2}{2(\ell - \rho_2)} \geq \text{def}_{\text{rect}}(K) - \frac{\rho_2^2}{2(\ell - \rho_2)}$$

et le dernier membre de cette inégalité est supérieur à

$$\text{def}_{\text{rect}}(K) - \frac{\mu}{2}$$

chaque fois que

$$\frac{\rho_2^2}{2(\ell - \rho_2)} \leq \frac{\mu}{2}$$

ce qui a lieu pour

$$\ell \geq \rho_2 + \frac{\rho_2^2}{\mu}$$

On constate donc que, quelle que soit la direction choisie, pour

$$\ell \geq \rho_M + \frac{1}{\mu} \rho_M^2$$

où

$$\rho_M = \max_{\mathbf{P} \in K} d(\mathbf{C}_1, \mathbf{P})$$

On a

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}_1) \geq \text{def}_{\text{rect}}(K) - \frac{\eta}{2}$$

En d'autres termes, pour tout centre \mathbf{C} hors de la boule fermée B de centre \mathbf{C}_1 et de rayon $\rho_M + \frac{1}{\mu} \rho_M^2$, on a

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}) \geq \text{def}_{\text{rect}}(K) - \frac{\mu}{2}$$

Cette boule étant compacte, la fonction continue $\text{enc}(K, \mathbf{C})$ y réalise sa borne inférieure en un point \mathbf{C}^* . Alors,

$$\text{enc}(K, \mathbf{C}^*) \leq \text{enc}(K, \mathbf{C}_1) = \text{def}_{\text{rect}}(K) - \mu$$

ce qui signifie que la valeur d'encadrement de K par rapport au centre \mathbf{C}^* est inférieure à toutes celles que donnent des points du complémentaire de la boule B . Dès lors, \mathbf{C}^* est bien un meilleur centre.

4.3 – Un cas de non-vérification de la condition précédente

Imaginons un système de points répartis exactement sur une ellipse assez aplatie de demi-axes a et b , $a > b$, ces axes étant supposés réalisés par des points de K (fig. 1). On a alors

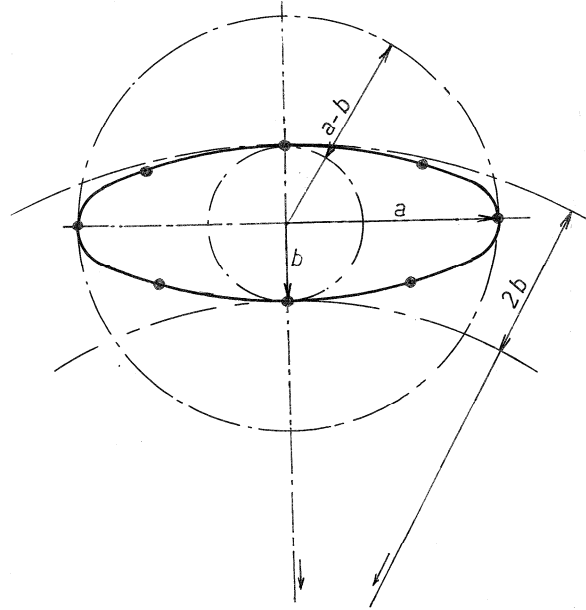


Fig. 1

$$\text{def}_{\text{rect}}(K) = 2b$$

On imagine *a priori* que le meilleur centre devrait être le centre de l'ellipse. Le défaut de circularité serait alors $a-b$. En fait, on trouve un meilleur centre à l'infini dès que

$$2b < a - b$$

soit pour

$$a > 3b$$

résultat assez paradoxal, mais bien conforme à nos définitions.

4.4 – Cas des arcs de cercle

On se rend aisément compte que la condition

$$\text{def}_{\text{rect}}(K) > \text{enc}(K, C_1)$$

peut n'être jamais vérifiée dans le cas d'arcs de cercles imparfaits de faible angle au centre, car on peut être en présence de points presque alignés (*fig. 2*).

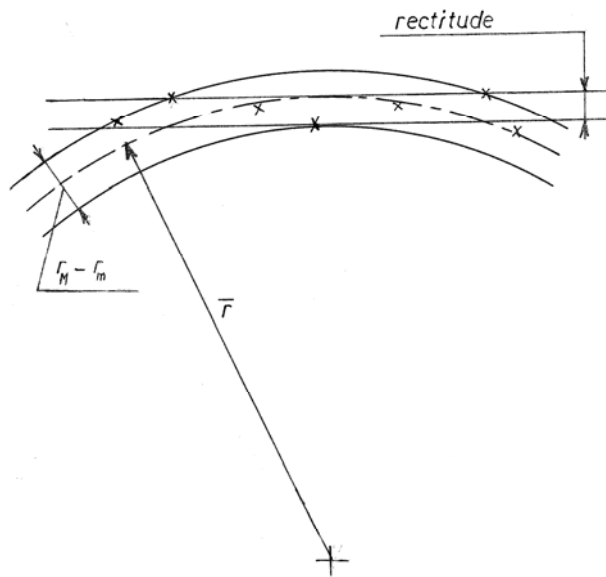


Fig.2

5. Meilleur cercle uniforme

5.1 – Écarts

K étant toujours un ensemble fini de points représentant un cercle imparfait, donnons-nous un cercle de centre $C = (a, b)$ et de rayon ρ . A chaque point $P_i = (x_i, y_i)$ de K , associons le nombre

$$e_i(C, \rho) = r_i(C) - \rho$$

où

$$r_i(\mathbf{C}) = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}$$

$e_i(\mathbf{C}, \rho)$ sera appelé *écart* du point \mathbf{P}_i par rapport au cercle de centre \mathbf{C} et de rayon ρ . Nous nous intéresserons à l'*écart (absolu) maximum* défini par

$$e_M(\mathbf{C}, \rho) = \sup_i |e_i(\mathbf{C}, \rho)|$$

5.2 – Meilleur cercle uniforme

Nous dirons que le cercle de centre \mathbf{C}_0 et de rayon ρ_0 *réalise la meilleure approximation uniforme de K* si

$$e_M(\mathbf{C}_0, \rho_0) = \inf_{\mathbf{C} \in R^2, \rho \in R_+} e_M(\mathbf{C}, \rho)$$

pour autant, bien entendu, qu'il existe.

5.3 – Relation avec le défaut de circularité

On notera que

$$\sup_i |r_i(\mathbf{C}) - \rho| = \sup \left[\left(\sup_i r_i(\mathbf{C}) - \rho \right), \left(\rho - \inf_i r_i(\mathbf{C}) \right) \right]$$

Utilisant la formule classique

$$\sup(A, B) = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}|A - B|$$

on obtient

$$\sup_i |r_i(\mathbf{C}) - \rho| = \frac{1}{2} \left(\sup_i r_i(\mathbf{C}) - \inf_i r_i(\mathbf{C}) \right) + \frac{1}{2} \left| \sup_i r_i(\mathbf{C}) + \inf_i r_i(\mathbf{C}) - 2\rho \right|$$

soit

$$e_M(\mathbf{C}, \rho) = \frac{1}{2} \text{enc}(K, \mathbf{C}) + \frac{1}{2} \left| \sup_i r_i(\mathbf{C}) + \inf_i r_i(\mathbf{C}) - 2\rho \right|$$

Pour \mathbf{C} donné, on remarque que le dernier terme est toujours non négatif et qu'il admet un minimum – en l'occurrence 0 – pour

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\sup_i r_i(\mathbf{C}) + \inf_i r_i(\mathbf{C}) \right) = \rho^*(\mathbf{C})$$

Pour cette valeur de ρ , on a

$$e_M(\mathbf{C}, \rho^*) = \inf_{\rho \in R_+} e_M(\mathbf{C}, \rho) = \frac{1}{2} \text{enc}(K, \mathbf{C})$$

Il en découle que

$$\inf_{\mathbf{C} \in R^2, \rho \in R_+} e_M(\mathbf{C}, \rho) = \frac{1}{2} \inf_{\mathbf{C} \in R^2} \text{enc}(K, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \text{def}(K)$$

En d'autres termes, *le cercle réalisant la meilleure approximation uniforme de K a pour centre le meilleur centre de K et pour rayon*

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \left(\sup_i r_i(\mathbf{C}_0) + \inf_i r_i(\mathbf{C}_0) \right)$$

De plus,

$$e_0 = e_M(\mathbf{C}_0, \rho_0) = \frac{1}{2} \text{def}(K)$$

Il y a donc identité entre les deux problèmes. L'intérêt de cette propriété est que l'on ramène le problème du calcul du défaut à un problème d'approximation, ce qui est plus classique. Cependant, il s'agit d'une approximation *uniforme*, bien plus compliquée que, par exemple, une approximation aux moindres carrés.

6. Caractérisation des meilleurs cercles

6.1 – Un rappel géométrique

Nous commencerons par un lemme évident : *Deux cercles qui ont en commun trois points non alignés sont confondus*

Ce lemme n'a rien de nouveau, car il revient à dire que le cercle circonscrit à un triangle est unique.

6.2 – Un premier théorème

Voici un théorème calqué sur celui que Charles de la Vallée-Poussin a établi pour les approximations uniformes polynomiales [2] :

Soit un cercle de centre \mathbf{C} et de rayon ρ tel qu'il existe dans K quatre points d'azimuts $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ pour lesquels les écarts $e_i = r_i(\mathbf{C}) - \rho$ vérifient

$$\text{sign}\left((-1)^i e_i\right) = \text{cte}$$

(ce qui revient à dire qu'ils sont alternés). Alors,

$$\mu = \min_{i=1,\dots,4} |e_i| \leq D = \frac{1}{2} \text{def}(K)$$

En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire que les quatre écarts sont, en valeur absolue, strictement supérieurs à D . Quitte à modifier l'origine des azimuts, on peut supposer que le premier a un écart relatif positif. Posons

$$\varepsilon = \mu - D > 0$$

Un cercle de meilleure approximation uniforme doit passer à une distance du point 1 inférieure ou égale à D , donc entrer dans la boule de rayon D centrée au point 1, ou lui être tangent (fig. 3).

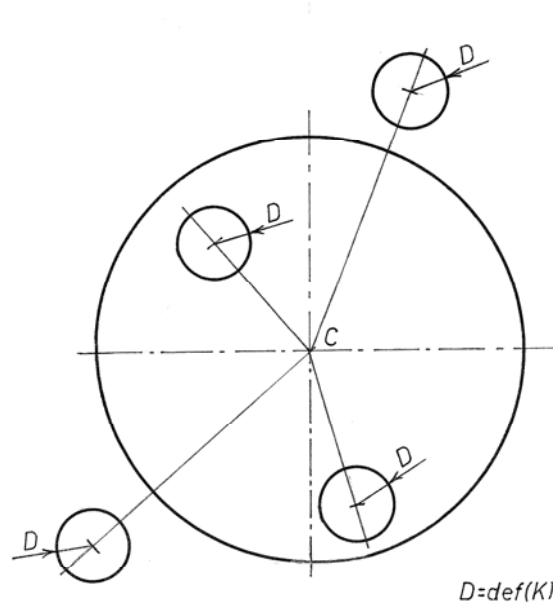


Fig. 3

Or, tout point de cette boule est à une distance de \mathbf{C} supérieure à

$$\rho + e_1 - D \geq \rho + \varepsilon$$

De la même façon, ce cercle doit passer en un point de la boule fermée de rayon $\text{def}(K)$ centrée au point 2, soit à une distance de \mathbf{C} au plus égale à

$$\rho - |e_2| + D \leq \rho - \varepsilon$$

On raisonne de même au point 3 et au point 4, ce qui mène à la constatation que le meilleur cercle, passant sur un tour quatre fois de l'extérieur à l'intérieur du cercle (C, ρ) , doit le couper en quatre points. Mais alors, ces deux cercles sont confondus en vertu du lemme ci-dessus. Or, ceci est impossible, car cela implique que tous les écarts sont inférieurs en valeur absolue à D , contrairement à l'hypothèse.

6.3 – Condition suffisante pour qu'un cercle soit meilleur cercle uniforme pour K

On déduit aisément du résultat précédent une condition suffisante pour qu'un cercle soit meilleure approximation uniforme :

Pour qu'un cercle (C, ρ) soit un meilleur cercle uniforme pour K , il suffit qu'en quatre points d'azimuts $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ on ait

$$e_i = r_i(C) - \rho = \lambda(-1)^i \max_K |r(C) - \rho|, \quad \lambda = \pm 1$$

En effet, on a alors

$$\min_{i=1, \dots, 4} |e_i| = \max_K |r(C) - \rho| \geq D = \frac{1}{2} \text{def}(K)$$

puisque (C, ρ) est *a priori* un cercle quelconque. Mais par le théorème précédent,

$$\min_{i=1, \dots, 4} |e_i| \leq D$$

si bien que

$$D \leq \min_{i=1, \dots, 4} |e_i| \leq D$$

6.4 – Variation des azimuts lors d'une perturbation du centre

Il est naturel de se demander si la condition ci-dessus est également *nécessaire*. Mais pour répondre à cette question, nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats techniques. En particulier, la façon dont varient les azimuts lors d'un changement de centre pourrait changer leur *ordre*. A ce sujet, on peut établir le résultat suivant :

Soit C un centre tel que les azimuts des points de K puissent être strictement ordonnés. Alors il existe un rayon $\eta > 0$ tel que cet ordre strict reste inchangé pour tout centre distant de C de moins de η .

Prenons conventionnellement **C** comme origine. Soient alors **P**₁ et **P**₂ deux points d'azimuts consécutifs. Pour qu'il y ait changement de l'ordre de ces deux azimuts, il faut que les angles les angles $\alpha_1 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ et $\alpha_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{C}$ vérifient

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi - (\theta_2 - \theta_1) = \pi$$

ce qui a lieu ssi le nouveau centre se trouve sur la droite portant **P**₁ et **P**₂, segment **P**₁**P**₂ exclu (fig. 4). Pour cela, il faudra que le centre se déplace d'une distance au moins égale à la hauteur h du triangle **CP**₁**P**₂.

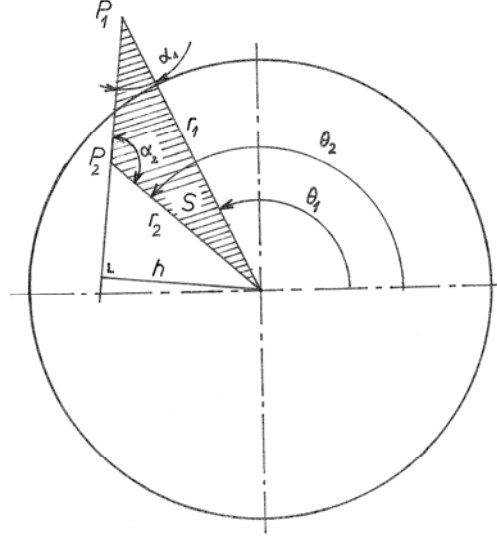


Fig. 4

Si S est l'aire de ce triangle, cette hauteur est donnée par

$$h = \frac{2S}{\ell_{12}}$$

où ℓ_{12} représente la distance de **P**₁ à **P**₂. Or, en notant $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$,

$$2S = r_1 r_2 \sin \Delta\theta = 2r_1 r_2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} \cos \frac{\Delta\theta}{2}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\ell_{12}^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \Delta\theta \\
&= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + 2r_1r_2(1 - \cos \Delta\theta) \\
&= (r_1 - r_2)^2 + 4r_1r_2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} \\
&= 4r_1r_2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1r_2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}} \right]
\end{aligned}$$

Ces calculs sont évidemment valables pour tout couple de points consécutifs de numéros k et $(k+1)$. Posons donc

$$L = \frac{1}{2} \sup_k \frac{|r_{k+1} - r_k|}{\sqrt{r_k r_{k+1}} \sin \frac{\Delta\theta}{2}}$$

Ce nombre mesure la *vitesse de variation relative du rayon en fonction de l'azimut*. On a alors

$$\ell_{12} \leq 2\sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \sqrt{1 + L^2}$$

et, en conséquence, en utilisant les symboles M et m pour indiquer les maxima et les minima respectivement,

$$h \geq \sqrt{r_1 r_2} \frac{\cos \frac{\Delta\theta}{2}}{\sqrt{1 + L^2}} \geq r_m \frac{\cos \frac{(\Delta\theta)_M}{2}}{\sqrt{1 + L^2}} = \eta$$

Cette distance est nulle si $(\Delta\theta)_M = \pi$ ou $r_m = 0$, mais cela sont des cas vraiment extrêmes. L'exemple qui suit est un cas de variation forte du rayon et de grande différence d'azimuts :

$$r_2 = r_m, \quad r_1 = 2r_m, \quad \theta_2 - \theta_1 = (\Delta\theta)_M = \frac{\pi}{2}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \frac{r_m}{r_m \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \\
\sqrt{1 + L^2} &= \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\eta &= r_m \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = r_m \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0,63r_m
\end{aligned}$$

ce qui reste considérable. A l'inverse, pour de très petites variations d'angle, on a

$$\eta \approx \frac{r_m}{\sqrt{1+L^2}}, \quad L \approx \frac{\Delta r}{r_m \Delta \theta}$$

soit par exemple, pour $\frac{\Delta r}{r_m} = \frac{1}{10}$ (c'est déjà une grosse variation) et $\Delta \theta = \frac{\pi}{300} \approx \frac{1}{100}$ (ce qui correspond à 600 points par tour, nombre appréciable). Il vient

$$L \approx 5, \quad \eta \approx \frac{r_m}{\sqrt{1+25}} \approx \frac{r_m}{5}$$

ce qui reste très acceptable. En pratique, les variations relatives de rayon sont bien inférieures au dixième.

6.5 – Variation des rayons lors d'une perturbation du centre

Examinons à présent comment varient les rayons lors d'une petite perturbation du centre. On établit aisément le résultat suivant :

6.5.1 – Majoration - Soit r_i la distance du point \mathbf{P}_i au centre \mathbf{C} . Pour une perturbation $\Delta \mathbf{C} = (\Delta a, \Delta b)$ de ce dernier, la nouvelle distance $r_i^* = \|\mathbf{P}_i - (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C})\|$ vérifie

$$\left| r_i^* - r_i \right| \leq \|\Delta \mathbf{C}\| = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

En effet, on a

$$r_i^* = \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C} - \Delta \mathbf{C}\| \leq \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}\| + \|\Delta \mathbf{C}\| = r_i + \|\Delta \mathbf{C}\|$$

et

$$r_i = \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}\| = \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C} - \Delta \mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}\| \leq \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C} - \Delta \mathbf{C}\| + \|\Delta \mathbf{C}\| = r_i^* + \|\Delta \mathbf{C}\|$$

On peut préciser la variation des rayons :

6.5.2 – Partie principale de la variation des rayons

Dans les mêmes conditions, si θ_i est l'azimut du point \mathbf{P}_i , on a

$$r_i^* - r_i = -\Delta a \cos \theta_i - \Delta b \sin \theta_i + \varepsilon_i$$

avec

$$\begin{aligned}\cos \theta_i &= \frac{x_i - a}{r_i}, & \sin \theta_i &= \frac{y_i - b}{r_i}, \\ |\varepsilon_i| &\leq 2 \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{r_m}, & r_m &= \text{rayon minimal pour le centre } \mathbf{C}\end{aligned}$$

Calculons en effet

$$\begin{aligned}r_i^{*2} &= (x_i - a - \Delta a)^2 + (y_i - b - \Delta b)^2 \\ &= (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 - 2(x_i - a)\Delta a - 2(y_i - b)\Delta b + \Delta a^2 + \Delta b^2 \\ &= r_i^2 - 2r_i(\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i) + \Delta a^2 + \Delta b^2\end{aligned}$$

On a donc

$$r_i^{*2} - r_i^2 = -2r_i(\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i) + \Delta a^2 + \Delta b^2$$

Divisons par $(r_i^* + r_i)$. Il vient

$$r_i^* - r_i = -2 \frac{r_i}{r_i^* + r_i} (\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i) + \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{r_i^* + r_i}$$

Notant que

$$2r_i = (r_i + r_i^*) - (r_i^* - r_i)$$

on obtient

$$\begin{aligned}r_i^* - r_i &= -(\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i) + \frac{r_i^* - r_i}{r_i^* + r_i} (\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i) + \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{r_i^* + r_i} \\ &= -(\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i) + \varepsilon_i\end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_i = \frac{r_i^* - r_i}{r_i^* + r_i} (\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i) + \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{r_i^* + r_i}$$

Il ne reste plus qu'à prouver la majoration de ce reste. Cela résulte des inégalités suivantes :

$$\left| r_i^* - r_i \right| \leq \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} \quad (\text{voir ci-dessus})$$

$$\left| \Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i \right| \leq \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} \sqrt{\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i} = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

$$r_i^* + r_i \geq r_i \geq r_m \quad \text{car} \quad r_i^* \geq 0$$

Notons le corollaire suivant :

Soient Δa et Δb suffisamment petits et tels qu'en un point \mathbf{P}_i , $\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i \neq 0$. Alors, Δr_i a le signe de $(-\Delta a \cos \theta_i - \Delta b \sin \theta_i)$.

En effet, en posant

$$\gamma_i = \frac{\Delta a \cos \theta_i + \Delta b \sin \theta_i}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}}$$

nombre qui dépend de la *direction* du vecteur $(\Delta a, \Delta b)$ mais non de sa norme, on a

$$\Delta r_i = -\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} \gamma_i + \varepsilon_i$$

avec

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{2(\Delta a^2 + \Delta b^2)}{r_m}$$

Il en résulte que le signe de Δr_i sera certainement celui de $(-\Delta a \cos \theta_i - \Delta b \sin \theta_i)$ si

$$\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} < \gamma \frac{r_m}{2}$$

6.6 – Partie principale de la variation d'un écart lorsque l'on modifie à la fois le centre et le rayon du cercle

L'écart d'un point \mathbf{P}_i par rapport à un cercle de centre $\mathbf{C} = (a, b)$ et de rayon ρ est donné par

$$e_i = r_i(\mathbf{C}) - \rho$$

Pour une petite modification $(\Delta a, \Delta b)$ du centre et une modification $\Delta \rho$ du rayon, l'écart devient

$$e_i^* = r_i^* - \rho - \Delta \rho \approx e_i + \delta e_i$$

en notant

$$\delta e_i = -\Delta a \cos \theta_i - \Delta b \sin \theta_i - \Delta \rho$$

Il est classique d'écrire une fonction du type

$$f(\theta) = -\Delta a \cos \theta - \Delta b \sin \theta - \Delta \rho$$

sous la forme équivalente

$$f(\theta) = A \cos(\theta - \phi) - B$$

Comme

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

la correspondance des deux expressions est donnée par les relations

$$\Delta a = -A \cos \phi, \quad \Delta b = -A \sin \phi, \quad \Delta \rho = B$$

L'inversion de ces relations n'est cependant pas univoque. On a de toute manière

$$\cos \phi = -\frac{\Delta a}{A}, \quad \sin \phi = -\frac{\Delta b}{A}$$

mais la solution générale pour A est

$$A = \pm \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

Au choix du signe positif correspond l'angle $\phi = \phi^+$ où la fonction $f(\theta)$ atteint son *maximum* ; au choix du signe négatif, l'angle $\phi^- = \phi^+ + \pi \pmod{2\pi}$ où la fonction atteint son *minimum*. Il s'agit évidemment de deux représentations de *la même* fonction : seul le point de vue change, c'est-à-dire que l'on choisira A positif ou négatif selon qu'on s'intéresse surtout au voisinage du maximum ou à celui du minimum.

On remarquera que si A et ϕ sont donnés, et si l'on se donne un angle arbitraire $\psi \in]0, \pi[$, il est possible de choisir B de telle façon que la fonction f s'annule à la fois en $(\phi + \psi)$ et en $(\phi - \psi)$. Il suffit pour cela de poser $B = A \cos \psi$. Dans ce cas, la fonction f aura en $\theta = \phi$ le signe de A . En d'autres termes, *il est toujours possible de choisir les paramètres A et B de telle façon que la fonction f ait en $\theta = \phi$ un signe donné préalablement et qu'elle s'annule en deux azimuts symétriques par rapport à ϕ , disons, $\phi \pm \psi$.*

6.7 – Condition nécessaire d’optimalité dans le cas non dégénéré

Nous commencerons par n’envisager que le cas non dégénéré, c’est-à-dire où deux points différents de K ont des azimuts différents. On peut énoncer le théorème suivant :

Soit (C, ρ) un cercle de meilleure approximation uniforme. On suppose que les azimuts peuvent être strictement ordonnés par rapport à son centre. Alors, il existe quatre azimuts $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ tels que les écarts $e_i = r(\theta_i) - \rho$ correspondants soient égaux à $D, -D, D, -D$, où $D = \pm e_M$

Démonstration

I – Il existe au moins un écart égal à e_M et un écart égal à $(-e_M)$, par construction du rayon moyen ρ .

II – Supposons qu’il n’y ait que deux écarts extrémaux, soit, pour fixer les idées, $e_1 = e_M$ en θ_1 et $e_2 = -e_M$ en θ_2 (ce n’est pas une restriction, car on peut modifier l’origine des azimuts pour se ramener à ce cas). Posant alors

$$\phi = \theta_1, \quad \psi = \frac{1}{2} \inf(\theta_2 - \theta_1, \theta_1 + 2\pi - \theta_2), \quad A = -\varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ et petit}$$

la perturbation

$$\delta e(\theta) = A \cos(\theta - \phi) - A \cos \psi$$

est négative en θ_1 et positive en θ_2 : elle diminue le maximum et augmente le minimum. Donc le cercle que l’on croyait optimal peut être amélioré.

III – Supposons à présent qu’il existe trois écarts extrémaux. En changeant éventuellement l’origine des azimuts, on peut supposer que les deux premiers écarts extrémaux aient le même signe. Alors, en choisissant

$$\phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \psi = \frac{1}{2} \inf(\theta_3 - \theta_2, \theta_1 + 2\pi - \theta_3), \quad A \text{ de même signe que } e_3$$

on définit comme ci-dessus une perturbation réduisant les écarts extrémaux positifs et augmentant les écarts extrémaux négatifs, c’est-à-dire que l’on améliore le cercle.

IV – Supposons qu’il y ait quatre extrema, mais qu’ils ne se succèdent pas selon le schéma $(D, -D, D, -D)$. Après un changement éventuel de l’origine des azimuts, on se ramène toujours à un des cas suivants :

A – $(D, D, -D, -D)$

B – $(D, D, D, -D)$

Dans le cas **A**, on peut améliorer le cercle par une perturbation du type suivant :

$$\phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \psi = \frac{1}{2} \inf(\theta_3 - \theta_2, \theta_1 + 2\pi - \theta_4), \quad A \text{ de même signe que } e_3$$

Dans le cas **B**, on pourra poser

$$\phi = \theta_4, \quad \psi = \frac{1}{2} \inf(\theta_4 - \theta_3, \theta_1 + 2\pi - \theta_4), \quad A \text{ de même signe que } e_1$$

V – On constate donc que pour que le cercle ne puisse être amélioré, il faut que les écarts extrémaux soient tels que pour les raboter tous, il faille une perturbation passant plus de deux fois par zéro, ce qui n'est possible que si l'on rencontre la succession $(D, -D, D, -D)$.

6.8 – Les cas de dégénérescence

Levons à présent les cas de dégénérescence, c'est-à-dire où deux extrema opposés correspondent au même azimut.

a) Considérons d'abord le cas où il y a deux écarts extrémaux pour le centre **C**, correspondant aux points **P**₁ et **P**₂ de *K situés sur le même azimut*. Pour fixer les idées, nous poserons $\|\mathbf{CP}_1\| = r_M$ et $\|\mathbf{CP}_2\| = r_m$. Dans ce cas, déplaçons le centre d'une petite distance ℓ , dans une direction **e** faisant un angle φ avec **CP**₁. On obtient ainsi un nouveau centre **C***. Tant que ce nouveau centre se trouve (fig. 5) à gauche de la médiatrice du segment **P**₂**P**₁, la distance r_1^* de ce nouveau centre à **P**₁ reste supérieure à son homologue r_2^* et, par l'inégalité triangulaire,

$$r_1^* < r_2^* + \|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\| = r_2^* + (r_M - r_m)$$

soit

$$r_1^* - r_2^* < r_M - r_m$$

On constate que la *différence* entre le rayon maximum et le rayon minimum a diminué.

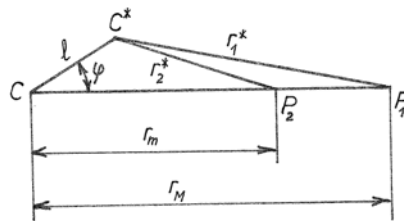


Fig. 5

b) Envisageons alors le cas où il existe à la fois un maximum et un minimum en θ_{12} , correspondant aux deux rayons extrémaux $r_1 = r_M$ et $r_2 = r_m$, un deuxième maximum $r_3 = r_M$

en θ_3 et un minimum $r_4 = r_m$ en θ_4 . On peut, sans nuire à la généralité, poser $\theta_{12} = 0$. Nous poserons aussi, pour fixer les idées, $\theta_3 < \theta_4$ (dans le cas contraire, il suffit de compter les angles dans le sens inverse). On a donc

$$r_1 = r_3 = r_M, \quad r_2 = r_4 = r_m$$

Translatons le centre d'une petite distance ℓ dans une direction faisant avec l'axe des abscisses un angle φ , comme dans la section **a** ci-dessus.

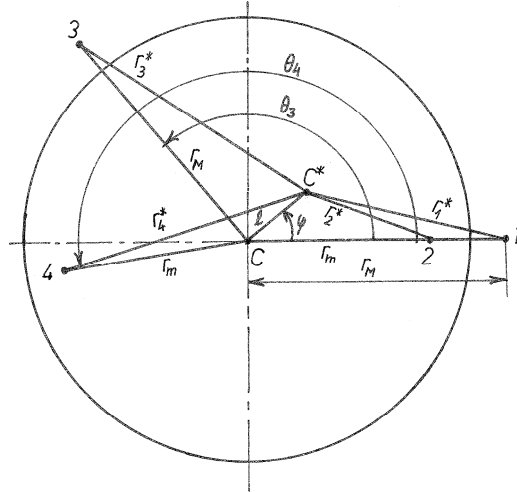


Fig. 6

Comme le montre la figure 6, les nouveaux rayons sont donnés par

$$\begin{aligned} r_1^{*2} &= r_M^2 + \ell^2 - 2r_M \ell \cos \varphi \\ r_2^{*2} &= r_m^2 + \ell^2 - 2r_m \ell \cos \varphi \\ r_3^{*2} &= r_M^2 + \ell^2 - 2r_M \ell \cos(\theta_3 - \varphi) \\ r_4^{*2} &= r_m^2 + \ell^2 - 2r_m \ell \cos(\theta_4 - \varphi) \end{aligned}$$

On a donc

$$r_1^{*2} - r_3^{*2} = 2r_M \ell [\cos(\theta_3 - \varphi) - \cos \varphi]$$

ce qui, en utilisant la formule générale de factorisation

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

se ramène à

$$r_1^{*2} - r_3^{*2} = -4r_M \ell \sin \frac{\theta_3}{2} \sin \left(\frac{\theta_3}{2} - \varphi \right)$$

On remarquera que $0 < \frac{\theta_3}{2} < \pi$, ce qui implique que le sinus de cet angle est positif. Dès lors, r_1^* sera supérieur à r_3^* si

$$\sin \left(\varphi - \frac{\theta_3}{2} \right) > 0 \quad *$$

De la même façon, on a

$$r_4^{*2} - r_2^{*2} = 4r_m \ell \sin \frac{\theta_4}{2} \sin \left(\frac{\theta_4}{2} - \varphi \right)$$

ce qui implique que r_4^* sera supérieur à r_2^* si

$$\sin \left(\varphi - \frac{\theta_4}{2} \right) < 0 \quad **$$

Il suffit donc de choisir une valeur de φ comprise entre $\frac{\theta_3}{2}$ et $\frac{\theta_4}{2}$, par exemple,

$$\varphi = \frac{\theta_3 + \theta_4}{4}$$

pour que les deux inégalités * et ** soient vérifiées simultanément. Mais alors,

$$r_2^* < r_4^* < r_3^* < r_1^*$$

et le défaut par rapport au nouveau centre est donné par

$$r_1^* - r_2^* < r_M - r_m$$

c'est-à-dire que le nouveau centre est meilleur que le précédent, qui n'était donc pas optimal.

c) Il reste à envisager le cas où deux azimuts portent chacun un maximum et un minimum du rayon. Alors (*fig. 7*), en progressant le long de la bissectrice du petit angle entre les deux directions, on diminue les écarts. Le cercle n'est donc pas non plus optimal.

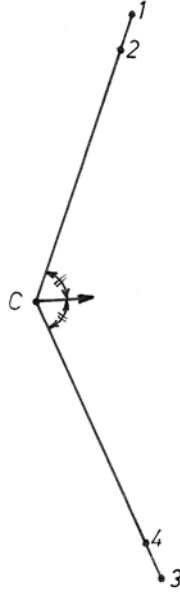


Fig. 7

d) On exclut enfin le cas où un rayon porte par exemple deux minima, qui n'existe que si deux points sont confondus.

Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant :

Tout cercle de meilleure approximation uniforme donne lieu à quatre extrema de l'écart, à des azimuts différents, et alternés.

7. Unicité du meilleur centre

Nous supposons toujours que les conditions sont remplies pour qu'il existe au moins un meilleur centre. Pour prouver son unicité, nous aurons besoin du résultat technique suivant :

7.1 – Lemme

Soient quatre points $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ tels que les vecteurs $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ et $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_4$ ne soient pas multiples l'un de l'autre. Il n'existe qu'un point \mathbf{C} tel que

$$\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{C}\| = \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{C}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{P}_2 - \mathbf{C}\| = \|\mathbf{P}_4 - \mathbf{C}\|$$

En effet, en notant $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$ et $\mathbf{C} = (a, b)$, les relations

$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = (x_4 - a)^2 + (y_4 - b)^2 \end{cases}$$

se réduisent à

$$\begin{cases} 2(x_3 - x_1)a + 2(y_3 - y_1)b = x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 \\ 2(x_4 - x_2)a + 2(y_4 - y_2)b = x_4^2 - x_2^2 + y_4^2 - y_2^2 \end{cases}$$

et ce système linéaire en a et b est régulier si $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ et $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_4$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Nous pouvons à présent démontrer le théorème suivant :

7.2 – Théorème d'unicité du meilleur cercle uniforme

Le meilleur cercle uniforme, s'il existe, est unique.

Supposons en effet qu'il existe deux meilleurs cercles uniformes (\mathbf{C}_1, ρ_1) et (\mathbf{C}_2, ρ_2) . Considérons le cercle de centre $\mathbf{C}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)$ et de rayon $\rho_3 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$. Quel que soit le point \mathbf{P}_i de K , on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_3\| - \rho_3 &= \left\| \mathbf{P}_i - \frac{\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2}{2} \right\| - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_1\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_2\| - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_1\| - \rho_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_2\| - \rho_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_j \|\mathbf{P}_j - \mathbf{C}_1\| - \rho_1 + \frac{1}{2} \sup_j \|\mathbf{P}_j - \mathbf{C}_2\| - \rho_2 = D \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour n'importe quel point de K , on a encore

$$\sup_i \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}\| - \rho_3 \leq D$$

Or, le premier membre de cette relation est *a priori* supérieur ou égal à D , ce qui implique

$$\sup_i \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}\| - \rho_3 = D$$

Le cercle (\mathbf{C}_3, ρ_3) est donc également un meilleur cercle. Dès lors, il existe quatre points extrémaux \mathbf{P}_{ik} , $k = 1, \dots, 4$ où

$$D = \|\mathbf{P}_{ik} - \mathbf{C}_3\| - \rho_3 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_{ik} - \mathbf{C}_1\| - \rho_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_{ik} - \mathbf{C}_2\| - \rho_2$$

Comme les cercles 1 et 2 sont des meilleurs cercles, les deux termes du second membre sont inférieurs ou égaux à $\text{def}(K)/2$. Or, ceci n'est possible que si

$$\|\mathbf{P}_{ik} - \mathbf{C}_1\| - \rho_1 = D \quad \text{et} \quad \|\mathbf{P}_{ik} - \mathbf{C}_2\| - \rho_2 = D$$

On constate donc que les points extrémaux du cercle 3 le sont aussi pour les cercles 1 et 2. Cela implique

$$\begin{cases} \|\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{C}_1\| = \|\mathbf{P}_{i3} - \mathbf{C}_1\| & \text{et} & \|\mathbf{P}_{i2} - \mathbf{C}_1\| = \|\mathbf{P}_{i4} - \mathbf{C}_1\| \\ \|\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{C}_2\| = \|\mathbf{P}_{i3} - \mathbf{C}_2\| & \text{et} & \|\mathbf{P}_{i2} - \mathbf{C}_2\| = \|\mathbf{P}_{i4} - \mathbf{C}_2\| \end{cases}$$

Par le lemme ci-dessus, ces relations entraînent $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$ et

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2} \left(\sup_i \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_1\| + \inf_i \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_1\| \right)$$

Les deux meilleurs cercles sont donc confondus.

Remarque : Cette démonstration est inspirée de celle qui permet de montrer l'unicité de la meilleure approximation dans un espace de Banach à norme stricte [2,3]. Ici, cette dernière condition est remplacée par l'existence des quatre points extrémaux alternés.

8. Une méthode directe d'obtention du meilleur centre

Le théorème de la section 6.2 conduit à la méthode de recherche suivante : pour quatre points $\mathbf{P}_{i1}, \mathbf{P}_{i2}, \mathbf{P}_{i3}, \mathbf{P}_{i4}$ de K , d'azimuts croissants $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}, \theta_{i4}$, définissons le centre $\mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}$ tel que

$$\|\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\| = \|\mathbf{P}_{i3} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{P}_{i2} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\| = \|\mathbf{P}_{i4} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\|$$

Ce cercle est unique, en vertu du lemme de la section 7.1. Alors, il suffit de poser

$$\rho = \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_{i2} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\|$$

pour se trouver dans les conditions du théorème de la section 6.2, et en posant

$$\mu_{i1,i2,i3,i4} = \|\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\| - \|\mathbf{P}_{i2} - \mathbf{C}_{i1,i2,i3,i4}\|$$

on a

$$\mu_{i1,i2,i3,i4} \leq \text{def}(K)$$

Or, il existe un quadruplet $(i_1^*, i_2^*, i_3^*, i_4^*)$ tel que

$$\mu_{i1^*, i2^*, i3^*, i4^*} = \text{def}(K)$$

Donc,

$$\text{def}(K) = \sup_{i1, i2, i3, i4} \mu_{i1, i2, i3, i4}$$

Il suffit donc de balayer tous les quadruplets $(i1, i2, i3, i4)$ et de trouver celui qui donne la plus grande valeur de $\mu_{i1, i2, i3, i4}$. Il s'agit d'une méthode *directe*, car elle donne la solution en un nombre *fini* d'opérations. Cependant, ce nombre est $O(n^4)$ où n est le nombre de points de K , ce qui signifie que cette méthode est fort lente si le nombre de points est élevé.

9. Exercice

Etant donné trois points numérotés 1, 2 et 3, déterminer le centre du cercle passant par ces points.

Suggestion - Soient a et b les coordonnées de ce centre, et soit R le rayon du cercle. Chacun des points 1, 2 et 3 vérifie l'équation

$$R^2 = (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = x_i^2 + y_i^2 - 2ax_i - 2by_i + a^2 + b^2$$

qui s'écrit encore

$$ax_i + by_i = x_i^2 + y_i^2 + a^2 + b^2 - R^2$$

Soustrayons l'équation du point 1 de celle du point 2, puis de celle du point 3. On obtient les deux équations linéaires

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)a + (y_2 - y_1)b = (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) \\ (x_3 - x_1)a + (y_3 - y_1)b = (x_3^2 + y_3^2) - (x_1^2 + y_1^2) \end{cases}$$

qui est régulier pour autant que les points 1, 2 et 3 ne soient pas alignés.

10. Bibliographie

1. **G. HACQUES** – *Algorithmique numérique*
Armand Colin, Paris, 1971
2. **N. BAKHVALOV** – *Méthodes numériques*
Mir, Moscou, 1976

3. L. LUSTERNIK, V. SOBOLEV – *Précis d'analyse fonctionnelle*
Mir, Moscou, 1989
ISBN 5-03-000717-2