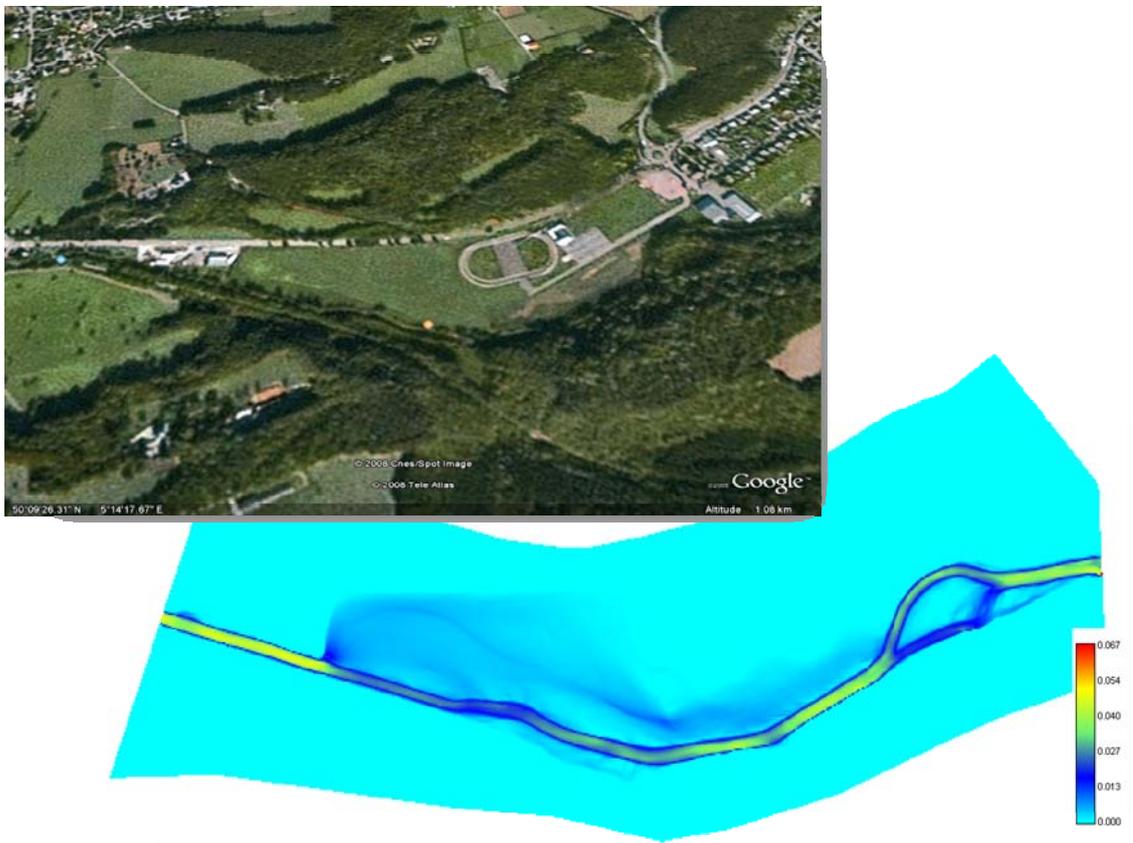




Travail de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur civil  
des constructions (Promoteur : **M. Piroton**) :

**Analyse théorique et numérique de l'influence de la  
formulation des termes de production et de dissipation  
dans les équations d'écoulement à surface libre**



**MACHIELS Olivier**

3<sup>ème</sup> épreuve du grade d'ingénieur civil des constructions  
Université de Liège, Faculté des sciences appliquées  
Année académique 2007-2008

## Table des matières

Table des matières .....	2
Table des figures .....	5
Chapitre I : Introduction.....	8
I.1 Généralités .....	9
I.2 Plan de travail.....	10
Chapitre II : Equations de base de l'hydraulique .....	12
II.1 Introduction .....	13
II.2 Equations de Navier-Stokes .....	13
II.3 Equations intégrées sur la hauteur .....	14
II.4 Equations intégrées sur la section mouillée .....	15
Chapitre III : Le frottement .....	17
III.1 Introduction .....	18
III.2 Les formules empiriques .....	18
III.3 Les formules modernes.....	21
III.4 La macro-rugosité .....	27
III.5 Conclusions .....	28
Chapitre IV : La turbulence.....	29
IV.1 Introduction .....	30
IV.2 La méthode de la moyenne de Reynolds.....	31
IV.3 Fermeture des équations de Reynolds .....	32
Chapitre V : Etude théorique de la validité des lois de frottement .....	37
V.1 Introduction .....	38
V.2 Régime laminaire .....	38
V.3 Régime turbulent lisse .....	39
V.4 Régime turbulent rugueux .....	40

---

V.5 Régime transitoire .....	44
V.6 Macro-rugosité .....	49
V.7 Récapitulatif du domaine de validité des différentes lois de frottement .....	51
V.8 Variation du coefficient de Manning avec la hauteur d'eau .....	53
V.9 Etude de l'erreur commise par les formulations empiriques – Extension des domaines de validité.....	55
Chapitre VI : Ecoulements de crues et d'inondations.....	68
VI.1 Introduction .....	69
VI.2 Le plan PLUIES.....	69
VI.3 Modélisation des écoulements de crues et d'inondations.....	71
Chapitre VII : Recherche d'une formulation continue du frottement .....	73
VII.1 Introduction .....	74
VII.2 Choix des lois de modélisation.....	74
VII.3 Etablissement d'une loi de jonction .....	76
VII.4 Formulation continue du frottement .....	78
Chapitre VIII : Etude numérique de l'influence des lois de frottement.....	80
VIII.1 Introduction .....	81
VIII.2 Evaluation de la rugosité de fond .....	82
VIII.3 Analyse globale des résultats obtenus .....	84
VIII.4 Analyse de l'erreur relative commise par l'utilisation des différentes lois .....	87
VIII.5 Domaines de validité des différentes lois.....	89
VIII.6 Evolution du coefficient de Manning avec le débit .....	91
Chapitre IX : Etude numérique de l'influence de la prise en compte de la turbulence.....	97
IX.1 Introduction .....	98
IX.2 Analyse globale des résultats obtenus.....	99
IX.3 Explication du phénomène de mise en charge de la plaine inondable .....	102

---

Chapitre X : Conclusions.....	105
X.1 Rappel des objectifs poursuivis.....	106
X.2 Domaines de validité des différentes lois de frottement .....	106
X.3 Ajustement du coefficient de Manning .....	108
X.4 Nouvelle formulation continue du frottement.....	109
X.5 Apports de la prise en compte de la turbulence.....	110
X.6 Apports scientifiques et personnels du travail .....	111
Chapitre XI : Bibliographie .....	112
XI.1 Livres .....	113
XI.2 Sites Internet.....	114
Chapitre XII : Annexes .....	115
XII.1 Annexe 1 : Intégration des équations de Navier-Stokes sur la hauteur de la lame fluide .....	118
XII.2 Annexe 2 : Intégration des équations de Navier-Stokes sur la section mouillée de la lame fluide .....	123
XII.3 Annexe 3 : Développement de la formulation de Chézy .....	127
XII.4 Annexe 4 : Développements pour la détermination de la rugosité relative amenant la corrélation exacte entre la formule de Nikuradse et les lois empiriques de frottement .....	129
XII.5 Annexe 5 : Wolf2D .....	131
XII.6 Annexe 6 : Validation des résultats obtenus par l'étude de l'Ourthe à Moiricy.....	143
XII.7 Annexe 7 : Détails des valeurs des différents graphiques repris dans ce travail.....	146

## Table des figures

Figure 1. Plan du travail.....	11
Figure 2. Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour $k/h=0,01$ .....	26
Figure 3. Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour $k/h=0,1$ .....	26
Figure 4. Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour $k/h=1$ .....	27
Figure 5. Courbes de correspondance de la loi de Manning aux lois modernes .....	47
Figure 6. Courbes donnant la valeur du coefficient de Strickler à utiliser pour correspondre aux différentes lois modernes .....	48
Figure 7. Courbes de correspondance des différentes lois empiriques à la loi de Colebrook....	49
Figure 8. Variation du coefficient de Manning avec la hauteur d'eau pour $k=0,1$ .....	53
Figure 9. Courbes de l'erreur commise sur la valeur du coefficient de Strickler par l'utilisation d'une valeur constante de ce coefficient .....	54
Figure 10. Courbes de hauteurs d'eau évaluées par les différentes lois de frottement pour $k=0,09m$ et $J=0,005$ .....	57
Figure 11. Courbes de hauteurs d'eau évaluées par les différentes lois de frottement pour $k=0,09m$ et $J=0,005$ (zoom sur les vitesses faibles) .....	58
Figure 12. Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau calculée par les différentes lois empiriques pour $k=0,09m$ et $J=0,005$ .....	59
Figure 13. Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau calculée par les différentes lois empiriques pour $k=0,09m$ et $J=0,005$ (fonction de la rugosité relative) .....	59
Figure 14. Représentation des hauteurs d'eau fournies par les différentes lois pour $U=1m/s$ et $J=0,005$ .....	62
Figure 15. Représentation des hauteurs d'eau fournies par les différentes lois pour $U=1m/s$ et $J=0,005$ (zoom sur les faibles rugosités) .....	63
Figure 16. Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau par l'utilisation des différentes lois empiriques .....	64
Figure 17. Représentation de l'erreur relative sur la hauteur d'eau commise par l'utilisation des différentes lois empiriques (fonction de la rugosité relative) .....	65
Figure 18. Crues d'Août 2002.....	69

---

Figure 19. Organigramme des objectifs du plan PLUIES .....	70
Figure 20. Représentation de l'écoulement d'inondation avec la séparation lit mineur / lit majeur .....	72
Figure 21. Variation des paramètres du polynôme de jonction avec le nombre de Reynolds... 78	
Figure 22. Visualisation satellite de la zone de modélisation d'Hamoir (source Google Earth) . 81	
Figure 23. Représentation de l'emplacement des mailles de contrôle .....	84
Figure 24. Hauteurs d'eau mesurées en aval d'Hamoir .....	85
Figure 25. Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir centre .....	85
Figure 26. Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir (Station).....	86
Figure 27. Représentation de la topographie de fond au niveau de la station d'Hamoir .....	87
Figure 28. Erreur relative sur la hauteur d'eau mesurée à la station d'Hamoir .....	88
Figure 29. Erreur relative sur la hauteur d'eau mesurée à la station d'Hamoir (fonction de la rugosité relative) .....	90
Figure 30. Variation du coefficient de Strickler en fonction de la hauteur d'eau mesurée à Hamoir.....	92
Figure 31. Variation du coefficient de Strickler avec la hauteur d'eau mesurée à Hamoir (comparaison avec la nouvelle formulation théorique) .....	93
Figure 32. Diagramme des valeurs du coefficient de Strickler à utiliser pour modéliser les différentes hauteurs d'eau et de rugosité de fond.....	94
Figure 33. Variation du coefficient de Strickler mesurée sur la Warche à Thioux.....	95
Figure 34. Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Wyompont .....	96
Figure 35. Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Amberloup .....	96
Figure 36. Visualisation satellite de la zone de modélisation de Rochefort (source Google Earth) .....	99
Figure 37. Disposition des mailles de contrôle .....	100
Figure 38. Variation de la hauteur d'eau avec le débit en lit mineur (maille 2) .....	100
Figure 39. Variation de la hauteur d'eau avec le débit au bord (maille 6) .....	101
Figure 40. Variation de la hauteur d'eau avec le débit en lit majeur (maille 8).....	101

---

Figure 41. Représentation de la viscosité turbulente 3D pour un débit de $100\text{m}^3/\text{s}$ .....	102
Figure 42. Représentation des viscosités turbulentes 2D pour un débit de $60\text{m}^3/\text{s}$ .....	103
Figure 43. Schématisation de l'influence de la turbulence horizontale sur les écoulements en lits mineur et majeur.....	104
Figure 44. Diagramme de valeur du coefficient de Strickler fonction de la hauteur d'eau à modélisée et de la rugosité de fond .....	109
Figure 45. Organigramme de la suite WOLF .....	131
Figure 46. Exemple d'une fenêtre de l'interface de la suite WOLF.....	133
Figure 47. Représentation du tronçon étudié sur l'Ourthe à Moiricy .....	143
Figure 48. Profil en long de la surface libre à Moiricy.....	144

## Chapitre I : Introduction

### Sommaire

---

I.1 Généralités .....	9
I.2 Plan de travail.....	10

---

## I.1 Généralités

Depuis toujours, l'homme sait la richesse mais aussi le danger que représente l'eau. Il a donc sans cesse essayé de la maîtriser. Dans ce souci de maîtrise des écoulements, la modélisation de ceux-ci représente un enjeu économique important. Au cours des années l'homme s'est donc armé d'outils puissants pour une modélisation des plus exactes. Parmi ces outils, les équations de base de l'hydraulique, comme leur nom l'indique, apparaissent comme essentielles à toutes modélisations.

L'importance des termes de production et de dissipation dans ces équations n'est également plus à démontrer. C'est en effet eux qui régissent principalement les écoulements, liant les hauteurs d'eau aux débits. Dès lors, l'importance de les approcher le plus fidèlement possible apparaît comme une évidence.

Bon nombre de scientifiques se sont donc attachés, avec plus ou moins de bonheur, à développer ces termes. Dans la large gamme de formulations existantes, il convient cependant de faire un tri. En effet, tous ne se sont pas attelés à décrire les mêmes phénomènes. Tous n'ont pas utilisé les mêmes méthodes. Tous n'ont pas fait preuve de la même rigueur. Il convient donc de s'intéresser aux fondements de chaque formulation avant de pouvoir l'utiliser ou avant de pouvoir interpréter les résultats qu'elle fournit.

La liste des phénomènes pouvant entrer dans ces termes de dissipation et de production, est longue et, le plus souvent, sera limitée aux plus importants. On peut ainsi compter, parmi ces phénomènes, les effets du vent, de la rugosité de fond, de la viscosité du fluide, de la turbulence, de la forme du lit, des forces de Coriolis, des forces électromagnétiques, ...

Parmi ces termes de production et de dissipation, il en existe deux particuliers qui peuvent retenir notre attention : le frottement de fond et la turbulence. Ces deux termes jouent un rôle capital dans les modélisations des écoulements à surface libre. En effet, on les rencontre dans la majeure partie de ces écoulements. De plus, leur importance sur les résultats est telle que les autres termes de production et de dissipation en deviennent souvent négligeables.

Le terme de frottement de fond est un terme de dissipation d'énergie par friction des particules fluides sur la rugosité du fond. Il dépend donc à la fois des caractéristiques du fluide, du fond, mais aussi de l'écoulement. Il existe bon nombre de formulations tentant de décrire au mieux ce terme. Parmi ces formulations, on distinguera deux écoles : l'école moderne et l'école empirique. La première établit un développement théorique du terme de frottement basé sur une approche physique des phénomènes décrits. La seconde se base, quant à elle, sur une approche expérimentale des phénomènes de frottement.

Le terme de turbulence est lui aussi un terme de dissipation d'énergie mais, cette fois, par friction interne au fluide. Il sera, lui, fonction des caractéristiques propres du fluide mais aussi de l'état de l'écoulement. En effet, la turbulence est un phénomène prépondérant aux grandes vitesses d'écoulement. Une fois de plus, plusieurs scientifiques se sont attachés à décrire les phénomènes de turbulence et la façon d'en tenir compte. On retiendra, dans ce domaine, les

apports particuliers de Reynolds et de Boussinesq, pionniers de la turbulence, qui ont ouvert la voie à bon nombre de formulations actuellement usitées.

L'objectif de ce travail sera donc de réaliser un tri parmi les nombreuses lois existantes. On tentera ainsi de définir les domaines de validité de ces lois et les manières de les adapter pour approcher au mieux la réalité. On réalisera, pour ce faire, une approche théorique des différentes lois que l'on validera (ou modifiera) par une approche numérique.

## **I.2 Plan de travail**

Dans le présent travail, on s'attachera à juger de la validité des différentes formulations existantes pour la description des termes de frottement de fond et de turbulence. Pour ce faire, on rappellera, dans un premier temps, la forme générale de ces termes dans les équations de base régissant les écoulements à surface libre. On rappellera ainsi ces équations et leurs formes intégrées, plus souvent utilisées pour les modélisations.

Dans un second temps on s'attachera à rappeler succinctement la nature des phénomènes de frottement et de turbulence. De cette manière, on pourra juger des hypothèses émises pour l'établissement des différentes formulations les représentant. On rappellera alors également les principales formulations existantes pour la description des deux termes étudiés. Ces formulations seront choisies, dans la gamme existante, tant pour leur intérêt physique que leur intérêt pratique.

Une fois ces formulations établies, on réalisera, pour les lois de frottement, une comparaison de celles-ci. On confrontera, pour ce faire, les deux écoles, moderne et empirique, permettant de juger de l'erreur apportée par l'empirisme sur une résolution plus physique des phénomènes. Cette comparaison nous permettra de définir alors des domaines de validité des différentes lois empiriques, considérant les lois modernes comme décrivant parfaitement la réalité.

Par la suite, on s'intéressera aux écoulements de crue et d'inondation, pour lesquels il est mis à notre disposition une bibliothèque conséquente de simulations validées sur des événements historiques objectifs. On choisira ainsi deux zones particulières permettant de mettre en évidence les phénomènes étudiés. La zone de Hamoir sur l'Ourthe sera choisie pour étudier les formulations de frottement. Une zone en amont de Rochefort sur la Lomme sera quant à elle choisie pour modéliser les différentes formulations de turbulence.

L'analyse des résultats obtenus, sur la zone d'Hamoir, par l'utilisation de différentes lois de frottement, permettra de valider ou de modifier les domaines de validité, établis théoriquement. On vérifiera aussi l'hypothèse, à la base de notre étude théorique, qui est de considérer les lois modernes comme décrivant exactement la réalité.

Ces résultats nous permettront, enfin, de valider ou de corriger une nouvelle formulation du frottement émise au cours de ce travail. Cette nouvelle formulation, sera établie en vue de fournir une formulation continue du frottement s'approchant le plus possible de la physique réelle de l'écoulement.

L'analyse des résultats obtenus sur la zone de Rochefort nous fournira, quant à elle, une information sur l'influence de la prise en compte de la turbulence. Ces résultats nous permettront, alors, de donner une idée de la modification à apporter aux lois de frottement et à leurs domaines de validité, lorsque la turbulence est prise en compte par un terme de dissipation propre.

On conclura donc ce travail en fournissant les domaines de validité et d'utilisation des différentes lois de frottement et de turbulence. On fournira également une nouvelle formulation du terme de frottement permettant une modélisation continue des écoulements quelque soit la hauteur d'eau.

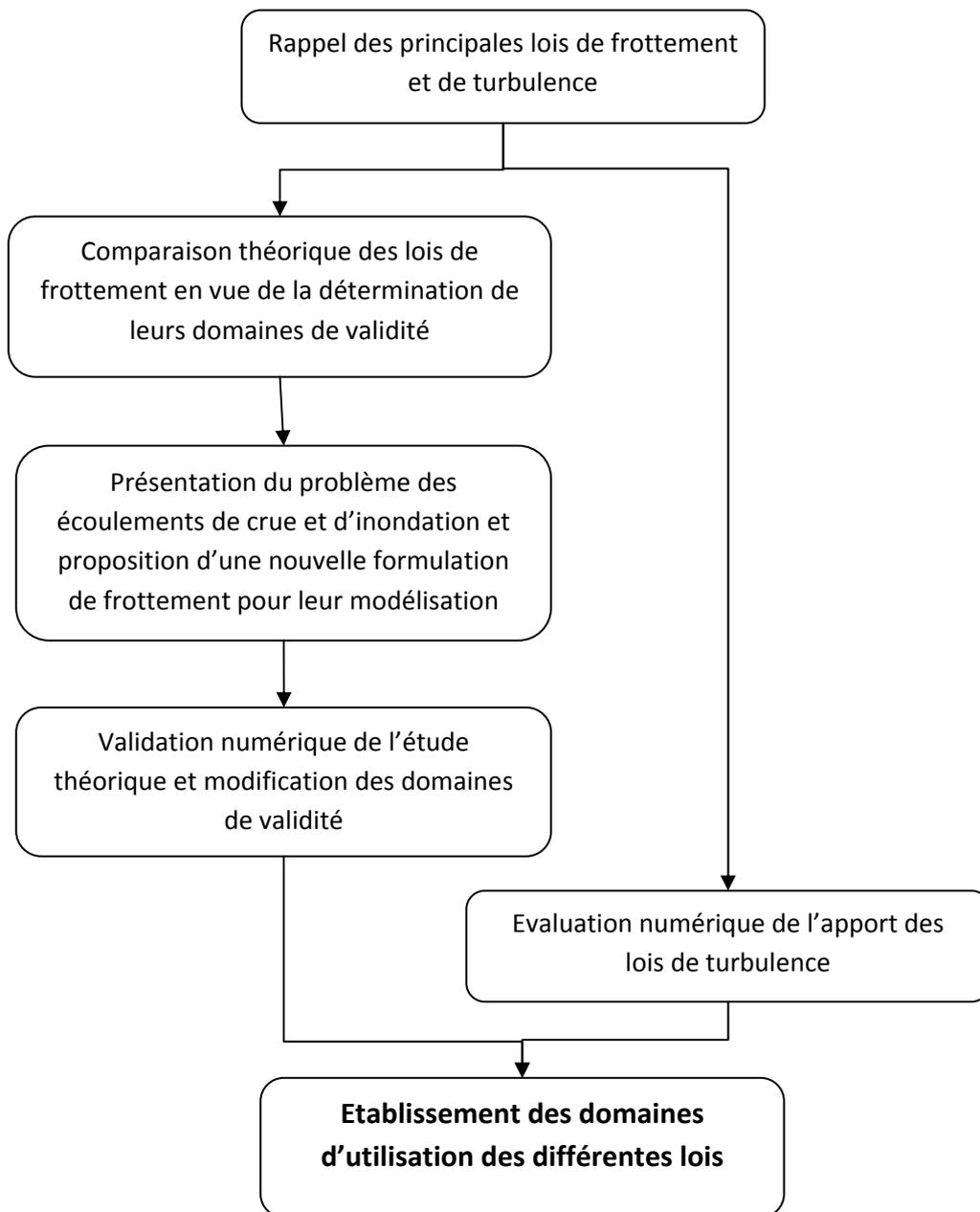


Figure 1. Plan du travail

## Chapitre II : Equations de base de l'hydraulique

### Sommaire

---

II.1 Introduction .....	13
II.2 Equations de Navier-Stokes .....	13
II.3 Equations intégrées sur la hauteur .....	14
II.4 Equations intégrées sur la section mouillée .....	15

---

## II.1 Introduction

Depuis toujours, l'homme a compris que l'eau était un enjeu important pour sa survie. Cette eau qui peut être tantôt bienfaitrice, tantôt destructrice, l'homme la vénère et la craint. L'homme a ainsi depuis toujours cherché à maîtriser celle-ci (irrigation, barrages, canalisations, murs anti-crues, ...).

C'est dans ce souci de maîtrise de l'eau et des écoulements en général que de nombreux scientifiques se sont lancés dans la modélisation de ces écoulements. De ces nombreuses recherches, sortent deux principes qui vont servir de base à l'élaboration de toutes les théories de l'hydraulique.

Le premier de ces principes est le principe de conservation de la masse qui peut être directement tiré de la célèbre phrase de Lavoisier : « rien ne se perd rien ne se crée ». Ainsi, en considérant un volume fluide fini, la différence entre la masse entrante dans ce volume et la masse sortante sur une durée T est égale à l'augmentation de masse de ce volume de contrôle sur la même durée T. En écoulement continu, on peut ainsi écrire :

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dV = 0$$

, avec u, v et w les composantes de vitesses selon les trois axes de références x, y et z.

Le deuxième principe de base des équations de l'hydraulique est le principe de conservation de la quantité de mouvement. Ce principe fut établi par Euler qui l'annonça « comme constituant la base de toute la mécanique et de toutes les autres sciences portant sur le mouvement de corps d'une espèce quelconque ». En écoulement continu ce principe peut s'écrire comme suit :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iint_{\Gamma} \vec{T} d\Gamma$$

, avec F les forces de volume et T les forces de surface.

Voici donc posés les deux principes de base qui serviront aux développements qui vont suivre. Attardons-nous maintenant sur la modélisation des écoulements et sur les hypothèses de ces modélisations.

## II.2 Equations de Navier-Stokes

Afin d'établir les équations de base de l'hydraulique, il nous faut maintenant introduire dans les équations de conservation établies ci-dessus les termes propres aux écoulements.

Commençons par introduire les caractéristiques des écoulements dans la formule de conservation de la masse. En hydraulique appliquée, on considère l'eau comme un fluide incompressible et ainsi  $\rho = cste$ .

En introduisant ce fait dans la formule de conservation de la masse, on obtient ainsi la première équation de base de l'hydraulique, appelée équation de continuité :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= 0 \\ \rho &= \text{cste} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Afin d'obtenir la formulation de la conservation de la quantité de mouvement propre aux écoulements fluides, il faut introduire dans la formulation de base les forces inhérentes à ces écoulements. Ainsi, on introduit, dans la formule d'Euler, les forces volumiques de gravité et les forces surfaciques de pression et de tensions visqueuses. On obtient ainsi la formulation suivante de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i \vec{u}) = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

On notera qu'on a ici négligé les forces centrifuges, électromagnétiques et de Coriolis devant les efforts de gravité. Cette approximation sera valable dans la plupart des applications de l'hydraulique. On vérifiera tout de même, lors de l'utilisation des formules établies ici, l'importance des termes négligés.

On obtient ainsi finalement un système de quatre équations (une de continuité et trois de conservation de la quantité de mouvement) en les quatre inconnues  $u_i$  et  $p$ . Ces équations sont appelées équations de base de l'hydraulique ou encore équations de Navier-Stokes. Leur intérêt est qu'elles ne souffrent que de très peu d'hypothèses et qu'elles sont donc applicables à la quasi-totalité des écoulements fluides. On notera enfin le caractère conservatif du système fermé qui aura une importance capitale pour la résolution numérique de celui-ci.

### II.3 Equations intégrées sur la hauteur

La résolution complète du système d'équations de Navier-Stokes est particulièrement lourde. De plus, pour certains types d'écoulement, l'apport de cette résolution sur les informations selon l'axe  $z$  n'est que très faible en comparaison du temps de calcul supplémentaire nécessaire. Ainsi, lorsque l'on veut étudier un écoulement quasi-horizontal pour lequel la hauteur d'eau est faible en comparaison avec l'étendue de l'écoulement, il peut être intéressant de modéliser le système d'équations intégrées sur cette hauteur.

Le système est ainsi ramené à un système à trois équations (une de continuité et deux de conservation de la quantité de mouvement) et trois inconnues (deux débits et une hauteur d'eau). Cette formulation n'est cependant possible que grâce à des hypothèses sur la répartition des efforts selon l'axe d'intégration. On prendra donc toujours soin de vérifier ces hypothèses avant application des formules développées ci-après.

L'intégration sur la hauteur d'eau des équations de Navier Stokes, ainsi que les hypothèses de base de cette intégration sont reprise en annexe (cf. annexe 1).

On obtient alors finalement les équations de base intégrées sur la hauteur d'eau :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{uh}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{vh}}{\partial y} &= (r - i) \sin \theta_z \\ \frac{\partial (\bar{uh})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{xx} \bar{u}^2 h) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_{xy} \bar{u} \bar{v} h) &= \\ gh \left( \sin \theta_x - \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} (S_{xx} + S_{yx}) + \sin \theta_z (K_{xf} i - K_{xs} r) \bar{u} + t_x & \\ \frac{\partial (\bar{vh})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_{yy} \bar{v}^2 h) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{xy} \bar{u} \bar{v} h) &= \\ gh \left( \sin \theta_y - \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} (S_{yx} + S_{yy}) + \sin \theta_z (K_{yf} i - K_{ys} r) \bar{v} + t_y & \end{aligned}$$

Ces trois équations en les trois inconnues u, v et h forment un système valable tant que la vitesse selon la perpendiculaire au fond est faible comparée à la vitesse d'écoulement le long de la ligne de plus grande pente. Dans ce cas, la répartition de pression sera hydrostatique selon cette perpendiculaire au fond. On notera enfin que pour que la fermeture du système soit faite, il faudra définir le profil de vitesse sur la hauteur et ainsi les valeurs des coefficients d'inégale répartition des vitesses.

On voit donc que ce système d'équations, bien que plus facile à résoudre, s'applique à un nombre plus restreint d'écoulements et souffre d'une part d'empirisme pour la fermeture du système. On remarquera pour finir la perte d'une partie du caractère tridimensionnel et anisotrope des écoulements.

#### II.4 Equations intégrées sur la section mouillée

Toujours dans un souci de simplification de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, on passe ici à un modèle unidimensionnel. Dans l'étude d'écoulements de rivière, la longueur caractéristique dans la direction d'écoulement de la rivière est nettement supérieure aux longueurs caractéristiques dans le plan perpendiculaire.

Dés lors, pour ce type d'écoulement, on pourra facilement définir un axe privilégié à l'écoulement et ainsi intégrer les équations sur la section perpendiculaire à cet axe. Il est bien évident qu'une fois de plus, ce passage d'un système de quatre équations à quatre inconnues à un système de deux équations à deux inconnues passe par la pose de certaines hypothèses. On prendra donc soin de toujours vérifier celles-ci avant d'utiliser le modèle développé ci-après.

Passant par l'intégration des équations de base et les hypothèses une fois de plus détaillées en annexe (cf. annexe 2), on obtient alors les équations de Navier-Stokes intégrées sur la section mouillée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= q_L \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_\omega \frac{q^2}{\omega} \right) &= g \omega \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} [(h_s - z)l] dz \\ - g \cos \theta h l_f \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} &+ g \cos \theta \int_{-h_f}^{h_s} (h_s - z) \frac{\partial l}{\partial x} dz + \frac{1}{\rho} t_x + S_x \end{aligned}$$

Une fois de plus, la détermination des différents termes de cette équation nécessite plusieurs hypothèses supplémentaires à l'hypothèse de vitesses faibles dans le plan perpendiculaire à l'écoulement. En effet, il faut tout d'abord une fois de plus définir la répartition de vitesse sur la section afin de déterminer les valeurs de  $\rho_\omega$  et  $S_x$ . Il faudra également évaluer le terme  $t_x$  de frottement. L'évaluation de ce terme sera développée plus profondément par la suite. Enfin, afin d'assurer la fermeture de ce système de deux équations, il faudra définir la forme du lit. Cette expression de fermeture devra donc lier la section mouillée à la hauteur d'eau et à la position selon l'axe OX.

On obtient ainsi finalement un système de deux équations à deux inconnues (q et h). L'applicabilité de ce système à un écoulement passera toujours par la vérification des différentes hypothèses qui ont été nécessaires à la mise en place de ses équations. Ainsi les vitesses dans le plan perpendiculaire à l'écoulement principal devront être faibles, les apports latéraux devront se faire perpendiculairement à l'écoulement et les conditions de répartition des vitesses, de frottement et de la forme du lit devront être correctement calibrées. On a donc un système à présent très rapide à résoudre mais qui fait preuve d'une importante approximation par le nombre de paramètres à calibrer.

## Chapitre III : Le frottement

### Sommaire

---

III.1 Introduction .....	18
III.2 Les formules empiriques .....	18
III.2.1 Formulation générale.....	19
III.2.2 Loi de Chézy .....	19
III.2.3 Loi de Manning-Strickler .....	20
III.2.4 Les autres formulations empiriques .....	21
III.3 Les formules modernes.....	21
III.3.1 Régime laminaire .....	22
III.3.2 Régime turbulent lisse .....	22
III.3.3 Régime turbulent rugueux .....	23
III.3.4 Régime transitoire.....	24
III.4 La macro-rugosité .....	27
III.5 Conclusions .....	28

---

### III.1 Introduction

Le frottement est défini comme « la résistance que les corps éprouvent à se mouvoir les uns sur les autres ». En hydrodynamique des fluides, on entend par frottement l'ensemble des pertes dues au frottement du fluide sur le fond du lit dans lequel il s'écoule mais aussi dues à la viscosité du fluide lui-même. Par viscosité du fluide, on entendra, bien sûr, à la fois, la viscosité cinématique et turbulente de celui-ci.

Comme on a pu le voir lors de l'établissement des équations de base de l'hydraulique et de leurs formes intégrées sur la hauteur d'eau et la section mouillée, ces frottements sont pris en compte dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, dans le terme de tension visqueuse ou sa forme intégrée.

Il est important de noter que ces termes de « frottement » reprennent en fait l'ensemble des pertes par frottement de fond, par frottement sur les berges, par turbulence, par viscosité interne du fluide,... Les paramètres influençant les termes de frottement sont donc multiples et complexes ce qui rend ces termes difficilement quantifiables. Cependant, les effets des pertes par frottement sur les résultats obtenus en termes de hauteur d'eau ou de vitesse des écoulements fluides sont loin d'être négligeables. C'est la raison pour laquelle de nombreux auteurs ont établi des lois pour permettre la prise en compte, plus ou moins aisée, des phénomènes de frottement.

En réalité, ces lois n'établissent pas directement la valeur des termes de frottement énoncés plus haut. Les auteurs de ces différentes lois se sont en fait plutôt penchés sur le concept de pente de frottement. Cette pente de frottement, notée  $J$ , représente la pente de la ligne d'énergie. On se ramène alors, par exemple, au terme de frottement de l'équation intégrée sur la section mouillée par la formule suivante :

$$t_x = -\rho g \omega J$$

Afin de structurer l'étude des lois de frottement, on peut distinguer deux familles qui se dégagent parmi la quantité d'auteurs et de propositions de lois. Ainsi, on peut parler d'une école empirique, emmenée par Chézy ou encore Manning, et d'une école dite moderne, emmenée par Prandtl. Si la première base principalement ses lois sur l'expérience, l'observation et l'interprétation de résultats concrets, la deuxième préférera se baser sur un fondement théorique plus puissant approchant le plus rigoureusement les phénomènes réels. Lors de toute modélisation d'écoulement, le choix devra donc être fait entre une loi de frottement plus rigoureuse mais plus difficile à mettre en place ou une étude plus empirique et plus simple.

### III.2 Les formules empiriques

Comme annoncé plus haut, les formules empiriques développées par de nombreux auteurs se basent exclusivement sur les résultats d'expériences concrètes. L'expérience menée par la plupart d'entre eux correspond à rechercher la pente à donner à un canal pour obtenir l'écoulement uniforme. En effet, pour cet écoulement uniforme, la pente du canal équivaut à

la pente de frottement  $J$ . Ils obtiennent ainsi divers résultats liant les caractéristiques géométriques et hydrauliques des écoulements à cette pente de frottement.

Il est donc intéressant de noter que les formules développées ici l'ont été pour des écoulements uniformes. Néanmoins, les résultats obtenus par l'utilisation de ces formules pour d'autres types d'écoulement ont conduit à admettre leur validité pour tous types d'écoulement.

### III.2.1 Formulation générale

La formulation générale des lois empiriques de frottement se base sur la structure de la formule de Chézy dont le développement sera effectué plus loin. Cette formulation générale lie alors la pente de frottement aux divers paramètres hydrauliques et géométriques influençant le frottement de fond. On obtient ainsi la formulation suivante :

$$U = \alpha J^{1/2} R_h^\lambda$$

On remarque donc que la pente de frottement est liée aux conditions hydrauliques de l'écoulement par le terme de vitesse lié au rayon hydraulique traduisant la hauteur d'eau. Le rayon hydraulique traduit également l'influence de la forme du lit sur le frottement. Enfin, le coefficient  $\alpha$  introduit lui dans l'équation l'effet de la rugosité de ce lit.

La principale discussion entre les différents auteurs va donc porter sur l'exposant à appliquer au rayon hydraulique et sur le calibrage à apporter au coefficient de rugosité.

Il est intéressant de noter, outre les paramètres pris en compte dans cette formulation, ceux qui sont évincés par celle-ci. En effet, comme on l'a vu précédemment ce terme de frottement des équations de l'hydraulique prend en réalité en compte une multitude d'effets dus, outre au frottement sur le lit, aux tensions visqueuses ainsi qu'aux tensions turbulentes au sein du fluide. Il est dès lors étonnant de ne pas voir apparaître, dans ces formules, les viscosités cinématique et turbulente du fluide. De la même manière, on peut s'étonner de l'absence du nombre de Reynolds définissant l'état de l'écoulement.

Il apparaît déjà clairement dans la formulation générale des lois empiriques de frottement le caractère simple de la formulation. Ce caractère est cependant le pendant de simplifications importantes dont le bienfondé sera évalué par la suite.

### III.2.2 Loi de Chézy

Développons à présent la loi qui a servi de base à l'élaboration de la formulation générale des lois empiriques. Cette loi fût développée par Antoine Chézy au 18<sup>ème</sup> siècle.

Afin de déterminer les sections à donner aux canaux nécessaires à l'alimentation en eau de la ville de Paris, Chézy dut s'intéresser aux phénomènes de frottement et de perte de charge. Il s'est ainsi intéressé au développement de ces pertes pour un écoulement rectiligne permanent et uniforme. Son développement, détaillé en annexe (cf. annexe 3), lui a ainsi permis d'aboutir à la formulation suivante du frottement :

$$U = C \sqrt{JR_h}$$

On remarquera que cette formulation est bien du type de la formulation générale des lois empiriques avec l'exposant du rayon hydraulique qui vaut 0,5 et le coefficient de rugosité qui n'est autre que le coefficient de Chézy.

Afin de pouvoir appliquer cette formule il reste donc à calibrer ce coefficient de Chézy. Pour ce faire, on citera ici deux des formules habituellement utilisées. La première, énoncée par Bazin, introduit l'influence de la rugosité de paroi (coefficient de Bazin  $\gamma$ ) et de la forme du lit (rayon hydraulique) par la formulation suivante :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}}$$

La deuxième est la formule de Ganguillet et Kutter qui prend également en compte l'influence de la rugosité de paroi (coefficient  $n$ ) et de la forme du lit mais aussi celle de la pente de fond par la formule suivante :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{i} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{i}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}}$$

On attirera l'attention sur le fait que la complexité de la seconde n'est pas un gage d'une meilleure précision, que du contraire.

Les valeurs des coefficients  $\gamma$  et  $n$  à introduire dans les formules précédentes sont repris sous forme de tables en fonction de la nature des matériaux.

### III.2.3 Loi de Manning-Strickler

La loi de Manning-Strickler est la loi la plus utilisée pour modéliser les phénomènes de frottement dans les écoulements à surface libre. Ce succès est à la fois dû à la simplicité de sa mise en œuvre et à la bonne corrélation des résultats obtenus par la modélisation avec les paramètres mesurés sur le terrain.

Les expériences de Manning lui ont permis de développer la formulation suivante de la loi de frottement :

$$U = \frac{1}{n} J^{1/2} R_h^{2/3}$$

Cette formulation correspond donc, une fois de plus, à la formulation générale avec un exposant de 0,667 appliqué au rayon hydraulique et un coefficient de rugosité représenté par l'inverse du coefficient de Manning  $n$ .

Strickler s'est, quant à lui, concentré sur la détermination du coefficient de Manning ou plutôt du coefficient de Strickler qui n'est autre que l'inverse du premier. Il a ainsi proposé une formule mettant en évidence l'influence de la taille des grains composant la paroi. Il faut noter

que cette notion de taille de grain vient du fait qu'il a mené son étude sur des parois en matériaux terreux non cohérents. Il a ainsi formulé la proposition suivante :

$$K = \frac{1}{n} = \frac{26}{d_{35}^{1/6}}$$

L'intervention de Strickler pour la détermination de ce coefficient K fonction de la rugosité a permis à la formule de Manning de connaître le succès qu'elle a connu et qu'elle continue de connaître aujourd'hui. On retrouvera donc dans la littérature spécialisée les différentes valeurs de K propres à chaque situation.

La valeur de K est ainsi influencée par le type de matériau formant les parois, son état de dégradation, le profil de la section mouillée, le profil global de la rivière, la végétation, ...

### III.2.4 Les autres formulations empiriques

On a développé ici les formules de Chézy et de Manning car elles jouent un rôle important dans la description des phénomènes de frottement. En effet, comme on l'a dit plus haut, la formulation de Chézy est à la base des formules empiriques tandis que celle de Manning est celle dont l'utilisation est la plus répandue.

Il existe cependant de nombreuses autres formulations empiriques. On reprend au tableau ci-dessous quelques-unes de ces lois caractérisées par la valeur de l'exposant du rayon hydraulique.

Auteur	X
Gaukler	0,4
Forchheimer	0,7
Christen	0,625
Hagen	0,714
Tillman	0,7

### III.3 Les formules modernes

Afin de se rapprocher des phénomènes physiques réels qui se trouvent derrière les termes de frottements, l'école de l'université de Göttingen (Allemagne) s'est attachée à la recherche d'un développement théorique de ces termes. Ainsi, sous la direction de Prandtl, de grands noms de l'hydraulique tels Blasius, Nikuradse ou encore Von Karman se sont attachés à décrire les phénomènes de frottement.

L'ensemble de leurs développements tend à déterminer la valeur d'un nouveau coefficient de frottement f. Ce coefficient sera alors exprimé comme une fonction, parfois complexe, du nombre de Reynolds et de la caractéristique de rugosité. On voit donc, cette fois, une prise en

compte de l'état de l'écoulement. Cette approche semble ainsi plus rigoureuse que l'approche faite par les lois empiriques.

Afin de ramener le coefficient de frottement, étudié dans la suite, à la pente de frottement, utile pour l'insertion du frottement dans les équations traditionnelles, on se rappellera de l'équation générale des pertes de charge (relation de Darcy-Weisbach) :

$$J = \frac{f U^2}{D 2g}$$

Dans cette formule le D représente le diamètre de la conduite étudiée. En effet, les études réalisées par l'école de Prandtl n'ont pas eu lieu sur des écoulements à surface libre mais bien sur des écoulements de conduite. Cependant, on généralisera les équations obtenues aux cas des écoulements à surface libre en remplaçant, dans l'équation ci-dessus, le diamètre des conduites par quatre fois le rayon hydraulique. On a ainsi, pour les écoulements à surface libre qui nous intéressent, la relation de Darcy-Weisbach suivante :

$$J = \frac{fU^2}{8R_h g}$$

Dans la suite, nous allons reprendre les différentes formulations qui ont été émises pour le calcul du coefficient de frottement. On notera que la gamme d'utilisation de chacune de ces formulations est définie par un état de l'écoulement (laminaire ou turbulent) et un état de rugosité des parois (lisse, rugueux ou transitoire).

### III.3.1 Régime laminaire

Commençons ainsi par la formulation valable en régime laminaire, bien que cette formulation nous soit peu utile. En effet, les écoulements à surface libre traditionnels ne sont pratiquement jamais laminaires. Cependant, dans un souci de description complète des phénomènes de frottement dans les écoulements on reprend ici la formule développée par Poiseuille :

$$f = \frac{64}{\text{Re}}$$

La caractéristique principale de cette formulation est qu'elle ne dépend que de l'état d'écoulement. En effet, tant que le régime est laminaire, la rugosité n'aura pas d'effet sur le filet fluide. Ainsi cette formule est valable quel que soit l'état de rugosité des parois.

### III.3.2 Régime turbulent lisse

Passons ensuite au régime turbulent qui nous intéresse plus. Cette fois, l'état de rugosité va avoir une influence sur les caractéristiques de frottement. On commencera donc par la formulation valable pour les parois lisses.

C'est Prandtl lui-même qui s'est intéressé au cas des parois lisses. Il a ainsi développé les notions importantes de turbulence que sont la couche limite, la tension de frottement, la longueur de mélange ou la vitesse de frottement. C'est sur base de ces notions qu'on obtient

finalement l'expression du coefficient de frottement, appelée formule de Prandtl-Von Karman :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -2 \log \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}}$$

Pour commencer, on remarquera une fois de plus l'indépendance de la formule à la rugosité de paroi. Cela provient du fait que cette formule est applicable pour des écoulements sur parois lisses. Ainsi, la rugosité de ces parois est négligeable par rapport à la hauteur de couche limite laminaire de l'écoulement.

On remarquera ensuite que la formulation proposée par Prandtl est implicite. Sa mise en œuvre est donc mal aisée. Pour palier à ce fait, Blasius a, quant à lui, proposé une formulation explicite du frottement des écoulements turbulents sur parois lisses :

$$f = \frac{0,3164}{\text{Re}^{1/4}}$$

Cette formule s'approche assez bien des résultats de Prandtl pour des nombres de Reynolds inférieurs à  $10^5$ . Pour des valeurs supérieures de Reynolds on préférera conserver la formule de Prandtl s'approchant plus des résultats observés expérimentalement.

### III.3.3 Régime turbulent rugueux

Le régime turbulent rugueux est défini par un rapport limite entre le nombre de Reynolds et la rugosité relative de la paroi. En effet, l'action de la rugosité sur l'écoulement va dépendre essentiellement de son état. Ainsi, plus l'écoulement est turbulent et le nombre de Reynolds élevé, plus la couche limite laminaire, qui se développe aux parois, sera arrachée et plus la rugosité aura un effet important sur l'écoulement. On considérera donc un régime turbulent rugueux lorsque le nombre de Reynolds sera supérieur à la limite suivante :

$$\text{Re} = 560 \frac{D}{k} = 2240 \frac{R_h}{k}$$

Dans cette formulation  $k$  représente la hauteur des aspérités et est rapporté au diamètre de la conduite pour former la rugosité relative.

C'est à Nikuradse que l'on doit l'étude des écoulements turbulents rugueux. En effet, il s'est intéressé à la rugosité des conduites en collant sur une paroi lisse une couche de grains de sable calibrés. Il créa ainsi des rugosités homogènes dont les caractéristiques lui étaient parfaitement connues. Le succès de cette expérience fait qu'aujourd'hui encore on ramène généralement un état de rugosité complexe à une hauteur de rugosité de Nikuradse équivalente.

Les expériences ainsi menées par Nikuradse lui ont permis de développer l'équation suivante de détermination du coefficient de frottement pour les écoulements en régime turbulent rugueux :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -2 \log \frac{k}{3,7D} = -2 \log \frac{k}{14,8R_h}$$

On remarquera cette fois une indépendance vis-à-vis du nombre de Reynolds et donc de l'état de l'écoulement. Cela provient du fait de l'applicabilité de cette formule aux seuls écoulements turbulents rugueux. En effet, pour ce type d'écoulement l'importance des termes d'inertie fait que seule la rugosité de paroi intervient sur le frottement.

Cette indépendance vis-à-vis du nombre de Reynolds a déjà été mise en évidence lors de l'établissement des lois empiriques. On peut dès lors déjà s'attendre au fait que ces lois empiriques ne puissent définir de façon exacte le frottement que dans le cas d'un écoulement turbulent rugueux. Cette étude sera réalisée plus loin mais il était intéressant de remarquer ici le parallélisme qui peut être fait entre les lois empiriques et la formulation de Nikuradse.

### III.3.4 Régime transitoire

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à définir le régime intermédiaire aux régimes turbulents, lisse et rugueux. C'est à Colebrook que l'on doit une formulation en accord suffisant avec les observations expérimentales. Il a ainsi assuré la liaison entre les deux domaines d'écoulement turbulent en groupant simplement les formules de Prandtl et Nikuradse sous une seule formule :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -2 \log \left[ \frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] = -2 \log \left[ \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right]$$

On remarquera que pour des valeurs élevées de Reynolds, le deuxième terme devient négligeable et l'on se ramène bien à la formulation de Nikuradse.

De la même manière, pour des valeurs suffisamment faibles du nombre de Reynolds, le premier terme devient négligeable vis-à-vis du second et l'on se ramène à la formule de Prandtl.

La jonction entre les différents régimes est donc bien assurée par cette formule qui est de plus en accord avec les résultats expérimentaux. C'est pourquoi cette formule est à présent acceptée comme référence dans les études de frottement.

L'inconvénient majeur de cette formulation est, comme pour la formule de Prandtl, son caractère implicite. Certains auteurs se sont donc attachés avec plus ou moins de succès à approcher la formulation de Colebrook par des formulations explicites. Trois de celles-ci peuvent être ainsi retenues comme approchant correctement la loi de Colebrook.

Il s'agit pour les deux premières de lois émises par Barr et établies pour les écoulements en conduite :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{14,8.R_h} \right) + \frac{11,52}{(4.Re)^{0,9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{4,518 \log \left( \frac{Re}{7} \right)}{Re \left( 1 + \frac{Re^{0,52} \left( \frac{k}{D} \right)^{0,7}}{29} \right)} + \frac{k}{3,7D} \right]$$

Elles sont ici présentées dans l'ordre de leur élaboration en 1977 pour la première et 1981 pour la seconde. Par souci de clarté, on les nommera par la suite respectivement Barr 1 pour la première et Barr 2 pour la deuxième.

La troisième approche explicite de l'équation de Colebrook est fournie par Yen en 1991. Se basant sur la première formulation de Barr, il établit sa formulation pour les écoulements bidimensionnels à surface libre :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{12.R_h} + \frac{1,95}{Re^{0,9}} \right)$$

On notera qu'il énonce cette formule pour un domaine de validité comprenant les rugosités relatives inférieures à 0,05 et les nombres de Reynolds supérieurs à 30000.

Dans les trois graphiques qui suivent, on peut se rendre compte de la corrélation qui existe entre les trois lois explicites de Barr et de Yen et la loi implicite de Colebrook :

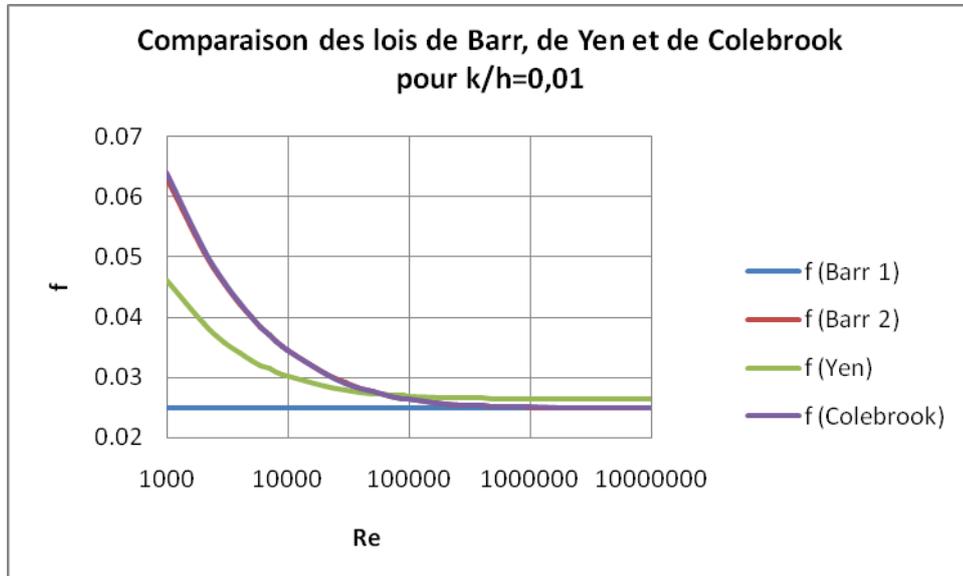


Figure 2. Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour  $k/h=0,01$

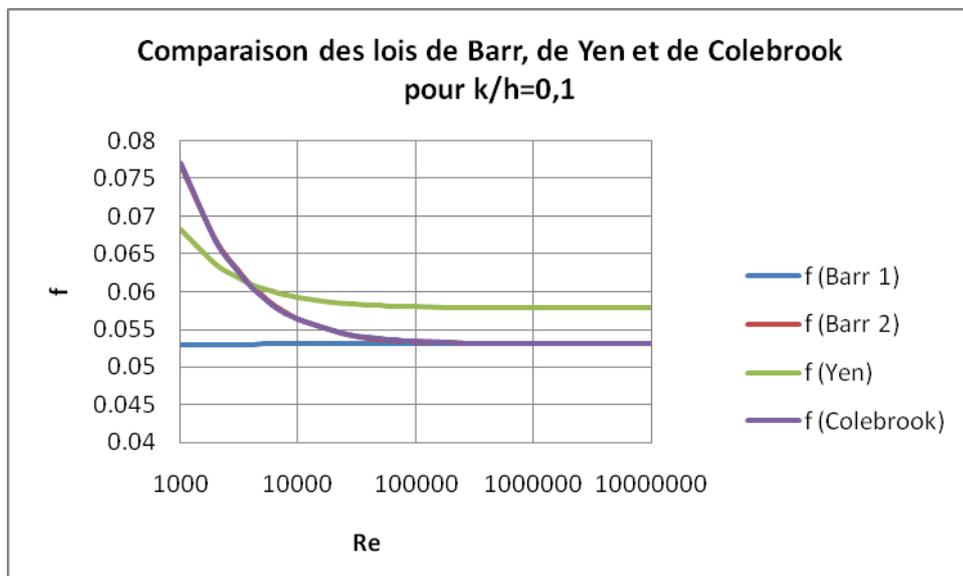


Figure 3. Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour  $k/h=0,1$

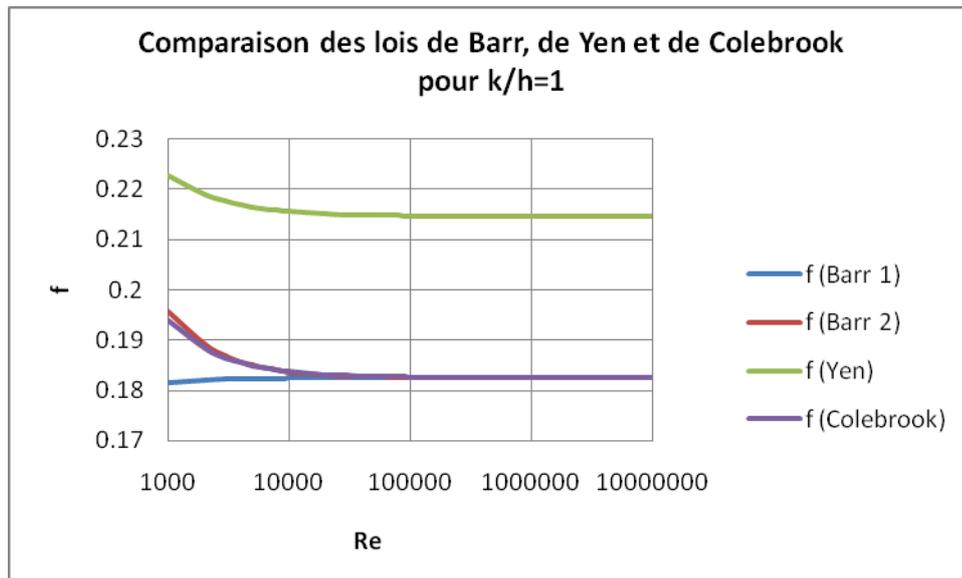


Figure 4. Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour  $k/h=1$

Ainsi, on remarque que la seconde loi émise par Barr approche quasi-exactement la loi de Colebrook et ce pour n'importe quelle valeur de la rugosité relative. On utilisera donc cette seconde loi de Barr dans toutes les applications où la loi de Colebrook est utilisable.

La première loi de Barr s'éloigne, par contre, de la loi de Colebrook pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à une limite d'autant plus faible que la rugosité relative est élevée.

Enfin, on voit, en effet, que la loi de Yen s'éloigne de celle de Colebrook pour des valeurs de rugosité relative grandissantes. Pour des rugosités relatives faibles, l'erreur commise par la loi de Yen est d'autant plus importante que le nombre de Reynolds sera faible.

Les valeurs numériques de l'ensemble des graphiques développés dans ce travail sont reprises sous forme de tables en annexe (cf. annexe 7). On ne rappellera plus ce fait, applicable à tous les graphiques qui suivent.

### III.4 La macro-rugosité

On considère la macro-rugosité lorsque la dimension des éléments de rugosité est du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique de l'écoulement. Ainsi on considèrera un écoulement sur macro-rugosité lorsque le critère suivant est rempli :

$$\frac{h}{D_{84}} \leq 4$$

Dans cette formule  $h$  représente évidemment la hauteur d'eau et  $D$  la dimension caractéristique de la rugosité (équivalent de  $k$ ).

Récemment, des chercheurs se sont attachés à développer des formules de frottement valables pour ce type de rugosité. En effet, il existait là un manque crucial d'information sur le frottement.

C'est ainsi que Bathurst proposa la loi suivante qui fait aujourd'hui office de référence :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -1,987 \log \frac{D_{84}}{5,15h}$$

On voit donc que la forme générale de l'équation de Nikuradse est conservée même si les coefficients sont légèrement modifiés pour prendre en compte le caractère propre à la macro-rugosité. Le passage entre ces deux lois, pour des rugosités relatives proches de 0,25, se fera donc par un saut brusque du coefficient de frottement.

Enfin, on notera une formulation alternative proposée par Dubois qui prend, en plus, en compte la densité horizontale  $p$  de la macro-rugosité :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 5,62 \log \frac{h}{D_{84}} + 3,13 p^{-0,613}$$

Cette formulation de Dubois permet de réaliser la liaison entre écoulement, ruissellement et infiltration. N'étant pas d'un intérêt majeur pour ce travail, on se rapportera aux développements de Dubois pour la compréhension de cette liaison.

### III.5 Conclusions

On a donc à présent un aperçu global de l'ensemble des développements réalisés dans le domaine du frottement.

On a déjà pu remarquer le caractère moins rigoureux des lois empiriques (notamment par l'absence du nombre de Reynolds). Cependant, ces lois offrent une résolution bien plus directe avec un calibrage plus aisé des coefficients de frottement. Elles trouvent ainsi leur succès dans les bons résultats obtenus sur la plupart des écoulements.

On a également pu remarquer le fondement physique relativement strict des formulations modernes. Malheureusement, ce respect théorique passe par des formules plus difficiles à mettre en œuvre (formules implicites) et par un coefficient de rugosité plus difficile à calibrer. Cependant, leur respect des lois physiques conditionnant les écoulements, en fait un outil puissant pour la représentation d'écoulements complexes.

Le choix de l'une ou l'autre optique quant à la prise en compte du frottement sera discuté par la suite. On s'est donc contenté, ici, de présenter les éléments existants, leurs fondements théoriques et les hypothèses qui ont mené à leurs développements.

## Chapitre IV : La turbulence

### Sommaire

---

IV.1 Introduction .....	30
IV.2 La méthode de la moyenne de Reynolds.....	31
IV.3 Fermeture des équations de Reynolds .....	32
IV.3.1 Viscosité turbulente de Boussinesq (Fermeture « apparente » des équations) .....	32
IV.3.2 Modèles de fermetures .....	33
IV.3.2.1 Modèles à 0 équation additionnelle .....	33
IV.3.2.2 Modèles à 1 équation additionnelle.....	34
IV.3.2.3 Modèles à 2 équations additionnelles.....	35

---

## IV.1 Introduction

On qualifie de turbulence les mouvements tourbillonnaires prépondérants aux hauts nombres de Reynolds. Le mouvement de turbulence est donc de nature rotationnelle et se compose d'une multitude de vortex dont les vecteurs directeurs sont alignés dans toutes les directions. Il est également un moyen de dissipation d'énergie par frottement, au niveau atomique, et par émission de chaleur.

Il existe un large spectre de tourbillons et donc de fréquences de fluctuation. C'est ce large spectre de fréquences qui va permettre la dissipation d'énergie au sein du fluide via la cascade d'énergie. L'énergie passera, en effet, de l'énergie cinétique de l'écoulement moyen à grande échelle pour être dissipée sous forme de chaleur au niveau de l'excitation atomique. Pour ce faire, il devra se produire un transfert d'énergie des grands tourbillons de fréquences faibles vers des tourbillons de plus en plus petits et de fréquences élevées. Ce transfert entre différents tourbillons s'effectuera par frottement fluide.

Comme on pourra s'en douter, le paramètre principal de la turbulence est donc la viscosité fluide. C'est, en effet, celle-ci qui va conditionner le taux de transfert d'énergie entre les différents tourbillons et ainsi conditionner l'ensemble du mouvement de turbulence. Dans les équations habituellement utilisées pour définir les conditions d'écoulement (ex : Shallow Water), cette viscosité fluide est généralement incluse dans le terme de frottement. Ce terme est alors un terme « poubelle » pour l'ensemble des dissipations. En effet, on y néglige souvent la viscosité du milieu fluide devant la viscosité du fluide sur les berges.

Théoriquement, les phénomènes de turbulence sont pris en compte rigoureusement par les équations de Navier-Stokes qui ne souffrent d'aucunes hypothèses sur l'écoulement. Cependant, la reproductibilité des phénomènes par ces équations nécessite des moyens numériques assez lourds :

- étude tridimensionnelle pour prendre en compte l'ensemble des directions de turbulence,
- maillage suffisamment fin pour tenir compte de toutes les échelles de tourbillons (plus fin que la plus petite échelle de turbulence modélisée sur la zone sur laquelle le maillage s'applique),
- pas temporel très faible pour assurer la stabilité numérique sur maillage fin,
- phénomènes instationnaires,
- phénomènes de transport (la turbulence en un endroit trouve souvent son origine en un autre endroit).

La puissance des systèmes informatiques ne nous donne, à l'heure actuelle, aucun modèle capable de résoudre les équations complètes de Navier-Stokes. Il faut donc trouver un modèle de turbulence moins coûteux en puissance informatique et qui s'approche suffisamment des équations exactes.

On remarquera finalement que le transfert de l'énergie entre différentes fréquences de tourbillons n'est possible que grâce à la non-linéarité des équations de Navier-Stokes. C'est donc ce terme non-linéaire qu'il va falloir développer et approcher au mieux par une part d'empirisme.

## IV.2 La méthode de la moyenne de Reynolds

La méthode proposée par Reynolds pour l'étude de la turbulence consiste à séparer l'écoulement entre un écoulement moyen et une variation erratique autour de celui-ci. En général, il est peu intéressant de connaître l'état détaillé de l'écoulement turbulent. La méthode de Reynolds nous permet donc d'obtenir une étude de l'écoulement moyen et de l'effet des fluctuations turbulentes sur celui-ci.

La méthode consiste donc à séparer la solution en une solution moyenne sur un pas de temps choisi et une variation erratique autour de cette moyenne.

$$u_i = \overline{u_i} + u_i'' \quad \text{avec} \quad \overline{u_i} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u_i dt$$

Le choix du pas de temps sera réalisé de manière adéquate en fonction des phénomènes que l'on veut mettre en évidence. Il sera suffisamment faible par rapport à l'échelle de temps du mouvement global et suffisamment élevé par rapport à l'échelle de temps du mouvement turbulent. On transforme donc ainsi les équations de Navier-Stokes, établies précédemment. En introduisant la décomposition de Reynolds, on obtient alors pour la continuité :

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i} + u_i'') dt &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i} &= 0 \end{aligned}$$

On remarquera que la variation erratique n'intervient pas dans cette équation. Ce fait provient de la linéarité de l'équation de continuité.

Pour ce qui est de l'équation de quantité de mouvement, intéressons-nous donc tout d'abord au terme non linéaire :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (u_i u_j) dt = \overline{u_i u_j} + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u_i'' u_j'' dt$$

On obtient ainsi finalement l'équation de quantité de mouvement suivante :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - F_i - \nu \Delta \overline{u_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i'' u_j''}) = 0$$

On a cette fois plus d'inconnues que d'équations. En effet, on conserve le nombre d'équations (trois pour la quantité de mouvement et une pour la continuité) mais le nombre d'inconnues est augmenté par le terme non linéaire. Se pose donc maintenant la question de la fermeture de ce système.

On pourra remarquer que cette nouvelle équation représente un mouvement laminaire ainsi qu'un effet spécifique dû aux fluctuations de l'écoulement. Le terme additionnel représente le transport de quantité de mouvement turbulent. C'est donc bien dans la non-linéarité des équations que se place la turbulence.

### IV.3 Fermeture des équations de Reynolds

Pour réaliser la fermeture des équations établies précédemment, il existe plusieurs méthodes :

- Supprimer les termes additionnels non linéaires
- Trouver une relation liant les nouvelles inconnues aux autres  $u_i''u_j'' = f(\overline{u_i}, \overline{u_j}, \dots)$
- Réécrire des équations de transport pour ces nouvelles inconnues

#### IV.3.1 Viscosité turbulente de Boussinesq (Fermeture « apparente » des équations)

L'idée développée par Boussinesq pour amener la fermeture des équations est de rassembler les termes visqueux. Pour ce faire, il a utilisé l'analogie aux tensions visqueuses pour définir le concept de viscosité turbulente. Ainsi, les contraintes turbulentes seront proportionnelles aux gradients des vitesses moyennes :

$$-\overline{u_i''u_j''} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

Dans cette expression le deuxième terme est là pour assurer l'égalité lorsque  $i = j$  et constitue une pression. Intégré dans l'équation de quantité de mouvement, il sera absorbé par le gradient de pression, remplaçant la pression statique par une nouvelle pression  $p + 2/3k$  appelée pression complexe. Le terme  $k$  représente l'énergie cinétique turbulente :

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u_1''^2} + \overline{u_2''^2} + \overline{u_3''^2})$$

Le terme  $\nu_t$  est quant à lui appelé viscosité turbulente et, au contraire de la viscosité moléculaire  $\nu$ , n'est pas une propriété du fluide mais dépend fortement de l'état de turbulence du fluide.

L'énergie cinétique turbulente ne formera donc pas une inconnue supplémentaire et seul le terme de viscosité turbulente restera à déterminer. C'est pourquoi le concept de viscosité turbulente ne nous apporte qu'une fermeture « apparente » des équations. On a donc finalement l'équation de quantité de mouvement suivante :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = \overline{F_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\overline{p}}{\rho} + \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \nu_t) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)$$

Pour établir cette équation, on a supposé une analogie entre le mouvement moléculaire et le mouvement turbulent. On considère donc les tourbillons turbulents comme des parties fluides qui s'entrechoquent et s'échangent de la quantité de mouvement.

Comme la viscosité moléculaire est proportionnelle à la vitesse moyenne des particules et à leur libre parcours moyen, la viscosité turbulente est proportionnelle à la vitesse caractéristique de fluctuation du mouvement turbulent et à une longueur caractéristique de ce mouvement baptisée longueur de mélange par Prandtl.

En réalité, les tourbillons ne sont pas des corps rigides qui conservent leur identité. De plus la longueur de mélange qui sera définie par la suite n'est pas négligeable par rapport aux dimensions caractéristiques de l'écoulement. Le principe d'analogie est donc critiquable même si il donne de bons résultats. On pourra également noter que le passage à une seule inconnue  $v_t$  nous enlève toute possibilité d'anisotropie. Il s'agit donc bien d'un simple artifice mathématique.

Néanmoins, la viscosité turbulente de Boussinesq peut être assez bien approchée pour de nombreux écoulements. Ce concept offre donc une solution assez bien applicable aux problèmes de turbulence.

### IV.3.2 Modèles de fermetures

Il existe plusieurs modèles capables de fermer les équations moyennes de Reynolds. Comme on l'a vu précédemment, le problème réside en fait en la détermination du terme de viscosité turbulente mis en évidence par Boussinesq. Les différents modèles présentés dans la suite sont classés en fonction du nombre d'équations de transport de ce terme nécessaires à la fermeture du modèle.

#### IV.3.2.1 Modèles à 0 équation additionnelle

Ces modèles utilisent le concept de la viscosité turbulente de Boussinesq tel quel. Ils cherchent donc simplement à déterminer la valeur de la viscosité turbulente telle que définie plus haut.

Le premier modèle est celui de la viscosité turbulente constante. Son fondement théorique s'écarte assez fort de la physique des phénomènes de turbulence. En effet, il est impossible de modéliser toutes les turbulences avec une unique valeur de la viscosité turbulente. De plus, la finesse du maillage influencera grandement les résultats obtenus. Ce modèle est donc assez utopique.

Le second modèle est celui énoncé par Prandtl et est appelé modèle de la longueur de mélange. Prandtl postula que la vitesse de fluctuation moyenne  $\bar{V}$  est proportionnelle à la longueur de mélange  $l_m$  multipliée par le gradient de vitesse moyen (analogie avec la théorie des gaz).

$$\bar{V} = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

$$\Rightarrow v_t = \bar{V} l_m = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

On a donc une unique inconnue : la longueur de mélange  $l_m$ . Ce modèle nous donne de bons résultats pour un bon calibrage de  $l_m$ .

On notera toutefois la difficulté de déterminer  $l_m$  pour les écoulements complexes. On notera aussi que le modèle ne peut donner de transport car il met en œuvre une relation algébrique. Enfin, on notera encore que la détermination par un seul terme de la turbulence nous ôte la possibilité de définir le caractère anisotrope du phénomène. Il ne peut donc en aucun cas donner une solution valable pour tous les cas.

Les modèles à 0 équation additionnelle ne peuvent donc convenir pour une description soignée du phénomène de turbulence. Néanmoins, ces modèles offrent une solution simple et des résultats acceptables pour un calibrage adéquat des inconnues.

#### IV.3.2.2 Modèles à 1 équation additionnelle

Le principal reproche que l'on peut faire aux modèles, précédemment énoncés, est leur incapacité à prendre en compte les phénomènes de transport inhérents aux phénomènes de turbulence. Les modèles suivants seront des modèles tenant compte de ces phénomènes de transport et se rapprochant donc du sens physique de la turbulence.

On introduit ici le concept de viscosité cinématique prenant  $\sqrt{k}$  comme échelle des fluctuations de vitesse. En effet, l'énergie cinétique turbulente  $k$  est une mesure directe de l'intensité des fluctuations turbulentes dans les trois directions comme le montre son équation :

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{u_1''^2} + \overline{u_2''^2} + \overline{u_3''^2} \right)$$

Prandtl et Kolmogorov ont alors tous deux proposé le calcul de la viscosité turbulente comme suit :

$$\nu_t = c'_\mu \sqrt{k} L$$

Dans cette formule  $L$  est une longueur caractéristique et  $c'_\mu$  est une constante empirique. La turbulence est donc cette fois représentée par le terme de viscosité cinématique.

Il nous reste à présent à écrire une équation de transport pour  $k$ . Par une manipulation des équations de Navier-Stokes adéquate, on a donc finalement l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_d \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}$$

On remarquera que la fermeture du système passe par une imposition de la valeur de la longueur caractéristique  $L$ . Il n'existe cependant pas de valeur unique de  $L$ . Les résultats ne sont donc toujours pas valables dans tous les cas. On s'est cependant déjà fortement rapproché du sens physique grâce aux équations de transport.

On a donc à présent 4 équations de Navier-Stokes et 1 équation de transport de  $k$  fonction des 5 inconnues  $U_i$ ,  $p$  et  $k$ .

### IV.3.2.3 Modèles à 2 équations additionnelles

Les modèles à 1 équation additionnelle nous ont apporté la prise en compte des phénomènes de transport d'énergie dans les phénomènes de turbulence. Cependant, il persiste une part d'empirisme sur la détermination de la longueur caractéristique nécessaire à la fermeture des équations.

Le principe des modèles à 2 équations additionnelles consiste donc en la recherche d'une équation supplémentaire pour le calcul du transport de  $L$  ou de n'importe quelle combinaison de type  $Z = L^m k^n$  car  $k$  est connu par l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente.

On manipulera ici une fois de plus les équations de Navier-Stokes et on assurera la fermeture par des concepts empiriques. On a donc des formules du type :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + u_j \frac{\partial Z}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\sqrt{k} L}{\sigma_Z} \frac{\partial Z}{\partial x_i} \right) + c_{z1} \frac{Z}{k} P - c_{z2} Z \frac{\sqrt{k}}{L} + S$$

De nombreux modèles ont été proposés avec des équations de transport pour diverses grandeurs caractéristiques. Ainsi, outre un transport direct de la longueur caractéristique  $L$ , il existe des modèles prenant en compte le transport du produit  $kL$ , de la fréquence  $\frac{k^{1/2}}{L}$  ou encore de la vorticité turbulente  $\frac{k}{L^2}$ .

Cependant, on peut remarquer dans l'équation de transport de  $k$  la présence du taux de dissipation  $\varepsilon$ . C'est pourquoi le modèle le plus courant prend en compte le transport de ce taux de dissipation (soit  $m = -1$  et  $n = \frac{3}{2}$ ).

On obtient ainsi le modèle  $k$ - $\varepsilon$  pour la dissipation visqueuse. Ce modèle nous donne les deux équations additionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \underbrace{v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)}_{=P} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned}$$

En se rappelant que la viscosité turbulente est liée à  $k$  et  $L$  par l'équation de bilan d'énergie cinétique turbulente :

$$v_t = c'_\mu \sqrt{k} L = c'_\mu c_d \frac{k^2}{\varepsilon} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

, il ne reste donc plus qu'à déterminer les valeurs des cinq constantes  $c_\mu$ ,  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$ . Ces valeurs nous ont été données par Jones et Launder pour une large gamme d'écoulements :

$$c_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad ; \quad c_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad ; \quad c_\mu = 0,09 \quad ; \quad \sigma_k = 1 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

Les modèles à 2 équations additionnelles prennent donc en compte à la fois les phénomènes de transport d'énergie cinétique turbulente et la variation spatiale de la turbulence. Ils restent néanmoins inappropriés à la modélisation des écoulements turbulents complexes tels que les phénomènes à forte anisotropie ou les phénomènes de recirculation.

## Chapitre V : Etude théorique de la validité des lois de frottement

### Sommaire

---

V.1 Introduction .....	38
V.2 Régime laminaire .....	38
V.3 Régime turbulent lisse .....	39
V.4 Régime turbulent rugueux .....	40
V.5 Régime transitoire .....	44
V.6 Macro-rugosité .....	49
V.7 Récapitulatif du domaine de validité des différentes lois de frottement .....	51
V.8 Variation du coefficient de Manning avec la hauteur d'eau .....	53
V.9 Etude de l'erreur commise par les formulations empiriques – Extension des domaines de validité.....	55
V.9.1 Comparaison à rugosité constante .....	57
V.9.2 Comparaison à vitesse constante .....	62

---

## V.1 Introduction

Comme on l'a vu précédemment, il existe un nombre important de lois tendant à décrire au mieux le frottement. Parmi celles-ci, nous avons mis en évidence la différence de forme et de fondement des deux écoles, moderne et empirique. Il convient à présent de regarder le domaine de correspondance des différentes théories aux phénomènes physiques réels. De cette manière, on pourra définir un domaine de validité pour chaque formulation et ainsi choisir pour chaque modélisation la formule adéquate.

Afin de réaliser cette étude, on considèrera les équations de l'école moderne comme donnant une description quasi-exacte des phénomènes réels. En effet, les fondements théoriques poussés sur lesquels ces formules ont été développées nous amènent à admettre une quasi-exactitude des résultats fournis pour les domaines d'écoulement auxquels se rapportent ces formules. De plus, on vérifiera, numériquement par la suite, que les résultats obtenus par ces lois modernes pour la modélisation d'écoulements de crues sont bien corrélés aux observations sur le terrain.

Afin d'évaluer l'ensemble des lois empiriques capables de décrire les écoulements, on reprendra l'ensemble des écoulements développés par l'école moderne. On cherchera alors pour chaque écoulement la (les) formulation(s) empirique(s) capable(s) de le décrire.

## V.2 Régime laminaire

Commençons donc par évaluer le cas de l'écoulement laminaire, quelle que soit la rugosité des parois. On se rappellera que le frottement pour ce type d'écoulement a été décrit par Poiseuille comme une simple fonction du nombre de Reynolds :

$$f = \frac{64}{\text{Re}}$$

En réinsérant cette formulation du frottement dans la relation de Darcy-Weisbach, on obtient alors l'équation suivante de la pente de frottement :

$$J = \frac{8U^2}{g \text{ Re } R_h} \Rightarrow U = \sqrt{\frac{g \text{ Re}}{8}} \sqrt{J R_h}$$

En comparant la forme de l'équation de frottement développée ainsi par Poiseuille à la forme générale des équations de frottement empiriques, on remarque immédiatement que l'égalité est réalisée pour un exposant du rayon hydraulique de 0,5. Cela correspond à la formulation de Chézy qui est donc la seule capable de décrire de manière exacte le frottement dans les écoulements laminaires. Afin que la description soit exacte il faudra alors que le coefficient de Chézy prenne une valeur particulière fonction simplement du nombre de Reynolds :

$$C = \sqrt{\frac{g \text{ Re}}{8}}$$

Les valeurs du coefficient de Chézy varieront ainsi entre 0 et 35 (pour un Reynolds variant de 0 à 1000, limites d'applicabilité de la formule de Poiseuille). Ces valeurs du coefficient de Chézy

correspondent à des écoulements à très faible rayon hydraulique sur des rugosités importantes d'après la formule de Bazin.

On pourra donc conclure sur le fait que la formulation de Chézy est la seule à pouvoir décrire les écoulements laminaires. Cependant, le coefficient de Chézy à utiliser pour cette description, sort des valeurs habituelles. On rappellera finalement qu'en réalité les écoulements ne seront pour ainsi dire jamais laminaires.

### V.3 Régime turbulent lisse

Continuons notre étude des domaines de validité des lois empiriques par le cas des écoulements turbulents sur parois lisses. Pour ce type d'écoulement, le frottement avait été décrit exactement par Prandtl. Il dépendait ici encore uniquement du nombre de Reynolds selon la formulation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}}$$

La forme implicite de l'équation de Prandtl rend difficile la comparaison entre la formulation de Prandtl et la forme générale des formules empiriques. Cependant, l'indépendance vis-à-vis du rayon hydraulique nous permet de dire qu'une fois de plus seule l'équation de Chézy sera à même de décrire exactement le frottement.

Afin de pouvoir effectuer une comparaison plus exacte, on reprendra plutôt l'étude de la formule de Blasius qui est valable pour des Reynolds inférieurs à  $10^5$  et couvre ainsi la majeure partie des écoulements turbulents lisses :

$$f = \frac{0,3164}{\text{Re}^{1/4}}$$

En insérant cette loi de frottement dans la formule de Darcy-Weisbach, on obtient le développement de la pente de frottement suivant :

$$J = \frac{0,0395U^2}{\text{Re}^{1/4} R_h g} \Rightarrow U = \sqrt{25,3g \text{Re}^{1/4} \sqrt{R_h J}}$$

On reconnaît donc bien, comme attendu, la formulation de Chézy. Cette fois-ci, le coefficient de Chézy prendra donc la valeur suivante toujours dépendante du seul nombre de Reynolds :

$$C = \sqrt{25,3g \text{Re}^{1/4}}$$

Les valeurs du coefficient de Chézy varient cette fois entre 37 (pour un Reynolds de 1000) et 66 (pour un Reynolds de  $10^5$ ). On entre donc cette fois dans les gammes traditionnelles d'utilisation du coefficient de Chézy décrites par Bazin.

Pour des parois lisses Bazin préconise une valeur du coefficient  $\gamma$  de 0,06. Ainsi, l'égalité entre la formulation de Bazin et celle de Blasius est assurée pour une seule valeur du rayon hydraulique pour chaque nombre de Reynolds :

$$\sqrt{25,3g \operatorname{Re}^{1/4}} = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}}$$

$$\Rightarrow R_h = \frac{0,0036}{(5,522 \operatorname{Re}^{-1/8} - 1)^2}$$

Le rayon hydraulique variera ainsi entre 0,002 (pour un Reynolds de 1000) et 0,038 (pour un Reynolds de  $10^5$ ).

On conclura donc une fois de plus sur la bonne description du frottement dans les écoulements turbulents sur parois lisses par la formulation de Chézy. Cependant, le bien fondé de la formulation de Bazin pour l'évaluation du coefficient de Chézy n'est réalisé que pour des hauteurs d'eau assez faibles.

#### V.4 Régime turbulent rugueux

Passons ensuite au cas de l'écoulement turbulent rugueux. Prenons cette fois l'équation de Nikuradse comme décrivant exactement les phénomènes de frottement :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{k}{14,8R_h}$$

Il est important de remarquer que cette fois le rayon hydraulique intervient dans la loi de frottement, ce qui va avoir un effet important par la suite. On n'oubliera pas non plus le domaine de validité de cette loi pour des Reynolds supérieurs à ceux donnés par la formule suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{\operatorname{Re}}{1040} \frac{k}{R_h}$$

Comme précédemment, on introduit la formule de Nikuradse dans celle de Darcy-Weisbach pour obtenir une formulation similaire à la forme générale des lois empiriques :

$$J = -\frac{U^2}{32gR_h \left( \log \frac{k}{14,8R_h} \right)^2} \Rightarrow U = -\sqrt{32g} \left( \log \frac{k}{14,8R_h} \right) \sqrt{JR_h}$$

On obtient donc cette fois une expression complexe en le rayon hydraulique. Afin d'obtenir une loi comparable aux lois empiriques, il faut donc transformer le logarithme en puissance.

Pour ce faire, on décide d'écrire le frottement de Nikuradse sous la forme suivante :

$$f = \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/M} \Rightarrow -2 \log \left( \frac{k}{14,8 R_h} \right) = \frac{1}{\left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/2M}}$$

Afin de déterminer les valeurs des paramètres A et M, on impose alors, en plus de l'égalité ci-dessus, que les dérivées vis-à-vis du rapport  $k/R_h$  des deux termes de l'égalité soient égales. Ainsi, on obtient le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} -2 \log \left( \frac{x}{14,8} \right) = \frac{1}{(Ax)^{1/2M}} \\ \frac{-2}{\ln(10)x} = \frac{-A}{2M} (Ax)^{-1/2M-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{R_h}{k} \left[ -2 \log \left( \frac{k}{14,8 R_h} \right) \right]^{-\ln(10) \log \left( \frac{14,8 R_h}{k} \right)} \\ M = \frac{\ln(10)}{2} \log \left( \frac{14,8 R_h}{k} \right) \end{cases}$$

En insérant alors le terme de frottement sous forme de puissance dans l'équation de Darcy-Weisbach on obtient une nouvelle formulation du frottement évalué par Nikuradse :

$$J = \frac{\left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/M} U^2}{8gR_h} \Rightarrow U = (8g)^{1/2} (Ak)^{-1/2M} J^{1/2} R_h^{1/2+1/2M}$$

En comparant avec la formulation générale des lois empiriques, l'égalité est obtenue si la double égalité suivante est satisfaite :

$$\chi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{8g}{(Ak)^{1/M}}}$$

Regardons ainsi pour commencer la validité de l'équation de Chézy qui était la seule à pouvoir représenter les écoulements laminaires et les écoulements sur parois lisses. Dans la formulation de Chézy, l'exposant du rayon hydraulique vaut 0,5.

La première des égalités ci-dessus impose donc la valeur suivante de la rugosité relative :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow \frac{1}{2M} = 0 \\ &\Rightarrow \ln(10) \log\left(\frac{14,8R_h}{k}\right) = \infty \\ &\Rightarrow \frac{k}{R_h} = 0 \end{aligned}$$

On voit donc que la formule de Chézy constitue une limite jamais atteinte par l'équation de Nikuradse. En effet, pour que l'équation de Nikuradse soit applicable au cas d'une rugosité nulle, il faudrait que le nombre de Reynolds tende vers l'infini.

Regardons ensuite la correspondance avec la loi de Nikuradse, de la loi de Manning. La loi de Manning préconise, quant à elle, la prise en compte d'une puissance du rayon hydraulique de 2/3. La première égalité à satisfaire devient donc la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow M = 3 \\ &\Rightarrow \ln(10) \log\left(\frac{14,8R_h}{k}\right) = 6 \\ &\Rightarrow \frac{k}{R_h} = 0,037 \end{aligned}$$

La loi de Manning n'est donc équivalente à celle de Nikuradse que pour une simple valeur de la rugosité relative. Il est donc clairement impossible de décrire avec une seule loi de Manning le comportement d'une rivière dans laquelle le niveau d'eau (et donc le rayon hydraulique) fluctue de manière non négligeable.

On notera également qu'en introduisant la rugosité relative calculée plus haut dans le calcul du paramètre A, puis ce paramètre A dans le calcul du coefficient de Strickler, on obtient le développement suivant :

$$\begin{aligned} A &= \frac{R_h}{k} \left[ -2 \log \frac{k}{14,8R_h} \right]^{-\ln(10) \log \frac{14,8R_h}{k}} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \frac{k}{R_h} = 0,037 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0,0014 \\ \Rightarrow K &= \sqrt{\frac{8g}{(Ak)^{1/3}}} = \frac{26,61}{k^{1/6}} \end{aligned}$$

On voit donc que l'estimation que Strickler avait faite du coefficient de l'équation de Manning était très proche de la réalité. Pour rappel, Strickler avait préconisé le calcul suivant de son coefficient :

$$K = \frac{26}{k^{1/6}}$$

On a ici réalisé l'étude pour les lois de Chézy et Manning car elles sont les deux lois empiriques les plus utilisées à l'heure actuelle. Il existe cependant d'autres lois pour lesquelles on aurait pu réaliser la même comparaison.

On n'aurait ainsi trouvé aucune corrélation possible pour des lois avec un exposant du rayon hydraulique inférieur à 0,5. En effet, comme on l'a vu plus haut la formule de Chézy joue un rôle de limite pour les écoulements turbulents. Ainsi la formule de Gaukler est par exemple à proscrire.

Pour les autres lois, on aurait chaque fois trouvé une valeur bien précise de la rugosité relative pour laquelle l'applicabilité exacte de la loi est satisfaite. On reprend au tableau ci-dessous la valeur de rugosité relative correspondant à une corrélation exacte des différentes formulations à celle de Nikuradse. On trouvera également dans ce tableau la valeur du coefficient  $\alpha$  de la formulation générale des lois empiriques. L'ensemble des développements qui ont été menés pour établir ce tableau se trouve en annexe (cf. annexe 4).

Auteur	X	A	k/R <sub>h</sub>
Christen	0,625	31,71/k <sup>0,125</sup>	0,005
Manning	0,666	26,61/k <sup>0,167</sup>	0,037
Tillman	0,7	24,26/k <sup>0,2</sup>	0,1
Forchheimer	0,7	24,26/k <sup>0,2</sup>	0,1
Hagen	0,714	23,51/k <sup>0,214</sup>	0,138

Avec l'ensemble des lois empiriques existantes, on peut ainsi couvrir des rugosités relatives allant de 0,2 à 0,004. On voit donc que la limite d'applicabilité des lois empiriques correspond à peu près à la limite de la macro-rugosité établie à une rugosité relative de 0,25.

On conclura donc en spécifiant que les lois empiriques peuvent décrire l'ensemble des écoulements turbulents sur des surfaces rugueuses. Cependant, chaque loi prise séparément ne pourra donner un résultat exact que pour une valeur bien précise de la rugosité relative. Il est dès lors inconcevable de décrire correctement un écoulement instationnaire par une seule de ces lois empiriques de frottement. Enfin, on rappellera le rôle de limite joué par la formulation de Chézy qui ne saurait décrire correctement que les écoulements idéalisés sur surfaces lisses.

### V.5 Régime transitoire

Il nous reste à évaluer le régime de transition entre les écoulements turbulents sur surfaces lisses et ceux sur surfaces rugueuses. Pour ce faire, on se rappellera que ce type d'écoulement a été étudié par Colebrook qui lie ainsi les pertes par frottement au nombre de Reynolds et à la rugosité relative par la formule implicite suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right)$$

En introduisant la valeur du frottement ainsi calculée dans la formule de Darcy-Weisbach, on obtient cette fois la forme suivante de la pente de frottement :

$$J = \frac{U^2}{32gR_h \left( \log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right) \right)^2} \Rightarrow U = -\sqrt{32g} \log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right) \sqrt{JR_h}$$

On voit donc qu'il s'agit à nouveau d'une expression complexe en le rayon hydraulique. Il convient donc à nouveau de transformer le logarithme en puissance du rapport  $k/R_h$ . On décide donc d'écrire une fois de plus le frottement de la manière suivante :

$$f = \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/M} \Rightarrow -2 \log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right) = \frac{1}{\left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/2M}}$$

A nouveau, afin de réaliser l'équivalence entre la formulation sous forme de puissance et la formulation de Colebrook, il faut à la fois que la relation de Colebrook soit satisfaite mais également sa dérivée. On a donc cette fois le système suivant :

$$\begin{cases} -2 \log \left( \frac{x}{14,8} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right) = \frac{1}{(Ax)^{\frac{1}{2M}}} \\ \frac{2}{14,8 \cdot \ln(10) \left( \frac{x}{14,8} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right)} = \frac{A(Ax)^{\frac{1}{2M}-1}}{2M} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{R_h}{k \left[ -2 \log \left( \frac{k}{14,8 R_h} + \frac{2,51}{\operatorname{Re} \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}}} \right) \right]^{2M}} \\ M = -\log \left( \frac{k}{14,8 R_h} + \frac{2,51}{\operatorname{Re} \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}}} \right) \ln(10) \left( 0,5 + \frac{18,574}{\operatorname{Re} A^{\frac{1}{2M}} \left( \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}+1}} \right) \end{array} \right.$$

En insérant cette fois la nouvelle formulation de la formule de Colebrook en puissance du rapport  $k/R_h$  dans la formulation de Darcy-Weisbach, on obtient la forme comparable aux formules empiriques suivante :

$$J = \frac{\left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/M} U^2}{8gR_h} \Rightarrow U = (8g)^{1/2} (Ak)^{-1/2M} J^{1/2} R_h^{1/2+1/2M}$$

On trouve donc la même formulation que pour le cas des écoulements turbulents sur parois rugueuses, à cela près que les paramètres  $A$  et  $M$  ne sont pas les mêmes. On voit donc une fois de plus apparaître la forme générale des lois empiriques pour les valeurs suivantes de l'exposant du rayon hydraulique et du coefficient de frottement :

$$\chi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{8g}{(Ak)^{1/M}}}$$

Commençons à nouveau par la comparaison de la formulation de Chézy à celle de Colebrook considérée comme exacte. Pour avoir une correspondance entre la formule de Chézy et la formule de Darcy-Weisbach développée d'après Colebrook, il faut que l'exposant du rayon hydraulique soit égal à 0,5. On aura donc une fois de plus la condition suivante :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow \frac{1}{2M} = 0$$

Cela revient donc à considérer M comme tendant vers l'infini. En développant le terme M on trouve alors la condition suivante sur la rugosité relative :

$$M = -\log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\operatorname{Re} \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}}} \right) \ln(10) \left( 0,5 + \frac{18,574}{\operatorname{Re} A^{\frac{1}{2M}} \left( \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}+1}} \right) = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{k}{R_h} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{k}{R_h} = -\frac{37,148}{\operatorname{Re}}$$

On a donc cette fois naissance d'une solution double. Cependant, la deuxième solution est à rejeter immédiatement car une rugosité négative n'existe pas.

On voit donc, une fois de plus, le rôle de limite joué par la formule de Chézy. En effet, la formule de Chézy correspondrait une fois de plus au cas limite d'une surface parfaitement lisse.

Regardons ensuite le cas de la formule de Manning. Une fois de plus, pour avoir une correspondance entre la formulation de Manning et celle de Colebrook, on a le critère suivant sur M afin d'obtenir le même exposant du rayon hydraulique :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow M = 3$$

En développant une nouvelle fois le terme M, on peut ainsi obtenir une condition sur la valeur du rapport k/R<sub>h</sub> :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = -\log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\operatorname{Re} \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}}} \right) \ln(10) \left( 0,5 + \frac{18,574}{\operatorname{Re} A^{\frac{1}{2M}} \left( \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}+1}} \right) = 3 \\ A = \frac{R_h}{\left( k - 2 \log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\operatorname{Re} \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{\frac{1}{2M}}} \right) \right)^{2M}} \end{array} \right.$$

En résolvant ce système, on peut tracer une courbe de correspondance de la formule de Manning à celle de Colebrook. En effet, la valeur du rapport k/R<sub>h</sub> pour laquelle la formule de Manning épouse la formulation de Colebrook est cette fois fonction du nombre de Reynolds.

On obtient ainsi les courbes suivantes le long desquelles la correspondance de la formule de Manning à celles de Colebrook et Nikuradse est assurée :

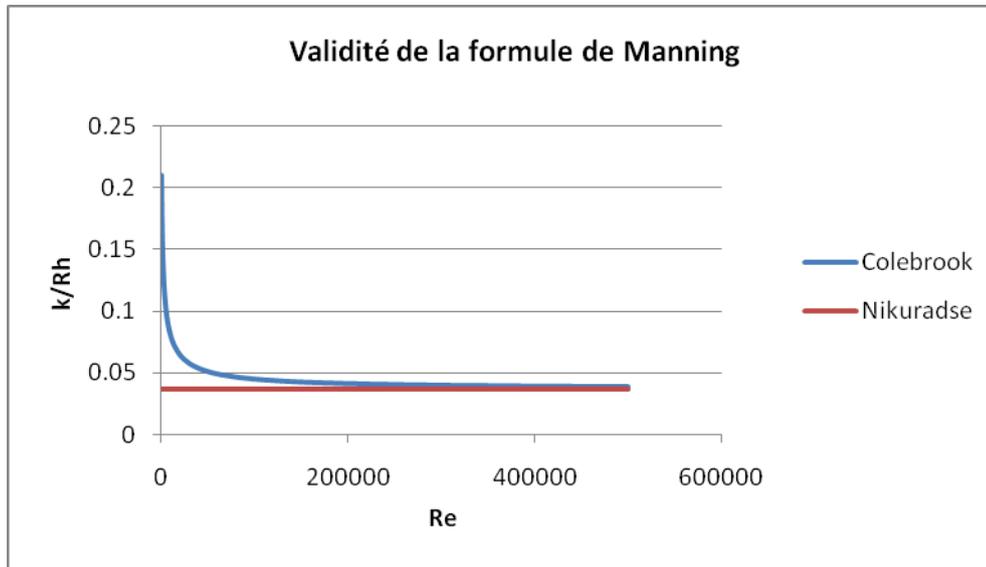


Figure 5. Courbes de correspondance de la loi de Manning aux lois modernes

On peut ainsi voir que pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds la loi de Colebrook et celle de Nikuradse sont équivalentes. On voit donc bien que la liaison est assurée avec le régime turbulent rugueux. On a ainsi une continuité possible dans l'utilisation de la formule de Manning pour l'ensemble des écoulements turbulents.

Cependant, une fois de plus, on peut voir que pour chaque valeur du nombre de Reynolds il existe une et une seule valeur de la rugosité relative pour laquelle la formule de Manning est valable. On voit donc qu'il est quasiment impossible de décrire correctement le frottement dans les écoulements en régime transitoire par la formule de Manning. En effet, dans la plupart des écoulements, les vitesses sont variables et donc le nombre de Reynolds aussi. S'ajoute donc à une rugosité relative variable un nombre de Reynolds variable qui rend la modélisation encore plus difficile à satisfaire.

On peut enfin tracer le diagramme de la valeur du coefficient de Strickler pour laquelle la formule de Manning représente les phénomènes réels de frottement :

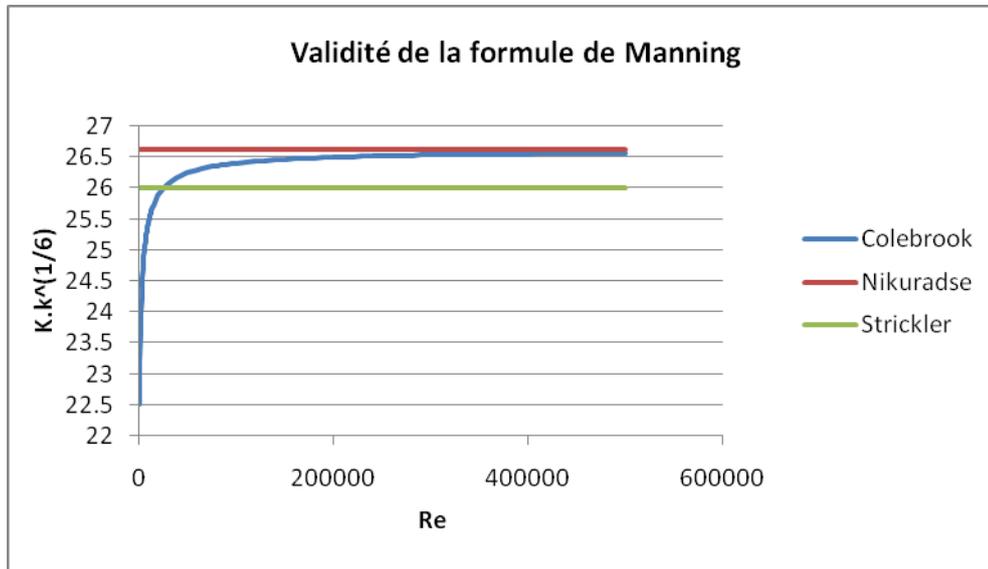


Figure 6. Courbes donnant la valeur du coefficient de Strickler à utiliser pour correspondre aux différentes lois modernes

On remarque donc une fois de plus la continuité de la formule de Manning entre le régime transitoire décrit par Colebrook et le régime turbulent rugueux décrit par Nikuradse. On remarque également que la formule de Strickler correspond au cas d'un nombre de Reynolds de 25000. On peut donc penser que Strickler a établi sa formule en se basant sur l'expérience d'un écoulement sur une rugosité relative de 0,06 avec un nombre de Reynolds valant 25000. Les formules de Manning et Strickler ne sont donc valables toutes les deux que pour cet écoulement bien particulier.

Une fois de plus, on aurait pu étudier encore bien d'autres lois empiriques. On trouve ainsi des courbes similaires à celles trouvées pour la loi de Manning. Pour les lois dont l'exposant du rayon hydraulique est inférieur à 0,5, on ne pourra à nouveau pas trouver de corrélation avec la loi de Colebrook. En effet, le rôle de limite de la formule de Chézy est toujours présent.

Le diagramme suivant reprend donc les courbes représentant une corrélation exacte entre les différentes lois empiriques et la formule de Colebrook :

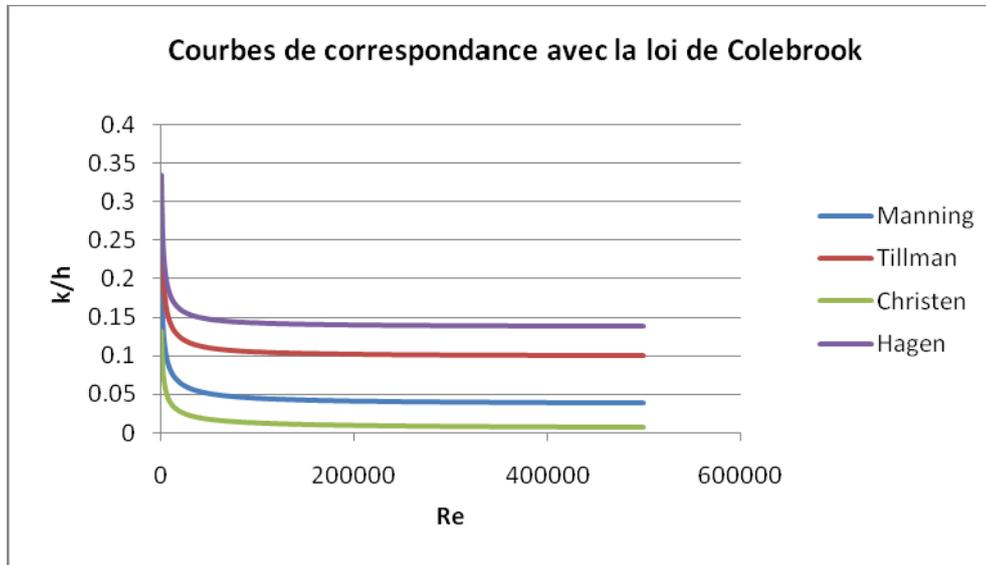


Figure 7. Courbes de correspondance des différentes lois empiriques à la loi de Colebrook

On voit donc qu'en utilisant l'ensemble des lois empiriques, on peut couvrir la quasi-totalité de la gamme d'écoulement. Cependant, comme déjà annoncé précédemment, chaque formule ne sera applicable qu'à un écoulement particulier. Il n'est donc toujours pas possible de décrire un écoulement instationnaire par une seule loi empirique. On peut donc une fois de plus s'apercevoir qu'aucune loi empirique ne peut décrire les écoulements de rivière traditionnels.

On remarquera également, comme pour la loi de Manning, la continuité entre l'écoulement en régime transitoire et en régime turbulent rugueux. En effet, chacune des courbes tend, lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, vers la rugosité relative, reprise dans le tableau plus haut, pour laquelle il y a corrélation exacte avec la formule de Nikuradse.

## V.6 Macro-rugosité

Il nous reste finalement à évaluer le cas des écoulements sur macro-rugosité. On retiendra cette fois comme équation décrivant exactement les phénomènes de frottement la formule Bathurst :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -1,987 \log \frac{D_{84}}{5,15h}$$

Etant donnée la forme de la formule de Bathurst qui est assez semblable à celle de Nikuradse, on va réaliser un développement semblable à celui effectué pour le cas du régime turbulent rugueux. Ainsi on va commencer par mettre l'équation de frottement de Bathurst sous forme de puissance du rapport  $k/h$ . On considèrera ici que le coefficient de rugosité  $k$  peut se substituer immédiatement à la taille de la macro-rugosité. On considèrera également la hauteur d'eau égale au rayon hydraulique. Cela revient à négliger la hauteur mouillée des berges vis-à-vis de la dimension du fond ce qui est en général réaliste dans les zones inondées.

On développe donc à nouveau le frottement en termes de puissance de la façon suivante :

$$f = \left( A \frac{k}{h} \right)^{1/M} \Rightarrow -1,987 \log \left( \frac{k}{5,15h} \right) = \frac{1}{\left( A \frac{k}{h} \right)^{1/2M}}$$

Afin de déterminer les valeurs des paramètres A et M, on impose une fois de plus l'égalité ci-dessus, ainsi que l'égalité des dérivées vis-à-vis du rapport k/h des deux termes de celle-ci. Ainsi, on obtient le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} -1,987 \log \left( \frac{x}{5,15} \right) = \frac{1}{(Ax)^{1/2M}} \\ \frac{-1,987}{\ln(10)x} = \frac{-A}{2M} (Ax)^{-\frac{1}{2M}-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{h}{k} \left[ -1,987 \log \left( \frac{k}{5,15h} \right) \right]^{-\ln(10) \log \left( \frac{5,15h}{k} \right)} \\ M = \frac{\ln(10)}{2} \log \left( \frac{5,15h}{k} \right) \end{cases}$$

Etant donnée la forme similaire à l'équation de Nikuradse, l'intégration de la formule de Bathurst dans celle de Darcy-Weisbach donne une fois encore le résultat suivant :

$$J = \frac{\left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/M} U^2}{8gR_h} \Rightarrow U = (8g)^{1/2} (Ak)^{-1/2M} J^{1/2} R_h^{1/2+1/2M}$$

L'égalité avec la formulation générale des lois empiriques est donc une fois de plus obtenue si la double égalité suivante est satisfaite :

$$\chi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{8g}{(Ak)^{1/M}}}$$

Etant donnée la forme identique, à des coefficients constants près, des lois de Bathurst et de Nikuradse, la formulation de Chézy jouera encore son rôle de limite pour le cas où le rapport k/h est nul. Cependant, il faut se rappeler le domaine de validité de la formule de Bathurst. En effet, elle se rapporte au cas de la macro-rugosité et la formule de Chézy ne peut donc pas représenter ce type d'écoulement.

Pour ce qui est de la corrélation entre les formules de Manning et Bathurst, le raisonnement est à nouveau similaire à celui mené pour les écoulements sur parois rugueuses. On se rappelle ainsi que la loi de Manning préconise la prise en compte d'une puissance du rayon hydraulique de 2/3.

La première égalité à satisfaire devient donc la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow M = 3 \\ \Rightarrow \ln(10) \log\left(\frac{5,15h}{k}\right) &= 6 \\ \Rightarrow \frac{k}{h} &= 0,013 \end{aligned}$$

Une fois de plus, l'équivalence de la loi de Manning à la loi exacte (ici celle de Bathurst) n'est valable que pour une seule valeur de la rugosité relative.

On remarquera à nouveau ici la valeur particulière de ce rapport pour la loi de Manning. En effet, le domaine de validité de la formule de Bathurst est celui de la macro-rugosité. Or, pour rappel, on considère la macro-rugosité pour des valeurs du rapport  $k/h$  supérieures à 0,25. On voit donc que la formule de Manning ne peut décrire correctement les écoulements sur macro-rugosité.

Une fois de plus, le même développement apporté aux autres lois empiriques nous aurait amené au même type de conclusion que pour la formule de Manning. On n'a ainsi aucune loi empirique capable de représenter correctement les écoulements sur macro-rugosité. Cela provient sans doute du fait que les lois empiriques se basent sur des expériences précises. On peut donc supposer que chaque auteur a réalisé son expérience sur un écoulement et une rugosité type et qu'aucun d'entre eux ne s'est intéressé au cas de la macro-rugosité.

## V.7 Récapitulatif du domaine de validité des différentes lois de frottement

On a maintenant une idée plus précise de la valeur de chaque loi en fonction de l'écoulement. Il est clair que la mise en œuvre des lois empiriques est bien plus aisée que celle des lois modernes. Quand une loi empirique pourra décrire, d'une manière proche de la réalité, les phénomènes de frottement, on la préférera alors à la loi moderne plus exacte. Reprenons donc ici le domaine de validité de l'ensemble des formules pour pouvoir effectuer le choix le plus judicieux de la formule à utiliser.

Afin d'identifier la formule à utiliser, plusieurs critères concernant l'écoulement devront être étudiés. Ainsi, il faudra connaître le régime exact de l'écoulement (laminaire ou turbulent), l'importance relative de la rugosité (lisse, rugueuse ou transitoire) et les caractéristiques temporelles de l'écoulement (stationnaire ou non).

Pour les écoulements stationnaires (type ligne d'eau) l'utilisation des lois empiriques peut donner des résultats suffisamment précis pour supplanter les lois modernes. En effet, dans ce cas, les écoulements laminaires sont convenablement décrits par la loi de Chézy. Il en va de même pour le cas des écoulements turbulents sur parois lisses. Pour ce qui est du cas des écoulements sur parois rugueuses, on a vu que les lois empiriques (par exemple Manning) couvrent la gamme de rugosité relative ( $k/R_h$ ) allant de 0 à 0,2. On notera évidemment que la

loi devra cependant être choisie de manière à représenter correctement l'écoulement étudié. Il reste donc juste le cas de la macro-rugosité qui devra être résolu par la formule moderne de Bathurst.

Le cas des écoulements instationnaires est, lui, bien plus complexe à représenter par les lois empiriques. En effet, même si la formulation de Chézy reste valable pour les écoulements laminaires et turbulents lisses, pour les écoulements turbulents sur rugosité non nulle la représentation par les lois empiriques est impossible. On se rappellera en effet que chaque loi empirique est valable pour une seule rugosité relative. Or, dans les écoulements instationnaires, la hauteur d'eau varie et avec elle la rugosité relative. Pour ce type d'écoulement, seules les formules modernes permettent donc une représentation exacte des phénomènes de frottement.

On reprend dans le tableau suivant les formules à préférer pour modéliser le frottement propre à chaque écoulement :

		<b>Stationnaire</b>	<b>Instationnaire</b>
<b>Laminaire</b>		Chézy ou Poiseuille	Chézy ou Poiseuille
<b>Turbulent</b>	Lisse	Chézy ou Prandtl	Chézy ou Prandtl
	Transitoire	Lois empiriques (ex : Manning)	Colebrook
	Rugueux	Lois empiriques (ex : Manning)	Nikuradse
	Macro-rugosité	Bathurst	Bathurst

On notera que les formules de Poiseuille et de Prandtl étant assez aisées à mettre en œuvre, on les substituera de manière équivalente à la formule de Chézy. N'oublions cependant pas que les écoulements laminaires et les écoulements sur parois lisses sont des écoulements idéalisés qu'on ne rencontrera jamais en réalité.

On voit donc que pour les écoulements traditionnels de rivière, seules les lois de Colebrook et Nikuradse sont à même de décrire le frottement pour n'importe quelle situation d'écoulement. Pour ce qui concerne les zones inondées où de très faibles hauteurs d'eau sont observées, c'est la seule formule de Bathurst qui devra être d'application.

Il restera cependant un problème à résoudre. En effet, lors de la modélisation d'écoulements de rivière, on est souvent amené à étudier des rugosités variables s'étendant parfois jusqu'à la macro-rugosité. Malheureusement la continuité entre les équations de Colebrook (ou de Barr) et de Bathurst n'est pas assurée. Les deux formules ne peuvent, ainsi, pas être utilisées simultanément pour une même modélisation. On développera donc plus loin une nouvelle formulation réalisant une liaison continue entre les lois de Barr et de Bathurst.

### V.8 Variation du coefficient de Manning avec la hauteur d'eau

Comme on l'a vu, la validité de la formule de Manning dépend essentiellement de la rugosité relative. En pratique, la rugosité d'un terrain représentée par  $k$  varie généralement peu au cours du temps. C'est donc les variations de hauteur d'eau qui vont engendrer les variations de rugosité relative.

Une alternative pour préserver l'utilisation de la formule de Manning quelle que soit la hauteur d'eau serait donc de faire varier le coefficient de Strickler en fonction de la hauteur d'eau. Encore faut-il savoir de quelle manière le faire varier.

Reprenant la formulation de Nikuradse sous forme de puissance et l'introduisant dans la formulation de Darcy-Weisbach, on obtient la formulation suivante :

$$U = (8g)^{1/2} (Ak)^{-1/2M} J^{1/2} R_h^{1/2+1/2M}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \frac{R_h}{k} \left[ -2 \log \left( \frac{k}{14,8R_h} \right) \right]^{-\ln(10) \log \left( \frac{14,8R_h}{k} \right)} \\ M = \frac{\ln(10)}{2} \log \left( \frac{14,8R_h}{k} \right) \end{cases}$$

Si l'on compare cette formulation à celle de Manning-Strickler, on obtient une nouvelle formulation du coefficient de Strickler fonction de la rugosité et de la hauteur d'eau :

$$U = KJ^{1/2} R_h^{2/3} \Rightarrow K = (8g)^{1/2} \left( \frac{R_h}{Ak} \right)^{1/2M} R_h^{-1/6}$$

Grâce à cette formulation, une fois la rugosité connue, on peut tracer une courbe donnant la valeur du coefficient de Strickler fonction de la seule hauteur d'eau :

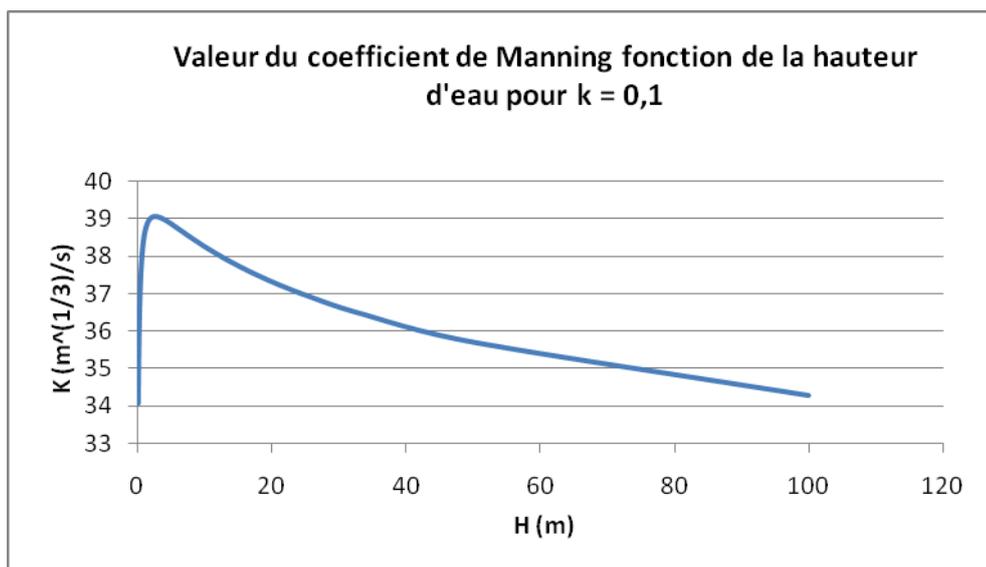


Figure 8. Variation du coefficient de Manning avec la hauteur d'eau pour  $k=0,1$

Pour commencer, on peut remarquer que le maximum de cette fonction est réalisé pour une rugosité relative de 0,037. On retrouve alors la valeur du coefficient de Strickler calculée par la formulation traditionnelle corrigée :

$$K = \frac{26,61}{k^{1/6}}$$

On voit donc qu'en prenant la valeur constante de K calculée par la formulation de Strickler on surestime systématiquement la valeur réelle du coefficient. Surestimer la valeur du coefficient de Strickler revient à sous-estimer les hauteurs d'eau. On peut donc ici mettre en garde contre le côté insécuritaire de l'utilisation de la loi classique de Manning. En effet, pour l'établissement des cartes d'inondations par exemple, une sous-estimation des hauteurs d'eau amène une sous-estimation de l'ampleur des zones inondées. On peut tracer la courbe d'erreur commise en fonction de la hauteur d'eau en prenant la valeur constante de K calculée par la formule ci-dessus :

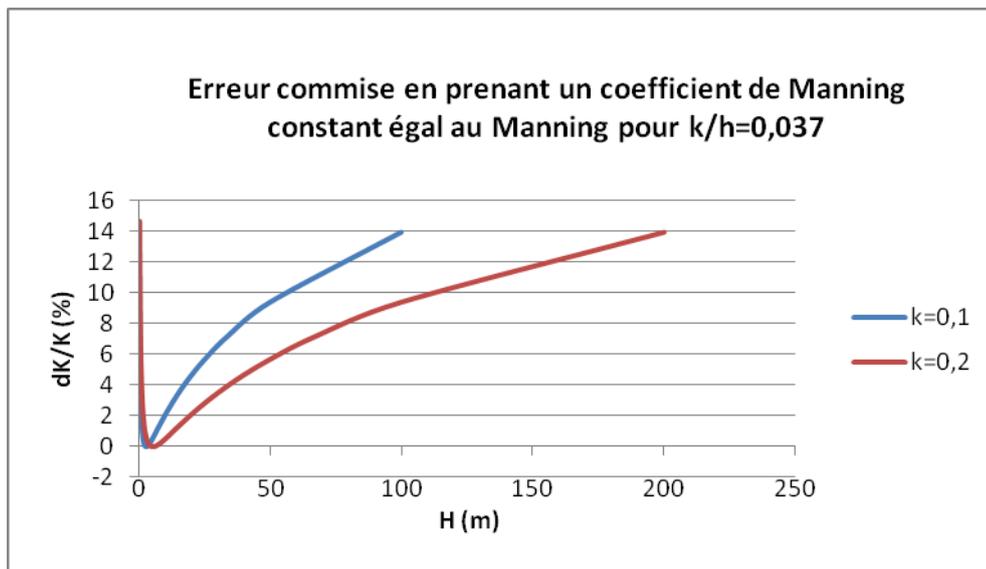


Figure 9. Courbes de l'erreur commise sur la valeur du coefficient de Strickler par l'utilisation d'une valeur constante de ce coefficient

On remarque ainsi que pour une rugosité de 0,1 et une hauteur d'eau allant de 50cm à 20m, l'erreur commise sur l'évaluation du coefficient de Manning est inférieure à 5%. Le même pourcentage d'erreur n'est pas dépassé pour une rugosité de 0,2 et une hauteur d'eau variant de 1m à 40m.

On voit donc que pour chaque valeur de la rugosité, il existe un intervalle de hauteur d'eau qui peut être décrit correctement par la formulation de Strickler. Pour que l'erreur commise sur l'évaluation du coefficient de Strickler reste inférieure à 5%, il faut ainsi que la rugosité relative reste située entre 0,005 et 0,2.

Le calcul du coefficient de Manning par la formulation en fonction de la hauteur d'eau reste pourtant utile lorsque l'on sort de l'intervalle établi ci-dessus. Il faut bien noter que dans l'expression suivante de ce coefficient :

$$K = (8g)^{1/2} \left( \frac{R_h}{Ak} \right)^{1/2M} R_h^{-1/6}$$

, les valeurs des paramètres A et M doivent être calculées avec la formulation adéquate à l'écoulement. Ainsi, pour un écoulement turbulent rugueux, on utilisera les formulations développées plus haut pour la formule de Nikuradse. Pour une relation plus générale, on utilisera plutôt les formulations issues de la loi de Colebrook :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{R_h}{\left( k - 2 \log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\text{Re} \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/2M}} \right) \right)^{2M}} \\ M = -\log \left( \frac{k}{14,8R_h} + \frac{2,51}{\text{Re} \left( A \frac{k}{R_h} \right)^{1/2M}} \right) \ln(10) \left( 0,5 + \frac{18,574}{\text{Re} A^{1/2M} \left( \frac{k}{R_h} \right)^{1/2M+1}} \right) \end{array} \right.$$

On notera cependant que cette formulation est implicite et nécessitera donc une surcharge importante en temps de calcul. On essaiera donc tant que l'on reste dans l'intervalle de hauteur correctement défini par Strickler d'utiliser sa formulation. De la même manière, si l'on sort de ce domaine, on utilisera autant que possible les formulations de Nikuradse ou de Blasius plus rapides à résoudre. Enfin, lorsqu'il n'est pas possible de décrire correctement les écoulements par l'une de ces lois, on préférera la loi de Barr, explicite, à celle de Colebrook.

### V.9 Etude de l'erreur commise par les formulations empiriques – Extension des domaines de validité

Comme on l'a vu plus haut, les formulations empiriques de type Manning ne trouvent leur domaine de validité que pour une valeur précise de la rugosité relative, fonction du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement. Cependant, l'utilisation de la formulation de Manning dans l'étude d'écoulements aux caractéristiques variées étant assez répandue, il peut être intéressant de se rendre compte de l'erreur commise par l'utilisation de cette formulation pour des rugosités relatives variables.

Afin de pouvoir émettre une comparaison valable entre les différentes lois, reprenons l'ensemble des paramètres qu'elles mettent en jeu. Pour l'ensemble des lois, ces paramètres

sont au nombre de quatre : la vitesse de l'écoulement  $U$ , la hauteur d'eau  $H$ , la pente de frottement  $J$  et la rugosité de fond  $k$ .

Pour réaliser la comparaison des lois de frottement empiriques, on se replacera dans le contexte de leur mise en place. Ainsi, on se rappellera que les formules évoquées jusqu'ici ont été mises en place pour des écoulements uniformes puis généralisées aux autres écoulements par les résultats probants qu'elles fournissent. On se replacera donc dans cette hypothèse d'écoulement uniforme pour fixer la valeur de la pente de frottement constante et égale à la pente de fond de l'écoulement. Dans la suite, cette pente de frottement sera ainsi fixée à 0,005m/m.

L'intérêt dans l'établissement des cartes de zones inondables, et dans l'étude des écoulements de rivière en général, est souvent la recherche des hauteurs d'eau. Afin d'étudier l'influence respectivement de la vitesse et de la rugosité sur la valeur de cette hauteur d'eau, on fixera donc soit la rugosité soit la vitesse.

Une fois de plus, l'équation de Colebrook étant la plus générale, elle servira à fournir les valeurs de base de la hauteur. On considérera ainsi les résultats fournis par la formulation de Colebrook comme décrivant exactement la réalité. Cette équation fournit ainsi le calcul suivant de la hauteur d'eau :

$$h = \frac{fU^2}{8gJ} \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{\left(-2 \log \left( \frac{k}{14,8h} + \frac{0,63 \cdot 10^{-6}}{Uh\sqrt{f}} \right)\right)^2}$$

Cette formulation sera comparée aux diverses formulations empiriques étudiées précédemment. On rappellera la formulation générale reprise par l'ensemble des auteurs pour donner la hauteur d'eau :

$$h = \left( \frac{U}{\alpha\sqrt{J}} \right)^{1/\chi}$$

Etant donné le rôle de limite de la formulation de Chézy mis en évidence plus haut, on n'étudiera pas ici les lois pour lesquelles la valeur de l'exposant  $\chi$  est inférieure à 0,5. De même, la formulation de Chézy sera utilisée pour les seuls écoulements sur parois lisses et le coefficient de Chézy sera ainsi calculé par la formule de Bazin avec un coefficient de Bazin valant 0,06. Le paramètre de Chézy sera donc calculé comme suit :

$$\alpha = C = \frac{87}{1 + \frac{0,06}{\sqrt{h}}}$$

Pour les autres formulations empiriques, on reprendra les équations du paramètre  $\alpha$  établies plus haut pour la formulation de Nikuradse. On a ainsi les formulations suivantes :

$$\alpha_{Manning} = \frac{26,61}{k^{0,167}}$$

$$\alpha_{Tillman} = \frac{24,26}{k^{0,2}}$$

$$\alpha_{Hagen} = \frac{23,51}{k^{0,214}}$$

$$\alpha_{Christen} = \frac{31,71}{k^{0,125}}$$

### V.9.1 Comparaison à rugosité constante

L'approche habituelle d'étude d'une rivière et des zones inondables est de fixer une valeur constante de la rugosité de fond pour la totalité du lit mineur et du lit majeur de la zone étudiée. On introduit alors, à l'amont de la zone étudiée, le débit que l'on veut faire passer et l'on regarde les hauteurs d'eau obtenues sur le bassin.

Dans ce cas, la rugosité est donc fixée (généralement calée pour un épisode de crues dont le débit et les hauteurs d'eau sont connus) et la hauteur ne varie qu'en fonction du débit (ou de la vitesse calculée sur base du débit et de la connaissance de la forme du lit). On commencera donc par étudier l'influence sur l'évaluation de la hauteur d'eau de l'utilisation des différentes lois pour une rugosité fixe et une vitesse variable.

Pour la première comparaison, on fixera la valeur de la pente de fond à 0,005 et la rugosité de fond à 0,09m (rugosité étudiée numériquement plus loin). On obtient ainsi, en appliquant les formules rappelées ci-dessus, les courbes suivantes de hauteur uniforme en fonction de la vitesse d'écoulement :

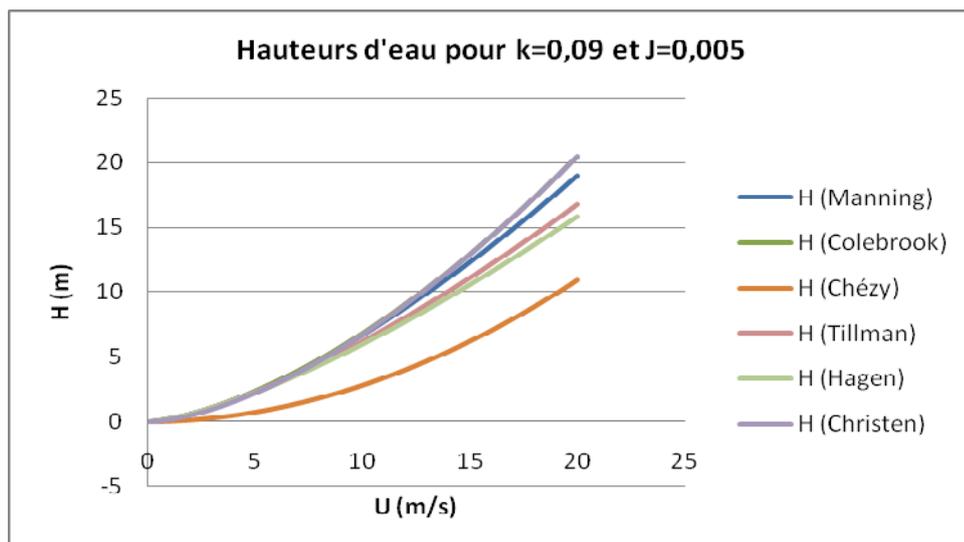


Figure 10. Courbes de hauteurs d'eau évaluées par les différentes lois de frottement pour  $k=0,09\text{m}$  et  $J=0,005$

On voit ainsi que la formule de Christen colle assez bien à la loi de Colebrook jusqu'à des vitesses assez élevées ( $U = 20\text{m/s}$ ). Pour ces vitesses élevées, les autres formulations

empiriques sous-estiment toutes la hauteur d'eau. La formule de Chézy pour les parois lisses sous-estime ainsi la hauteur d'eau de près de 8m pour une vitesse de 18m/s.

Afin de mieux visualiser les résultats obtenus pour des vitesses plus souvent rencontrées sur nos rivières belges, réalisons un zoom sur les vitesses allant jusqu'à 5m/s où les courbes paraissent beaucoup plus proches :

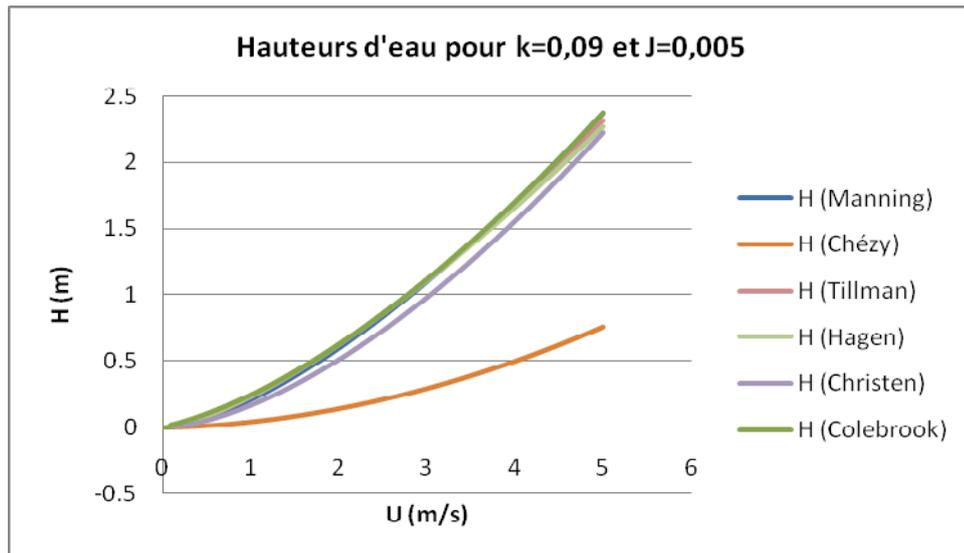


Figure 11. Courbes de hauteurs d'eau évaluées par les différentes lois de frottement pour  $k=0,09m$  et  $J=0,005$  (zoom sur les vitesses faibles)

On voit donc, en effet, que si on excepte la formule de Chézy, les autres lois se rapprochent assez bien de la loi de Colebrook pour les vitesses faibles. Cependant, les hauteurs d'eau associées à ces vitesses étant également assez faibles, l'erreur relative ne sera pas forcément plus faible que précédemment.

On notera enfin que pour ces vitesses faibles, c'est cette fois la formule de Christen qui s'éloigne le plus de la loi de Colebrook et celle de Tillman qui y correspond le mieux. La formulation de Manning semble apporter, quand à elle, une approche convenable pour l'ensemble des vitesses représentées sur les deux graphiques précédents.

Comme on l'a remarqué plus haut, même si l'erreur commise sur l'évaluation de la hauteur d'eau pour de faibles vitesses peut paraître faible, l'erreur relative ne l'est pas forcément. On représente donc sur le graphique suivant l'erreur relative commise par les différentes lois, calculée comme suit :

$$\frac{dh}{h} = \frac{h_{Colebrook} - h}{h_{Colebrook}}$$

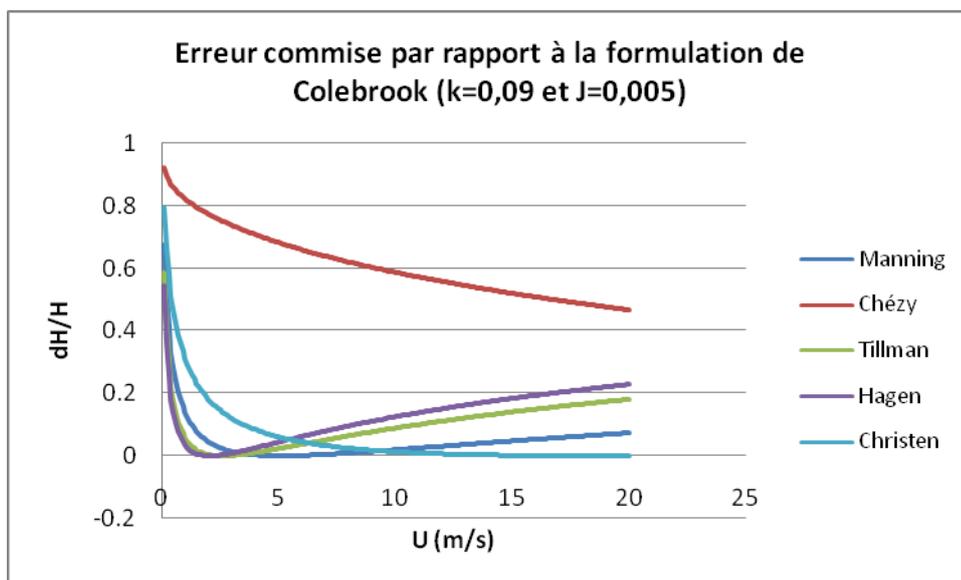


Figure 12. Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau calculée par les différentes lois empiriques pour  $k=0,09m$  et  $J=0,005$

Cette formule permet de se rendre compte qu'en effet, l'erreur relative pour des vitesses très faibles devient vite très importante. Pour les vitesses élevées on voit que les différentes lois tendent à nouveau à augmenter l'erreur relative commise avec la vitesse. Seule la loi de Chézy tend à diminuer continûment l'erreur relative sur la hauteur d'eau avec la vitesse. Ce graphique met donc bien en évidence le caractère de limite de la loi de Chézy.

Etant donné que pour chaque vitesse, la formule de Colebrook nous donne une seule hauteur d'eau, l'abscisse de vitesse du graphique précédent peut être transformée en une abscisse de rugosité relative pour donner le diagramme suivant :

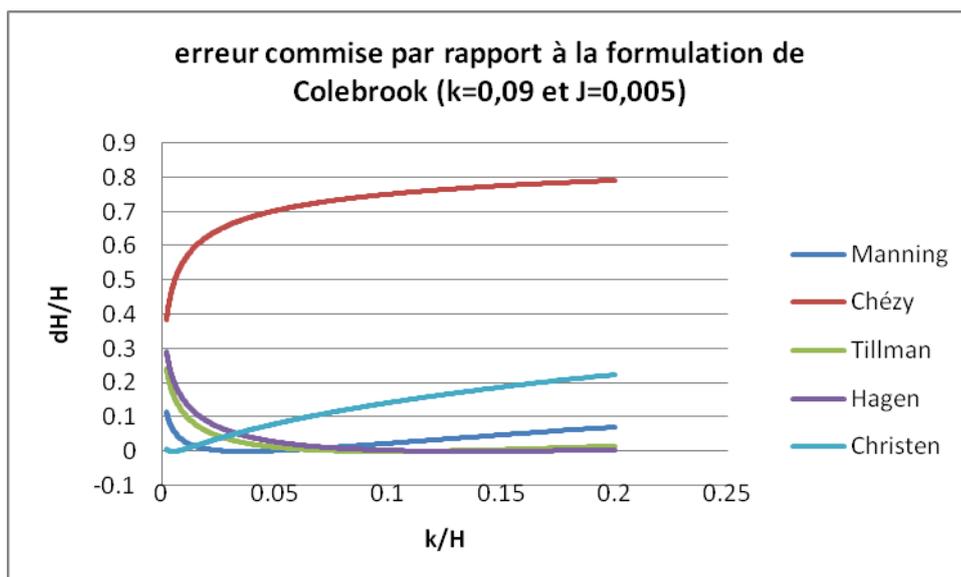


Figure 13. Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau calculée par les différentes lois empiriques pour  $k=0,09m$  et  $J=0,005$  (fonction de la rugosité relative)

Ce graphique nous permet ainsi de remarquer une fois de plus une correspondance totale des différentes lois pour une et une seule rugosité relative (0 pour Chézy ; 0,005 pour Christen ; 0,037 pour Manning ; 0,1 pour Tillman ; 0,138 pour Hagen).

On se rend également compte que l'on peut étendre le domaine de validité des différentes lois à de nouvelles rugosités relatives. En effet, en utilisant la loi de Manning pour des rugosités relatives allant de 0,007 à 0,15, on commet une erreur relative inférieure à 5%. Ces rugosités relatives correspondent à un intervalle de vitesse compris entre 1,9m/s et 15,5m/s.

De la même manière, pour l'utilisation des différentes lois empiriques on commet une erreur relative de moins de 5% si l'on reste dans les intervalles repris au tableau suivant :

Auteurs	Domaine de validité en termes de vitesse (m/s)	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	$\infty$	0
Christen	[5,6 ; $\infty$ ]	[0 ; 0,032]
Manning	[1,9 ; 15,5]	[0,007 ; 0,155]
Tillman	[1,1 ; 6,9]	[0,023 ; 0,342]
Hagen	[0,86 ; 5,3]	[0,034 ; 0,443]

On voit donc que la bande de validité des diverses lois empiriques de frottement est ainsi définie. Il faut cependant noter que cette bande est définie pour une rugosité de 0,09m et une pente de fond de 0,005. Cette bande sera donc différente en fonction de la valeur de la rugosité qui varie d'une rivière à l'autre. Ainsi, si on fait passer la rugosité à 0,2m, on obtient les domaines de validité suivants :

Auteurs	Domaine de validité en termes de vitesse (m/s)	Domaine de validité En termes de rugosité relative
Chézy	$\infty$	0
Christen	[8,34 ; $\infty$ ]	[0 ; 0,032]
Manning	[2,8 ; 23]	[0,007 ; 0,155]
Tillman	[1,6 ; 10,4]	[0,023 ; 0,342]
Hagen	[1,3 ; 8,1]	[0,034 ; 0,443]

En réalisant la même démarche pour diverses valeurs de la rugosité, on remarque une constance des valeurs limites de rugosité relative. D'une manière plus générale on voit donc qu'on peut définir les intervalles suivant de rugosité relative sur lesquels les écoulements sont correctement modélisés en termes de hauteurs d'eau :

Auteurs	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	0
Christen	[0 ; 0,032]
Manning	[0,007 ; 0,155]
Tillman	[0,023 ; 0,342]
Hagen	[0,034 ; 0,443]

Ce fait est assez facilement mis en évidence par exemple pour la formulation de Manning en développant les formulations mises en jeux :

$$Manning : h = \frac{u^2 \left(\frac{k}{h}\right)^{1/3}}{708,25 \cdot J}$$

$$Nikuradse : h = \frac{u^2}{32gJ \left(\log \frac{k}{14,8h}\right)^2}$$

En réintégrant ces équations dans la formulation de l'erreur relative calculée plus haut et en se rappelant que u et J sont des constantes, on obtient alors :

$$\frac{dh}{h} = \frac{h_{Nikuradse} - h_{Manning}}{h_{Nikuradse}} = \left( 1 - \frac{32g \left(\log \frac{k}{14,8h}\right)^2 \left(\frac{k}{h}\right)^{1/3}}{708,25} \right) = f\left(\frac{k}{h}\right)$$

Pour que cette équation soit en effet une simple fonction de la rugosité relative, on fait ici l'hypothèse que les hauteurs d'eau fournies par les différentes lois sont suffisamment proches. Ce qui est le cas dans l'intervalle de validité défini plus haut.

Cette formule permet donc de mettre en évidence l'indépendance de l'intervalle de validité en termes de rugosité relative vis-à-vis des paramètres de vitesse et de pente de frottement.

### V.9.2 Comparaison à vitesse constante

On a, dans le paragraphe précédent, défini les domaines de validité de l'utilisation des différentes lois empiriques pour l'étude de rivières à rugosité constante. Il nous reste à étudier le domaine de validité de ces mêmes lois pour une rugosité variable et une vitesse constante.

En effet, une rivière n'est pas réellement homogène. Il peut ainsi exister des zones à rugosité variable (lit mineur et majeur par exemple). Dans la modélisation d'épisode de crues, ces différentes zones seront étudiées avec la même loi de frottement pour un débit de crues donné. Il peut donc être intéressant de savoir quelle plage de rugosité peut être calculée par une même loi de frottement pour un débit fixé.

Pour cette comparaison, on fixera tout d'abord la vitesse d'écoulement à 1m/s. On se rappellera une fois de plus que l'on réalise cette étude pour un écoulement uniforme sur une pente de fond de 0,005. On obtient ainsi les courbes de hauteurs uniformes cette fois fonctions de la rugosité de fond :

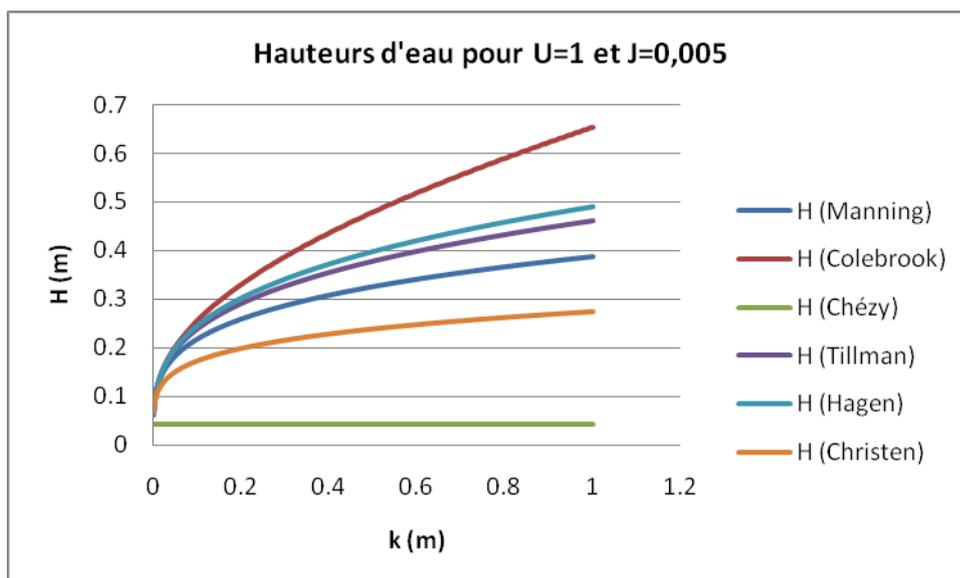


Figure 14. Représentation des hauteurs d'eau fournies par les différentes lois pour  $U=1\text{m/s}$  et  $J=0,005$

On remarque ici une différence, grandissante avec la rugosité, entre les hauteurs d'eau calculées par les lois empiriques et celles calculées par la formulation de Colebrook. On peut également remarquer, une fois de plus, que les formules empiriques sous-estiment les hauteurs d'eau et sont, par conséquent, insécures pour l'établissement de zones inondables, par exemple.

Pour des rugosités élevées, on peut remarquer que les résultats fournis par les lois empiriques sont assez éloignés de la réalité considérée décrite par la loi de Colebrook. Les lois se rapprochant le plus de cette dernière pour des rugosités élevées sont celles de Hagen et de Tillman. On remarque que la loi de Chézy calculée pour une paroi lisse joue bien son rôle de limite inférieure.

Pour des rugosités faibles, les différentes courbes semblent se rejoindre. En faisant un zoom sur les faibles rugosités, on obtient le graphique suivant représentant les hauteurs d'eau calculées par les différentes lois :

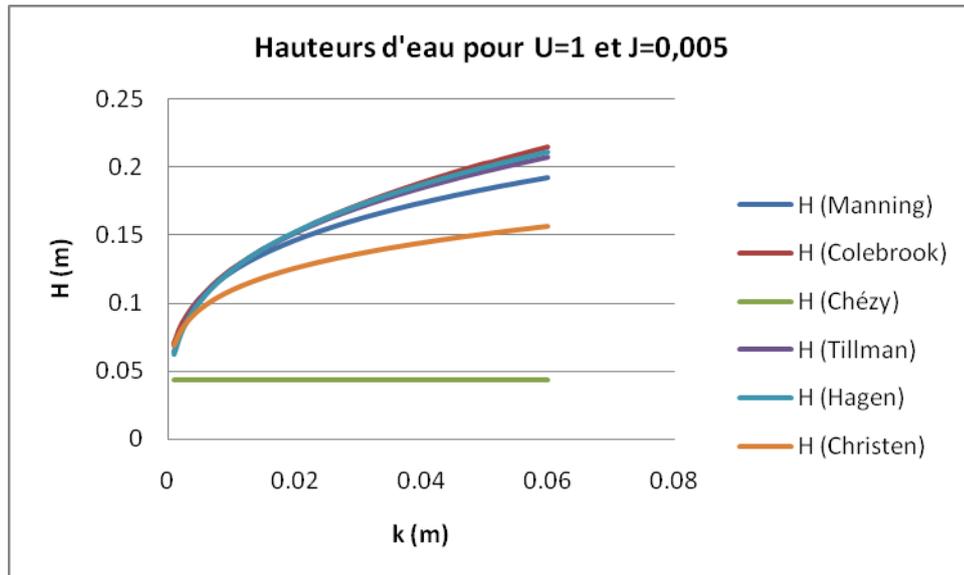


Figure 15. Représentation des hauteurs d'eau fournies par les différentes lois pour  $U=1$  m/s et  $J=0,005$  (zoom sur les faibles rugosités)

On remarque en effet que, pour des rugosités assez faibles, l'erreur commise par l'utilisation des lois empiriques reste assez faible. Cependant, on mettra une fois de plus en garde sur le fait que cette erreur porte sur des hauteurs d'eau faibles et que l'erreur relative ne sera donc pas forcément négligeable.

On notera qu'une fois encore la loi de Hagen épouse au mieux celle de Colebrook. Cependant, pour des rugosités très faibles (inférieures à  $0,005$  m), c'est la formule de Christen qui épousera au plus près celle de Colebrook même si celle-ci en est très éloignée pour des rugosités plus élevées.

Comme on l'a signalé plus haut, l'erreur commise doit être rapportée à la hauteur d'eau sur laquelle elle est commise pour permettre une comparaison correcte des différentes lois. On tracera donc une fois de plus les courbes d'erreur relative par rapport à la formulation de Colebrook.

Cette erreur relative sera calculée comme au point précédent et l'on obtient ainsi les courbes suivantes :

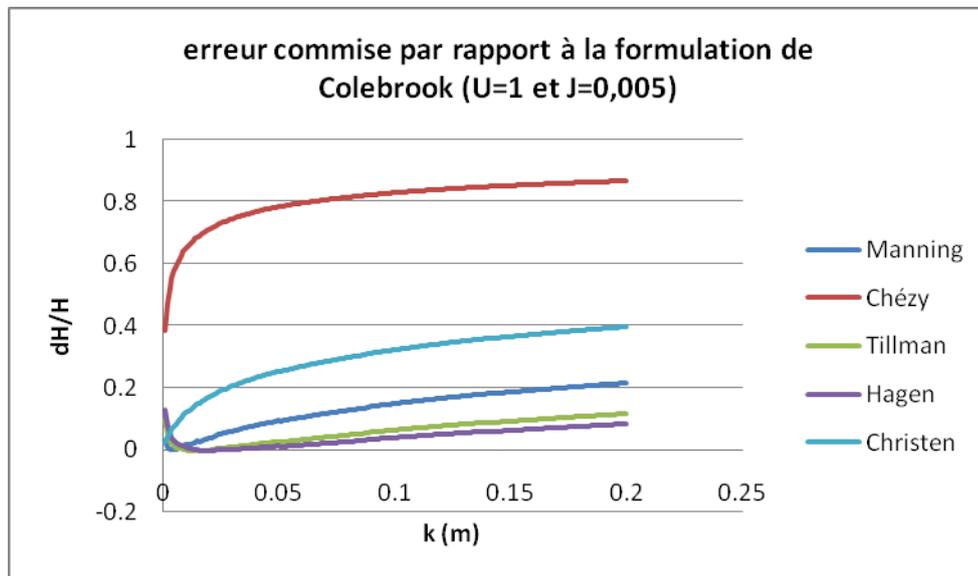


Figure 16. Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau par l'utilisation des différentes lois empiriques

Une fois de plus, on remarque que les différentes lois ne trouvent leur correspondance avec la loi de Colebrook que pour une et une seule rugosité. Pour des rugosités très faibles, on voit que, bien que l'erreur sur la hauteur d'eau soit faible, l'erreur relative n'est pas négligeable du tout. Pour des rugosités importantes, cette erreur croît également dans des proportions non négligeables. Enfin, ce graphique met en évidence une nouvelle fois le rôle de limite joué par la formulation de Chézy pour une rugosité nulle.

Comme précédemment, l'axe des abscisses de rugosité peut être transformé en axe des rugosités relatives. En effet, chaque rugosité correspond à une hauteur d'eau uniforme calculée par la formulation de Colebrook.

On peut donc retracer le graphique précédent en fonction de cette rugosité relative :

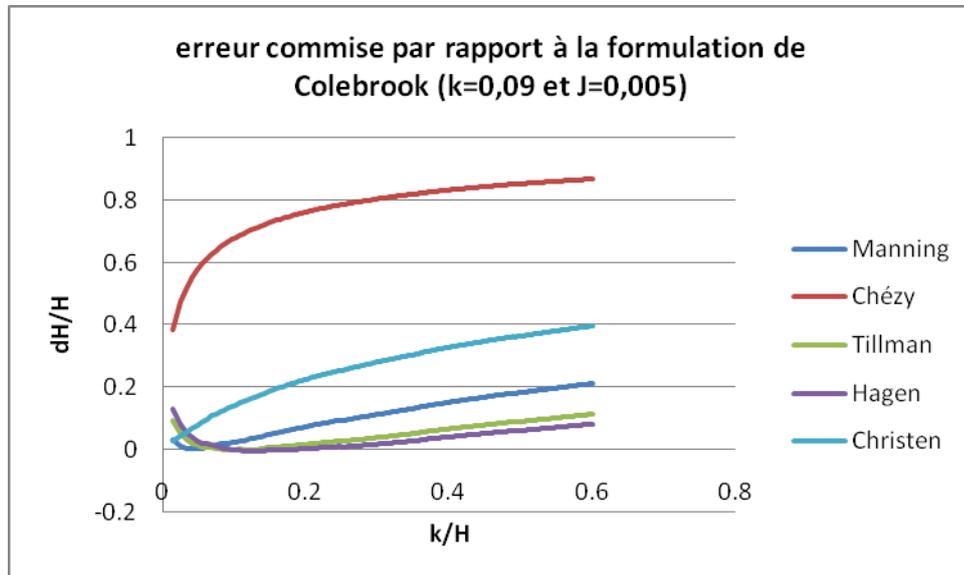


Figure 17. Représentation de l'erreur relative sur la hauteur d'eau commise par l'utilisation des différentes lois empiriques (fonction de la rugosité relative)

Ce graphique permet d'observer que la correspondance des diverses lois avec la formulation de Colebrook est toujours atteinte pour la même rugosité relative (0 pour Chézy ; 0,005 pour Christen ; 0,37 pour Manning ; 0,1 pour Tillman ; 0,138 pour Hagen). Il met également une nouvelle fois en évidence le rôle de limite joué par la formulation de Chézy pour des parois lisses.

Enfin, les deux graphiques précédents permettent une nouvelle fois d'élargir la bande de validité des différentes lois empiriques pour un écoulement à vitesse constante sur une rugosité variable. On obtient ainsi, pour une erreur relative inférieure à 5%, les intervalles d'utilisations des différentes lois, pour une vitesse d'écoulement de 1 m/s sur une pente de fond de 0,005, repris dans le tableau suivant :

Auteurs	Domaine de validité en termes de rugosité (m)	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	0	0
Christen	[0 ; 0,003]	[0 ; 0,03]
Manning	[0,001 ; 0,024]	[0,01 ; 0,15]
Tillman	[0,002 ; 0,082]	[0,02 ; 0,34]
Hagen	[0,003 ; 0,122]	[0,03 ; 0,44]

Une fois de plus, il est important de bien noter que ces intervalles sont valables pour une vitesse et une pente de fond données. Ainsi, pour une vitesse de 2m/s, ces intervalles deviennent ceux repris au tableau suivant :

Auteurs	Domaine de validité en termes de rugosité (m)	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	0	0
Christen	[0 ; 0,012]	[0 ; 0,03]
Manning	[0,002 ; 0,099]	[0,01 ; 0,15]
Tillman	[0,008 ; 0,324]	[0,02 ; 0,34]
Hagen	[0,012 ; 0,493]	[0,03 ; 0,44]

On peut remarquer que, comme à rugosité constante, lorsqu'on travaille à vitesse constante, celle-ci n'a pas d'influence sur l'intervalle de validité des différentes lois en termes de rugosité relative. Autrement dit, à vitesse constante, l'erreur relative commise sur l'évaluation de la hauteur d'eau par les lois empiriques n'est fonction que de la rugosité relative.

On notera également que l'on retrouve bien les intervalles précédemment établis en termes de rugosités relatives. Cela provient du fait que la formulation de l'erreur relative reste inchangée par rapport au cas précédent. On généralisera donc en définissant des intervalles de confiance à 5% sur la hauteur d'eau pour toutes modélisations d'écoulements et pour chaque loi :

Auteurs	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	0
Christen	[0 ; 0,032]
Manning	[0,007 ; 0,155]
Tillman	[0,023 ; 0,342]
Hagen	[0,034 ; 0,443]

On notera cependant, que ces intervalles varient en réalité légèrement avec la valeur du nombre de Reynolds, inclus dans la formulation de Colebrook. Cependant, en règle générale, celle-ci est suffisamment élevée pour ne pas avoir d'effet sur les bornes des intervalles de validité.

On notera également que ces intervalles sont donc valables pour les lois de Nikuradse et Colebrook. En pratiquant de la même manière avec la formulation de Bathurst, on obtient cette fois les intervalles suivant de correspondance :

Auteurs	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	0
Christen	[0 ; 0,03]
Manning	[0,004 ; 0,14]
Tillman	[0,014 ; 0,29]
Hagen	[0,02 ; 0,38]

Etant donné que le domaine de validité de la formulation de Bathurst ne comprend que les rugosités relatives supérieures à 0,25, seules les lois de Hagen et Tillman sont capables de représenter les écoulements sur une macro-rugosité pas trop importante.

## Chapitre VI : Ecoulements de crues et d'inondations

### Sommaire

---

VI.1 Introduction .....	69
VI.2 Le plan PLUIES .....	69
VI.3 Modélisation des écoulements de crues et d'inondations.....	71

---

## VI.1 Introduction

Parmi les domaines de l'hydraulique que l'homme tente de maîtriser, les crues et inondations peuvent retenir notre attention. En effet, il s'agit là d'une préoccupation à la fois économique et sociale importante dans notre pays et en Europe plus généralement. A une époque où les troubles climatiques fournissent à la fois sécheresses et épisodes de pluies violents, où l'urbanisation galopante canalise cette eau, l'étude du problème de l'inondation devient essentielle.

En Belgique, on a ainsi connu, au cours des 15 dernières années, 3 crues séculaires (1995, 2000 et 2002). De plus, il devient fréquent de voir se développer des épisodes de crues plus locaux et plus brefs et ce même en période estivale. L'épisode du 29 mai dernier en est encore le triste exemple.



Figure 18. Crues d'Août 2002

Les causes de cette augmentation nette de la fréquence de crue et d'inondation est certes imputable à un changement climatique mis en évidence par l'IRM (Institut Royal Météorologique) mais aussi à une urbanisation et à une occupation du sol grandissantes. En effet, la canalisation des cours d'eau, le drainage des sols pour créer des zones d'habitat, la suppression de la végétation favorisant une arrivée plus rapide des eaux vers les rivières,... sont autant de facteurs favorisant des crues plus intenses et subites. Les inondations sont par conséquent également plus fréquentes et, même si leur durée est souvent raccourcie, les dégâts qu'elles provoquent ne s'en trouvent pas forcément amoindris.

## VI.2 Le plan PLUIES

En région wallonne, le plan PLUIES (Prévention et Lutte contre les inondations et leurs Effets sur les Sinistrés) a été lancé il y a maintenant 5 ans en vue de gérer le problème de l'inondation. Ce plan, lancé par la région wallonne, a pour but de permettre une gestion

globale des écoulements de crues et ainsi permettre d'assurer la meilleure protection possible contre l'inondation. Il compte ainsi, déclinés en 30 actions programmées, 5 objectifs clairs :

- Améliorer la connaissance des risques de crues et d'inondations
- Diminuer et ralentir le ruissellement des eaux sur les bassins versants
- Aménager les lits de rivières et les plaines alluviales
- Diminuer la vulnérabilité des zones inondables
- Améliorer la gestion de crise en cas de catastrophe

Ces objectifs ont été établis en reprenant les phénomènes d'inondations depuis leur genèse météorologique jusqu'aux dommages réels. On reprend ainsi, sur l'organigramme suivant, le plan d'intervention du plan PLUIES via les 5 objectifs précités :

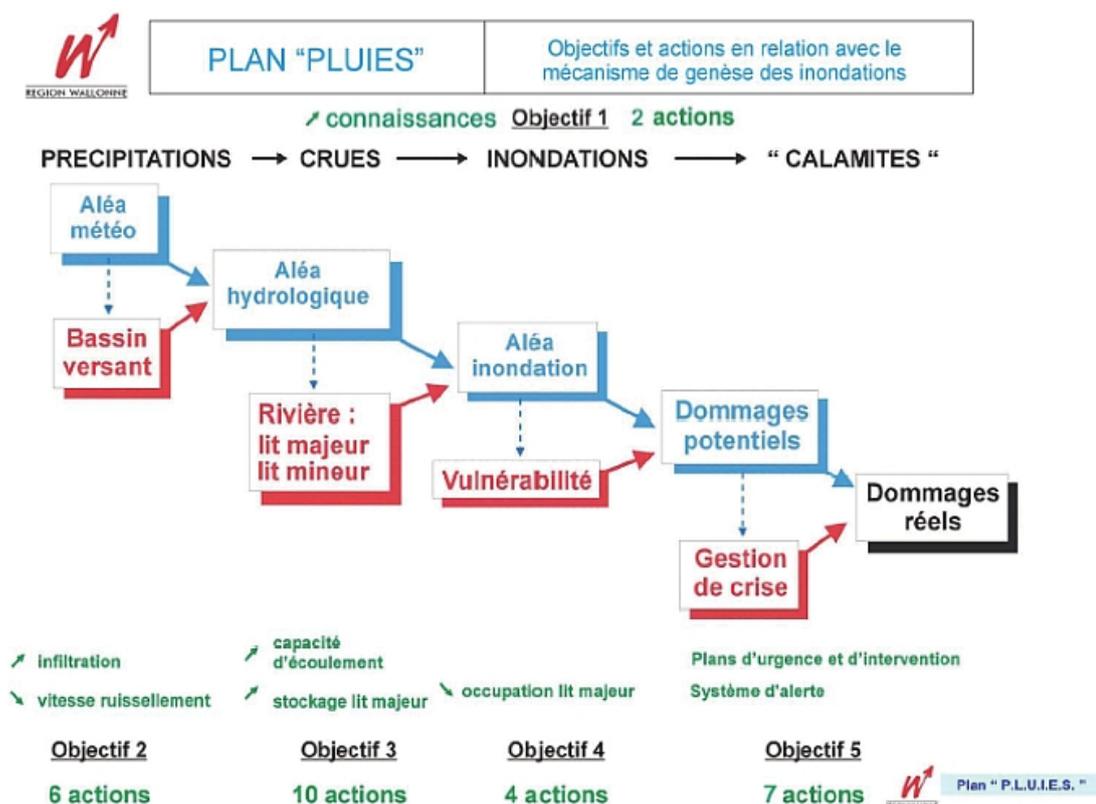


Figure 19. Organigramme des objectifs du plan PLUIES

Dans le cadre de ce plan de grande ampleur pour la gestion et la connaissance des phénomènes de crues et d'inondations, il était évidemment d'un intérêt majeur de pouvoir représenter efficacement ces phénomènes. Deux approches ont ainsi été menées pour établir finalement les cartes de l'aléa d'inondation.

La première approche, menée sur les cours d'eau où une donnée statistique suffisante était disponible, consiste à calculer par méthode statistique le débit de crues pour une période de retour donnée. Par la suite on réalise une modélisation numérique du passage de ce débit sur

les données topographiques. Les différents paramètres sont enfin calés pour correspondre aux données photographiques des grands épisodes de crues ou encore aux enquêtes menées auprès des riverains.

La seconde approche, menée sur le reste du réseau hydrographique wallon, se base quant à elle sur les données hydrologiques du terrain (données topographiques, données géologiques,...). Une fois de plus, le calage de la méthode s'est fait par corrélation avec les enquêtes menées sur les grands épisodes de crues.

### **VI.3 Modélisation des écoulements de crues et d'inondations**

La capacité à modéliser les écoulements de crues le plus fidèlement possible est un atout majeur dans la gestion des inondations. Cependant, cette modélisation n'est pas si aisée. En effet, pour que les résultats obtenus par modélisation soient suffisamment précis pour permettre une gestion fine des événements de crues, il faudra qu'elle soit réalisée sur un maillage suffisamment fin (fonction de l'ordre de précision choisi). De plus l'intérêt étant de pouvoir suivre la crue depuis sa source jusqu'à son exutoire, les distances couvertes par les modélisations sont de l'ordre de plusieurs centaines de kilomètres. La modélisation numérique peut dès lors s'avérer fort coûteuse en temps de calcul, ne permettant pas d'obtenir les informations suffisamment tôt pour une gestion correcte des événements.

Il faut donc pouvoir réaliser une approche des phénomènes réels suffisamment précise mais également légère en temps de calcul. Cela passera par la simplification des équations de base de l'hydraulique sur base d'hypothèses pas trop restrictives. La simplification actuellement utilisée (pour l'établissement des cartes de zones inondables par exemple) est de regrouper l'ensemble des termes des équations de base dans un terme global de frottement. Ce terme de frottement sera alors évalué par une formulation de Manning dont le coefficient sera fixé sur base des relevés d'enquête pour des épisodes de crues importants. Cette approche fournit ainsi des résultats satisfaisants en un temps de calcul raisonnable.

Cependant, le coefficient de Manning perd ici son sens physique de représentation simple de la rugosité de fond. De plus, il faut bien noter que le calage du coefficient de Manning pour un débit ne sera pas forcément efficace pour un autre débit. Ce fait sera mis en évidence expérimentalement plus loin. Il sera, dès lors, intéressant de se poser la question de l'intérêt que pourrait avoir une modélisation plus rigoureuse. Un simple calage des paramètres suffirait alors pour la modélisation de n'importe quel débit d'écoulement.

On rappellera également la caractéristique particulière aux écoulements d'inondations. En effet, les écoulements d'inondations peuvent être divisés en deux zones :

- Le lit mineur permettant le passage du principal du débit à des vitesses d'écoulement importantes
- Le lit majeur, communément appelé zone inondée, où les vitesses et les hauteurs d'eau sont généralement plus faibles.

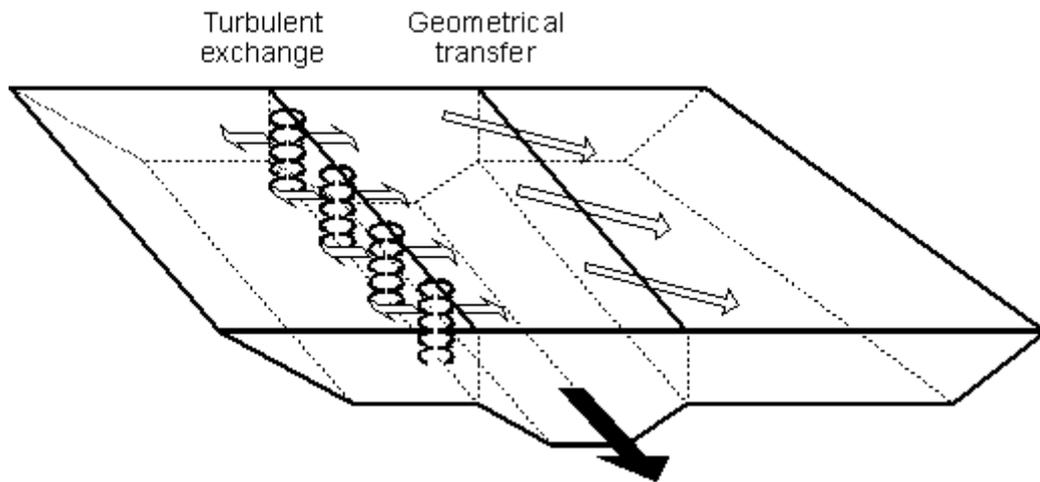


Figure 20. Représentation de l'écoulement d'inondation avec la séparation lit mineur / lit majeur

A l'intersection de ces deux zones, les gradients de vitesse importants génèrent un échange turbulent important. On observe ainsi généralement de larges zones de recirculation qui influent sur l'écoulement global de manière non négligeable. Dans l'approche utilisée habituellement pour la modélisation, la turbulence est également comprise dans la valeur du coefficient de Manning. Il sera donc intéressant d'étudier l'influence que peut avoir la prise en compte de la turbulence, par une formulation complète, sur la valeur de ce coefficient de Manning.

## Chapitre VII : Recherche d'une formulation continue du frottement

### Sommaire

---

VII.1 Introduction .....	74
VII.2 Choix des lois de modélisation.....	74
VII.3 Etablissement d'une loi de jonction .....	76
VII.3.1 Forme générale.....	76
VII.3.2 Conditions aux limites.....	76
VII.3.3 Détermination des paramètres .....	76
VII.4 Formulation continue du frottement .....	78

---

## VII.1 Introduction

Comme on l'a vu précédemment, la modélisation des écoulements de rivière et plus souvent des écoulements de crues et d'inondations est un enjeu important. Cependant, la modélisation de tels écoulements est souvent rendue difficile pour plusieurs raisons :

- Gamme variée de hauteurs d'eau à modéliser et ainsi gamme variée de rugosités relatives pas forcément modélisable par une seule loi,
- Lourdeur de calcul que peut entraîner la modélisation de zones assez vastes par un maillage suffisamment fin,
- Discontinuité des différentes lois aux intersections de leurs domaines d'application (passage vers la macro-rugosité).

Ainsi, d'après ce qui vient d'être mis en évidence théoriquement, il est impossible de couvrir l'ensemble des écoulements sur des rugosités relatives variables par une seule et même loi. Or lors de l'étude d'inondations, l'écoulement, étudié aussi bien en lit mineur (où des hauteurs d'eau importantes sont observées) qu'en lit majeur (où les hauteurs d'eau seront plus faibles), couvre des rugosités relatives allant souvent de l'écoulement lisse jusqu'à l'écoulement sur macro-rugosité.

Il conviendrait donc de trouver une formulation numérique capable de modéliser de manière continue les écoulements sur cette large gamme de rugosités relatives. C'est ce à quoi nous allons nous attacher dans ce chapitre.

## VII.2 Choix des lois de modélisation

Il conviendrait, pour permettre une modélisation globale des écoulements, d'utiliser les lois se rapprochant le plus possible du sens physique de ceux-ci tout en assurant la continuité entre elles. On portera également notre attention sur la lourdeur de calcul que ces lois peuvent engendrer. Ainsi, on choisira également les lois tendant à minimiser le temps de calcul.

Comme on l'a vu précédemment, la loi s'approchant le plus du sens physique des écoulements turbulents, qu'ils aient lieu sur surfaces lisses ou rugueuses, est celle de Colebrook. Malheureusement, l'utilisation de cette loi est rendue malaisée par sa forme implicite. En effet, cette forme implicite demandera un temps de calcul important alors que nous essayons de le réduire au minimum.

Afin de palier à ce défaut, on utilisera donc la formulation de Barr qui approche celle de Colebrook avec une erreur relative de moins de 1% sur la valeur du coefficient de frottement  $f$ . La formulation de Barr trouve en effet son avantage dans son caractère explicite tout en respectant la physique de l'écoulement.

On utilisera donc par la suite la formulation suivante de Barr :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{4,518 \cdot \log\left(\frac{Re}{7}\right)}{Re \left( 1 + \frac{Re^{0,52} \left(\frac{k}{h}\right)^{0,7}}{76,531} \right)} + \frac{k}{14,8h} \right)$$

On rappellera que cette formulation couvre le même domaine de validité que celle de Colebrook. Ainsi, elle sera valable pour l'ensemble des écoulements turbulents excepté les écoulements sur macro-rugosité. Elle sera donc valable pour des valeurs du nombre de Reynolds supérieure à 1000 et des rugosités relatives inférieures à 0,25. En se rappelant que les écoulements traditionnels de rivière ne sont pratiquement jamais laminaires, on étendra l'utilisation de cette formule à l'ensemble des valeurs du nombre de Reynolds supérieures à 7. En dessous de cette valeur, la validité mathématique de l'équation n'est plus réalisable et on fera l'hypothèse peu restrictive que la valeur du nombre de Reynolds est limitée à 7.

Par l'utilisation de la formulation de Barr, on peut donc couvrir l'ensemble des écoulements sur des rugosités relatives inférieures à 0,25. Pour des rugosités relatives supérieures, on se trouve dans le domaine de la macro-rugosité. Dans ce domaine, il a été établi que la formulation de Bathurst était celle qui approchait au mieux les phénomènes réels de frottement. C'est donc cette formulation de Bathurst que l'on utilisera pour modéliser l'ensemble des écoulements sur macro-rugosité. On rappelle ici cette formulation de Bathurst valable pour des rugosités relatives supérieures à 0,25 :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,987 \log\left(\frac{k}{5,15h}\right)$$

Par l'utilisation des lois de Barr et de Bathurst, on couvre ainsi l'ensemble de la gamme d'écoulements existants. Cependant, la discontinuité entre ces deux lois pour une rugosité relative de 0,25 rend leur utilisation commune sur une même modélisation impossible. Il est pourtant intéressant, dans la modélisation d'inondations par exemple, de pouvoir modéliser à la fois les écoulements en lit mineur, généralement représentés par la loi de Barr, et ceux en lit majeur, pour lesquels on pourrait se trouver dans le cadre de la loi de Bathurst. Il convient donc, afin de pouvoir utiliser ces deux formules dans une même modélisation, d'assurer une transition entre elles fournissant une formulation continue du frottement.

## VII.3 Etablissement d'une loi de jonction

### VII.3.1 Forme générale

Afin d'établir la jonction entre les lois de Barr et de Bathurst, on utilisera un polynôme du troisième degré en la rugosité relative qui est le seul paramètre commun aux deux formulations. On fixera alors les paramètres de ce polynôme en fonction des conditions aux limites établies ci-après et l'on vérifiera leur stabilité vis-à-vis du nombre de Reynolds. Dès lors, la forme générale de l'équation de jonction sera la suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = A\left(\frac{k}{h}\right)^3 + B\left(\frac{k}{h}\right)^2 + C\left(\frac{k}{h}\right) + D$$

### VII.3.2 Conditions aux limites

Afin de fixer les paramètres de ce polynôme, on devra donc placer des conditions aux limites. Ces limites seront en fait les points d'intersection entre la loi de jonction et les lois de Barr et de Bathurst. La position de ces intersections sera choisie de manière à éviter une trop grosse variation du frottement avec les variations de hauteur d'eau. Dans les simulations habituellement réalisées, la variation de hauteur d'eau est au maximum de l'ordre du centimètre. Les limites de la formulation de jonction ont donc été définies pour qu'une variation d'un centimètre d'eau ne crée au maximum qu'une différence relative de 50% du frottement. On placera alors les bornes de la loi de jonction à des rugosités relatives de 0,15 et 0,35.

Reste à définir les conditions à appliquer à ces deux limites. Afin de déterminer les 4 paramètres de l'équation de jonction, on réalisera l'égalité de l'équation de jonction à la loi de Barr, pour la limite inférieure, et à celle de Bathurst, pour l'autre, ainsi que l'égalité des dérivées respectives aux deux limites. En assurant cette double égalité aux deux limites du polynôme de jonction, on assure ainsi la continuité des équations de Barr et de Bathurst avec le polynôme.

### VII.3.3 Détermination des paramètres

On obtient alors les systèmes suivant à résoudre :

Pour  $k/h = 0,15$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3A\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2B\left(\frac{k}{h}\right) + C = \frac{-1,987}{\ln(10)\left(\frac{k}{h}\right)} \\ A\left(\frac{k}{h}\right)^3 + B\left(\frac{k}{h}\right)^2 + C\left(\frac{k}{h}\right) + D = -1,987 \log\left(\frac{k}{5,15h}\right) \end{array} \right.$$

Pour  $k/h = 0,35$  :

$$\left. \begin{aligned}
 & A\left(\frac{k}{h}\right)^3 + B\left(\frac{k}{h}\right)^2 + C\left(\frac{k}{h}\right) + D = -2 \log \left( \frac{4,518 \log\left(\frac{\text{Re}}{7}\right)}{\text{Re} \left( 1 + \frac{\text{Re}^{0,52} \left(\frac{k}{h}\right)^{0,7}}{76,531} \right)} + \frac{k}{14,8h} \right) \\
 & 3A\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2B\left(\frac{k}{h}\right) + C = -2 \frac{1}{14,8} - \frac{0,0413 \log\left(\frac{\text{Re}}{7}\right) \text{Re}^{0,52} \left(\frac{k}{h}\right)^{-0,3}}{\text{Re} \left( 1 + \frac{\text{Re}^{0,52} \left(\frac{k}{h}\right)^{0,7}}{76,531} \right)^2} \\
 & \ln(10) \frac{4,518 \log\left(\frac{\text{Re}}{7}\right)}{\text{Re} \left( 1 + \frac{\text{Re}^{0,52} \left(\frac{k}{h}\right)^{0,7}}{76,531} \right)} + \frac{k}{14,8h}
 \end{aligned} \right\}$$

On voit donc que les valeurs des paramètres du polynôme vont dépendre du nombre de Reynolds.

Par la résolution du système ci-dessus pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, on obtient les courbes suivantes fournissant les valeurs des 4 paramètres :

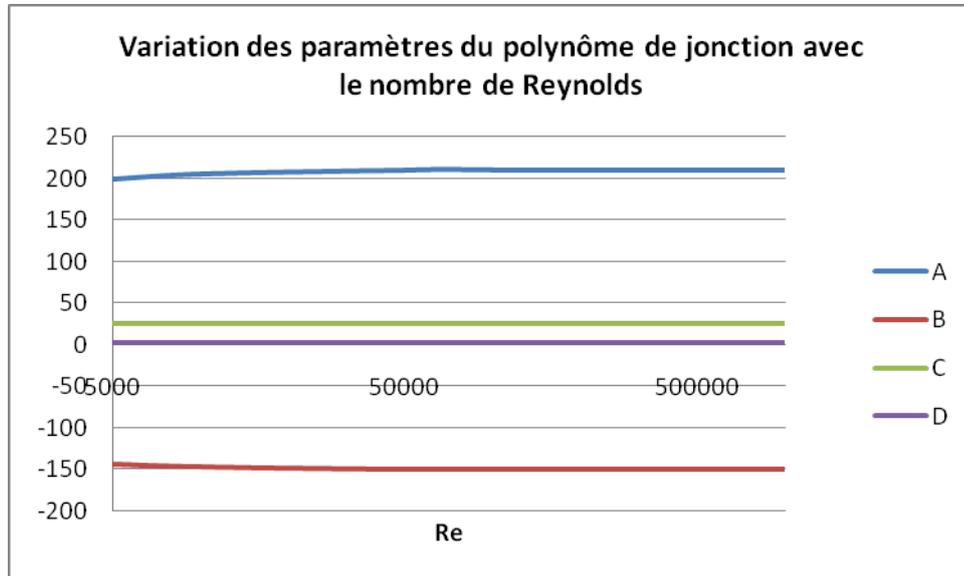


Figure 21. Variation des paramètres du polynôme de jonction avec le nombre de Reynolds

On remarquera que pour des valeurs du nombre de Reynolds supérieures à 50000, les paramètres prennent des valeurs constantes. Pour des valeurs inférieures du nombre de Reynolds, l'erreur relative commise est au maximum de 10%. On considérera donc des valeurs constantes des paramètres et le polynôme de jonction s'écrira :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 210,61 \left( \frac{k}{h} \right)^3 - 149,64 \left( \frac{k}{h} \right)^2 + 24,89 \left( \frac{k}{h} \right) + 2,91$$

#### VII.4 Formulation continue du frottement

Grâce à ce polynôme de jonction, on obtient donc une formulation continue du frottement intégrable dans les équations de l'hydraulique pour permettre une modélisation plus rigoureuse des écoulements à surface libre. Cette formulation continue reprend ainsi la loi de Barr pour des rugosités relatives inférieures à 0,15, le polynôme de jonction pour des rugosités relatives variant entre 0,15 et 0,35 et la loi de Bathurst pour des rugosités relatives supérieures à 0,35.

On obtient donc finalement la formulation continue suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{4,518 \cdot \log \frac{\text{Re}}{7}}{\text{Re} \left( 1 + \frac{\text{Re}^{0,52} \left( \frac{k}{h} \right)^{0,7}}{76,531} \right)} + \frac{k}{14,8h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \leq 0,15$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 210,61 \left( \frac{k}{h} \right)^3 - 149,64 \left( \frac{k}{h} \right)^2 + 24,89 \left( \frac{k}{h} \right) + 2,91 \quad \text{pour } 0,15 \leq \frac{k}{h} \leq 0,35$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,987 \log \left( \frac{k}{5,15h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \geq 0,35$$

## Chapitre VIII : Etude numérique de l'influence des lois de frottement

### Sommaire

---

VIII.1 Introduction .....	81
VIII.2 Evaluation de la rugosité de fond .....	82
VIII.3 Analyse globale des résultats obtenus .....	84
VIII.4 Analyse de l'erreur relative commise par l'utilisation des différentes lois .....	87
VIII.5 Domaines de validité des différentes lois .....	89
VIII.6 Evolution du coefficient de Manning avec le débit .....	91

---

### VIII.1 Introduction

Dans la partie qui suit, nous allons étudier l'influence des différentes formulations du terme de frottement sur les résultats obtenus par résolution de celles-ci. Pour ce faire, on réalisera cette résolution à l'aide du logiciel Wolf 2D décrit en annexe (cf. annexe 5).

Afin de pouvoir mener notre étude, il nous faut encore choisir une zone de modélisation adéquate en vue des phénomènes étudiés. Pour l'étude des phénomènes de frottement, on modélisera une zone allant de l'amont de la ville d'Hamoir jusqu'au village de Tabreux. Dans cette zone coule l'Ourthe moyenne.

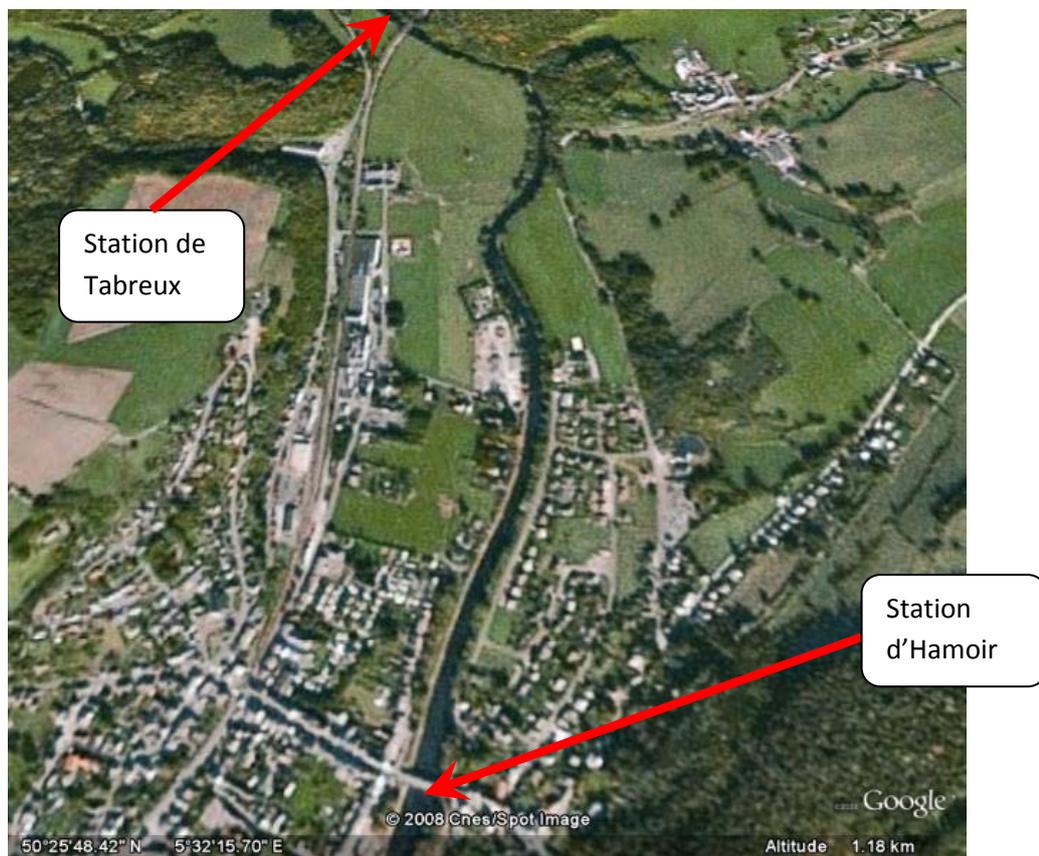


Figure 22. Visualisation satellite de la zone de modélisation d'Hamoir (source Google Earth)

Elle a été choisie pour plusieurs raisons. Tout d'abord, en cet endroit, l'Ourthe s'écoule pratiquement exclusivement en lit mineur (pour des débits allant jusqu'à  $160\text{m}^3/\text{s}$ ). Cet écoulement permet donc de s'affranchir d'une part importante des effets de la turbulence qui sera étudiée par la suite et qui se développe principalement à l'interface entre le lit mineur et le lit majeur. On pourra ainsi se concentrer, dans cette partie de l'étude, sur la capacité des différentes lois à modéliser correctement les phénomènes de frottement seuls.

De plus, le site d'Hamoir trouve un avantage supplémentaire dans l'emplacement de deux stations de mesures installées à quelques kilomètres l'une de l'autre. On trouve, en effet, en amont du pont d'Hamoir, un limnimètre installé là depuis 1967. On possède donc en cet endroit des données de hauteurs d'eau que l'on pourra comparer aux résultats obtenus par

modélisation numérique. De la même manière, à Tabreux, on trouve une station de mesure permettant une mesure de la hauteur d'eau et du débit de l'Ourthe. Cette seconde station est, elle, installée là depuis 1970. La hauteur d'eau qu'elle fournit pourra ainsi être utilisée comme condition limite de hauteur d'eau à l'aval du domaine de modélisation.

L'étude menée sur ce site, pour chaque loi de frottement, consistera alors à faire passer différents débits dans l'Ourthe afin de faire varier la hauteur d'eau et ainsi la rugosité relative. Afin de permettre la modélisation, on fixera la hauteur d'eau à l'aval de la zone en fonction des mesures réalisées à la station de Tabreux pour les différents débits introduits. L'écoulement étant exclusivement infracritique, cette condition sur la hauteur d'eau à l'aval suffit alors pour permettre la modélisation sur l'ensemble de la zone étudiée. On comparera finalement, pour les différents débits introduits, les résultats obtenus en termes de hauteurs d'eau à ceux mesurés par la station d'Hamoir.

## VIII.2 Evaluation de la rugosité de fond

Avant toute chose, il est important de noter les hypothèses à la base des modélisations qui vont suivre. Outre les hypothèses de base des modélisations par le logiciel Wolf 2D, l'hypothèse principale de toutes les modélisations effectuées, consiste en l'établissement d'une valeur correcte de la rugosité du fond. Celle-ci est représentée par le paramètre de Manning et par celui de Chézy pour leurs formulations respectives, et par la hauteur de rugosité moyenne pour l'ensemble des formulations modernes.

Dans un premier temps, on a calé la valeur du coefficient de Manning pour obtenir une modélisation correcte pour un débit de 160m<sup>3</sup>/s (débit étudié le plus élevé). Cette méthode correspond à la technique traditionnellement utilisée pour fixer la valeur du frottement. On a ainsi obtenu une valeur du coefficient de Manning de 0,025 pour le lit mineur et de 0,033 pour le lit majeur. Une fois de plus, le fait de fixer des valeurs différentes du coefficient de Manning pour les lits mineur et majeur correspond à la méthode habituelle de travail pour l'étude des écoulements à surface libre.

La rugosité de Manning étant fixée, il reste à fixer la valeur de la constante de Chézy pour les modélisations ainsi que la hauteur de rugosité pour les modélisations des lois modernes. Pour cette dernière, on utilisera le parallélisme mis en évidence plus haut entre la loi de Manning et celle de Nikuradse.

En effet, on a établi théoriquement que lorsque les lois de Manning et Nikuradse sont équivalentes, on peut lier la constante de Manning à la hauteur de rugosité par la formulation suivante :

$$\frac{1}{n} = \frac{26,613}{k^{1/6}}$$

Par la transformation des coefficients de Manning calés précédemment, en utilisant la formulation ci-dessus, on trouve une hauteur moyenne de rugosité de 0,09m pour le lit mineur et de 0,46m pour le lit majeur. Il est clair qu'une hauteur de rugosité moyenne de plus de 40cm pour le lit majeur paraît étonnante. Cependant, les écoulements étudiés restant

quasiment exclusivement en lit mineur, on conservera cette valeur qui n'aura pas une grande influence sur les résultats.

Enfin, il nous reste à fixer la valeur du coefficient de Chézy. Afin de la fixer, on se basera sur la formulation de Bazin :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}}$$

Le but de la modélisation de la formulation de Chézy étant de mettre en évidence son caractère de limite pour les écoulements lisses, on utilisera le coefficient de Bazin pour les parois lisses. Celui-ci vaut donc 0,06. Le rayon hydraulique sera quant à lui approché par la hauteur d'eau moyenne obtenue par la formulation de Manning.

On surestime donc légèrement le rayon hydraulique modélisé par Chézy. L'effet sur la modélisation sera une légère sous-estimation des hauteurs d'eau que l'on gardera à l'esprit. Après coup, on vérifiera que la surestimation du coefficient de Chézy, par l'utilisation de la hauteur d'eau de Manning au lieu de celle obtenue par Chézy, n'est pas trop importante. Ainsi, dans le cadre de nos modélisations, l'erreur commise sur le coefficient de Chézy reste inférieure à 2%. On considérera cette erreur suffisamment faible pour être acceptée. On appliquera donc finalement dans nos modélisations les valeurs du coefficient de Chézy reprises dans le tableau suivant :

Débit	Lit mineur	Lit majeur
160 m <sup>3</sup> /s	83,6	30
100 m <sup>3</sup> /s	83,1	30
60 m <sup>3</sup> /s	82,4	30
40 m <sup>3</sup> /s	81,7	30

Le coefficient en lit majeur a été conservé constant et calculé pour un débit de 160m<sup>3</sup>/s pour lequel on observe, logiquement, la zone inondée la plus large.

L'hypothèse principale de frottement ayant été détaillée ci-dessus, on ne rappellera pas ici les autres hypothèses à la base du calcul par le logiciel Wolf 2D qui ont été détaillées en annexe (cf. annexe 5). On notera simplement que la seule perte prise en compte dans les modélisations détaillées dans ce chapitre est la perte due au frottement de fond. On gardera donc à l'esprit que les autres pertes (turbulence, frottement de berge, forces de vent,...) seront englouties dans l'expression du terme de dissipation par frottement.

### VIII.3 Analyse globale des résultats obtenus

L'étude qui suit a été menée pour des débits variant de  $160\text{m}^3/\text{s}$  à  $1\text{m}^3/\text{s}$ . Il est d'ores et déjà important de noter que les données disponibles aux stations de contrôle s'étendent seulement à des débits allant de  $160\text{m}^3/\text{s}$  à un peu plus de  $5\text{m}^3/\text{s}$ . Dès lors, les hauteurs d'eau réelles pour des débits de  $5\text{m}^3/\text{s}$  et de  $1\text{m}^3/\text{s}$  seront calculées par extrapolation linéaire des données disponibles pour les débits plus élevés. Il va donc de soit que la comparaison à ces valeurs sera prise à simple titre indicatif.

Commençons notre comparaison des résultats obtenus, par l'utilisation des différentes lois de frottement, par une analyse globale de ceux-ci. Afin d'établir une comparaison des différentes lois, on relèvera les résultats obtenus en trois mailles de contrôle. Ces mailles sont situées, sur la carte de la zone d'Hamoir, aux points repris sur la carte suivante :

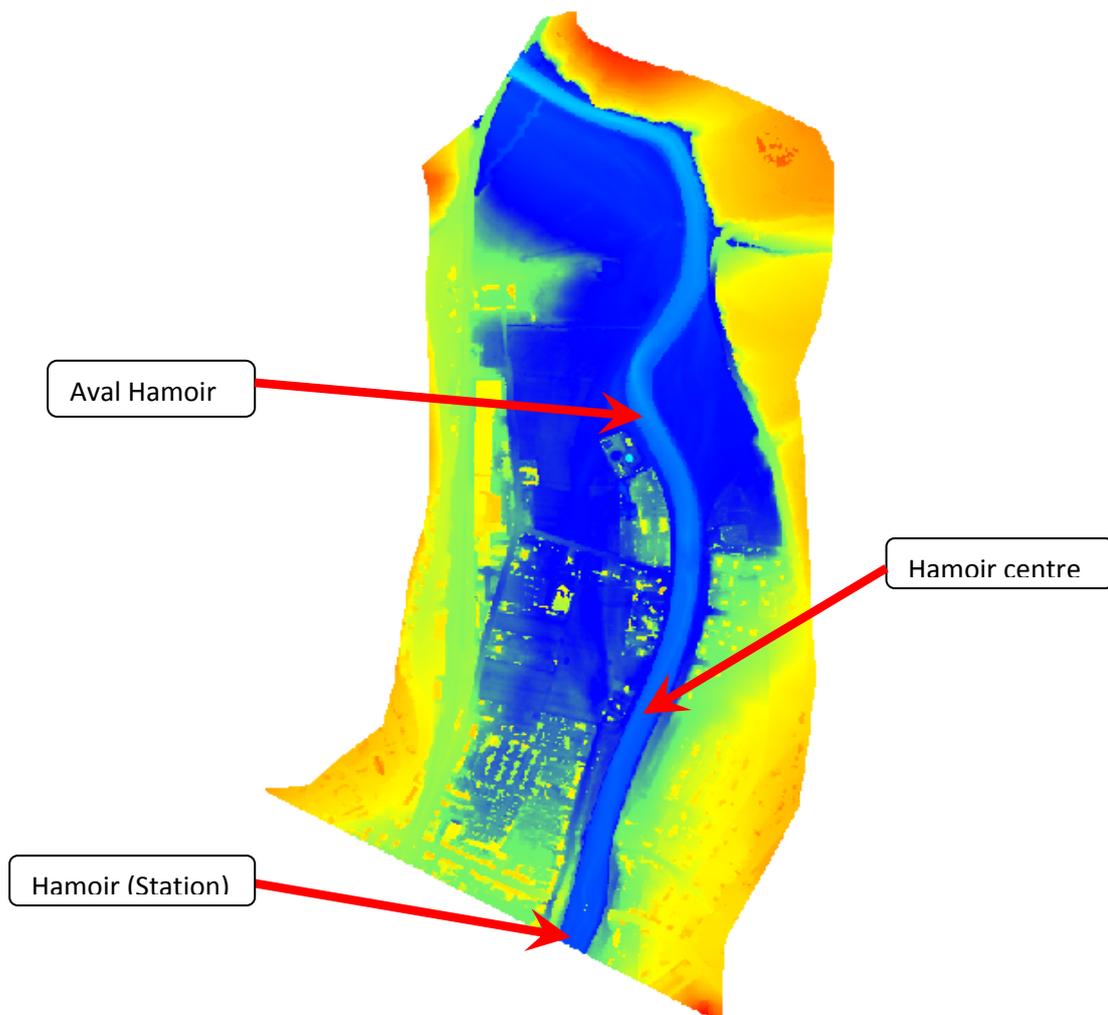


Figure 23. Représentation de l'emplacement des mailles de contrôle

En ces trois points, on a relevé les vitesses d'écoulement ainsi que les altitudes de surface libre, desquelles on a pu retirer les hauteurs d'eau par soustraction des données topographiques. On peut donc tout d'abord tracer le diagramme des hauteurs d'eau obtenues

par l'utilisation des différentes lois en fonction du débit introduit dans la rivière et ce pour chacune des trois mailles de contrôle. On obtient ainsi les trois graphiques suivant :

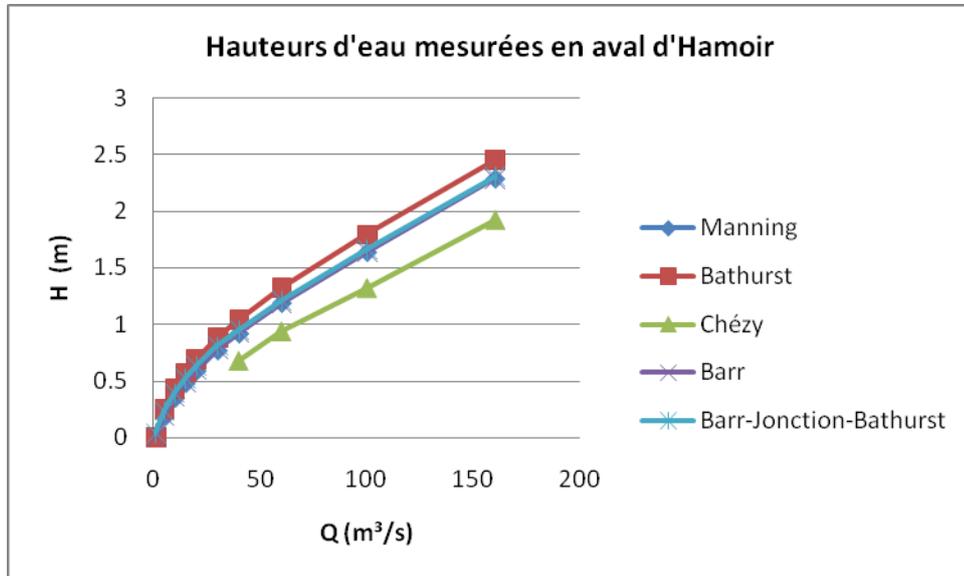


Figure 24. Hauteurs d'eau mesurées en aval d'Hamoir

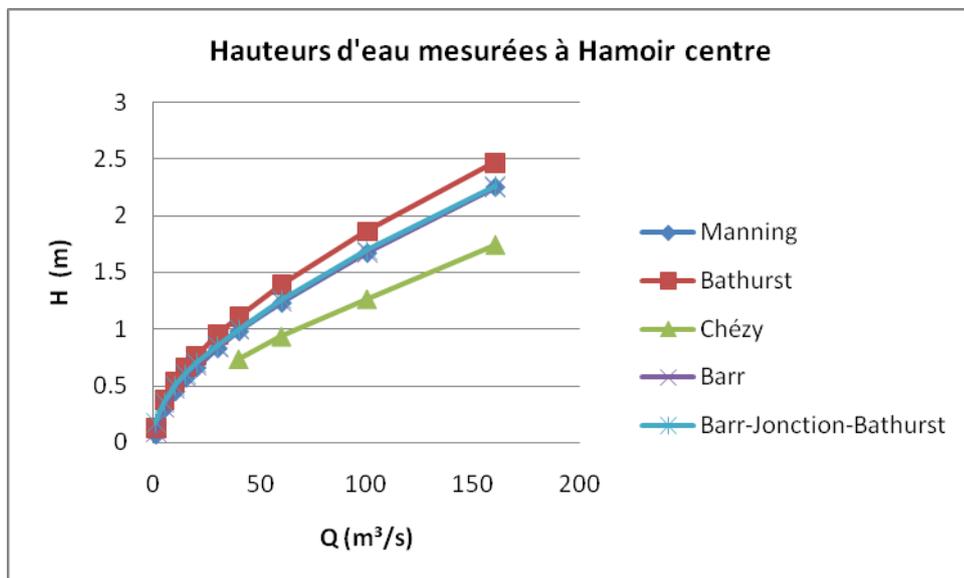


Figure 25. Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir centre

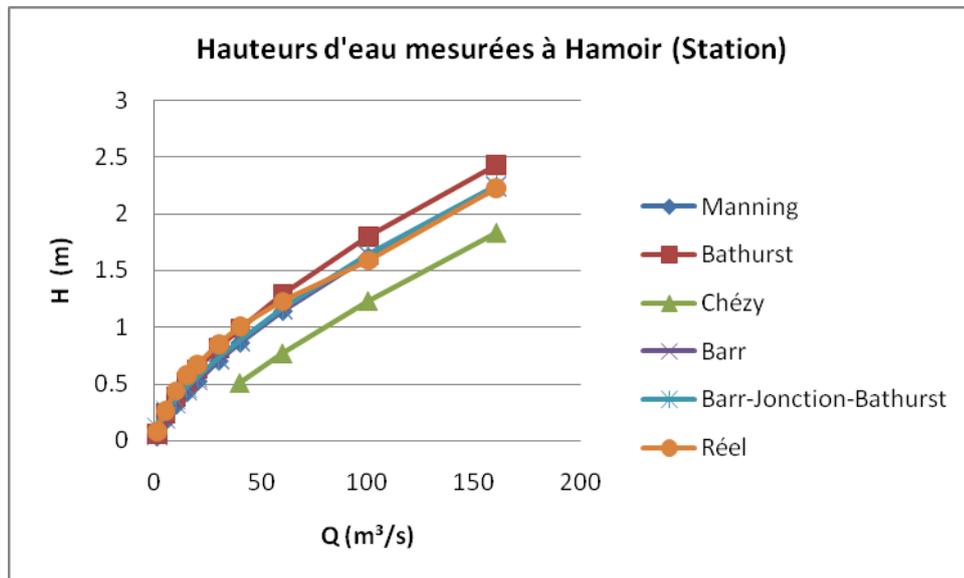


Figure 26. Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir (Station)

Avant de commencer l'analyse à proprement dit, on remarquera l'allure similaire des différents graphiques quelle que soit la maille de contrôle étudiée. Pour la maille de contrôle située à la station d'Hamoir, on a superposé aux résultats obtenus les valeurs réellement mesurées par la station. La formulation de Chézy n'a elle été étudiée que pour des débits supérieurs à  $40\text{m}^3/\text{s}$ . En effet, cette formule est étudiée pour son caractère de limite pour des rugosités relatives quasi nulles dont on s'éloigne pour de faibles débits.

Ces trois graphiques mettent en évidence le caractère plus ou moins « frottant » des différentes lois. Ainsi, la loi de Chézy apparaît clairement comme une loi « lisse », c'est-à-dire comme une loi fournissant peu de résistance à l'écoulement et ainsi une hauteur d'eau plus faible. Ce caractère lisse est bien celui qui avait été mis en évidence théoriquement. A l'opposé, la loi de Bathurst apparaît comme une loi particulièrement « frottante » et fournit des hauteurs d'eau plus élevées. A nouveau, ce caractère correspond bien à la base théorique de la loi de Bathurst efficace pour décrire les écoulements sur des rugosités importantes.

On notera également que les lois de Manning et de Barr ainsi que la nouvelle formulation établie, liant les lois de Barr et de Bathurst, semblent se confondre. On n'oubliera cependant pas que pour les hauteurs d'eau faibles apparaissant pour les plus petits débits, une erreur faible peut cacher une erreur relative non négligeable. On comparera donc par la suite les erreurs relatives commises en termes de hauteur d'eau.

Pour en terminer avec cette analyse globale, on notera la forme de la courbe décrivant les hauteurs d'eau réellement mesurées. Pour les plus grands débits, cette courbe semble se relier aux courbes de Barr, de Manning et à la courbe traduisant les résultats obtenus par la nouvelle formulation émise. Par contre, pour les débits plus faibles, c'est bien à la courbe de Bathurst, décrivant les effets de la macro-rugosité, que cette courbe vient se raccrocher.

On peut donc déjà s'attendre à une mauvaise représentation des phénomènes réels par les lois de Manning et de Barr pour les faibles débits et par la loi de Bathurst pour les débits plus

importants. On remarquera également que le rôle de limite joué par la formulation de Chézy est une fois de plus mis en évidence. Enfin, la nouvelle formulation, établie plus haut, semble la plus à même à décrire l'écoulement pour l'ensemble de la gamme de débits étudiés.

Etant donné le caractère semblable, mis en évidence plus haut, des résultats obtenus aux différentes mailles de contrôle, on ne présentera plus, par la suite, que les résultats obtenus au niveau de la station d'Hamoir. En effet, cette maille de contrôle offre l'avantage de permettre la comparaison des résultats obtenus par modélisation aux hauteurs d'eau mesurées réellement dans l'Ourthe.

#### VIII.4 Analyse de l'erreur relative commise par l'utilisation des différentes lois

Comme on l'a remarqué dans l'analyse globale des résultats, même si l'erreur commise par l'utilisation de certaines lois peut paraître faible, il n'en va pas forcément de même de l'erreur relative. En effet, sur les hauteurs d'eau plus faibles, une plus petite erreur peut fournir une erreur relative importante. Dans cette partie, on comparera donc les erreurs relatives commises sur la hauteur d'eau par l'utilisation des différentes lois par rapport aux données disponibles à la station d'Hamoir.

Cette analyse de l'erreur relative en termes de hauteur d'eau est justifiée par la forme quasi rectangulaire du lit de l'Ourthe au niveau de la station d'Hamoir que l'on observe sur la coupe topographique suivante :

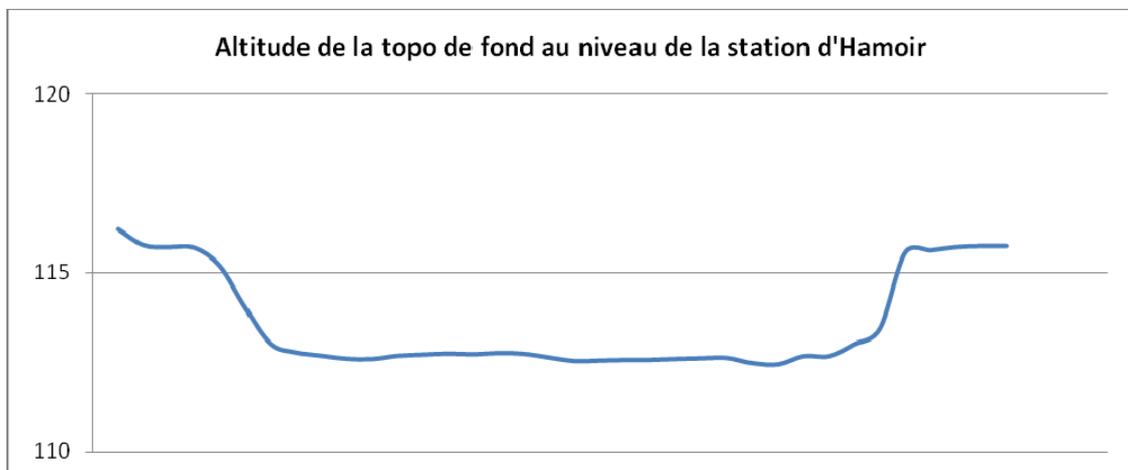


Figure 27. Représentation de la topographie de fond au niveau de la station d'Hamoir

En effet, si cela n'avait pas été le cas, la hauteur d'eau en une maille bien précise n'aurait pas reflété une caractéristique propre de l'écoulement mais plutôt une simple caractéristique topographique. On aurait alors eu intérêt à réaliser plutôt une analyse de l'erreur relative commise sur le rayon hydraulique de la section de passage de l'écoulement qui est lui une caractéristique de l'écoulement. Le lit de la rivière étant quasi-rectangulaire et le frottement des berges ayant été négligé, le rayon hydraulique peut, dans notre cas, être approché correctement par la hauteur d'eau en un point. Ce fait justifie donc l'étude qui va suivre.

Sur le graphique suivant, on reprend donc, en fonction du débit de la rivière, la valeur de l'erreur relative commise sur l'évaluation de la hauteur d'eau par la modélisation des différentes lois de frottement :

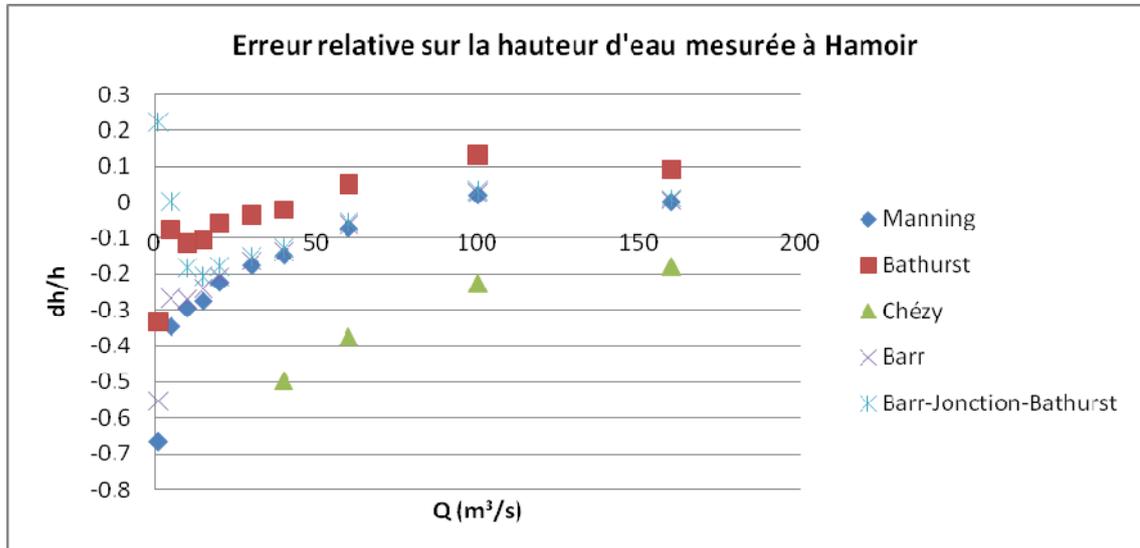


Figure 28. Erreur relative sur la hauteur d'eau mesurée à la station d'Hamoir

Avant de décortiquer ce graphique, on attirera une fois de plus l'attention sur le fait que la hauteur d'eau réelle, pour un débit d' $1m^3/s$ , a été approchée par extrapolation linéaire des données disponibles pour des débits plus élevés. De plus, cette hauteur d'eau étant relativement faible (9cm), une variation de l'ordre du centimètre entrainera des variations importantes des erreurs relatives reprises sur le graphique ci-dessus. Ainsi, on ne pourra pas baser notre analyse sur cette valeur et l'on n'étudiera l'évolution de l'erreur que pour un débit minimum de  $5m^3/s$ .

Passant à l'analyse des débits supérieurs, on peut remarquer une fois de plus le rôle de limite inférieure joué par la formulation de Chézy. Cette formulation tend ainsi à se rapprocher des hauteurs d'eau réelles pour les débits élevés. Pour un débit de  $160m^3/s$ , l'erreur reste cependant de l'ordre de 20% de la hauteur d'eau réelle. La formulation de Chézy ne pourra donc pas décrire correctement l'écoulement.

Pour les débits élevés, on remarque que les lois de Manning, de Barr ainsi que la nouvelle formulation émise se confondent quasiment avec les hauteurs d'eau réelles. On voit donc bien que la formulation de Manning, callée pour un débit précis, peut être correctement utilisée pour une plage de débit plus ou moins étendue. Ainsi, on remarque dans ce cas-ci que, pour des débits de l'ordre de  $50m^3/s$ , l'erreur reste encore inférieure à 10% de la hauteur d'eau réelle. Pour ces débits élevés, bien que la formulation de Bathurst fournisse des résultats approchant à moins de 10% la hauteur d'eau réelle, on préférera donc utiliser la loi de Manning, celle de Barr ou la nouvelle formulation établie au cours de ce travail qui approche plus exactement les valeurs réelles.

Pour les débits les plus faibles par contre, les lois de Manning et de Barr s'éloignent assez fort des hauteurs d'eau réelles. Comme on pouvait s'y attendre, la loi de Manning sous-estime, en effet, fortement les hauteurs d'eau pour de faibles débits. Ainsi, pour un débit de  $5\text{m}^3/\text{s}$ , la formulation de Manning sous-estime la hauteur d'eau de près de 35%.

Par contre, la formulation de Barr, que l'on avait considérée théoriquement comme décrivant parfaitement les écoulements, s'éloigne elle aussi des valeurs réelles de hauteur d'eau pour les faibles débits. Même si les résultats fournis par la formulation de Barr reste plus proche de la réalité que ceux fournis par celle de Manning, l'erreur commise pour les très faibles débits est loin d'être négligeable. Ainsi, pour un débit de  $5\text{m}^3/\text{s}$  l'erreur sur la hauteur d'eau reste encore de l'ordre de 25%. Cette erreur, d'autant plus importante que le débit est faible, pourrait être due à un nombre grandissant de mailles à hauteur d'eau faible. En effet, comme annoncé théoriquement, pour des hauteurs d'eau faibles et donc des rugosités relatives importantes, on entre dans le domaine de la macro-rugosité où la formulation de Bathurst traduit de manière plus exacte la réalité. Dans ce domaine, la formulation de Barr, similaire à celle de Colebrook, est alors plus lisse que celle de Bathurst. Ceci pourrait donc être l'explication d'une erreur grandissante avec le nombre de mailles à rugosité relative élevée.

On remarque, de plus, que les résultats obtenus en utilisant la formulation de Bathurst collent assez bien aux valeurs mesurées à Hamoir pour les faibles débits. Ceci correspond bien à la théorie, mettant en avant cette formulation pour les rugosités relatives élevées, et renforce bien la thèse, développée ci-dessus, sur l'erreur commise par l'utilisation de la formulation de Barr.

Etant donné les résultats obtenus pour les formulations de Bathurst et de Barr, il peut être attendu que la nouvelle formulation, établie au cours de cette étude, tende vers les résultats réels pour les hauts débits, comme on vient de le voir, mais aussi pour les bas débits. En effet, si la nouvelle formulation tend vers celle de Barr, pour des hauts débits et des rugosités relatives faibles, pour des débits plus faibles et des rugosités relatives plus importantes, elle s'approchera plutôt de la formulation de Bathurst. En effet, la courbe représentant l'erreur commise sur la hauteur d'eau, par l'utilisation de cette nouvelle formulation, semble suivre la courbe de Barr pour les plus grands débits puis s'en détacher pour retendre vers les résultats de Bathurst, proches des résultats réels, pour les débits plus faibles.

### VIII.5 Domaines de validité des différentes lois

Comme on vient de le voir, à part la formulation de Chézy qui joue un rôle de limite pour les écoulements lisses, les autres lois approchent toutes, plus ou moins correctement, les résultats réels pour une plage de débits donnée.

En rapportant chaque débit à la hauteur d'eau réelle mesurée à Hamoir, en se rappelant que l'écoulement a lieu quasi-exclusivement en lit mineur, et en se rappelant que la rugosité de fond de ce lit mineur a été déterminée égale à 9cm, on peut associer à chaque débit une valeur de rugosité relative de l'écoulement. Ainsi, on peut retracer le graphique d'erreur relative sur la hauteur d'eau à Hamoir en fonction cette fois de cette rugosité relative. On définira alors enfin les domaines de validité des différentes lois en termes de rugosité relative,

comme cela avait été réalisé lors de l'étude théorique. Le graphique suivant représente donc l'erreur relative sur la hauteur d'eau mesurée à la station d'Hamoir en fonction de la rugosité relative de l'écoulement au niveau de cette même station :

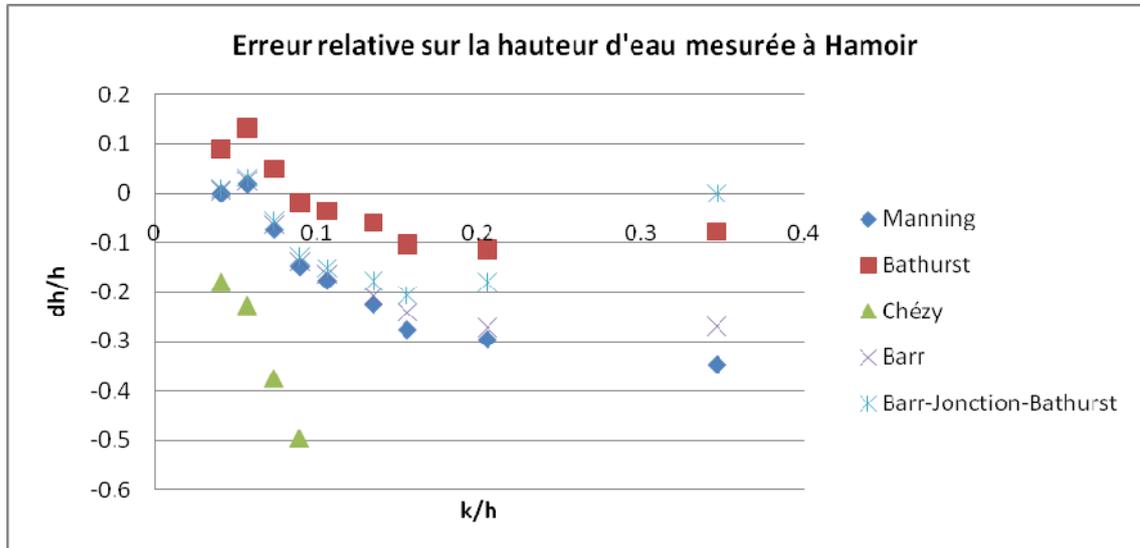


Figure 29. Erreur relative sur la hauteur d'eau mesurée à la station d'Hamoir (fonction de la rugosité relative)

Remarquons, pour commencer, que la formulation de Chézy ne trouve pas de domaine de validité pour cette modélisation (erreur minimale de 20% sur la hauteur d'eau). Cependant, on voit qu'elle tend à se rapprocher des valeurs réelles pour des rugosités relatives quasi-nulles. Le rôle de limite de cette formulation, mis en évidence théoriquement, est donc une fois de plus bien présent.

Passons ensuite aux formulations de Manning et de Barr dont les domaines de validité semblent correspondre. En effet, ces deux lois seront valables pour des rugosités relatives faibles allant jusqu'à un ratio proche de 0,1 pour préserver une erreur inférieure à 10% sur la hauteur d'eau.

Pour rappel, on avait établi théoriquement une approche correcte de la formulation de Colebrook, semblable à celle de Barr, par celle de Manning pour des rugosités relatives allant de 0,007 à 0,155. On remarque, en effet, sur le graphique ci-dessus, que les deux formulations de Barr et de Manning se correspondent, sur cet intervalle, pour s'éloigner pour des rugosités relatives plus élevées.

Cependant, on avait considéré dans la théorie que le domaine de validité des lois de Colebrook et de Barr s'étendait jusqu'à la macro-rugosité. Le graphique précédent met en doute ce domaine de validité. Comme on pouvait s'y attendre, pour une rugosité relative de 0,25, les lois de Barr et de Bathurst ne peuvent décrire, toutes deux, exactement la réalité de part leurs formes différentes. On limitera donc le domaine de validité de la loi de Barr (et de celle de Colebrook) à une rugosité relative de 0,1. De la même manière, le domaine de validité de la loi de Manning sera également limité à une rugosité relative de 0,1.

Afin de définir le domaine de validité réel de la formulation de Bathurst, on se rappellera, qu'à la base, cette formulation avait été établie pour des rugosités relatives supérieures à 0,25. Cependant, le graphique précédent montre que ce domaine peut être étendu à des rugosités relatives plus faibles. En effet, la formulation de Bathurst approche la solution réelle à moins de 10% jusqu'à une rugosité relative de 0,08.

On remarquera également l'allure de la courbe d'erreur de la formulation de Bathurst. En effet, pour des rugosités relatives supérieures à 0,15, l'erreur relative sur la hauteur d'eau n'évolue plus et reste proche de 10%. On peut donc se poser la question de savoir si la rugosité de fond qui a été calée n'est pas trop faible. En effet, une rugosité de fond plus élevée ferait remonter la courbe et ainsi la valeur de son asymptote horizontale pour les hautes rugosités relatives. En faisant remonter la courbe jusqu'à l'asymptote 0%, on peut donc conclure sur un domaine de validité de la formulation de Bathurst s'étendant sur les rugosités relatives supérieures à 0,1.

Reste donc le domaine de validité de la nouvelle formulation émise. D'après le graphique précédent, celui-ci est double. En effet, cette formulation approche la réalité, à la fois, pour les faibles rugosités relatives allant jusqu'à 0,1, mais aussi pour les hautes rugosités relatives supérieures à 0,25. Ce domaine de validité provient des rugosités relatives limites choisies pour la formulation de jonction. En effet, ces limites avaient été fixées en considérant la transition entre les formules de Barr et de Bathurst pour une rugosité relative de 0,25. Au vu de l'analyse qui précède, cette transition devrait plutôt être ramenée à une rugosité relative de 0,1. Dés lors on obtiendrait la nouvelle formulation suivante, pour laquelle le domaine de validité devrait couvrir l'ensemble des rugosités relatives :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{4,518 \cdot \log \frac{\text{Re}}{7}}{\text{Re} \left( 1 + \frac{\text{Re}^{0,52} \left( \frac{k}{h} \right)^{0,7}}{76,531} \right)} + \frac{k}{14,8h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \leq 0,05$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1469,76 \left( \frac{k}{h} \right)^3 - 382,83 \left( \frac{k}{h} \right)^2 + 9,89 \left( \frac{k}{h} \right) + 5,22 \quad \text{pour } 0,05 \leq \frac{k}{h} \leq 0,15$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,987 \log \left( \frac{k}{5,15h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \geq 0,15$$

### VIII.6 Evolution du coefficient de Manning avec le débit

Comme on l'avait établi théoriquement, une approche de la solution réelle peut être menée, par la formulation de Manning, en faisant varier le coefficient de Strickler en fonction de la hauteur d'eau ou du débit. Il est donc intéressant de vérifier que la variation du coefficient de

Strickler, établie lors de l'approche théorique, correspond bien à la variation apparente réelle de ce coefficient.

On a donc réalisé un calage du coefficient de Manning, inverse de celui de Strickler, pour chacun des débits étudiés. Ce calage a été réalisé de manière à faire correspondre la hauteur d'eau modélisée à la hauteur d'eau réellement mesurée au niveau de la station d'Hamoir. On obtient ainsi une évolution du coefficient de Manning apparent en fonction du débit.

En inversant le coefficient de Manning, on obtiendra cette fois l'évolution du coefficient de Strickler, étudié précédemment dans l'approche théorique. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus par modélisation numérique aux résultats théoriques établis plus haut, on associera également, à chaque débit, la hauteur d'eau mesurée à Hamoir y correspondant. On obtient ainsi finalement le graphique suivant reprenant la variation du coefficient de Strickler en fonction de la hauteur d'eau à Hamoir :

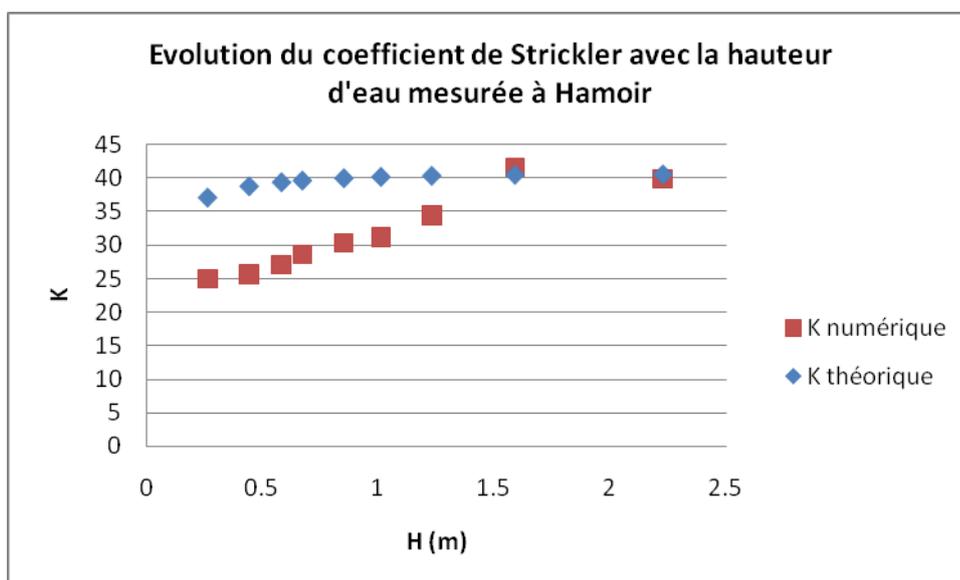


Figure 30. Variation du coefficient de Strickler en fonction de la hauteur d'eau mesurée à Hamoir

Sur ce graphique, la courbe théorique est tirée de la courbe théorique, établie dans le chapitre V.8, et développée pour une rugosité de fond de 9cm.

Sur ce graphique, on remarquera, en premier lieu, une bonne correspondance de la théorie à la réalité pour les hauteurs d'eau supérieures correspondant aux grands débits. Par contre, pour les plus faibles hauteurs, un écart apparaît et le coefficient de Strickler diminue plus vite que ce qui avait été prévu par la théorie.

Rappelons-nous cependant que, lors de l'établissement de la loi théorique de variation du coefficient de Strickler, on avait fait l'hypothèse que la loi de Colebrook décrivait parfaitement la réalité. Ainsi, cette loi théorique correspond plutôt à la variation à donner au coefficient de Strickler pour approcher correctement la loi de Colebrook. Or, comme on vient de la voir, la formulation de Barr, semblable à celle de Colebrook, s'éloigne de la réalité pour des faibles hauteurs d'eau. On peut donc associer l'écart entre les courbes théorique et numérique de variation du coefficient de Strickler à l'écart entre la loi de Barr et la réalité.

Ainsi, sur le domaine de validité de la formulation de Barr, la loi théorique de variation du coefficient de Strickler peut être suivie. Cependant, pour des hauteurs d'eau plus faibles, ou des rugosités relatives plus élevées, le coefficient de Strickler calculé par la loi théorique devra être revu à la baisse.

En établissant, théoriquement, la variation du coefficient de Strickler pour correspondre cette fois à la dernière formulation continue du frottement établie ici plus haut, on obtient cette fois les courbes suivantes :

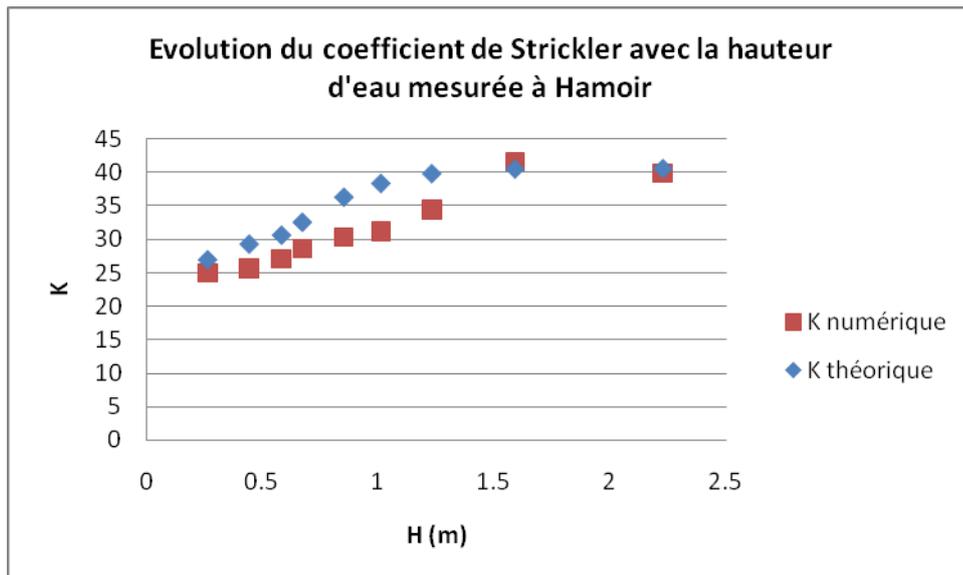


Figure 31. Variation du coefficient de Strickler avec la hauteur d'eau mesurée à Hamoir (comparaison avec la nouvelle formulation théorique)

On voit donc cette fois que la loi théorique de variation de la hauteur d'eau approche correctement les résultats numériques reflétant la réalité de l'écoulement. Ces résultats valident donc à la fois la nouvelle formulation continue de frottement, établie dans ce chapitre, et la nouvelle formulation de variation du coefficient de Strickler. Cette nouvelle formulation s'écrit comme suit :

$$K = \sqrt{\frac{8g}{f}} H^{-1/6}$$

, avec :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{4,518 \cdot \log \frac{Re}{7}}{\operatorname{Re} \left( 1 + \frac{\operatorname{Re}^{0,52} \left( \frac{k}{h} \right)^{0,7}}{76,531} \right)} + \frac{k}{14,8h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \leq 0,05$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1469,76 \left( \frac{k}{h} \right)^3 - 382,83 \left( \frac{k}{h} \right)^2 + 9,89 \left( \frac{k}{h} \right) + 5,22 \quad \text{pour } 0,05 \leq \frac{k}{h} \leq 0,15$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,987 \log \left( \frac{k}{5,15h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \geq 0,15$$

Grâce à cette nouvelle formulation, on peut donc tracer un diagramme des valeurs du coefficient de Strickler à utiliser en fonction de la hauteur de rugosité de fond et de la hauteur d'eau à modéliser. Ce diagramme permet ainsi une application directe de la formulation de Manning pour n'importe quelle modélisation d'écoulement. Il se présente comme suit :

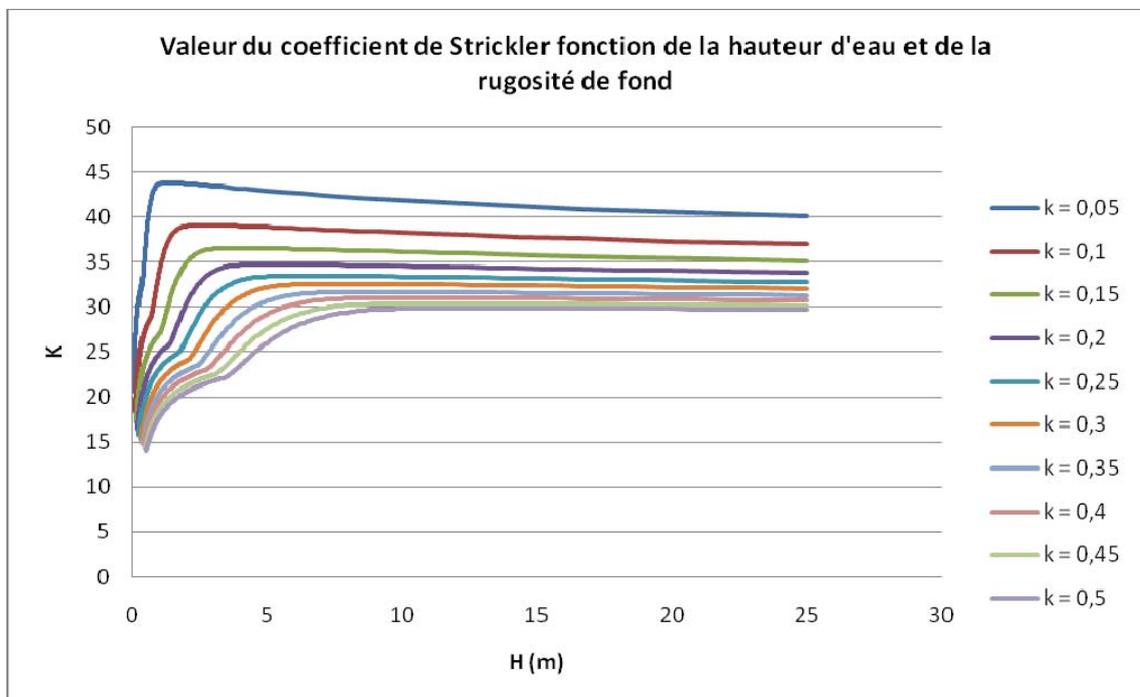


Figure 32. Diagramme des valeurs du coefficient de Strickler à utiliser pour modéliser les différentes hauteurs d'eau et de rugosité de fond

Afin de valider ce diagramme, il peut être intéressant de le confronter à des résultats déjà obtenus au cours d'expériences passées. On a ainsi comparé ce diagramme aux résultats

établis par Martiny dans sa « *contribution à la détermination du coefficient de rugosité des rivières* ». Dans cet ouvrage, Martiny a déterminé les valeurs du coefficient de Strickler sur base de relevés de hauteurs d'eau et de débits sur plusieurs rivières ardennaises. Il a tiré les valeurs des coefficients repris dans cet ouvrage en faisant l'hypothèse d'écoulements uniformes.

De ces résultats assez denses et flous, on peut retirer trois rivières pour lesquelles les résultats semblent correspondre à des phénomènes attendus. Pour ces trois rivières, on a tracé, sur les trois graphiques qui suivent, les valeurs du coefficient de Strickler calculées par Martiny en fonction des hauteurs d'eau mesurées. On a également tracé, sur ces graphiques, les courbes du diagramme ci-dessus se rapprochant le plus des résultats obtenus. On obtient ainsi les trois graphiques suivant :

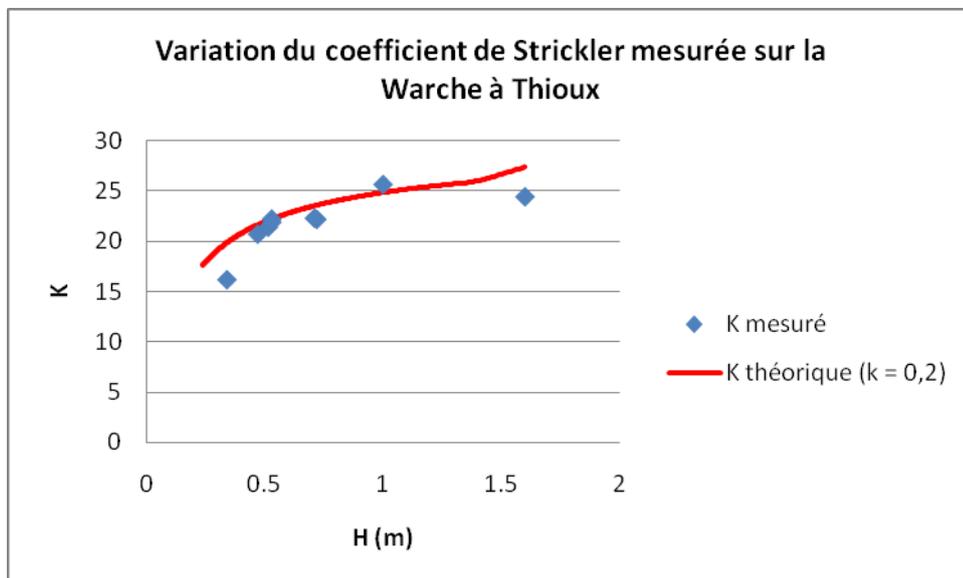


Figure 33. Variation du coefficient de Strickler mesurée sur la Warche à Thioux

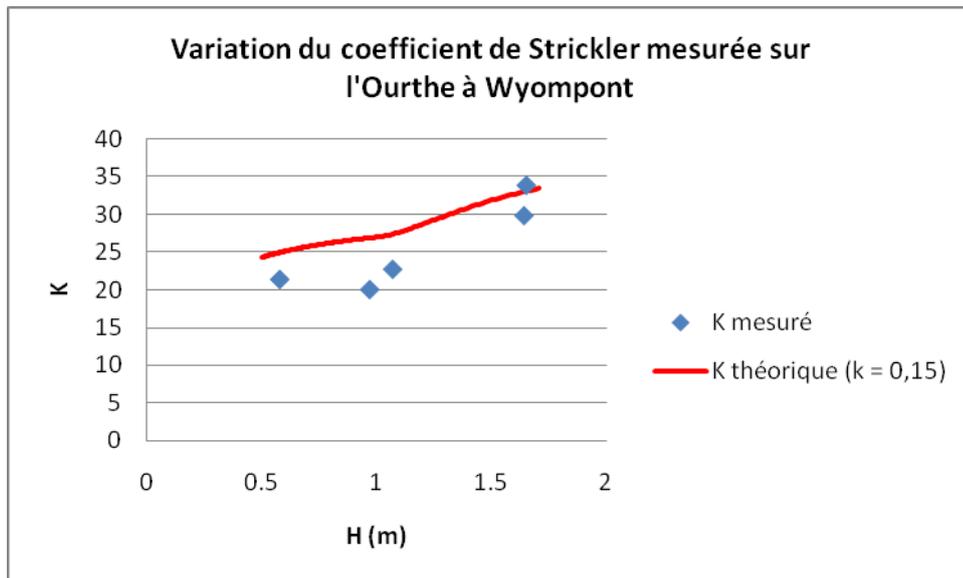


Figure 34. Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Wyompont

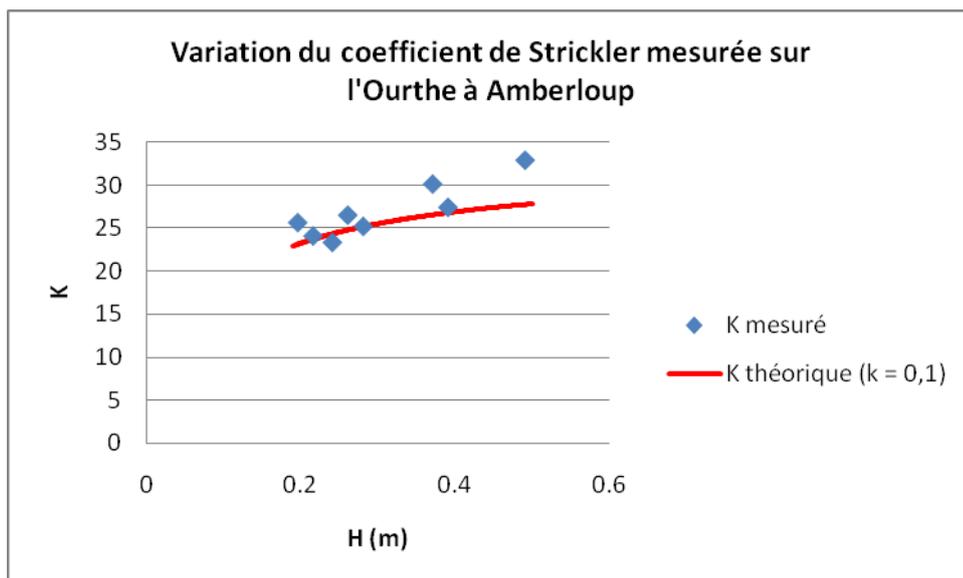


Figure 35. Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Amberloup

On remarque, sur ces graphiques, que les résultats mesurés sont relativement proches des courbes théoriques du diagramme de variation du coefficient de Strickler. Ces relevés valident donc, eux aussi, ce diagramme.

Une dernière validation de ce diagramme a été effectuée par l'étude du cas de l'Ourthe à Moiricy. Cette étude se trouve en annexe (cf. annexe 6). Elle valide ainsi ce diagramme pour la courbe d'une rugosité de 0,5m.

## Chapitre IX : Etude numérique de l'influence de la prise en compte de la turbulence

### Sommaire

---

IX.1 Introduction .....	98
IX.2 Analyse globale des résultats obtenus.....	99
IX.3 Explication du phénomène de mise en charge de la plaine inondable .....	102

---

## IX.1 Introduction

Lors du chapitre précédent, on s'est intéressé à étudier l'influence, sur la modélisation des écoulements, de la prise en compte de l'une ou l'autre loi de frottement. Pour ce faire, on avait choisi une zone d'écoulement presque exclusivement en lit mineur afin de s'affranchir des effets de la turbulence et ainsi isoler le seul frottement de fond. Cependant, dans bon nombre de situations en écoulement de crues et d'inondations, les effets de la turbulence ne peuvent plus être négligés.

En effet, comme on l'a dit précédemment, lorsque l'écoulement sort du lit mineur pour s'étendre en lit majeur, il apparaît, à l'interface entre ces deux lits, une zone tourbillonnaire importante. Cette zone est, en fait, créée par la friction interne au fluide qui existe entre l'écoulement rapide en lit mineur, où les hauteurs d'eau sont importantes et ainsi le frottement faible (rugosité relative faible), et l'écoulement, parfois beaucoup plus lent, en lit majeur, où les hauteurs d'eau sont nettement plus faibles et le frottement important (rugosité relative élevée).

De plus, les variations de profil du lit, les variations de rugosité de fond, les obstacles tels que piles de pont ou encore rochers, sont autant de points particuliers sources de turbulence. Sur des zones pouvant parfois s'étendre à plusieurs dizaines de mètres autour de ces points sensibles (la turbulence est un phénomène de transport), la prise en compte de la turbulence ne pourra non plus être négligée.

Pour ces raisons, dans cette deuxième partie de l'étude numérique des termes de production et de dissipation, on va s'intéresser à l'influence sur les modélisations traditionnelles de la prise en compte de la turbulence par un modèle complet. Ce modèle est le modèle  $k-\varepsilon$  développé par Erpicum et inséré dans le logiciel Wolf2D. Ce modèle, ainsi que le logiciel Wolf2D, sont détaillés en annexe (cf. annexe 5). On se référera donc à cette annexe pour en connaître la teneur. Rappelons simplement qu'il s'agit d'un modèle de turbulence à deux équations additionnelles et à deux longueurs de mélange séparant ainsi la contribution verticale, principalement due à la friction de fond, et la contribution horizontale, due aux grands tourbillons.

Une fois de plus, la zone d'étude sera choisie adéquatement pour permettre la mise en évidence des phénomènes étudiés. Ainsi, une partie de la Lomme, légèrement en amont de Rochefort, a été choisie pour cette modélisation. A cet endroit, la Lomme trouve en effet, une vaste zone d'écoulement en lit majeur où les effets de la turbulence pourront être observés. De plus, en amont de cette plaine inondable, se trouve un vélodrome créant un obstacle à l'écoulement et ainsi une zone de turbulence supplémentaire pour les grands débits. Enfin, la zone a été arrêtée au niveau du pont de chemin de fer à l'aval de la zone. En cet endroit, l'ensemble de l'écoulement retrouve le lit mineur permettant ainsi de fixer correctement la condition limite à l'aval.

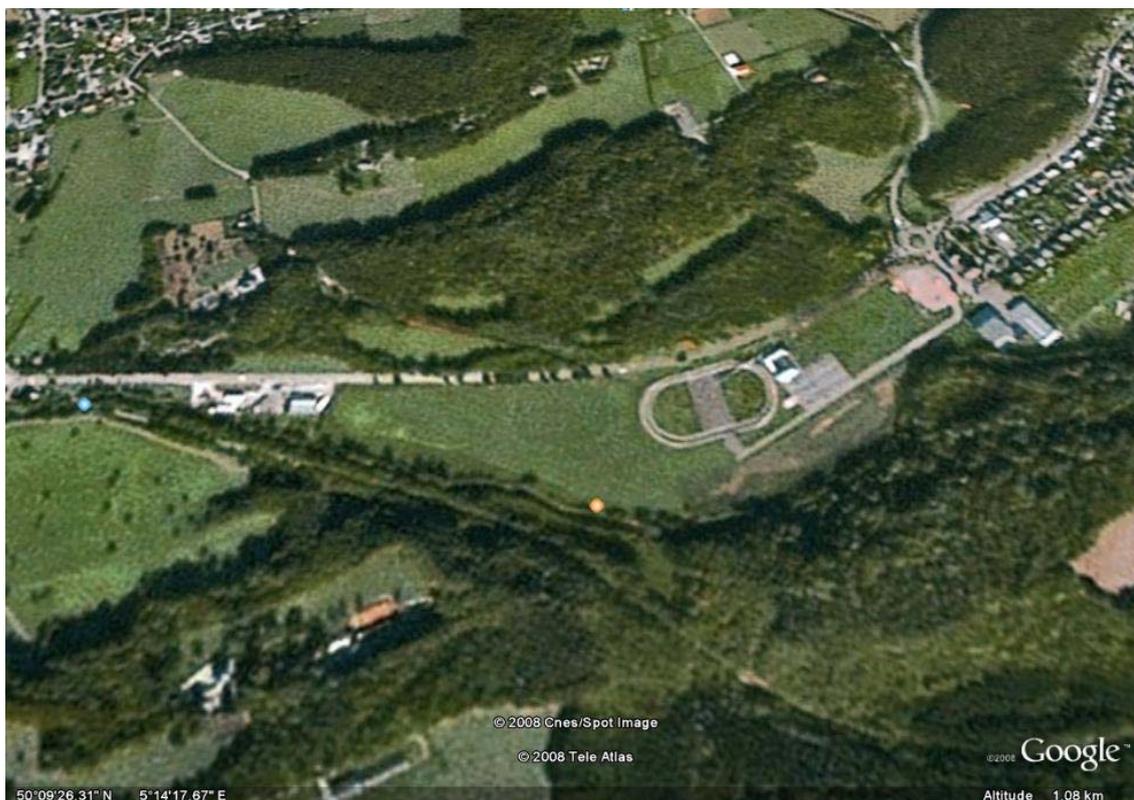


Figure 36. Visualisation satellite de la zone de modélisation de Rochefort (source Google Earth)

Sur cette zone, on modélisera donc les écoulements avec et sans turbulence sur base d'un modèle classique de Manning. On fera alors varier le débit de  $100\text{m}^3/\text{s}$  à  $40\text{m}^3/\text{s}$ . Pour un débit de  $40\text{m}^3/\text{s}$ , on se retrouvera alors avec un écoulement exclusivement en lit mineur, retombant ainsi sur une modélisation semblable à celles effectuées précédemment. Ne possédant pas de données de hauteur d'eau réelle, la condition de surface libre à la limite aval sera calculée pour un écoulement uniforme dans la section de contrôle.

Le coefficient de Manning sera calé, comme précédemment, pour le débit le plus élevé étudié ( $100\text{m}^3/\text{s}$ ) afin de correspondre au mieux aux résultats d'enquête sur les grands épisodes de crues en cet endroit. Ainsi, le coefficient de Manning vaudra 0,03 en lit mineur et 0,04 en lit majeur.

## IX.2 Analyse globale des résultats obtenus

Afin de permettre une analyse des résultats de modélisations, on a encore une fois défini des mailles de contrôle. Elles seront, cette fois, au nombre de 10, réparties selon 3 catégories : les mailles de lit mineur (mailles 1 à 4), celles de lit majeur (mailles 7 à 10) et celle de bord entre lit mineur et lit majeur (mailles 5 et 6).

La disposition de ces 10 mailles sur la carte de la zone étudiée est reprise ci-dessous :

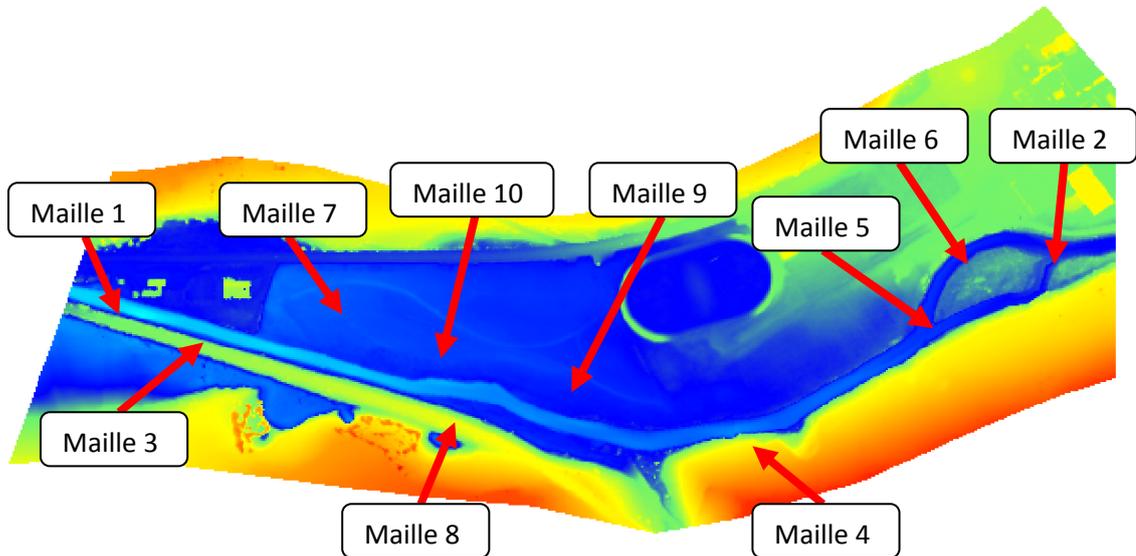


Figure 37. Disposition des mailles de contrôle

Afin de permettre une analyse globale des résultats obtenus, on trace dans un premier temps les courbes de variation de la hauteur d'eau en fonction du débit introduit dans la rivière. Les courbes obtenues pour les différentes mailles des trois catégories étant relativement semblables, on ne reprendra ici que la courbe la plus représentative de chaque catégorie. On obtient donc les trois courbes suivantes :

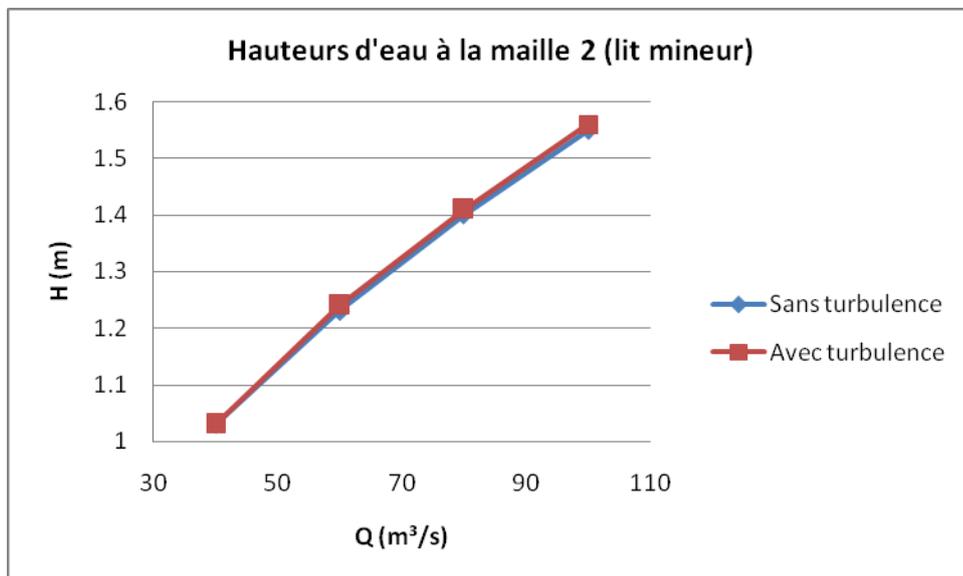


Figure 38. Variation de la hauteur d'eau avec le débit en lit mineur (maille 2)

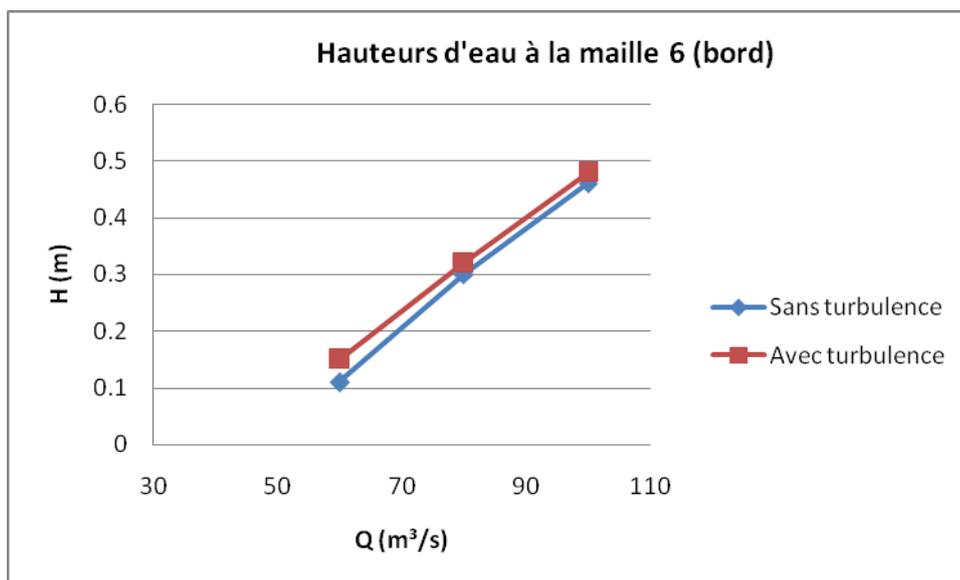


Figure 39. Variation de la hauteur d'eau avec le débit au bord (maille 6)

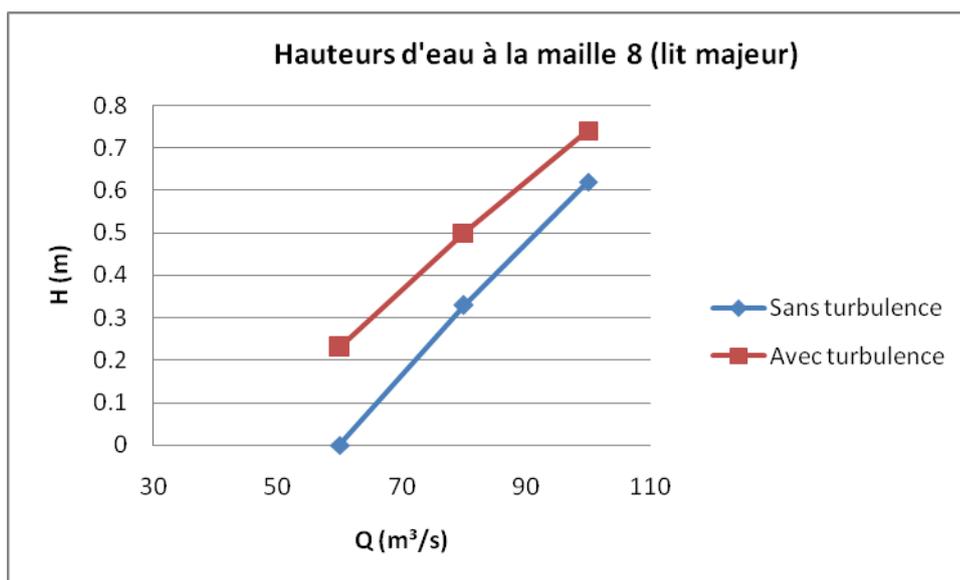


Figure 40. Variation de la hauteur d'eau avec le débit en lit majeur (maille 8)

Sur ces trois graphiques, on peut s'apercevoir que la différence de hauteur d'eau mesurée entre les modélisations avec et sans turbulence est d'autant plus grande que la hauteur d'eau est faible. Ainsi, en lit majeur où les hauteurs d'eau moyennes sont relativement faibles, la prise en compte de la turbulence entraîne une surhausse de la hauteur d'eau de près de 20cm. En lit mineur, par contre, la prise en compte de la turbulence ne modifie pratiquement pas la hauteur d'eau mesurée. Pour les mailles aux bords entre ces deux zones on trouve comme on pouvait s'y attendre une situation intermédiaire avec une plus faible surhausse des hauteurs d'eau.

On peut donc d'ores et déjà mettre en évidence le fait de l'importance de la prise en compte de la turbulence sur les plaines inondables, et ce d'autant plus que la hauteur d'eau y sera

faible. On remarquera également que les écoulements classiques (sans obstacles majeurs) en lit mineur ne souffrent pas de la non-prise en compte de la turbulence.

On notera enfin qu'il nous est impossible de représenter les effets de la turbulence par un calibrage du coefficient de Manning. En effet, en augmentant la valeur de ce coefficient, on ferait tendre les hauteurs d'eau vers celles mesurées avec turbulence en lit majeur. Cependant, on augmenterait en même temps les hauteurs d'eau en lit mineur, dépassant alors celles modélisées avec turbulence. Il sera, par conséquent, impossible de représenter correctement, par l'utilisation de la seule formulation de Manning, un écoulement turbulent à hauteur d'eau variable. La formulation de Manning devra ainsi être strictement réservée pour le cas d'écoulements à hauteurs d'eau plus ou moins homogènes. Pour ces écoulements, on pourra alors caler correctement une valeur du coefficient de Manning tenant compte à la fois du frottement de fond et de la turbulence.

### IX.3 Explication du phénomène de mise en charge de la plaine inondable

Penchons-nous sur la question de savoir comment la plaine inondable se met en charge lorsque l'on prend en compte la turbulence, alors que la charge du lit mineur n'évolue pratiquement pas. Cette question va porter son intérêt principal à déterminer la source de la variation de hauteur observée lorsque l'on prend en compte la turbulence.

Rappelons tout d'abord que la formulation de la turbulence, développée par Erpicum, prend en compte deux effets séparés : ceux des turbulences verticale et horizontale.

Celui de la turbulence verticale sera principalement lié à la vitesse d'écoulement. En fait, il est lié à la vitesse d'écoulement au fond que l'on considérera suffisamment proche de la vitesse moyenne. Ainsi, plus la vitesse de l'écoulement sera importante, plus la turbulence verticale développée sera importante. On observera donc bien une turbulence verticale élevée en lit mineur et faible en lit majeur, comme on peut le voir sur la figure suivante représentant la valeur de la viscosité turbulente 3D pour un débit de  $100\text{m}^3/\text{s}$  :

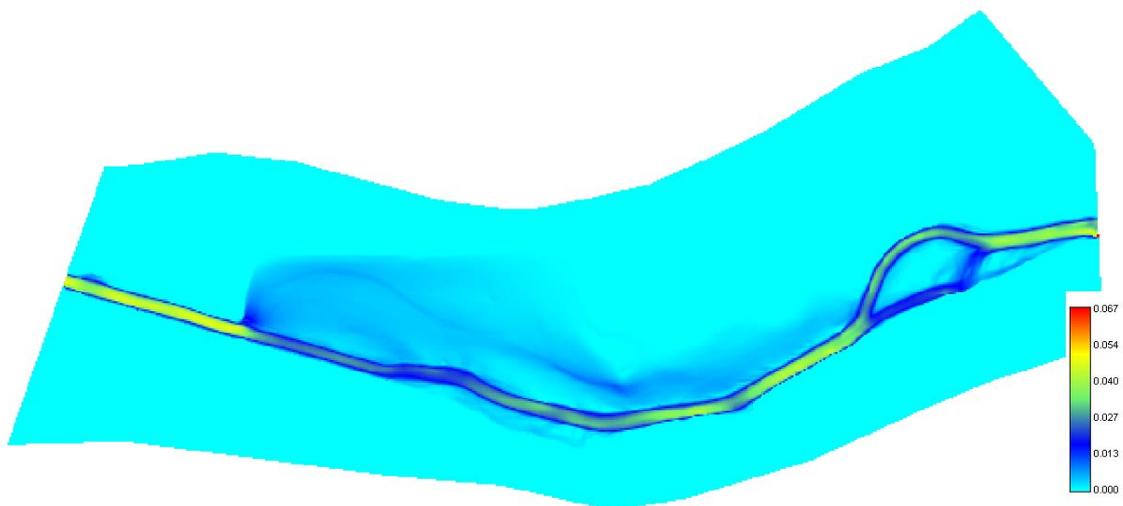


Figure 41. Représentation de la viscosité turbulente 3D pour un débit de  $100\text{m}^3/\text{s}$

Les variations de hauteur d'eau observées ayant lieu dans les zones de faible turbulence verticale, on pourra conclure qu'elles ne sont pratiquement pas dues aux effets de cette contribution turbulente. Dans le cas étudié, les contributions de la turbulence verticale seront donc négligeables face aux phénomènes de frottement de fond.

L'effet de la turbulence horizontale n'est, par contre, pas du tout négligeable. Cette turbulence horizontale trouve naissance aux zones de forts gradients de vitesses. On la retrouvera donc fort logiquement le long des bords du lit mineur, à sa jonction avec le lit majeur. En cet endroit, se développe en effet des gradients importants entre la vitesse importante de l'écoulement principal et les vitesses faibles observées sur les zones inondées. En reprenant sur la figure suivante les viscosités turbulentes 2D pour un débit de  $60\text{m}^3/\text{s}$ , on observe bien que celles-ci sont en effet transportées depuis les bords du lit mineur vers l'aval de l'écoulement.

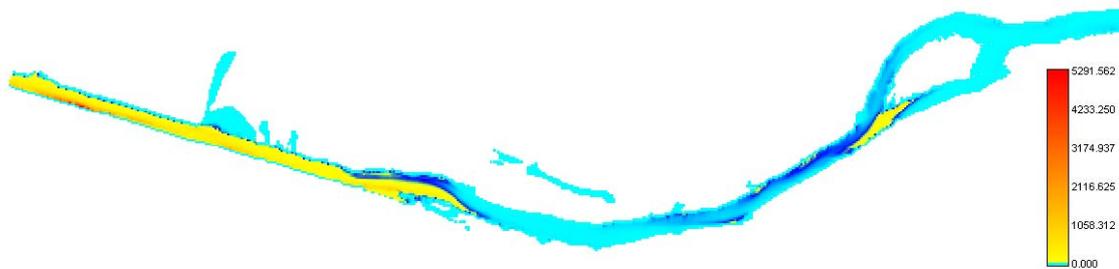


Figure 42. Représentation des viscosités turbulentes 2D pour un débit de  $60\text{m}^3/\text{s}$

La turbulence, présente aux bords du lit mineur, dissipe ainsi de l'énergie mettant en charge l'ensemble de l'écoulement en amont de celle-ci. Elle crée donc une sorte de couloir à l'écoulement en lit mineur qui ne sera pas trop perturbé par celle-ci. L'écoulement du lit majeur vers le lit mineur devant traverser ce bord sera, lui, fortement déchargé de son énergie et se mettra ainsi en charge sur toute la zone de lit majeur.

On peut donc représenter la turbulence aux bords comme une sorte de digue permettant à l'écoulement en lit mineur de suivre son chemin et relevant le niveau d'eau en lit majeur.

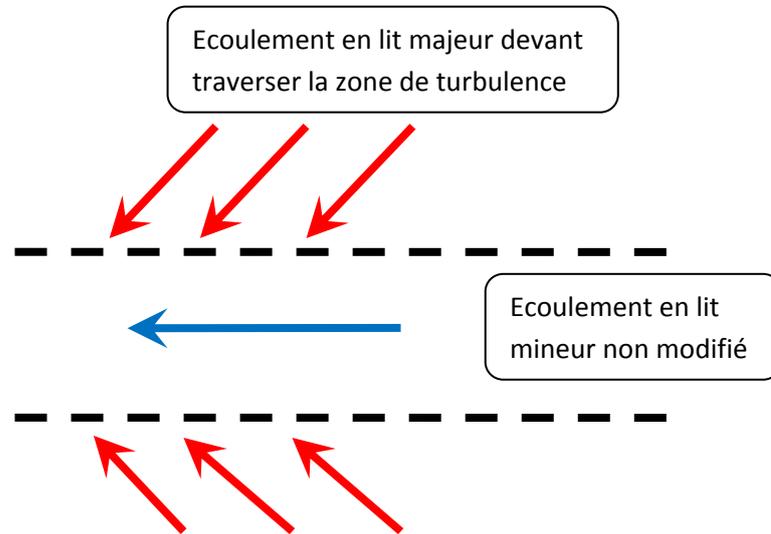


Figure 43. Schématisation de l'influence de la turbulence horizontale sur les écoulements en lits mineur et majeur

Les variations de hauteurs d'eau observées lors de la prise en compte de la turbulence sont donc essentiellement dues à la turbulence verticale. Les différences de hauteur d'eau seront donc d'autant plus faibles que les gradients de vitesse le seront aussi. Cela concorde bien avec les résultats obtenus. En effet, la différence de hauteur d'eau observée, diminue bien pour les débits plus élevés pour lesquels les vitesses en lit mineur et majeur tendent à se rapprocher.

## Chapitre X : Conclusions

### Sommaire

---

X.1 Rappel des objectifs poursuivis.....	106
X.2 Domaines de validité des différentes lois de frottement .....	106
X.3 Ajustement du coefficient de Manning .....	108
X.4 Nouvelle formulation continue du frottement .....	109
X.5 Apports de la prise en compte de la turbulence.....	110
X.6 Apports scientifiques et personnels du travail .....	111

---

## **X.1 Rappel des objectifs poursuivis**

Dans ce travail, on a cherché à déterminer les domaines d'intérêt des différentes lois régissant les termes de dissipation et de production des équations de Navier-Stokes, à la base de l'hydraulique.

On a ainsi tenté, dans un premier temps, de définir les domaines de validité des différentes lois de frottement. Ces domaines ont ainsi été déterminés sur base d'une analyse théorique et numérique de ces lois.

Dans un second temps, voyant l'intérêt que suscite la formulation de Manning dans la modélisation des écoulements à surface libre, on a cherché les ajustements à pratiquer à celle-ci afin de rendre son utilisation possible pour l'ensemble des écoulements.

On a ensuite proposé également une nouvelle formulation du frottement permettant une modélisation continue des écoulements à hauteurs d'eau très variables. Cette formulation, établie théoriquement, a ainsi été corrigée pour correspondre aux résultats numériques. La formulation corrigée a enfin été validée sur base d'observations réelles.

Enfin, on s'est intéressé à l'intérêt que peut avoir la prise en compte séparée des phénomènes de turbulence. Le but de cette étude était de se rendre compte de l'erreur qui pouvait être commise par l'intégration de la turbulence dans un coefficient global de perte de Manning.

## **X.2 Domaines de validité des différentes lois de frottement**

La recherche des domaines de validité des différentes lois régissant les phénomènes de frottement de fond s'est déroulée en deux temps.

On a ainsi commencé par une analyse théorique de ces lois basée sur l'hypothèse d'une représentation quasi-exacte des phénomènes par les lois modernes.

Cette analyse théorique nous a ainsi permis de mettre en évidence l'importance de la valeur de la rugosité relative pour la validité des lois. Le second paramètre influant sur les domaines de validité, le nombre de Reynolds, n'ayant qu'une très faible influence sur ceux-ci, on l'a négligé devant la rugosité relative.

On a ainsi défini les domaines de validité suivants en termes de rugosité relative :

Auteurs	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	0
Christen	[0 ; 0,032]
Manning	[0,007 ; 0,155]
Tillman	[0,023 ; 0,29]
Hagen	[0,034 ; 0,38]
Gaukler	Pas de domaine de validité
Poiseuille	Régime laminaire (jamais en réalité)
Prandtl	0
Colebrook	[0 ; 0,25]
Barr	[0 ; 0,25]
Nikuradse	[0 ; 0,25]
Bathurst	[0,25 ; 5,15]

Dans un deuxième temps, la comparaison des résultats obtenus numériquement par l'utilisation des différentes lois à des valeurs réellement mesurées sur site nous a permis de modifier quelque peu ces domaines de validités. Cette modification est principalement due à l'hypothèse de départ qui avait conduit aux précédents domaines de validité. En effet, la loi de Colebrook ne correspond pas à la physique réelle du phénomène de frottement sur un domaine aussi étendu qu'il avait été supposé.

On obtient donc les domaines de validité définitifs suivants :

Auteurs	Domaine de validité en termes de rugosité relative
Chézy	0
Christen	[0 ; 0,032]
Manning	[0,007 ; 0,1]
Tillman	[0,023 ; 0,29]
Hagen	[0,034 ; 0,38]
Gaukler	Pas de domaine de validité
Poiseuille	Régime laminaire (jamais en réalité)
Prandtl	0
Colebrook	[0 ; 0,1]
Barr	[0 ; 0,1]
Nikuradse	[0 ; 0,1]
Bathurst	[0,1 ; 5,15]

### X.3 Ajustement du coefficient de Manning

Comme on peut le voir, le domaine de validité pour la formulation de Manning est limité à des hauteurs d'eau pas trop importantes et pas trop faibles pour une rugosité de fond donnée. Ainsi, par exemple, pour une rugosité de fond de 5cm, les hauteurs d'eau correctement approchées par la formulation de Manning se situeront entre 3,6m et 71,4m.

Etant donné la large utilisation actuelle de la loi de Manning, il est intéressant de chercher comment l'ajuster pour obtenir des résultats acceptables pour les hauteurs d'eau sortant du domaine de validité. On a ainsi établi lors de ce travail, par une approche théorique légèrement modifiée par l'approche numérique, un diagramme fournissant, en fonction de la rugosité de fond et de la hauteur d'eau modélisée, le coefficient de Manning à utiliser pour décrire correctement les effets du frottement.

Ce diagramme se compose donc d'une série de courbes pour chaque valeur de la rugosité de fond, chaque courbe donnant la valeur du coefficient de Strickler à utiliser en fonction de la

hauteur d'eau modélisée. Il a été validé par plusieurs mesures sur terrain ainsi que par l'étude du cas de l'Ourthe à Moiricy (cf. annexe 6)

On obtient ainsi finalement le diagramme suivant :

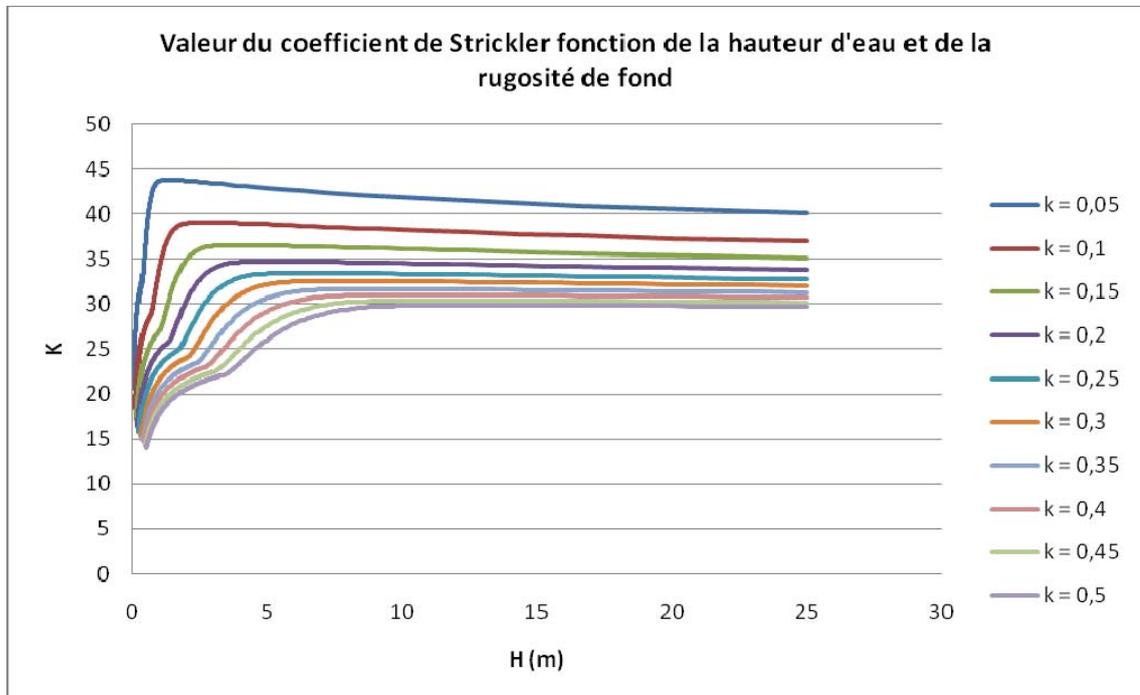


Figure 44. Diagramme de valeur du coefficient de Strickler fonction de la hauteur d'eau à modélisée et de la rugosité de fond

#### X.4 Nouvelle formulation continue du frottement

Au vue des domaines de validité établis plus haut, il apparaît qu'aucune des lois étudiées dans ce travail ne permet une représentation correcte des phénomènes de frottement pour l'ensemble des hauteurs d'eau. On a donc établi, au cours de ce travail, une nouvelle formulation permettant de couvrir l'ensemble de la gamme de rugosités relatives. En effet, une telle formulation paraît essentielle pour la modélisation d'écoulements à hauteurs d'eau très variables.

Pour l'établissement de cette nouvelle formulation, on est parti du constat que les domaines de validité des lois de Bathurst et de Barr couvrent à eux deux l'ensemble des rugosités relatives habituellement rencontrées. Cependant, le passage entre ces deux lois présentant une importante discontinuité, on a cherché une formulation de jonction utile sur le domaine de transition de la validité des deux lois.

De cette manière, on a finalement obtenu la formulation suivante du frottement :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{4,518 \cdot \log \frac{Re}{7}}{\operatorname{Re} \left( 1 + \frac{\operatorname{Re}^{0,52} \left( \frac{k}{h} \right)^{0,7}}{76,531} \right)} + \frac{k}{14,8h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \leq 0,05$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1469,76 \left( \frac{k}{h} \right)^3 - 382,83 \left( \frac{k}{h} \right)^2 + 9,89 \left( \frac{k}{h} \right) + 5,22 \quad \text{pour } 0,05 \leq \frac{k}{h} \leq 0,15$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,987 \log \left( \frac{k}{5,15h} \right) \quad \text{pour } \frac{k}{h} \geq 0,15$$

Cette formulation avait initialement été calculée pour une transition autour de la rugosité relative 0,25, transition théorique des domaines de validité des deux lois, puis corrigée pour une transition autour de la rugosité relative 0,1, transition modifiée pour faire correspondre les résultats numériques et réels.

Cette dernière formulation a alors été validée pour plusieurs cas par la bonne allure qu'elle donne aux courbes du diagramme de variation du coefficient de Strickler.

### X.5 Apports de la prise en compte de la turbulence

Au cours de la dernière partie de ce travail, on a jugé de l'importance de la prise en compte de la turbulence.

On a ainsi pu mettre en évidence les effets non négligeables de la prise en compte de la turbulence sur les résultats obtenus en lit majeur. Les effets sur l'écoulement principal en lit mineur restent cependant négligeables. Cependant, plutôt que de parler en termes de lit majeur et de lit mineur, il est plus intéressant de parler en termes de parcours d'écoulement. Ainsi, la prise en compte de la turbulence aura un effet non négligeable sur les écoulements dont le parcours est « barré » par la dite turbulence. Ce fait, mis en évidence par l'étude numérique effectuée sur la Lomme, a de plus été validé, en lit mineur, par l'étude du cas de Moiricy (cf. annexe 6).

Outre le simple fait de l'influence non négligeable de la turbulence sur certains écoulements, il est intéressant de noter que cet effet ne peut être correctement pris en compte par une simple augmentation du coefficient de Manning. Ainsi, sur certaines zones d'écoulement, il sera impossible de modéliser les phénomènes réels par une simple utilisation de la formulation de Manning sans prise en compte séparée de la turbulence. Ce fait, établi sur l'étude de la Lomme, peut être, une fois de plus, validé par l'étude du cas de Moiricy.

## **X.6 Apports scientifiques et personnels du travail**

Ce travail constitue donc une source intéressante pour tout qui veut modéliser correctement un écoulement à surface libre. Il offre, en effet, une proposition de lois pour chaque type de modélisation dont les intérêts physiques et numériques sont discutés. Il fournit de plus une solution, pour la modélisation des phénomènes de frottement, rapide et applicable à la quasi-totalité des écoulements à surface libre. Enfin, il comprend une mise en garde quant à la prise en compte ou non des phénomènes de turbulence.

Il est basé sur une approche scientifique classique se basant sur une base théorique proche des phénomènes physiques étudiés et validée sur base d'essais numériques corrélés à des mesures réelles.

Sur le plan personnel, ce travail m'a donc permis d'enrichir mon esprit scientifique, tant sur la méthode utilisée que sur les outils me permettant de la mettre en œuvre.

## Chapitre XI : Bibliographie

### Sommaire

---

XI.1 Livres .....	113
XI.2 Sites Internet.....	114

---

## XI.1 Livres

BOUSSICAUD, A., *Calcul des pertes de charge*, Les éditions parisiennes, Chaud-Froid-Plombière, (1990)

DETREMBLEUR, Sylvain, *Elaboration d'outils intégrés de gestion des données topographiques et morphologiques pour la modélisation des crues et inondations*, Mémoire de DEA, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, (2003)

DEWALS, Benjamin, *Une approche unifiée pour la modélisation d'écoulements à surface libre, de leur effet érosif sur une structure et de leur interaction avec divers constituants*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, (2006)

DUBOIS J., PIROTTON M., *Génération et transfert des crues extrêmes, Le logiciel Faitou*, Laboratoire de Constructions Hydrauliques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (2002)

ERPICUM, Sébastien, *Optimisation objective de paramètres en écoulements turbulents à surface libre sur maillage multibloc*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, (2006)

JONET, Lionel, *Incidence morphodynamique de réaménagements de rivières : cas de l'Ourthe occidentale à Moiricy*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences, Université de Liège, (2000)

KERGER, François, *Analyse expérimentale des effets induits par le mouvement de redressement d'une porte basculante*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, (2007)

LEJEUNE, A., *Principe de la mécanique des fluides (Hydraulique – Aérodynamique)*, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, (1993)

MARTINY, A., *Contribution à la détermination du coefficient de rugosité des rivières*, Ministère de la région wallonne, Direction des cours d'eau non navigables, Namur, (1995)

PIROTTON M., ARCHAMBEAU P., DETREMBLEUR S., DEWALS B., ERPICUM S., FRAIKIN C., *Hydraulique Appliquée, Tome 1*, Département d'Hydraulique et de Transport, Université de Liège, (2006)

PIROTTON M., ARCHAMBEAU P., DETREMBLEUR S., DEWALS B., ERPICUM S., FRAIKIN C., *Hydraulique Appliquée, Tome 2*, Département d'Hydraulique et de Transport, Université de Liège, (2006)

RYHMING, Inge L., *Dynamique des fluides*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, (1985)

SMOLDERS, Laurent, *Etude comparative des effets de la turbulence sur les écoulements de crue et d'inondation*, Mémoire de DEA, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, (2006)

YEN, Ben Chie, *Open Channel Flow Resistance*, Journal of hydraulic engineering, (Janvier 2002)

## XI.2 Sites Internet

Dictionnaire en ligne Médiadico, <http://dictionnaire.mediadico.com/>, (2007)

Hydrodynamique Appliquées et Constructions Hydrauliques, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, <http://www.hach.ulg.ac.be/>, (2008)

Site internet du journal la Dernière Heure, <http://www.dhnet.be/>, (2008)

Site Environnement Wallonie, présentation du plan PLUIES, [http://environnement.wallonie.be/de/dcenn/plan\\_pluies/index.htm](http://environnement.wallonie.be/de/dcenn/plan_pluies/index.htm), (2008)

Département de génie civil et d'environnement, Université Catholique de Louvain, <http://www.gce.ucl.ac.be/~hydraulique/enseignement/tfe0001-fr.html>, (2008)

Service des voies hydrauliques, Ministère de l'Équipement et des transports, Région Wallonne, <http://voies-hydrauliques.wallonie.be/>, (2008)

Site de visualisation par satellite, Google Earth, <http://earth.google.fr/>, (2008)

## Chapitre XII : Annexes

### Sommaire

XII.1 Annexe 1 : Intégration des équations de Navier-Stokes sur la hauteur de la lame fluide .....	118
XII.1.1 Passage en adimensionnel .....	118
XII.1.2 Intégration de l'équation de continuité.....	119
XII.1.3 Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement .....	120
XII.2 Annexe 2 : Intégration des équations de Navier-Stokes sur la section mouillée de la lame fluide .....	123
XII.2.1 Passage en adimensionnel .....	123
XII.2.2 Intégration de l'équation de continuité.....	124
XII.2.3 Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement .....	125
XII.3 Annexe 3 : Développement de la formulation de Chézy .....	127
XII.4 Annexe 4 : Développements pour la détermination de la rugosité relative amenant la corrélation exacte entre la formule de Nikuradse et les lois empiriques de frottement .....	129
XII.4.1 Formules de Forchheimer et de Tillman .....	129
XII.4.2 Formule de Christen.....	129
XII.4.3 Formule de Hagen.....	130
XII.5 Annexe 5 : Wolf2D .....	131
XII.5.1 Introduction .....	131
XII.5.1.1 La suite Wolf .....	131
XII.5.2 Equations intégrées sur la hauteur .....	133
XII.5.3 Prise en compte du frottement .....	137
XII.5.3.1 Loi de Manning.....	137
XII.5.3.2 Loi de Chézy .....	138

XII.5.3.3 Loi de Bathurst .....	138
XII.5.3.4 Loi de Barr .....	139
XII.5.3.5 Loi continue Barr-Jonction-Bathurst .....	139
XII.5.4 Prise en compte de la turbulence .....	140
XII.5.4.1 Modèle k- $\epsilon$ HACH n°2.....	140
XII.6 Annexe 6 : Validation des résultats obtenus par l'étude de l'Ourthe à Moiricy.....	143
XII.6.1 Présentation du cas d'étude de Moircy .....	143
XII.6.2 Etude des lois de frottement .....	143
XII.6.3 Etude de la prise en compte de la turbulence .....	144
XII.7 Annexe 7 : Détails des valeurs des différents graphiques repris dans ce travail.....	146
XII.7.1 Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour $k/h=0,01$ (Figure 2) .....	146
XII.7.2 Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour $k/h=0,1$ (Figure 3) .....	146
XII.7.3 Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour $k/h=1$ (Figure 4) .....	147
XII.7.4 Courbes de correspondance de la loi de Manning aux lois modernes (Figure 5)..	148
XII.7.5 Courbes donnant la valeur du coefficient de Strickler à utiliser pour correspondre aux différentes lois modernes (Figure 6) .....	149
XII.7.6 Courbes de correspondance des différentes lois empiriques à la loi de Colebrook (Figure 7) .....	150
XII.7.7 Variation du coefficient de Manning avec la hauteur d'eau pour $k=0,1m$ (Figure 8) .....	151
XII.7.8 Courbes de l'erreur commise sur la valeur du coefficient de Strickler par l'utilisation d'une valeur constante de ce coefficient (Figure 9).....	152
XII.7.9 Courbes de hauteurs d'eau évaluées par les différentes lois de frottement pour $k=0,09m$ et $J=0,005$ (Figures 10 et 11) .....	153
XII.7.10 Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau calculée par les différentes lois empiriques pour $k=0,09m$ et $J=0,005$ (Figures 12 et 13) .....	154

---

XII.7.11 Représentation des hauteurs d'eau fournies par les différentes lois pour $U=1\text{m/s}$ et $J=0,005$ (Figures 14 et 15) .....	155
XII.7.12 Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau par l'utilisation des différentes lois empiriques (Figures 16 et 17) .....	156
XII.7.13 Variation des paramètres du polynôme de jonction avec le nombre de Reynolds (Figure 21) .....	156
XII.7.14 Hauteurs d'eau mesurées en aval d'Hamoir (Figure 24) .....	157
XII.7.15 Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir centre (Figure 25).....	157
XII.7.16 Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir (Station) (Figure 26) .....	157
XII.7.17 Erreur relative sur la hauteur d'eau mesurée à la station d'Hamoir (Figures 28 et 29) .....	158
XII.7.18 Variation du coefficient de Strickler en fonction de la hauteur d'eau mesurée à Hamoir (Figures 30 et 31).....	158
XII.7.19 Diagramme des valeurs du coefficient de Strickler à utiliser pour modéliser les différentes hauteurs d'eau et de rugosité de fond (Figures 32 et 44 ,et courbes théoriques des figures 33, 34 et 35).....	159
XII.7.20 Variation du coefficient de Strickler mesurée sur la Warche à Thioux (Figure 33) .....	160
XII.7.21 Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Wyompont (Figure 34) .....	161
XII.7.22 Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Amberloup (Figure 35) .....	161
XII.7.23 Variation de la hauteur d'eau avec le débit (Figures 38, 39 et 40).....	161
XII.7.24 Profil en long de la surface libre à Moircy (Figure 48) .....	162

---

## XII.1 Annexe 1 : Intégration des équations de Navier-Stokes sur la hauteur de la lame fluide

### XII.1.1 Passage en adimensionnel

Afin de pouvoir établir les hypothèses les moins restrictives possibles, on pratique un passage en adimensionnel afin de juger de l'importance relative des différents termes des équations de Navier-Stokes. On pourra ainsi pratiquer une simplification des équations avant intégration. On pose ainsi :

- $h_0$  une épaisseur caractéristique de la lame fluide selon OZ
- $u_0, v_0, w_0$  les vitesses caractéristiques selon chaque axe
- $q_0$  la vitesse caractéristique selon la plus grande pente de surface libre (combinaison de  $u_0$  et  $v_0$ )

On construit ensuite deux longueurs caractéristiques selon les axes OX et OY :

$$\lambda_x = h_0 \frac{u_0}{w_0}, \lambda_y = h_0 \frac{v_0}{w_0}$$

On établit également les comparaisons entre les vitesses caractéristiques selon chacun des axes et la vitesse caractéristique  $q_0$  :

$$\varepsilon_x = \frac{u_0}{q_0}, \varepsilon_y = \frac{v_0}{q_0}, \varepsilon_z = \frac{w_0}{q_0}$$

Enfin, on définit un temps caractéristique selon les axes d'écoulement :

$$t_0 = \frac{h_0}{w_0} = \frac{\lambda_x}{u_0} = \frac{\lambda_y}{v_0}$$

On peut donc ainsi rendre adimensionnelles les coordonnées, le temps et donc les vitesses :

$$x' = \frac{x}{\lambda_x}, y' = \frac{y}{\lambda_y}, z' = \frac{z}{h_0}$$

$$t' = \frac{t}{t_0} = \frac{w_0}{h_0} t$$

$$u' = \frac{u}{u_0}, v' = \frac{v}{v_0}, w' = \frac{w}{w_0}$$

On établit enfin les formes adimensionnelles des différentes forces de pression, de gravité et de tensions visqueuses :

$$p' = \frac{p}{\rho q_0^2}, g' = \frac{gh_0}{q_0^2}, \sigma_{ij}' = \frac{\sigma_{ij}}{\rho u_0^i u_0^j}$$

En introduisant ces termes dans les équations de Navier-Stokes, on obtient les équations sous forme adimensionnelle suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} &= 0 \\ \varepsilon_x \varepsilon_z \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial u' u'}{\partial x'} + \frac{\partial u' v'}{\partial y'} + \frac{\partial u' w'}{\partial z'} \right) &= g' \sin \theta_x - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \varepsilon_x \varepsilon_z \left( \frac{\partial \sigma_{xx}'}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{yx}'}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma_{zx}'}{\partial z'} \right) \\ \varepsilon_y \varepsilon_z \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial v' u'}{\partial x'} + \frac{\partial v' v'}{\partial y'} + \frac{\partial v' w'}{\partial z'} \right) &= g' \sin \theta_y - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \varepsilon_y \varepsilon_z \left( \frac{\partial \sigma_{xy}'}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{yy}'}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma_{zy}'}{\partial z'} \right) \\ \varepsilon_z^2 \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{\partial w' u'}{\partial x'} + \frac{\partial w' v'}{\partial y'} + \frac{\partial w' w'}{\partial z'} \right) &= -g' \sin \theta_z - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \varepsilon_z^2 \left( \frac{\partial \sigma_{xz}'}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{yz}'}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma_{zz}'}{\partial z'} \right) \end{aligned}$$

On peut immédiatement remarquer le rôle particulier de l'axe OZ. En considérant que la vitesse selon cet axe est faible vis-à-vis de la vitesse selon la plus grande pente de surface libre, le carré du rapport de ces vitesses devient négligeable. On obtient ainsi une forme simplifiée de la dernière équation :

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = -g' \sin \theta_z$$

Cette expression revient, en fait, à supposer une distribution hydrostatique des pressions selon l'axe OZ. Elle lie donc le terme de pression à la hauteur d'eau permettant de supprimer à la fois une équation (quantité de mouvement selon OZ) et une inconnue (pression). C'est donc sous cette hypothèse d'une répartition hydrostatique de la pression que l'on va pratiquer l'intégration des équations sur la hauteur de la lame fluide.

### XII.1.2 Intégration de l'équation de continuité

Commençons par l'intégration de l'équation de continuité. Soit  $h_f$  et  $h_s$  les coordonnées verticales respectivement du fond et de la surface libre, on a l'intégration suivante :

$$\int_{-h_f}^{h_s} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h_f}^{h_s} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h_f}^{h_s} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

Rappelons ici la formule de Leibnitz permettant de sortir le signe de dérivation de l'intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_f}^{h_s} f dz = \int_{-h_f}^{h_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} dz + f \Big|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x_i} - f \Big|_{z=-h_f} \frac{\partial (-h_f)}{\partial x_i}$$

En appliquant cette formule aux différents termes de l'intégration ci-dessus, on obtient la formulation intégrée de la continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} v dz + \left( w - u \frac{\partial h_s}{\partial x} - v \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) \Big|_{z=h_s} - \left( w - u \frac{\partial (-h_f)}{\partial x} - v \frac{\partial (-h_f)}{\partial y} \right) \Big|_{z=-h_f} = 0$$

En introduisant les conditions cinématiques suivantes aux frontières :

$$\begin{aligned} -\left(w - u \frac{\partial h_s}{\partial x} - v \frac{\partial h_s}{\partial y}\right) \Big|_{z=h_s} &= r \sin \theta_z \\ -\left(w - u \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - v \frac{\partial(-h_f)}{\partial y}\right) \Big|_{z=-h_f} &= i \sin \theta_z \end{aligned}$$

La première condition, établie à la surface, traduit l'introduction dans l'écoulement des précipitations. De la même manière, la deuxième équation traduit l'équilibre au fond entre l'écoulement et l'infiltration.

En définissant aussi les vitesses moyennes sur la hauteur comme suit :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-h_f}^{h_s} u dz, \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{-h_f}^{h_s} v dz$$

, on peut enfin écrire la forme définitive de l'équation de continuité intégrée sur la hauteur :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} h}{\partial y} = (r - i) \sin \theta_z$$

### XII.1.3 Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

En intégrant l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon OZ, on obtient l'expression directe de la pression en fonction de la hauteur d'eau :

$$p = \rho g (h_s - z) \sin \theta_z$$

En réintroduisant cette expression de la pression dans les deux dernières équations, on obtient l'intégration suivante à réaliser pour l'axe OX :

$$\begin{aligned} \int_{-h_f}^{h_s} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) dz = \\ \int_{-h_f}^{h_s} \left( g \sin \theta_x - g \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dz \end{aligned}$$

En utilisant une fois de plus la formule de Leibnitz, on obtient la forme intégrée suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_f}^{h_s} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} u u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} u v dz + u \Big|_{z=h_s} \left( w - \frac{\partial h_s}{\partial t} - u \frac{\partial h_s}{\partial x} - v \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) \Big|_{z=h_s} \\ & - u \Big|_{z=-h_f} \left( w + \frac{\partial(-h_f)}{\partial t} + u \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} + v \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) \Big|_{z=-h_f} = gh \sin \theta_x - gh \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{xx} dz \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{yx} dz + \frac{1}{\rho} \left( \sigma_{zx} - \sigma_{xx} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \sigma_{yx} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) \Big|_{z=h_s} - \frac{1}{\rho} \left( \sigma_{zx} - \sigma_{xx} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - \sigma_{yx} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) \Big|_{z=-h_f} \end{aligned}$$

Introduisons cette fois les conditions dynamiques aux frontières. En négligeant les forces extérieures agissant sur la surface libre (par exemple le vent), on obtient l'équilibre suivant à la surface libre selon OX :

$$\left( \sigma_{zx} - \sigma_{xx} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \sigma_{yx} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) \Big|_{z=h_s} dxdy = 0$$

De la même manière, en prenant cette fois compte du frottement sur le fond  $t_x$ , on obtient l'équilibre suivant au fond selon OX :

$$\left( \sigma_{zx} - \sigma_{xx} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - \sigma_{yx} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) \Big|_{z=-h_f} dxdy = t_x dxdy$$

Afin d'obtenir une expression purement bidimensionnelle des équations de conservation de quantité de mouvement, il faudrait pouvoir exprimer l'équation uniquement en termes de vitesses moyennes et de hauteur d'eau. Pour ce faire, on introduit plusieurs coefficients qui seront uniquement dépendants du profil des vitesses sur la hauteur. On a ainsi :

$$K_{if} = \frac{u_i \Big|_{z=-h_f}}{u_i}, K_{is} = \frac{u_i \Big|_{z=h_s}}{u_i}$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{u_i u_j h} \int_{-h_f}^{h_s} u_i u_j dz$$

$$S_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{ij} dz$$

On obtient ainsi la forme définitive des équations de conservation de la quantité de mouvement intégrées sur la hauteur :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{uh})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{xx} \bar{u}^2 h) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_{xy} \bar{u} \bar{v} h) = \\ & gh \left( \sin \theta_x - \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} (S_{xx} + S_{yx}) + \sin \theta_z (K_{xf} i - K_{xs} r) \bar{u} + t_x \\ & \frac{\partial(\bar{vh})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_{yy} \bar{v}^2 h) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{xy} \bar{u} \bar{v} h) = \\ & gh \left( \sin \theta_y - \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} (S_{yx} + S_{yy}) + \sin \theta_z (K_{yf} i - K_{ys} r) \bar{v} + t_y \end{aligned}$$

## XII.2 Annexe 2 : Intégration des équations de Navier-Stokes sur la section mouillée de la lame fluide

### XII.2.1 Passage en adimensionnel

Toujours en vue d'émettre les hypothèses les moins restrictives possibles, on va réaliser une fois de plus un passage en adimensionnel des équations de Navier-Stokes. Ce passage en adimensionnel va également nous permettre de mettre en évidence les simplifications que l'on pourra apporter aux équations avant intégration.

Afin de réaliser ce passage en adimensionnel, on reprendra les définitions faites plus haut pour les vitesses  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ . On définit de plus  $l_0$  la largeur caractéristique de la rivière. Cette définition traduit donc l'hypothèse d'une section peu variable sur la longueur de rivière étudiée.

Soit l'axe OX défini comme axe privilégié de l'écoulement, on pratique cette fois la comparaison des vitesses caractéristiques à la vitesse selon cet axe :

$$\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = \frac{v_0}{u_0}, \varepsilon_z = \frac{w_0}{u_0}$$

On construit également les longueurs caractéristiques en fonction de la largeur caractéristique définie plus haut :

$$\lambda_i = \frac{l_0}{\varepsilon_y} \varepsilon_i$$

Enfin, on définit un temps caractéristique par la formule suivante :

$$t_0 = \frac{\lambda_i}{u_i} = \frac{l_0}{v_0}$$

Par ces définitions, on trouve les formes adimensionnelles suivantes pour les coordonnées et le temps ainsi que pour les vitesses :

$$x'_i = \frac{x_i}{\lambda_i}, t' = \frac{t}{t_0} = \frac{v_0}{l_0} t$$

$$u' = \frac{u}{u_0}, v' = \frac{v}{v_0}, w' = \frac{w}{w_0}$$

Enfin, les termes adimensionnels de pression, de gravité et de tensions visqueuses seront exprimés par les formules suivantes donnant bien à l'axe OX son rôle privilégié :

$$p' = \frac{p}{\rho u_0^2}, g' = g \frac{\lambda_z}{u_0^2} = g l_0 \frac{w_0}{u_0^2 v_0}, \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho u_0^i u_0^j}$$

Ces transformations nous donnent cette fois les formes suivantes des équations de Navier-Stokes adimensionnelles :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

$$\varepsilon_x \varepsilon_y \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial u' u'}{\partial x'} + \frac{\partial u' v'}{\partial y'} + \frac{\partial u' w'}{\partial z'} \right) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} g' \sin \theta_x - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \varepsilon_x \varepsilon_y \left( \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z'} \right)$$

$$\varepsilon_y^2 \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial v' u'}{\partial x'} + \frac{\partial v' v'}{\partial y'} + \frac{\partial v' w'}{\partial z'} \right) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} g' \sin \theta_y - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \varepsilon_y^2 \left( \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial z'} \right)$$

$$\varepsilon_z \varepsilon_y \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{\partial w' u'}{\partial x'} + \frac{\partial w' v'}{\partial y'} + \frac{\partial w' w'}{\partial z'} \right) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} g' \sin \theta_z - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \varepsilon_z \varepsilon_y \left( \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z'} \right)$$

En considérant que les rapports des vitesses selon OZ ou OY à la vitesse selon l'axe privilégié OX sont faibles, on pourra considérer que les termes carrés de ces rapports sont négligeables. Par ces simplifications, les deux dernières équations prennent alors la forme suivante :

$$0 = \frac{\partial p'}{\partial y'}$$

$$-g' \cos \theta = \frac{\partial p'}{\partial z'}$$

Cette simplification vers ces deux équations vient du choix des axes avec OX selon la plus grande pente et OZ perpendiculaire au fond, tous deux dans un plan vertical. Dès lors, l'angle entre l'axe OY et le plan vertical est nul. Ce qui nous ramène à la première équation.

La deuxième équation ainsi mise en évidence traduit une fois de plus une répartition hydrostatique de la pression selon l'axe OZ. La première équation traduit quant à elle le fait que sur n'importe quelle horizontale la pression est uniforme et ainsi, que la surface libre est horizontale.

## XII.2.2 Intégration de l'équation de continuité

Commençons une fois de plus par intégrer l'équation de continuité et commençons par l'intégration de celle-ci sur la largeur :

$$\int_{-l_d}^{l_g} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} w dy + \left( v - u \frac{\partial l_g}{\partial x} - w \frac{\partial l_g}{\partial z} \right) \Big|_{y=l_g} - \left( v - u \frac{\partial(-l_d)}{\partial x} - w \frac{\partial(-l_d)}{\partial z} \right) \Big|_{y=-l_d} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} w dy + \frac{\partial l_g}{\partial t} - \frac{\partial(-l_d)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} w dy + \frac{\partial l}{\partial t}$$

Le passage de la deuxième forme de l'égalité à la troisième forme traduit le non décollement des particules fluides à la paroi. Cela signifie qu'on considère un échange nul entre la paroi et l'écoulement.

Passons ensuite à l'intégration de cette équation sur la hauteur :

$$\int_{-h_f}^{h_s} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} w dy + \frac{\partial l}{\partial t} \right) dz =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_f}^{h_s} l dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u dy dz + \int_{-l_d}^{l_g} \left( w|_{z=h_s} - u|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \frac{\partial h_s}{\partial t} \right) dy - \int_{-l_d}^{l_g} \left( w|_{z=-h_f} - u|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - \frac{\partial(-h_f)}{\partial t} \right) dy$$

Introduisant, une fois de plus, un échange nul aux frontières du domaine, les deux derniers termes s'annulent et finalement l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_L$$

On introduit à ce niveau les apports latéraux  $q_L$ . En effet, comme annoncé précédemment, on a considéré les échanges aux frontières nuls. Les contributions latérales sont donc supposées introduites dans l'écoulement par déversement perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement. De cette manière, ces apports n'influent pas sur la quantité de mouvement. Il faudra bien entendu une fois de plus vérifier le bien fondé de cette hypothèse avant tout calcul.

### XII.2.3 Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Tout comme pour l'équation de continuité, on va commencer par intégrer cette équation sur la largeur de l'écoulement. Introduisons également la forme de l'expression de la pression déduite des équations de conservation de quantité de mouvement selon OY et OZ :

$$p = \rho g \cos \theta (h_s - z)$$

On obtient ainsi la formulation intégrée sur la largeur :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} u w dy = g l \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} [(h_s - z) l] + g \cos \theta (h_s - z) \frac{\partial l}{\partial x}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) - u|_{y=-l_d} \left( \frac{\partial(-l_d)}{\partial t} + u|_{y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial x} + w|_{y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial z} - v|_{y=-l_d} \right)$$

$$+ u|_{y=l_g} \left( \frac{\partial l_g}{\partial t} + u|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} + w|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} - v|_{y=l_g} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \sigma_{xx}|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} + \sigma_{zx}|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} - \sigma_{yx}|_{y=l_g} \right)$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left( \sigma_{xx}|_{y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial x} + \sigma_{zx}|_{y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial z} - \sigma_{yx}|_{y=-l_d} \right)$$

En reprenant la condition de non décollement à la paroi évoquée plus haut, les 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> termes du membre de droite sont nuls. Pour ce qui est des deux derniers termes de ce membre de droite, on peut les simplifier en réalisant l'équilibre dynamique aux frontières et en introduisant les composantes de frottement sur les berges  $R_g$  et  $R_d$ . On obtient ainsi la forme suivante de l'équation intégrée sur la largeur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} u w dy &= g l \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} [(h_s - z) l] + g \cos \theta (h_s - z) \frac{\partial l}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) + \frac{1}{\rho} (R_g + R_d) \end{aligned}$$

Intégrons ensuite cette équation sur la hauteur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_f}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u dy dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u u dy dz &= g \sin \theta \int_{-h_f}^{h_s} l dz - g \cos \theta \int_{-h_f}^{h_s} \frac{\partial}{\partial x} [(h_s - z) l] dz \\ &+ g \cos \theta \int_{-h_f}^{h_s} (h_s - z) \frac{\partial l}{\partial x} dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy dz + \int_{-l_d}^{l_g} u \Big|_{z=h_s} \left( \frac{\partial h_s}{\partial t} - u \Big|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - w \Big|_{z=h_s} \right) dy \\ &- \int_{-l_d}^{l_g} u \Big|_{z=-h_f} \left( \frac{\partial(-h_f)}{\partial t} - u \Big|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - w \Big|_{z=-h_f} \right) dy + \frac{1}{\rho} \int_{-h_f}^{h_s} (R_g + R_d) dz \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \left( \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy \right) \Big|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_b)}{\partial x} - \left( \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \Big|_{z=-h_f} \right] - \frac{1}{\rho} \left[ \left( \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy \right) \Big|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \left( \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \Big|_{z=h_s} \right] \end{aligned}$$

Une fois de plus, les conditions de non-échange aux frontières annulent les 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> termes du membre de droite. Le dernier terme équilibre, lui, les efforts appliqués à la surface (vent,..). Comme précédemment, ces efforts seront négligés et ce terme annulé. Enfin, l'avant-dernier terme équilibre quant à lui les efforts au fond. La valeur de ce terme varie donc en fonction de la forme du lit et sera incluse dans un terme global de frottement incluant les frottements du fond et des berges. On obtient ainsi la forme finale de l'équation de quantité de mouvement intégrée sur la section mouillée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_\omega \frac{q^2}{\omega} \right) &= g \omega \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} [(h_s - z) l] dz \\ &- g \cos \theta h l_f \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} + g \cos \theta \int_{-h_f}^{h_s} (h_s - z) \frac{\partial l}{\partial x} dz + \frac{1}{\rho} t_x + S_x \end{aligned}$$

### XII.3 Annexe 3 : Développement de la formulation de Chézy

L'équation générale applicable à un écoulement rectiligne permanent et uniforme est la suivante :

$$\sin i - \frac{1}{\omega} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\chi}{\Omega} \varphi(U)$$

En plaçant l'axe  $s$  au niveau de la surface libre, le gradient de pression s'annule (pression constante égale à la pression atmosphérique). Si de plus, on considère la pente du type de canaux étudiés par Chézy suffisamment faible pour approximer son sinus, alors l'équation générale prend finalement la forme suivante :

$$R_h i = \varphi(U)$$

On a ici introduit le rayon hydraulique qui n'est autre que le rapport de la section mouillée au périmètre mouillé.

Il reste donc à établir l'expression de la fonction de la vitesse moyenne tenant compte du frottement du fluide sur les parois ainsi que de son frottement interne (viscosité cinématique et viscosité turbulente).

En considérant le cours d'eau rectiligne et de section constante, on peut déterminer la force motrice gravitaire de l'écoulement sur une distance  $dx$  par la formule suivante :

$$F_m = \rho g i \Omega dx$$

Se plaçant en écoulement uniforme, cette force motrice doit équilibrer les forces de frottement aux parois. On néglige ici les effets de vent à la surface et l'on considère une répartition hydrostatique de la pression des deux côtés du volume de contrôle.

En introduisant le coefficient  $k_f$  représentant la rugosité de la paroi,  $u_f$  représentant la vitesse du fluide le long de cette paroi et  $u_{fm}$  la vitesse moyenne le long du périmètre mouillé, on peut calculer la force résistante de frottement par la formule suivante :

$$F_r = k_f \rho g dx \int_0^{\chi} \frac{u_f^2}{2g} d\chi = k_f \rho g dx \frac{\chi u_{fm}^2}{2g}$$

En assurant l'égalité des forces motrices et résistantes et en pratiquant les simplifications nécessaires, on obtient finalement la formulation de Chézy :

$$R_h i = \frac{k_f}{2g} u_{fm}^2$$

$$\Rightarrow u_{fm} = \sqrt{\frac{2g}{k_f}} \sqrt{R_h i} = C \sqrt{R_h i}$$

En substituant dans cette équation la pente de frottement à la pente de fond (écoulement uniforme) et la vitesse moyenne de l'écoulement à la vitesse de fond (par modification de la constante C), on obtient la formulation définitive suivante :

$$U = C\sqrt{JR_h}$$

## XII.4 Annexe 4 : Développements pour la détermination de la rugosité relative amenant la corrélation exacte entre la formule de Nikuradse et les lois empiriques de frottement

### XII.4.1 Formules de Forchheimer et de Tillman

Les lois de Forchheimer et de Tillman prennent toutes deux en compte une puissance du rayon hydraulique de 0,7. La première égalité à satisfaire devient donc la suivante :

$$\begin{aligned} 0,7 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow M = 2,5 \\ \Rightarrow \ln(10) \log\left(\frac{14,8R_h}{k}\right) &= 5 \\ \Rightarrow \frac{k}{R_h} &= 0,1 \end{aligned}$$

En introduisant cette rugosité relative dans le calcul du paramètre A, puis ce paramètre A dans le calcul du coefficient  $\alpha$  de la formulation générale des lois empiriques, on obtient le développement suivant :

$$\begin{aligned} A &= \frac{R_h}{k} \left[ -2 \log \frac{k}{14,8R_h} \right]^{-\ln(10) \log \frac{14,8R_h}{k}} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \frac{k}{R_h} = 0,1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0,0065 \\ \Rightarrow \alpha &= \sqrt{\frac{8g}{(Ak)^{1/2,5}}} = \frac{24,26}{k^{0,2}} \end{aligned}$$

### XII.4.2 Formule de Christen

La loi de Christen prend elle en compte une puissance du rayon hydraulique de 0,625. La première égalité à satisfaire devient donc la suivante :

$$\begin{aligned} 0,625 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow M = 4 \\ \Rightarrow \ln(10) \log\left(\frac{14,8R_h}{k}\right) &= 8 \\ \Rightarrow \frac{k}{R_h} &= 0,005 \end{aligned}$$

En introduisant cette rugosité relative dans le calcul du paramètre A, puis ce paramètre A dans le calcul du coefficient  $\alpha$  de la formulation générale des lois empiriques, on obtient le développement suivant :

$$A = \frac{R_h}{k} \left[ -2 \log \frac{k}{14,8R_h} \right]^{-\ln(10) \log \frac{14,8R_h}{k}} \left. \begin{array}{l} \\ \frac{k}{R_h} = 0,005 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0,000037$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{8g}{(Ak)^{1/4}}} = \frac{31,71}{k^{0,125}}$$

### XII.4.3 Formule de Hagen

La loi de Hagen prend enfin en compte une puissance du rayon hydraulique de 0,714. La première égalité à satisfaire devient donc la suivante :

$$0,714 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \Rightarrow M = 2,34$$

$$\Rightarrow \ln(10) \log \left( \frac{14,8R_h}{k} \right) = 4,67$$

$$\Rightarrow \frac{k}{R_h} = 0,138$$

En introduisant cette rugosité relative dans le calcul du paramètre A, puis ce paramètre A dans le calcul du coefficient  $\alpha$  de la formulation générale des lois empiriques, on obtient le développement suivant :

$$A = \frac{R_h}{k} \left[ -2 \log \frac{k}{14,8R_h} \right]^{-\ln(10) \log \frac{14,8R_h}{k}} \left. \begin{array}{l} \\ \frac{k}{R_h} = 0,138 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0,0104$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{8g}{(Ak)^{1/2,34}}} = \frac{23,51}{k^{0,214}}$$

## XII.5 Annexe 5 : Wolf2D

### XII.5.1 Introduction

Afin de réaliser une analyse numérique de l'influence des différentes lois de frottement et de turbulence sur la modélisation des écoulements, et plus particulièrement sur les écoulements de crues, il a été mis à notre disposition un outil de modélisation performant : le logiciel WOLF 2D.

#### XII.5.1.1 La suite Wolf

Le logiciel WOLF 2D fait partie de la suite WOLF développée depuis une dizaine d'années au sein du service d'Hydrodynamique Appliquée et des Constructions Hydrauliques (HACH) de l'Université de Liège sous la direction du Professeur Piroton. La suite WOLF a été développée dans le souci de pouvoir décrire de manière performante l'ensemble des écoulements de surface du cycle hydrologique. Ce développement a eu lieu dans le cadre d'un essor important des méthodes de modélisations numériques lui-même lié à l'expansion des puissances de calculs disponibles. Quatre logiciels ont ainsi été développés dans la suite WOLF qui s'organise suivant le schéma ci-dessous :

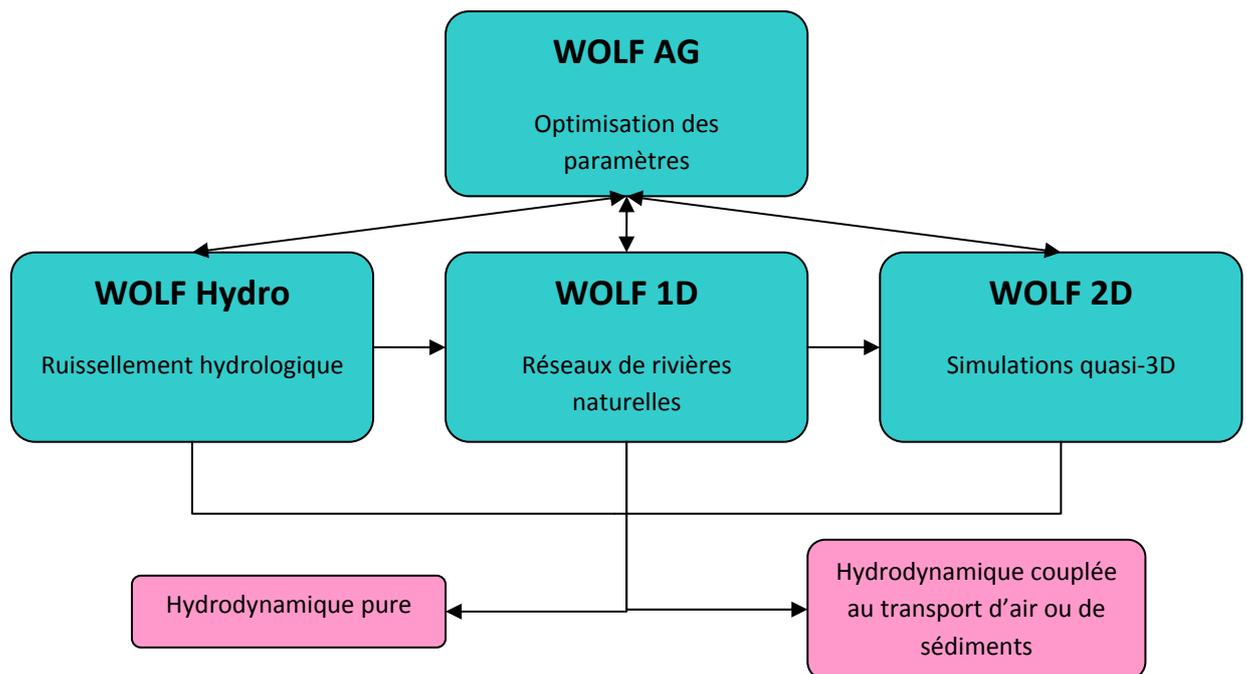


Figure 45. Organigramme de la suite WOLF

Le logiciel WOLF Hydro permet la modélisation des écoulements depuis la répartition des pluies entre les différents termes du bilan hydrologique jusqu'au transfert vers le réseau de rivières. Il permet donc l'étude de l'ensemble des écoulements sur les bassins versants.

Le logiciel WOLF 1D, initialement conçu pour simuler les propagations d'ondes de crues et la gestion de cas d'écoulements extrêmes, voit, depuis l'apparition du logiciel WOLF 2D, son utilisation limitée à l'étude de réseaux de rivières à l'échelle du bassin versant ou de régions

assez vastes (propagations de crues ou de polluants, qualité des eaux, impacts environnementaux,...). Il est également parfois utilisé pour fixer les conditions aux limites d'autres problèmes. L'avantage principal de ce modèle sur les autres modèles unidimensionnels est la prise en compte des contributions d'écoulement en lits composés. Il prend ainsi à la fois en compte les zones actives et passives du lit majeur.

Le logiciel WOLF 2D, comme son nom l'indique, génère une modélisation bidimensionnelle des écoulements. Il est donc à même de résoudre l'ensemble des problèmes d'hydrodynamique à surface libre, présentant un plan préférentiel d'écoulement, par la résolution des équations de base de l'hydraulique intégrées sur la hauteur sous forme conservative. Il peut, de plus, intégrer des modules supplémentaires pour la modélisation du transport d'air, de sédiments ou de polluants. Un module supplémentaire peut également être intégré pour modéliser la distribution des paramètres sur la hauteur d'eau et ainsi fournir un modèle quasi-tridimensionnel sur chaque maille. Ce logiciel permet ainsi la résolution de la majeure partie des problèmes auxquels l'ingénieur hydraulicien peut être confronté.

Enfin, le module WOLF AG basé sur l'utilisation des algorithmes génétiques permet un calage efficace et robuste des différents paramètres à introduire dans les autres modules. Il peut également être une aide précieuse à la décision en optimisant les scénarios de gestion paramétrés pour des ouvrages hydrauliques.

La suite Wolf permet ainsi la modélisation de tout écoulement à surface libre, pour tout régime sur maillage structuré uni- ou bidimensionnel. Elle permet également une optimisation objective des paramètres physiques qui définissent les problèmes d'écoulement en vue de l'obtention de résultats fiables et robustes. Elle trouve son utilisation pour des travaux assez variés tels que des études de risques pour la rupture de barrage, l'établissement de cartes d'inondations, des études d'impact ou encore le dimensionnement d'ouvrages hydrauliques.

Enfin, un atout majeur de la suite WOLF est l'utilisation d'une interface unique appliquée à l'ensemble des logiciels développés. Cette interface offre un outil performant et convivial de pré- et post-traitement permettant une mise en œuvre rapide de l'ensemble des données ainsi qu'une visualisation et une animation en temps réel de l'ensemble des résultats. Développée par le HACH sous Windows®, elle fait de la suite WOLF un véritable Système d'Information Géographique.

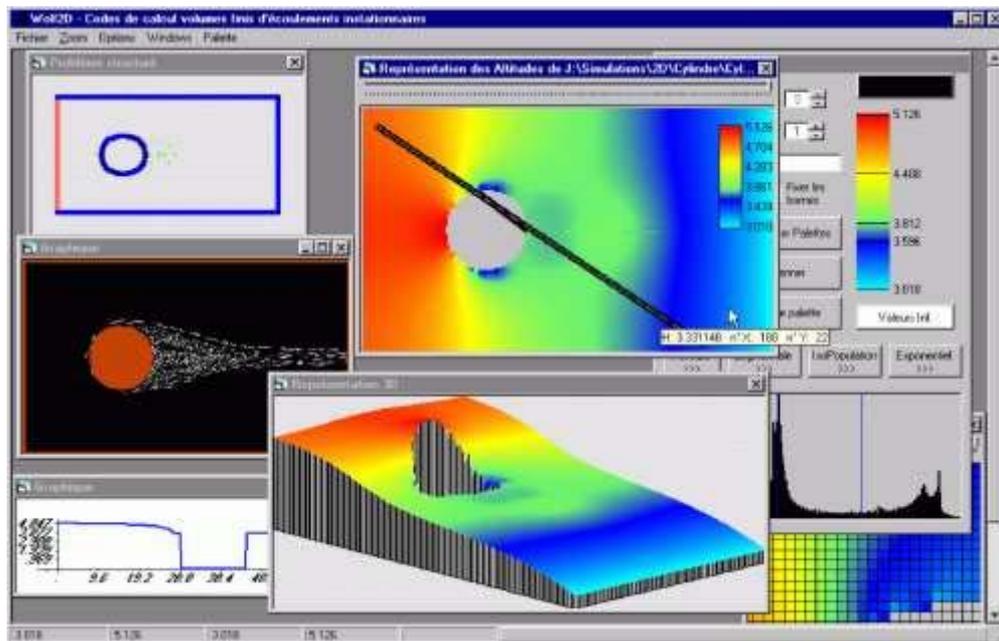


Figure 46. Exemple d'une fenêtre de l'interface de la suite WOLF

Dans le cadre de ce travail, nous réaliserons uniquement des modélisations à l'aide du logiciel WOLF 2D sur des écoulements de rivière. Il serait cependant judicieux de se poser également la question de l'influence des lois de frottement et de turbulence sur les autres types d'écoulement généralement étudiés (ruissellement, ressaut, écoulement sur coursier,...). On pourra, après analyse des résultats obtenus par l'utilisation de WOLF 2D sur écoulement de rivière, tenter d'extrapoler les résultats obtenus aux autres types d'écoulements. Cette extrapolation sera cependant subjective et devra être vérifiée par l'analyse de modélisations complètes.

### XII.5.2 Equations intégrées sur la hauteur

Avant d'utiliser le logiciel WOLF 2D, il est intéressant de savoir de quelle manière il modélise les écoulements. Nous allons donc détailler les équations que le logiciel met en œuvre.

Le logiciel WOLF 2D est un modèle numérique bidimensionnel qui utilise les équations de base de l'hydraulique intégrées sur la hauteur sous forme conservative. On rappellera que cette intégration est basée sur le fait que l'écoulement se fait selon un plan préférentiel parallèle à la pente de fond.

Dans ce cas, la mise sous forme adimensionnelle des équations de base de l'hydraulique nous a mis en évidence une relation explicite de la pression en fonction de la hauteur :

$$p(z) = \rho g (h_s - z) \sin \theta_z$$

Afin de pouvoir prendre en compte les phénomènes de turbulence dans la modélisation des écoulements, on intégrera cette fois non plus les équations de base de l'hydraulique mais bien leur forme moyennée.

On introduit pour plus de clarté les notions suivantes dans ces équations :

- $u_i^{3D}$  représente le champ de vitesses tridimensionnel selon la direction i
- $U_i^{3D}$  représente le champ de vitesses tridimensionnel moyenné temporellement selon la direction i ( $U_i^{3D} = \overline{u_i^{3D}} = u_i^{3D} - u_i'^{3D}$ )
- $u_i'^{3D}$  représente le champ de vitesses fluctuantes tridimensionnel selon la direction i ( $\overline{u_i'^{3D}} = 0$ )
- $w^{3D} = u_z^{3D}$
- $U_i^{2D}$  représente le champ de vitesses moyennes intégrées sur la hauteur d'eau, selon la direction i

On a ainsi les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement suivantes à intégrer sur la hauteur d'eau :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U_i^{3D} = 0$$

$$\frac{\partial U_i^{3D}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i^{3D} U_j^{3D}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g \sin \theta_i + \nu \Delta U_i^{3D} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i'^{3D} u_j'^{3D}})$$

Afin de simplifier le problème, on ne prendra pas en compte les phénomènes de transport solide. On considérera également les précipitations et l'infiltration comme nulles.

La forme semblable à celle de l'équation de base de l'équation de continuité fait que l'intégration sur la hauteur reste similaire. On obtient donc la forme intégrée suivante de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h U_i^{2D}) = 0$$

$$\text{avec } U_i^{2D} = \frac{1}{h} \int_{-h_f}^{h_s} U_i^{3D} dz$$

L'équation de quantité de mouvement moyennée a, elle aussi, une forme semblable à l'équation de base de quantité de mouvement à l'exception du terme supplémentaire de fluctuation.

On introduit ce nouveau terme dans un terme global de perte :

$$\frac{1}{\rho} \overline{\sigma_{ij}^{3D}} = \nu \frac{\partial U_i^{3D}}{\partial x_j} - \overline{u_i'^{3D} u_j'^{3D}}$$

On retrouve ainsi la formulation intégrée précédemment. L'équation de quantité de mouvement moyennée sur le temps et intégrée sur la hauteur a donc par analogie la forme suivante :

$$\frac{\partial(hU_i^{2D})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_{ij}hU_i^{2D}U_j^{2D}) = gh\left(\sin\theta_i - \sin\theta_z \frac{\partial h_s}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} \overline{\sigma_{ij}^{3D}} dz + t_x$$

On rappellera que dans cette formule on a considéré que le fond était fixe et imperméable, on a négligé les infiltrations et les précipitations, enfin le frottement à la surface libre a été considéré également négligeable. En réalité, le logiciel WOLF 2D considère ce frottement de surface. En réintégrant ce terme dans l'équation ci-dessus et en réécrivant le frottement de fond en fonction de la contrainte de cisaillement, on obtient finalement la formulation intégrée prise en compte par WOLF 2D :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hU_i^{2D})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_{ij}hU_i^{2D}U_j^{2D}) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{gh^2}{2}\right)\sin\theta_z = \\ gh\left(\sin\theta_i - \sin\theta_z \frac{\partial(-h_f)}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} \overline{\sigma_{ij}^{3D}} dz + \frac{1}{\rho}(\overline{\tau_i^s} - \overline{\tau_i^f}) \end{aligned}$$

Il nous reste donc maintenant à détailler les différents termes de cette équation de conservation de la quantité de mouvement.

Commençons par le terme de frottement de surface. Ce frottement est pris en compte en suivant la loi proposée par Abbott :

$$\frac{\overline{\tau^s}}{\rho} = C_f \frac{\rho_a}{\rho} u_{i,10}^2$$

Dans cette formule, le terme de frottement de surface est ainsi lié au rapport de la masse volumique de l'air à celle du fluide, au carré de la vitesse du vent mesurée 10m au dessus de la surface de l'eau et à un coefficient de traînée valant approximativement 0,001.

Pour ce qui est de l'expression du terme de frottement, elle sera discutée plus en détail par la suite. On peut cependant déjà introduire ici la prise en compte d'une pente de frottement J. Ainsi, le terme de frottement de fond sera évalué par la formulation générale suivante :

$$\frac{\overline{\tau_i^f}}{\rho} = -ghJ_i$$

Il restera donc à déterminer la valeur de cette pente de frottement. On utilisera pour ce faire différentes lois de frottement qui seront détaillées plus loin.

Voyons ensuite le développement du terme de tensions visqueuses et turbulentes. En se rappelant de la formulation de la contrainte de tension établie précédemment, on peut développer ce terme comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} \overline{\sigma_{ij}^{3D}} dz = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} \left( \nu \frac{\partial U_i^{3D}}{\partial x_j} - \overline{u_i^{3D} u_j^{3D}} \right) dz$$

L'intégration du premier terme de tensions visqueuses est immédiate et donne l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} \nu \frac{\partial U_i^{3D}}{\partial x_j} dz = \nu h \frac{\partial U_i^{2D}}{\partial x_j}$$

Pour intégrer le terme de tensions turbulentes on se rappellera de l'hypothèse de Boussinesq que l'on appliquera de manière quelque peu différente aux équations moyennées intégrées sur la hauteur. En effet, l'équation de continuité ne traduit plus cette fois une divergence nulle. Ainsi, le terme correctif introduit pour assurer l'égalité quand  $i = j$  sera modifié. On a donc l'intégration suivante des tensions turbulentes :

$$- \int_{-h_f}^{h_s} \overline{u_i^{3D} u_j^{3D}} dz = h \left[ \nu_t \left( \frac{\partial U_i^{2D}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{2D}}{\partial x_i} \right) - \left( \nu_t \frac{\partial U_k^{2D}}{\partial x_k} + \overline{u_i^{3D} u_i^{3D}} \right) \delta_{ij} \right]$$

Il restera donc à déterminer la valeur de la viscosité turbulente. Pour ce faire, WOLF 2D prend en compte plusieurs modèles de turbulence qui seront décrits plus loin.

En remplaçant les différents termes que l'on vient d'évaluer dans l'équation de quantité de mouvement, en négligeant le frottement de surface devant le frottement de fond, en considérant une vitesse uniforme sur la hauteur et en considérant la pente suffisamment faible pour considérer les axes quasi-horizontaux, on obtient la formulation finale des équations moyennées sur le temps et intégrées sur la hauteur d'eau :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h U_i^{2D}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (h U_i^{2D}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h U_i^{2D} U_j^{2D}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= \\ gh \left( J_i - \frac{\partial(-h_f)}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ h \nu \frac{\partial U_i^{2D}}{\partial x_j} + h \left[ \nu_t \left( \frac{\partial U_i^{2D}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{2D}}{\partial x_i} \right) - \left( \nu_t \frac{\partial U_k^{2D}}{\partial x_k} + \overline{u_i^{3D} u_j^{3D}} \right) \delta_{ij} \right] \right\} & \end{aligned}$$

On obtient ainsi un système de 3 équations (1 de continuité et 2 de quantité de mouvement) pour 6 inconnues ( $h$ ,  $U^{2D}$ ,  $V^{2D}$ ,  $\nu_t$ ,  $J_x$  et  $J_y$ ). En développant une loi de frottement pour déterminer les pentes de frottement selon les deux axes  $x$  et  $y$  et en développant une loi de turbulence pour la détermination de la viscosité turbulente, on aura ainsi un système fermé qui nous permettra l'étude de n'importe quel écoulement ayant un plan préférentiel d'écoulement.

### XII.5.3 Prise en compte du frottement

Il nous reste donc à développer les lois de frottement et de turbulence intégrées dans le logiciel WOLF 2D. Commençons par détailler la prise en compte des différentes lois de frottement.

Comme on l'a vu dans l'étude des différentes lois de frottement, certaines lois ont un intérêt plus prononcé que d'autres. Ainsi, dans le cadre de ce travail, on comparera les lois de Manning et de Chézy à celles de Barr et Bathurst. En effet, la formule de Manning étant la plus couramment utilisée on s'en servira pour tirer des conclusions applicables à la plupart des lois empiriques (celles dont l'exposant du rayon hydraulique est supérieur à 0,5). La formule de Chézy sera étudiée pour son rôle de limite mis en évidence lors de l'étude théorique précédente. Les formules de Barr et de Bathurst représenteront les lois modernes. La formule de Bathurst couvrira les rugosités relatives supérieures à 0,25 tandis que celle de Barr couvrira celles inférieures à 0,25.

Le logiciel WOLF 2D était déjà programmé pour intégrer les lois de Manning, de Chézy et de Bathurst. Pour les besoins de cette étude, nous avons donc implanté dans le logiciel l'équation de Barr. Décrivons à présent la manière exacte dont le logiciel prend en compte ces différentes lois.

#### XII.5.3.1 Loi de Manning

La première formule étudiée lors de ce travail est celle de Manning. Il est important de noter que l'on se trouve ici face à une modélisation bidimensionnelle intégrée sur la hauteur. Dès lors, les formules établies précédemment pour les équations intégrées sur la section mouillée seront quelque peu modifiées. Ainsi, la formulation de Manning devient :

$$J_i = \frac{n^2 U_i^{2D}}{h^{4/3}} \sqrt{(U^{2D})^2 + (V^{2D})^2}$$

Elle sera donc calibrée via le coefficient de Manning  $n$  qui représentera la rugosité du fond. Afin de pouvoir comparer les différentes lois, on fixera la rugosité de fond  $k$  et l'on calculera le coefficient de Manning par la formulation suivante :

$$\frac{1}{n} = \frac{26,61}{k^{1/6}}$$

On notera que cette formulation tient uniquement compte du frottement de fond en considérant celui-ci comme plan. Il existe cependant dans WOLF 2D des améliorations tenant compte des effets topographiques sur le terme de frottement. Cependant, ces améliorations n'ont été développées que pour la formule de Manning. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus par l'utilisation des différentes formules, on utilisera donc la formulation de base de Manning explicitée ci-dessus. De plus, l'erreur commise en négligeant les effets topographiques est suffisamment faible pour permettre une comparaison correcte des résultats.

### *XII.5.3.2 Loi de Chézy*

La deuxième loi implémentée dans le logiciel WOLF 2D est la loi de Chézy paramétrée par le coefficient de Chézy représentant l'état de rugosité du fond. Cette loi prend la forme suivante pour évaluer le terme de frottement des équations moyennées intégrées sur la hauteur :

$$J_i = \frac{C^2 U_i^{2D}}{h} \sqrt{(U^{2D})^2 + (V^{2D})^2}$$

Le coefficient de Chézy sera calculé par la formulation de Bazin adaptée au cas d'un bord lisse. Le but de l'utilisation de cette loi est en effet de mettre en évidence son rôle de limite pour une rugosité relative proche de 0. Il s'agit donc bien du cas d'un bord lisse. Pour rappel, la formulation de Bazin pour un fond lisse s'écrit comme suit :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{0,06}{\sqrt{h}}}$$

L'évaluation de la hauteur utilisée dans cette formule sera donc approximée au mieux avant modélisation en la prenant légèrement plus basse que la hauteur moyenne trouvée par l'utilisation de la loi de Manning.

### *XII.5.3.3 Loi de Bathurst*

La troisième loi existante dans le logiciel WOLF 2D est celle de Bathurst. Cette loi décrit normalement uniquement les écoulements sur macro-rugosité définie par une rugosité relative supérieure à 0,25. Cependant, on étendra ici quelque peu son domaine d'utilisation pour se rendre compte des résultats qu'elle fournit pour des rugosités relatives plus faibles.

La formule de Bathurst implémentée dans le logiciel pour une modélisation bidimensionnelle intégrée sur la hauteur est la suivante :

$$J_i = \frac{f U_i^{2D}}{8 gh} \sqrt{(U^{2D})^2 + (V^{2D})^2}$$

$$\text{avec } \sqrt{\frac{8}{f}} = 5,62 \log \frac{h}{k} + 4$$

Elle est donc paramétrée dans le logiciel directement par la hauteur de rugosité  $k$ . C'est cette rugosité  $k$  qui servira ainsi de paramètre de base à notre comparaison.

### XII.5.3.4 Loi de Barr

Pour les besoins de ce travail, la formulation de Barr a été implémentée dans le logiciel. Celle-ci, paramétrée également par la seule valeur de la rugosité  $k$ , s'écrit sous la forme suivante :

$$J_i = \frac{f}{8} \frac{U_i^{2D}}{gh} \sqrt{(U^{2D})^2 + (V^{2D})^2}$$

$$\text{avec } \sqrt{\frac{1}{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{14,8h} + \frac{4,518 \log\left(\frac{\text{Re}}{7}\right)}{\text{Re} \left( 1 + \frac{\text{Re}^{0,52} \left(\frac{k}{h}\right)^{0,7}}{76,531} \right)} \right)$$

$$\text{Re} = \frac{U_i^{2D} h}{\nu} \quad \text{et} \quad \nu = 10^{-6}$$

La forme la plus générale des lois modernes de frottement est en fait celle donnée par Colebrook. Cependant, son utilisation entraîne une surcharge de calcul non négligeable causée par sa forme implicite. C'est pourquoi on lui préférera, ici, la formulation explicite de Barr.

### XII.5.3.5 Loi continue Barr-Jonction-Bathurst

Enfin, afin de pouvoir valider la nouvelle formulation continue proposée précédemment, on l'a également implémentée dans le logiciel pour les besoins de ce travail. Cette formulation un peu spéciale fonctionne sur base du choix de la formulation de frottement en fonction de la valeur de la rugosité relative qu'elle calcule. On a ainsi la formulation suivante :

$$J_i = \frac{f}{8} \frac{U_i^{2D}}{gh} \sqrt{(U^{2D})^2 + (V^{2D})^2}$$

, avec, si la rugosité relative est supérieure à 0,35 (Macro-rugosité), le frottement calculé comme suit :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 5,62 \log \frac{h}{k} + 4$$

, si la rugosité relative est comprise entre 0,15 et 0,35, la formulation suivante :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 210,61 \left(\frac{k}{h}\right)^3 - 149,64 \left(\frac{k}{h}\right)^2 + 24,89 \left(\frac{k}{h}\right) + 2,91$$

, et enfin, si la rugosité relative est inférieure à 0,15, le calcul suivant du frottement :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{14,8h} + \frac{4,518 \log \left( \frac{Re}{7} \right)}{Re \left( 1 + \frac{Re^{0,52} \left( \frac{k}{h} \right)^{0,7}}{76,531} \right)} \right)$$

avec  $Re = \frac{U_i^{2D} h}{\nu}$  et  $\nu = 10^{-6}$

La continuité de ces trois équations permet d'assurer la continuité des résultats qu'elles fournissent. Ainsi, on pourra réaliser une modélisation correcte par l'utilisation de cette triple loi.

#### XII.5.4 Prise en compte de la turbulence

Enfin, il reste la turbulence à prendre en compte pour assurer la fermeture des équations implémentées dans le logiciel. On étudiera dans le cadre de ce travail trois lois de turbulence. Le choix de ces trois lois a été réalisé sur base des résultats obtenus par Smolders lors de ses études des lois de turbulence entreprises pour son mémoire de DEA. On comparera ainsi le cas d'un modèle sans prise en compte de la turbulence aux résultats obtenus par l'utilisation du modèle k-ε HACH n°2. Il s'agit d'un modèle à deux équations additionnelles décrivant ainsi de manière quasi-complète les phénomènes de turbulence.

##### XII.5.4.1 Modèle k-ε HACH n°2

Le modèle de turbulence étudié est un modèle à 2 équations additionnelles développé par Erpicum au cours de sa thèse de doctorat au sein du service d'Hydrodynamique Appliquée et de Construction Hydraulique (HACH) d'où le nom du modèle.

Ce modèle est basé sur l'observation que le mouvement turbulent peut être caractérisé par deux mouvements à échelles de longueur différentes. On met ainsi en évidence un mouvement turbulent à grande échelle causé par les gradients de vitesses et un mouvement turbulent à plus faible échelle causé essentiellement par le cisaillement de fond. Si le premier a plutôt un caractère bidimensionnel, se développant dans le plan préférentiel d'écoulement, le second a quant à lui un caractère tridimensionnel.

L'approche d'Erpicum consiste donc à prendre compte de ces deux collaborations turbulentes séparément. On utilisera ainsi un modèle à 2 équations additionnelles pour représenter les fluctuations turbulentes à grande échelle extraites des équations moyennées intégrées sur la hauteur. La turbulence à faible échelle sera, quant à elle, modélisée par un modèle à 0

équations additionnelles de Fischer pour les fluctuations turbulentes tridimensionnelles extraites des équations moyennées avant intégration sur la hauteur.

Epicum a donc établi ainsi un modèle complet comprenant les 3 équations de base moyennées et intégrées sur la hauteur, 2 équations de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et du taux de dissipation  $\varepsilon$  également intégrées sur la hauteur et une équation de Fischer pour la viscosité turbulente à petite échelle. WOLF 2D réalise donc la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (hU_j^{2D}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (hU_i^{2D}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (hU_i^{2D}U_j^{2D}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= \\ gh \left( J_i - \frac{\partial(-h_f)}{\partial x_i} \right) + v^* \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (hU_i^{2D}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_{t,2D} \frac{\partial}{\partial x_j} (hU_i^{2D}) - k' \right] & \\ \frac{\partial k'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (k'U_j^{2D}) = \frac{v^*}{h} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (k'h) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{v_{t,2D}}{\sigma_k} \frac{\partial k'}{\partial x_j} \right] - k' \frac{\partial U_j^{2D}}{\partial x_j} + P' - F' - \frac{\varepsilon'}{h} & \\ \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon'U_j^{2D}) = \frac{v^*}{h} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (\varepsilon'h) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{v_{t,2D}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x_j} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon'}{k'} [P' - (1 - c_{3\varepsilon})F'] - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon'^2}{hk'} & \end{aligned}$$

, avec :

$$\begin{aligned} v_{3D} &= c_v hu^* \\ v^* &= v + v_{3D} \\ v_{t,2D} &= c_\mu \frac{k'^2}{\varepsilon'} \\ P' &= v_{t,2D} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} Uh - \frac{\partial}{\partial y} Vh \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} U - \frac{\partial}{\partial y} V \right) + \left( \frac{\partial}{\partial y} Uh + \frac{\partial}{\partial x} Vh \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} U + \frac{\partial}{\partial x} V \right) \right] \\ F' &= \frac{gn^2}{h^{4/3}} \left[ 3k' \sqrt{U^2 + V^2} - v_{t,2D} \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} Uh - \frac{\partial}{\partial y} Vh \right) (U^2 - V^2) + 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} Uh - \frac{\partial}{\partial x} Vh \right) UV}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right] \end{aligned}$$

Les valeurs des constantes présentes dans ces équations sont reprises directement du modèle  $k$ - $\varepsilon$  classique. On a donc les valeurs suivantes des constantes :

$$c_v = 0,08 \quad c_\mu = 0,09 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad c_{1\varepsilon} = 1,44 \quad c_{2\varepsilon} = 1,92 \quad c_{3\varepsilon} = 0,8$$

On notera enfin la raison du choix d'étude de ce modèle de turbulence. Il existe en effet encore d'autres modèles de turbulence implémentés dans le logiciel WOLF 2D que nous n'étudierons pas dans le cadre de ce travail. Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  HACH n°2 a été choisi car les études

comparatives des différentes lois de turbulence réalisées par Smolders ont montré que ce modèle était le plus performant pour décrire la turbulence dans les écoulements à surface libre de type cours d'eau naturel.

## XII.6 Annexe 6 : Validation des résultats obtenus par l'étude de l'Ourthe à Moircy

### XII.6.1 Présentation du cas d'étude de Moircy

Le cas de Moircy étudié dans la partie qui suit est un cas déjà étudié auparavant par Jonet. En effet, dans le cadre de son travail de fin d'études comme géomètre, il s'était intéressé à ce tronçon d'Ourthe un peu particulier. Il a ainsi étudié les effets d'un réaménagement d'un tronçon de rivière de près de 120m. Pour se faire, il a inséré sur ce tronçon plusieurs obstacles de fortune (troncs d'arbres, rochers, ...).

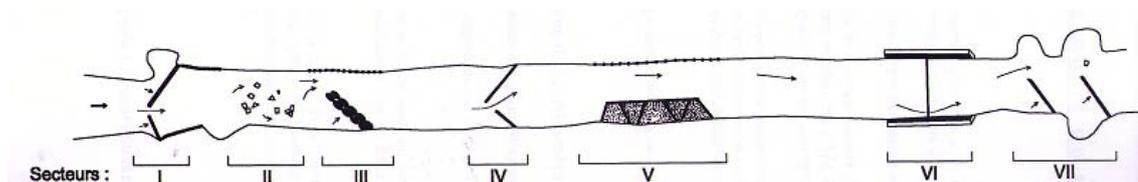


Figure 47. Représentation du tronçon étudié sur l'Ourthe à Moircy

Ce tronçon réaménagé nous offre donc un terrain d'études particulièrement intéressant. En effet, les obstacles implantés offrent à la fois l'influence de la macro-rugosité locale et celle de la turbulence sur la modélisation de l'écoulement. De plus, dans le cadre de son travail, Jonet a réalisé un relevé des hauteurs d'eau tout le long du tronçon pour un débit de  $0,56\text{m}^3/\text{s}$ . Ces données vont ainsi nous permettre de comparer les résultats de modélisations avec la réalité du terrain.

L'approche suivie pour l'étude de ce site sera de réaliser la modélisation des écoulements par les seules lois de frottements. On utilisera ainsi sur ce site la formulation de Manning ainsi que la nouvelle formulation émise au cours de ce travail. Calant le coefficient de Manning et la rugosité pour correspondre au mieux aux valeurs réellement mesurées, on pourra alors vérifier le bienfondé du diagramme de variation du coefficient de Manning avec la rugosité et la hauteur d'eau (cf. figure 32).

### XII.6.2 Etude des lois de frottement

On réalise donc, dans cette étude, la comparaison des modélisations obtenues par les deux lois de frottement étudiées aux résultats réellement mesurés sur site. On étudiera ainsi l'écoulement sur le tronçon d'Ourthe d'un débit de  $0,56\text{m}^3/\text{s}$ , seul débit pour lequel on possède des données de hauteur d'eau. On introduira la hauteur d'eau mesurée à l'aval comme condition limite et l'on cherchera à caler les coefficients représentatifs de la rugosité pour atteindre la hauteur d'eau mesurée à l'amont de la zone étudiée.

Pour la formulation de Manning, on obtient ainsi un coefficient de Manning valant 0,07. Pour la nouvelle formulation de frottement, on obtient par contre une hauteur de rugosité de 0,5m. Il est évident que ces deux valeurs ne traduisent pas la rugosité réelle du fond mais plutôt un ensemble de phénomènes de dissipation (turbulence, macro-rugosité, ...). Il s'agit donc de valeurs fictives permettant d'obtenir un résultat en un endroit précis.

D'ailleurs, si l'on compare l'allure des lignes d'eau obtenues par modélisation à celle de la ligne d'eau réellement observée, on se rend compte que les deux modèles, bien qu'approchant correctement la hauteur d'eau en amont de la zone, sont assez loin de représenter la physique réelle de l'écoulement.

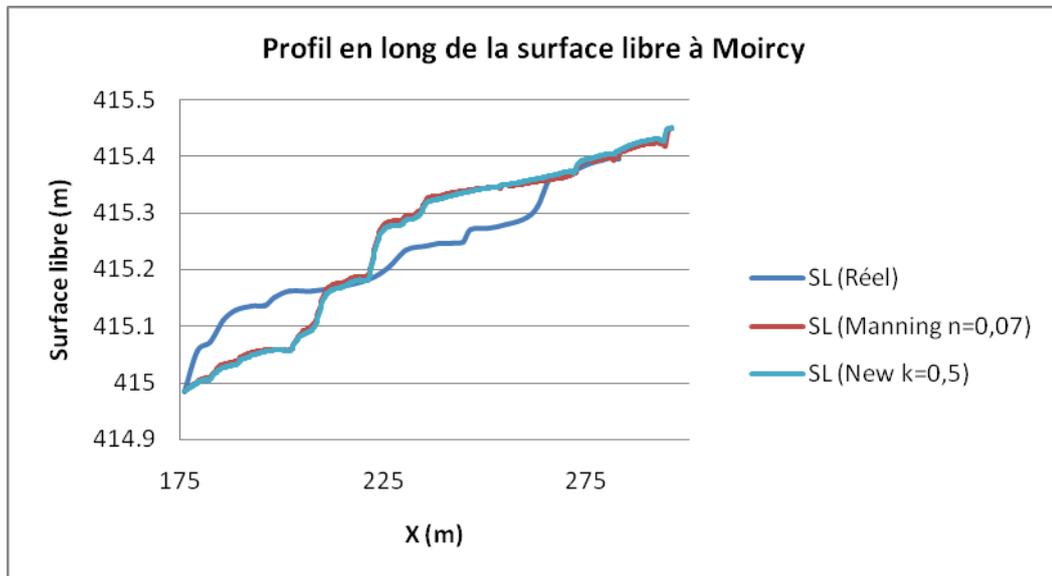


Figure 48. Profil en long de la surface libre à Moircy

Intéressons-nous plus précisément aux valeurs des coefficients calés pour ces deux modélisations. Dans un premier temps, on peut remarquer que la formule de Strickler, appliquée à la rugosité de fond déterminée pour la nouvelle formulation, préconise l'utilisation d'un coefficient de Strickler de 30. Or par le calage de la formulation de Manning, on obtient un coefficient de Strickler d'une valeur de 14. On voit donc comme attendu que la formulation de Strickler surestime le coefficient de Strickler, offrant ainsi un modèle plus lisse et sous-estimant alors les hauteurs d'eau.

En reprenant le diagramme de la figure 32, établi au chapitre VIII et fournissant les valeurs du coefficient de Strickler en fonction de la rugosité et de la hauteur d'eau, on peut rechercher la hauteur d'eau fournissant un coefficient de Strickler de 14 pour une rugosité de fond de 0,5m. On trouve ainsi une hauteur d'eau de 52cm. On peut remarquer que cette hauteur d'eau est bien équivalente à la hauteur d'eau moyenne observée sur le domaine de modélisation (hauteurs d'eau variant entre 30cm et 60cm). L'étude du cas de Moircy nous fournit donc une validation supplémentaire du diagramme de la figure 32.

### XII.6.3 Etude de la prise en compte de la turbulence

Comme on vient de le voir, les modélisations des seules lois de frottement, sans prise en compte de la turbulence, donnent un tracé de la ligne d'eau fort différent de celui mesuré réellement sur le site de Moircy. Etant donné la configuration du tronçon étudié (obstacles divers), on peut attribuer une bonne part de l'erreur commise à la non-prise en compte de la turbulence.

La prise en compte séparée des phénomènes de turbulence nous aurait amené à diminuer la valeur du coefficient de frottement. L'augmentation du niveau d'eau le long du lit se serait alors faite progressivement de l'aval vers l'amont au fur et à mesure des obstacles rencontrés, sources de turbulence et donc de pertes d'énergie.

**XII.7 Annexe 7 : Détails des valeurs des différents graphiques repris dans ce travail**

**XII.7.1 Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour  $k/h=0,01$  (Figure 2)**

Re	f (Barr 1)	f (Barr 2)	f (Yen)	f (Colebrook)	Re	f (Barr 1)	f (Barr 2)	f (Yen)	f (Colebrook)
1000	0.024822527	0.063124661	0.046221025	0.064077018	600000	0.024874074	0.02511724	0.026476801	0.025137376
2000	0.024846507	0.050896513	0.038907263	0.051341203	700000	0.024874095	0.02507978	0.026462698	0.025100309
3000	0.02485498	0.045435326	0.035818433	0.045729911	800000	0.024874111	0.025051759	0.026451957	0.025072397
4000	0.024859371	0.04216578	0.0340455	0.042377654	900000	0.024874124	0.025030048	0.02644349	0.02505062
5000	0.024862075	0.039931305	0.0328755	0.040093227	1000000	0.024874134	0.025012758	0.026436637	0.025032867
6000	0.024863915	0.038282798	0.032037866	0.038410901	2000000	0.024874182	0.024936748	0.026404611	0.02495402
7000	0.024865252	0.037004112	0.031404995	0.037107617	3000000	0.024874199	0.024912811	0.026393286	0.024927531
8000	0.024866269	0.0359765	0.03090809	0.036050422	4000000	0.024874208	0.024901419	0.026387416	0.024914248
9000	0.02486707	0.035128533	0.030506501	0.03518975	5000000	0.024874213	0.02489487	0.026383801	0.024906265
10000	0.024867719	0.034414306	0.0301174534	0.03446508	6000000	0.024874217	0.024890666	0.02638134	0.024900937
20000	0.024870744	0.030642576	0.028528576	0.030644157	7000000	0.02487422	0.024887762	0.026379552	0.02489713
30000	0.024871812	0.029071087	0.027902418	0.029058415	8000000	0.024874222	0.024885651	0.026378192	0.024894272
40000	0.024872365	0.028187448	0.027567085	0.028175593	9000000	0.024874223	0.024884054	0.02637712	0.024892049
50000	0.024872706	0.027615733	0.027356574	0.027601481	10000000	0.024874224	0.02488281	0.026376253	0.02489027
60000	0.024872938	0.027213702	0.027211487	0.027199603	20000000	0.024874231	0.024877693	0.026372207	0.024882259
70000	0.024873106	0.026914807	0.027105115	0.026901991	30000000	0.024874233	0.024876244	0.026370778	0.024879586
80000	0.024873234	0.026683516	0.027023614	0.026672471	40000000	0.024874234	0.024875595	0.026370038	0.024878249
90000	0.024873335	0.026499042	0.026959073	0.026489947	50000000	0.024874234	0.024875238	0.026369582	0.024877447
100000	0.024873417	0.026348379	0.026906632	0.026341256	60000000	0.024874235	0.024875016	0.026369272	0.024876912
200000	0.024873798	0.025632157	0.026659175	0.025639487	70000000	0.024874235	0.024874866	0.026369047	0.02487653
300000	0.024873932	0.025378078	0.026570697	0.025392231	80000000	0.024874235	0.02487476	0.026368876	0.024876244
400000	0.024874002	0.025248268	0.026524632	0.025265794	90000000	0.024874236	0.024874681	0.026368741	0.024876021
500000	0.024874045	0.025169726	0.026496189	0.025188986	100000000	0.024874236	0.02487462	0.026368631	0.024875842

**XII.7.2 Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour  $k/h=0,1$  (Figure 3)**

Re	f (Barr 1)	f (Barr 2)	f (Yen)	f (Colebrook)	Re	f (Barr 1)	f (Barr 2)	f (Yen)	f (Colebrook)
1000	0.052917082	0.076694012	0.068329536	0.077054327	600000	0.053077641	0.053110269	0.057865914	0.053135138
2000	0.052991745	0.066839563	0.063627438	0.066768626	700000	0.053077708	0.053104464	0.057861299	0.05312701
3000	0.053018141	0.062910468	0.061902868	0.062757183	800000	0.053077758	0.053100265	0.057857788	0.053120911
4000	0.053031821	0.06075211	0.060994156	0.060590618	900000	0.053077797	0.053097105	0.057855022	0.053116165
5000	0.053040247	0.059376416	0.060429057	0.059224061	1000000	0.053077829	0.053094652	0.057852784	0.053112368
6000	0.05304598	0.058419248	0.060042005	0.058281219	2000000	0.053077979	0.053084688	0.057842341	0.053095269
7000	0.053050146	0.057713322	0.059759495	0.05759063	3000000	0.053078032	0.053081915	0.057838655	0.053089565
8000	0.053053316	0.057170515	0.059543766	0.057062637	4000000	0.053078059	0.053080686	0.057836745	0.053086712
9000	0.053055813	0.05673982	0.059373376	0.056645686	5000000	0.053078076	0.053080012	0.057835569	0.053085001
10000	0.053057834	0.056389593	0.059235223	0.056307986	6000000	0.053078087	0.053079596	0.057834769	0.053083859
20000	0.053067262	0.054745711	0.058586854	0.054739464	7000000	0.053078096	0.053079316	0.057834188	0.053083044
30000	0.053070591	0.054172919	0.058356456	0.054196558	8000000	0.053078102	0.053079118	0.057833745	0.053082433
40000	0.053072316	0.053883361	0.058236802	0.053921175	9000000	0.053078107	0.05307897	0.057833397	0.053081957
50000	0.053073377	0.053709552	0.058163024	0.053754635	10000000	0.053078111	0.053078858	0.057833115	0.053081576
60000	0.0530741	0.053594157	0.058112778	0.053643049	20000000	0.05307813	0.053078416	0.0578318	0.053079864
70000	0.053074625	0.053512258	0.058076252	0.053563066	30000000	0.053078136	0.0530783	0.057831336	0.053079293
80000	0.053075024	0.053451298	0.058048445	0.053502925	40000000	0.05307814	0.05307825	0.057831096	0.053079008
90000	0.053075339	0.053404272	0.058026536	0.053456057	50000000	0.053078142	0.053078223	0.057830948	0.053078837
100000	0.053075593	0.053366971	0.058008805	0.053418504	60000000	0.053078143	0.053078206	0.057830847	0.053078722
200000	0.05307678	0.053205183	0.057926011	0.053248867	70000000	0.053078145	0.053078196	0.057830774	0.053078641
300000	0.0530772	0.053155384	0.057896757	0.053192083	80000000	0.053078145	0.053078188	0.057830718	0.05307858
400000	0.053077417	0.053132022	0.0578816	0.053163646	90000000	0.053078146	0.053078182	0.057830674	0.053078532
500000	0.05307755	0.053118732	0.057872266	0.053146512	100000000	0.053078146	0.053078178	0.057830639	0.053078494

**XII.7.3 Comparaison des lois de Barr 1 et 2, de Yen et de Colebrook pour  $k/h=1$  (Figure 4)**

Re	f (Barr 1)	f (Barr 2)	f (Yen)	f (Colebrook)	Re	f (Barr 1)	f (Barr 2)	f (Yen)	f (Colebrook)
1000	0.181521401	0.195867328	0.222766548	0.194030734	600000	0.182543458	0.182551954	0.214685541	0.182566341
2000	0.181996184	0.189186715	0.218994154	0.188359761	700000	0.182543879	0.182550939	0.214682239	0.182563537
3000	0.182164242	0.186874618	0.217666585	0.186438716	800000	0.1825442	0.182550217	0.214679726	0.182561434
4000	0.182251381	0.185711837	0.216979797	0.185472675	900000	0.182544453	0.182549683	0.214677748	0.182559799
5000	0.182305062	0.185016952	0.216557239	0.18489041	1000000	0.182544657	0.182549274	0.214676147	0.18255849
6000	0.182341601	0.184557405	0.216269851	0.184501449	2000000	0.182545611	0.182547673	0.214668677	0.182552601
7000	0.182368152	0.184232389	0.216061138	0.184223226	3000000	0.182545947	0.182547251	0.21466604	0.182550638
8000	0.182388359	0.183991232	0.215902363	0.184014341	4000000	0.182546121	0.18254707	0.214664674	0.182549656
9000	0.182404276	0.183805734	0.215777328	0.183851743	5000000	0.182546229	0.182546972	0.214663833	0.182549067
10000	0.182417155	0.183658982	0.215676189	0.183721582	6000000	0.182546302	0.182546912	0.214663261	0.182548675
20000	0.182477267	0.183028102	0.215204431	0.183134926	7000000	0.182546355	0.182546872	0.214662845	0.182548394
30000	0.182498495	0.182836807	0.215037951	0.182939031	8000000	0.182546395	0.182546844	0.214662529	0.182548184
40000	0.182509492	0.182747882	0.214951733	0.182841017	9000000	0.182546427	0.182546823	0.214662279	0.18254802
50000	0.182516263	0.182697618	0.214898655	0.182782188	10000000	0.182546453	0.182546808	0.214662078	0.182547889
60000	0.182520871	0.182665768	0.214862542	0.182742959	20000000	0.182546573	0.182546747	0.214661137	0.1825473
70000	0.182524218	0.182644004	0.214836308	0.182714935	30000000	0.182546615	0.182546731	0.214660805	0.182547104
80000	0.182526765	0.182628311	0.214816347	0.182693914	40000000	0.182546637	0.182546724	0.214660634	0.182547006
90000	0.182528771	0.182616531	0.214800626	0.182677563	50000000	0.182546651	0.182546721	0.214660528	0.182546947
100000	0.182530394	0.182607408	0.214787907	0.182664482	60000000	0.182546666	0.182546719	0.214660456	0.182546908
200000	0.182537967	0.182570573	0.214728565	0.182605605	70000000	0.182546667	0.182546717	0.214660403	0.18254688
300000	0.18254064	0.182560412	0.214707617	0.182585975	80000000	0.182546672	0.182546716	0.214660363	0.182546859
400000	0.182542025	0.182555923	0.214696767	0.182576152	90000000	0.182546676	0.182546715	0.214660332	0.182546842
500000	0.182542878	0.18255347	0.214690086	0.182570266	100000000	0.182546679	0.182546715	0.214660307	0.182546829

### XII.7.4 Courbes de correspondance de la loi de Manning aux lois modernes (Figure 5)

Re	k/h (Colebrook)	k/h (Nikuradse)	Re	k/h (Colebrook)	k/h (Nikuradse)	Re	k/h (Colebrook)	k/h (Nikuradse)
1000	0.2107	0.037	20000	0.0652	0.037	230000	0.0406	0.037
1500	0.1771	0.037	25000	0.061	0.037	240000	0.0405	0.037
2000	0.1566	0.037	30000	0.0579	0.037	250000	0.0403	0.037
2500	0.1425	0.037	35000	0.0556	0.037	260000	0.0402	0.037
3000	0.132	0.037	40000	0.0538	0.037	270000	0.0401	0.037
3500	0.1239	0.037	45000	0.0523	0.037	280000	0.04	0.037
4000	0.1173	0.037	50000	0.0511	0.037	290000	0.0399	0.037
4500	0.1118	0.037	55000	0.05	0.037	300000	0.0398	0.037
5000	0.1072	0.037	60000	0.0491	0.037	310000	0.0397	0.037
5500	0.1032	0.037	65000	0.0483	0.037	320000	0.0396	0.037
6000	0.0998	0.037	70000	0.0477	0.037	330000	0.0395	0.037
6500	0.0967	0.037	75000	0.0471	0.037	340000	0.0395	0.037
7000	0.094	0.037	80000	0.0465	0.037	350000	0.0394	0.037
7500	0.0916	0.037	85000	0.046	0.037	360000	0.0393	0.037
8000	0.0894	0.037	90000	0.0456	0.037	370000	0.0392	0.037
8500	0.0874	0.037	95000	0.0452	0.037	380000	0.0392	0.037
9000	0.0855	0.037	100000	0.0448	0.037	390000	0.0391	0.037
9500	0.0839	0.037	110000	0.0442	0.037	400000	0.0391	0.037
10000	0.0823	0.037	120000	0.0437	0.037	410000	0.039	0.037
10500	0.0809	0.037	130000	0.0432	0.037	420000	0.039	0.037
11000	0.0795	0.037	140000	0.0428	0.037	430000	0.0389	0.037
11500	0.0783	0.037	150000	0.0424	0.037	440000	0.0389	0.037
12000	0.0771	0.037	160000	0.0421	0.037	450000	0.0388	0.037
12500	0.0761	0.037	170000	0.0418	0.037	460000	0.0388	0.037
13000	0.075	0.037	180000	0.0416	0.037	470000	0.0387	0.037
13500	0.0741	0.037	190000	0.0414	0.037	480000	0.0387	0.037
14000	0.0732	0.037	200000	0.0411	0.037	490000	0.0387	0.037
14500	0.0723	0.037	210000	0.041	0.037	500000	0.0386	0.037
15000	0.0715	0.037	220000	0.0408	0.037			

### XII.7.5 Courbes donnant la valeur du coefficient de Strickler à utiliser pour correspondre aux différentes lois modernes (Figure 6)

Re	Colebrook	Nikuradse	Strickler	Re	Colebrook	Nikuradse	Strickler	Re	Colebrook	Nikuradse	Strickler
1000	22.51938047	26.613	26	20000	25.88094064	26.613	26	230000	26.51846629	26.613	26
1500	23.22341922	26.613	26	25000	25.99107749	26.613	26	240000	26.52217107	26.613	26
2000	23.66967075	26.613	26	30000	26.07071241	26.613	26	250000	26.52556358	26.613	26
2500	23.98659861	26.613	26	35000	26.13142759	26.613	26	260000	26.52873568	26.613	26
3000	24.22712236	26.613	26	40000	26.17939201	26.613	26	270000	26.53168275	26.613	26
3500	24.41812226	26.613	26	45000	26.21828499	26.613	26	280000	26.53442816	26.613	26
4000	24.57444381	26.613	26	50000	26.25058772	26.613	26	290000	26.53699208	26.613	26
4500	24.70549736	26.613	26	55000	26.27776767	26.613	26	300000	26.53939203	26.613	26
5000	24.81755871	26.613	26	60000	26.30107766	26.613	26	310000	26.54164326	26.613	26
5500	24.91466103	26.613	26	65000	26.3212582	26.613	26	320000	26.54375916	26.613	26
6000	25.00004975	26.613	26	70000	26.33900532	26.613	26	330000	26.54575147	26.613	26
6500	25.07560177	26.613	26	75000	26.3546195	26.613	26	340000	26.54765215	26.613	26
7000	25.1432892	26.613	26	80000	26.36846703	26.613	26	350000	26.5494281	26.613	26
7500	25.20433149	26.613	26	85000	26.38090335	26.613	26	360000	26.55110848	26.613	26
8000	25.25965278	26.613	26	90000	26.39214879	26.613	26	370000	26.55270057	26.613	26
8500	25.31012411	26.613	26	95000	26.40231327	26.613	26	380000	26.55423184	26.613	26
9000	25.3562858	26.613	26	100000	26.41154635	26.613	26	390000	26.55566794	26.613	26
9500	25.39904169	26.613	26	110000	26.42780996	26.613	26	400000	26.55705271	26.613	26
10000	25.4383804	26.613	26	120000	26.44161991	26.613	26	410000	26.55835467	26.613	26
10500	25.47502532	26.613	26	130000	26.45345739	26.613	26	420000	26.55961332	26.613	26
11000	25.50899239	26.613	26	140000	26.46376706	26.613	26	430000	26.56079895	26.613	26
11500	25.54088752	26.613	26	150000	26.47279145	26.613	26	440000	26.56194824	26.613	26
12000	25.57063786	26.613	26	160000	26.48080251	26.613	26	450000	26.56303225	26.613	26
12500	25.59876915	26.613	26	170000	26.48792745	26.613	26	460000	26.56408606	26.613	26
13000	25.6249973	26.613	26	180000	26.49434676	26.613	26	470000	26.56508069	26.613	26
13500	25.64994707	26.613	26	190000	26.50012757	26.613	26	480000	26.56605067	26.613	26
14000	25.67344969	26.613	26	200000	26.50532582	26.613	26	490000	26.56698132	26.613	26
14500	25.69563083	26.613	26	210000	26.51012397	26.613	26	500000	26.5678621	26.613	26
15000	25.71675056	26.613	26	220000	26.51447527	26.613	26				

**XII.7.6 Courbes de correspondance des différentes lois empiriques à la loi de Colebrook (Figure 7)**

Re	Manning	Tillman	Christen	Hagen	Re	Manning	Tillman	Christen	Hagen	Re	Manning	Tillman	Christen	Hagen
1000	0.2107	0.294	0.1324	0.3346	20000	0.0652	0.1253	0.0284	0.1608	230000	0.0406	0.1026	0.0097	0.1398
1500	0.1771	0.2542	0.1078	0.2929	25000	0.061	0.121	0.0254	0.1567	240000	0.0405	0.1024	0.0096	0.1397
2000	0.1566	0.2301	0.093	0.2677	30000	0.0579	0.1179	0.0232	0.1538	250000	0.0403	0.1023	0.0095	0.1396
2500	0.1425	0.2135	0.0829	0.2503	35000	0.0556	0.1156	0.0216	0.1517	260000	0.0402	0.1022	0.0093	0.1395
3000	0.132	0.2011	0.0754	0.2376	40000	0.0538	0.1139	0.0202	0.1501	270000	0.0401	0.1022	0.0092	0.1395
3500	0.1239	0.1916	0.0696	0.2277	45000	0.0523	0.1125	0.0191	0.1488	280000	0.04	0.1021	0.0091	0.1394
4000	0.1173	0.1839	0.0649	0.2197	50000	0.0511	0.1113	0.0182	0.1477	290000	0.0399	0.102	0.009	0.1393
4500	0.1118	0.1775	0.0611	0.2132	55000	0.05	0.1104	0.0174	0.1468	300000	0.0398	0.1019	0.0089	0.1393
5000	0.1072	0.1722	0.0578	0.2077	60000	0.0491	0.1096	0.0168	0.1461	310000	0.0397	0.1019	0.0088	0.1392
5500	0.1032	0.1676	0.055	0.203	65000	0.0483	0.1089	0.0162	0.1455	320000	0.0396	0.1018	0.0087	0.1391
6000	0.0998	0.1636	0.0526	0.1989	70000	0.0477	0.1083	0.0156	0.1449	330000	0.0395	0.1017	0.0086	0.1391
6500	0.0967	0.1601	0.0504	0.1954	75000	0.0471	0.1078	0.0152	0.1444	340000	0.0395	0.1017	0.0086	0.139
7000	0.094	0.157	0.0485	0.1922	80000	0.0465	0.1073	0.0148	0.144	350000	0.0394	0.1016	0.0085	0.139
7500	0.0916	0.1542	0.0468	0.1894	85000	0.046	0.1069	0.0144	0.1437	360000	0.0393	0.1016	0.0084	0.139
8000	0.0894	0.1517	0.0453	0.1869	90000	0.0456	0.1065	0.014	0.1433	370000	0.0392	0.1015	0.0083	0.1389
8500	0.0874	0.1495	0.0439	0.1846	95000	0.0452	0.1062	0.0137	0.143	380000	0.0392	0.1015	0.0083	0.1389
9000	0.0855	0.1474	0.0426	0.1826	100000	0.0448	0.1059	0.0134	0.1428	390000	0.0391	0.1014	0.0082	0.1388
9500	0.0839	0.1455	0.0414	0.1807	110000	0.0442	0.1054	0.0129	0.1423	400000	0.0391	0.1014	0.0082	0.1388
10000	0.0823	0.1438	0.0403	0.179	120000	0.0437	0.1049	0.0124	0.1419	410000	0.039	0.1014	0.0081	0.1388
10500	0.0809	0.1422	0.0393	0.1774	130000	0.0432	0.1046	0.012	0.1416	420000	0.039	0.1013	0.008	0.1387
11000	0.0795	0.1407	0.0384	0.1759	140000	0.0428	0.1042	0.0117	0.1413	430000	0.0389	0.1013	0.008	0.1387
11500	0.0783	0.1394	0.0376	0.1746	150000	0.0424	0.1039	0.0114	0.141	440000	0.0389	0.1013	0.0079	0.1387
12000	0.0771	0.1381	0.0367	0.1733	160000	0.0421	0.1037	0.0111	0.1408	450000	0.0388	0.1012	0.0079	0.1387
12500	0.0761	0.1369	0.036	0.1722	170000	0.0418	0.1035	0.0109	0.1406	460000	0.0388	0.1012	0.0078	0.1386
13000	0.075	0.1358	0.0353	0.1711	180000	0.0416	0.1033	0.0106	0.1404	470000	0.0387	0.1012	0.0078	0.1386
13500	0.0741	0.1347	0.0346	0.17	190000	0.0414	0.1031	0.0104	0.1403	480000	0.0387	0.1011	0.0077	0.1386
14000	0.0732	0.1338	0.034	0.1691	200000	0.0411	0.1029	0.0102	0.1401	490000	0.0387	0.1011	0.0077	0.1386
14500	0.0723	0.1328	0.0334	0.1682	210000	0.041	0.1028	0.01	0.14	500000	0.0386	0.1011	0.0077	0.1385
15000	0.0715	0.132	0.0328	0.1673	220000	0.0408	0.1027	0.0099	0.1399					

**XII.7.7 Variation du coefficient de Manning avec la hauteur d'eau pour  $k=0,1m$  (Figure 8)**

H	K	H	K
100	34.29568413	4	38.98609946
50	35.71680189	3.846153846	39.00067373
33.33333333	36.4747391	3.571428571	39.02414013
25	36.97165486	3.333333333	39.04109949
20	37.33036803	3.125	39.05259622
16.66666667	37.60434438	2.941176471	39.05946496
14.28571429	37.82150971	2.777777778	39.06238145
12.5	37.99820835	2.564102564	39.06052959
11.11111111	38.14478852	2.380952381	39.05249374
10	38.26819183	2.173913043	39.0340918
9.090909091	38.3732861	1.960784314	39.00149074
8.333333333	38.46360726	1.754385965	38.95191623
7.692307692	38.54179842	1.5625	38.88379493
7.142857143	38.60988284	1.388888889	38.79662242
6.666666667	38.66944066	1.19047619	38.65411445
6.25	38.72172735	0.99009901	38.43936565
5.882352941	38.76775528	0.793650794	38.11407893
5.555555556	38.80835151	0.598802395	37.58516494
5.263157895	38.84419942	0.497512438	37.1622294
5	38.87586949	0.398406375	36.57120706
4.761904762	38.90384226	0.299401198	35.66697914
4.545454545	38.92852584	0.199600798	34.07938064
4.347826087	38.95026942	0.1	30.43400846
4.166666667	38.96937374		

### XII.7.8 Courbes de l'erreur commise sur la valeur du coefficient de Strickler par l'utilisation d'une valeur constante de ce coefficient (Figure 9)

H	Erreur (k=0,1)	H	Erreur (k=0,2)	H	Erreur (k=0,1)	H	Erreur (k=0,2)
100	13.89927195	200	13.89927195	4	0.196057264	8	0.196057264
50	9.367391451	100	9.367391451	3.846153846	0.158614702	7.692307692	0.158614702
33.33333333	7.094760663	66.66666667	7.094760663	3.571428571	0.098386299	7.142857143	0.098386299
25	5.655358639	50	5.655358639	3.333333333	0.054903801	6.666666667	0.054903801
20	4.640100274	40	4.640100274	3.125	0.025448535	6.25	0.025448535
16.66666667	3.877717266	33.33333333	3.877717266	2.941176471	0.007858716	5.882352941	0.007858716
14.28571429	3.281267303	28.57142857	3.281267303	2.777777778	0.000391897	5.555555556	0.000391897
12.5	2.80099045	25	2.80099045	2.564102564	0.005132922	5.128205128	0.005132922
11.11111111	2.405953877	22.22222222	2.405953877	2.380952381	0.025711018	4.761904762	0.025711018
10	2.075725741	20	2.075725741	2.173913043	0.072866402	4.347826087	0.072866402
9.090909091	1.796167349	18.18181818	1.796167349	1.960784314	0.156516576	3.921568627	0.156516576
8.333333333	1.557127151	16.66666667	1.557127151	1.785714286	0.261047142	3.571428571	0.261047142
7.692307692	1.351094486	15.38461538	1.351094486	1.587301587	0.433142978	3.174603175	0.433142978
7.142857143	1.172372635	14.28571429	1.172372635	1.388888889	0.685400179	2.777777778	0.685400179
6.666666667	1.016549168	13.33333333	1.016549168	1.19047619	1.056601838	2.380952381	1.056601838
6.25	0.880144596	12.5	0.880144596	0.99009901	1.621173689	1.98019802	1.621173689
5.882352941	0.760372254	11.76470588	0.760372254	0.793650794	2.488465253	1.587301587	2.488465253
5.555555556	0.65496992	11.11111111	0.65496992	0.699300699	3.086680415	1.398601399	3.086680415
5.263157895	0.56207907	10.52631579	0.56207907	0.598802395	3.930725328	1.19760479	3.930725328
5	0.480156581	10	0.480156581	0.497512438	5.113539115	0.995024876	5.113539115
4.761904762	0.40790901	9.523809524	0.40790901	0.398406375	6.812264835	0.796812749	6.812264835
4.545454545	0.344242921	9.090909091	0.344242921	0.299401198	9.520165371	0.598802395	9.520165371
4.347826087	0.288226816	8.695652174	0.288226816	0.199600798	14.62219618	0.399201597	14.62219618
4.166666667	0.239061577	8.333333333	0.239061577	0.1	28.35159255	0.2	28.35159255

### XII.7.9 Courbes de hauteurs d'eau évaluées par les différentes lois de frottement pour $k=0,09m$ et $J=0,005$ (Figures 10 et 11)

U	H (Manning)	H (Colebrook)	H (Chézy)	H (Tillman)	H (Hagen)	H (Christen)
0.1	0.006709534	0.020801109	0.001607862	0.008665989	0.00948089	0.004263424
1	0.212174102	0.24669274	0.043746207	0.23248213	0.238456594	0.169729961
2	0.600118986	0.628476877	0.142024067	0.625795487	0.629535136	0.514525027
3	1.102488975	1.118345167	0.293411684	1.11684105	1.110826897	0.984356739
4	1.697392818	1.70248579	0.497743936	1.684516533	1.661998441	1.559748215
5	2.372178578	2.372384661	0.754970691	2.316957959	2.271741552	2.229002308
6	3.118309722	3.121812504	1.065071238	3.00631317	2.932628328	2.984011632
7	3.929519363	3.946995818	1.428035424	3.746903346	3.639318256	3.81869854
8	4.800951887	4.84407896	1.843857676	4.534382253	4.38774369	4.728272418
9	5.728700759	5.810198159	2.312538218	5.365289504	5.174679288	5.708822319
10	6.709534234	6.842949073	2.834067278	6.236788326	5.997490377	6.757071449
11	7.740720759	7.940272533	3.408447744	7.146500228	6.853974878	7.87021882
12	8.819911801	9.10037684	4.035678616	8.092394949	7.742258429	9.045831732
13	9.945059862	10.32168276	4.715759184	9.072714028	8.66072177	10.28176977
14	11.11435915	11.60278329	5.448688929	10.08591587	9.607948671	11.57612928
15	12.32620146	12.94241352	6.234467465	11.13063512	10.58268753	12.92720172
16	13.57914254	14.33942736	7.073094496	12.2056519	11.58382235	14.33344167
17	14.87187598	15.79277945	7.964569794	13.30986803	12.61035036	15.79344184
18	16.20321262	17.30151071	8.908893179	14.44228835	13.66136443	17.30591313
19	17.57206393	18.86473662	9.906064508	15.60200578	14.73603912	18.86966859
20	18.97742862	20.48163771	10.95608366	16.78818922	15.83361928	20.48361027

### XII.7.10 Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau calculée par les différentes lois empiriques pour $k=0,09\text{m}$ et $J=0,005$ (Figures 12 et 13)

U	k/H	dH/H (Manning)	dH/H (Chézy)	dH/H (Tillman)	dH/H (Hagen)	dH/H (Christen)
1	0.364826302	0.139925632	0.822669258	0.057604491	0.033386253	0.311978289
2	0.143203359	0.045121614	0.774018628	0.00426649	-0.001683846	0.181314308
3	0.080476049	0.014178263	0.737637634	0.001344949	0.006722674	0.119809548
4	0.052863877	0.002991492	0.707636951	0.010554718	0.023781314	0.083840685
5	0.037936512	8.68674E-05	0.681767167	0.023363286	0.042422762	0.060438071
6	0.028829406	0.001122035	0.65882921	0.036997524	0.060600749	0.044141303
7	0.022802152	0.004427786	0.638196874	0.050694878	0.07795234	0.032505045
8	0.018579383	0.008903049	0.61935846	0.063933043	0.094204755	0.023906824
9	0.015490005	0.014026613	0.601986343	0.076573749	0.109379896	0.017447914
10	0.013152224	0.019496687	0.585841244	0.0885818	0.123551803	0.012549797
11	0.011334624	0.025131603	0.570739199	0.099967892	0.136808611	0.008822583
12	0.0098897	0.030819058	0.556537198	0.110762654	0.149237601	0.00599372
13	0.008719508	0.036488517	0.543121088	0.121004371	0.160919593	0.003866907
14	0.00775676	0.042095429	0.530398113	0.130733065	0.17192725	0.002297209
15	0.006953881	0.047611835	0.518291742	0.139987677	0.182325034	0.001175345
16	0.006276401	0.053020584	0.506738008	0.148804789	0.192169808	0.000417428
17	0.005698807	0.058311678	0.495682833	0.157218141	0.201511653	-4.19422E-05
18	0.005201858	0.063479896	0.485080041	0.165258538	0.210394707	-0.000254453
19	0.004770806	0.06852323	0.474889859	0.172953957	0.218857946	-0.000261439
20	0.00439418	0.073441837	0.465077753	0.180329744	0.226935878	-9.63087E-05

### XII.7.11 Représentation des hauteurs d'eau fournies par les différentes lois pour $U=1\text{m/s}$ et $J=0,005$ (Figures 14 et 15)

k	H (Manning)	H (Colebrook)	H (Chézy)	H (Tillman)	H (Hagen)	H (Christen)
0.005	0.103008781	0.103242035	0.043746207	0.101798245	0.10027189	0.095214701
0.01	0.122498775	0.124617142	0.043746207	0.12409345	0.123425211	0.109372971
0.02	0.145676415	0.151415226	0.043746207	0.15127161	0.151924758	0.125636552
0.03	0.161217454	0.171740569	0.043746207	0.169851434	0.171556275	0.136249294
0.04	0.173239429	0.188095297	0.043746207	0.184402158	0.187005005	0.1443185
0.05	0.183178394	0.202264704	0.043746207	0.19654164	0.199939724	0.150905132
0.06	0.191720944	0.214312345	0.043746207	0.207051217	0.211169545	0.15650934
0.07	0.199253636	0.22572906	0.043746207	0.216374183	0.221154901	0.161409695
0.08	0.206017562	0.236278464	0.043746207	0.224788749	0.230185471	0.165778424
0.09	0.212174102	0.24669274	0.043746207	0.23248213	0.238456594	0.169729961
0.1	0.217837049	0.256060155	0.043746207	0.239586942	0.246106886	0.173344477
0.15	0.241076324	0.296203096	0.043746207	0.269014032	0.277908492	0.187987192
0.2	0.259053369	0.330226524	0.043746207	0.292059754	0.302934295	0.199120516
0.25	0.273915588	0.360910095	0.043746207	0.311286503	0.323887584	0.208208287
0.3	0.28668968	0.387502144	0.043746207	0.327931778	0.342079064	0.215940578
0.4	0.30806811	0.436080759	0.043746207	0.356024828	0.372883459	0.228729409
0.5	0.325742366	0.479466668	0.043746207	0.379462497	0.398674976	0.239168517
0.6	0.340933407	0.519738142	0.043746207	0.399753315	0.421066966	0.248050587
0.7	0.354328639	0.556517308	0.043746207	0.417753144	0.440977525	0.255817127
0.8	0.366356788	0.590300871	0.043746207	0.433999126	0.458984263	0.262741096
0.9	0.377304837	0.623903726	0.043746207	0.44885272	0.475476682	0.26900386
1	0.38737514	0.654394027	0.043746207	0.462569965	0.490731181	0.274732482

### XII.7.12 Représentation de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau par l'utilisation des différentes lois empiriques (Figures 16 et 17)

k	k/H (Colebrook)	dH/H (Manning)	dH/H (Chézy)	dH/H (Tillman)	dH/H (Hagen)	dH/H (Christen)
0.005	0.048429886	0.002259296	0.57627524	0.013984523	0.028768758	0.077752571
0.01	0.080245782	0.016999001	0.648955144	0.004202406	0.009564744	0.122328042
0.02	0.132087113	0.037901147	0.711084493	0.000948488	-0.003365136	0.170251529
0.03	0.174682081	0.061273321	0.745277387	0.010999938	0.0010731	0.206656328
0.04	0.212658161	0.07898054	0.767425304	0.019634404	0.005796486	0.232737327
0.05	0.247200817	0.094363029	0.78371804	0.028294924	0.011494737	0.253922562
0.06	0.279965207	0.105413438	0.795876404	0.033881053	0.014664579	0.269713838
0.07	0.310106284	0.117288505	0.806200378	0.041442944	0.020263937	0.284940561
0.08	0.338583546	0.128073045	0.814853178	0.048627856	0.02578734	0.298376918
0.09	0.364826302	0.139925632	0.822669258	0.057604491	0.033386253	0.311978289
0.1	0.390533233	0.149273929	0.829156525	0.06433337	0.038870822	0.32303221
0.11	0.415180701	0.157976156	0.83488563	0.070746728	0.044183663	0.333142532
0.12	0.438892484	0.166119238	0.840000989	0.07686917	0.049323284	0.342458518
0.13	0.461769632	0.173772587	0.844610233	0.08272321	0.054292418	0.351095634
0.14	0.483896135	0.180992512	0.848795569	0.088329022	0.059095898	0.359145063
0.15	0.506409292	0.186111397	0.852310097	0.091791965	0.061763715	0.365343594
0.16	0.527330666	0.192532993	0.855820523	0.096878494	0.066174716	0.372379601
0.17	0.547675145	0.198657666	0.859066411	0.101786032	0.070460175	0.379025303
0.18	0.567485212	0.204515145	0.862081526	0.106529557	0.074628636	0.385323579
0.19	0.586797727	0.210131184	0.864893818	0.111122624	0.078688301	0.391310863
0.2	0.605644869	0.215528282	0.867526672	0.115577544	0.082646994	0.397018407

### XII.7.13 Variation des paramètres du polynôme de jonction avec le nombre de Reynolds (Figure 21)

Re	A	B	C	D
5000	199.1255791	-143.791546	25.00988008	2.643794915
10000	205.8164273	-147.6264229	25.23540715	2.747762738
50000	210.1835762	-149.6598259	25.05386209	2.873153877
100000	210.4951737	-149.7160133	24.97868114	2.892990415
500000	210.6119369	-149.6692778	24.90305579	2.908727962
1000000	210.6115813	-149.6554894	24.89353462	2.910386544
5000000	210.6080774	-149.644528	24.88714934	2.911428853
10000000	210.6075513	-149.6434686	24.88660108	2.91151352
50000000	210.6072099	-149.6428457	24.8862905	2.911560554
100000000	210.6071823	-149.6427988	24.88626784	2.911563926
500000000	210.6071672	-149.6427737	24.88625581	2.911565707
1000000000	210.6071661	-149.6427719	24.88625499	2.911565828
5000000000	210.6071655	-149.642771	24.88625456	2.911565891
10000000000	210.6071655	-149.642771	24.88625453	2.911565895

## XII.7.14 Hauteurs d'eau mesurées en aval d'Hamoir (Figure 24)

Q	H (Manning)	H (Bathurst)	H (Chézy)	H (Barr)	H (Barr-Jonction-Bathurst)
160	2.29	2.45	1.92	2.29	2.31
100	1.64	1.79	1.32	1.64	1.66
60	1.19	1.32	0.94	1.19	1.21
40	0.92	1.04	0.68	0.93	0.95
30	0.77	0.88		0.78	0.81
20	0.59	0.69		0.6	0.63
15	0.48	0.57		0.49	0.52
10	0.35	0.43		0.36	0.39
5	0.18	0.25		0.19	0.23
1	0	0		0	0.03

## XII.7.15 Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir centre (Figure 25)

Q	H (Manning)	H (Bathurst)	H (Chézy)	H (Barr)	H (Barr-Jonction-Bathurst)
160	2.25	2.47	1.74	2.25	2.26
100	1.67	1.86	1.26	1.67	1.69
60	1.23	1.39	0.93	1.24	1.26
40	0.98	1.11	0.73	0.99	1
30	0.83	0.95		0.84	0.85
20	0.66	0.76		0.68	0.7
15	0.57	0.66		0.58	0.6
10	0.45	0.53		0.47	0.5
5	0.3	0.37		0.31	0.35
1	0.07	0.12		0.09	0.17

## XII.7.16 Hauteurs d'eau mesurées à Hamoir (Station) (Figure 26)

Q	H (Manning)	H (Bathurst)	H (Chézy)	H (Barr)	H (Barr-Jonction-Bathurst)	H (Réel)
160	2.23	2.43	1.83	2.24	2.25	2.23
100	1.62	1.8	1.23	1.63	1.64	1.59
60	1.14	1.29	0.77	1.15	1.16	1.23
40	0.86	0.99	0.51	0.87	0.88	1.01
30	0.7	0.82		0.71	0.72	0.85
20	0.52	0.63		0.53	0.55	0.67
15	0.42	0.52		0.44	0.46	0.58
10	0.31	0.39		0.32	0.36	0.44
5	0.17	0.24		0.19	0.26	0.26
1	0.03	0.06		0.04	0.11	0.09

### XII.7.17 Erreur relative sur la hauteur d'eau mesurée à la station d'Hamoir (Figures 28 et 29)

Q	k/h (réel)	dH/H (Manning)	dH/H (Bathurst)	dH/H (Chézy)	dH/H (Barr)	dH/H (BJB)
160	0.0005625	0	0.089686099	-0.179372197	0.004484305	0.00896861
100	0.0009	0.018867925	0.132075472	-0.226415094	0.025157233	0.031446541
60	0.0015	-0.073170732	0.048780488	-0.37398374	-0.06504065	-0.056910569
40	0.00225	-0.148514851	-0.01980198	-0.495049505	-0.138613861	-0.128712871
30	0.003	-0.176470588	-0.035294118		-0.164705882	-0.152941176
20	0.0045	-0.223880597	-0.059701493		-0.208955224	-0.179104478
15	0.006	-0.275862069	-0.103448276		-0.24137931	-0.206896552
10	0.009	-0.295454545	-0.113636364		-0.272727273	-0.181818182
5	0.018	-0.346153846	-0.076923077		-0.269230769	0
1	0.09	-0.666666667	-0.333333333		-0.555555556	0.222222222

### XII.7.18 Variation du coefficient de Strickler en fonction de la hauteur d'eau mesurée à Hamoir (Figures 30 et 31)

H (réel)	K (numérique)	K (Théorique)	K (Théorique nouvelle formulation)
2.23	40	40.54	40.54
1.59	41.66666667	40.49	40.47
1.23	34.48275862	40.35	39.78
1.01	31.25	40.18	38.33
0.85	30.3030303	39.99	36.28
0.67	28.57142857	39.65	32.55
0.58	27.02702703	39.4	30.63
0.44	25.64102564	38.82	29.3
0.26	25	37.17	26.96

**XII.7.19 Diagramme des valeurs du coefficient de Strickler à utiliser pour modéliser les différentes hauteurs d'eau et de rugosité de fond (Figures 32 et 44 ,et courbes théoriques des figures 33, 34 et 35)**

H	K (k=0,05)	H	K (k=0,1)	H	K (k=0,15)	H	K (k=0,2)	H	K (k=0,25)
50	38.49560386	100	34.29568413	150	32.05464175	200	30.55398103	250	29.43853108
25	40.09075461	50	35.71680189	75	33.38289694	100	31.82005302	125	30.65838193
16.66666667	40.94151036	33.33333333	36.4747391	50	34.09130694	66.66666667	32.4952983	83.33333333	31.30897568
12.5	41.49927944	25	36.97165486	37.5	34.55575188	50	32.93799992	62.5	31.73551536
10	41.90192136	20	37.33036803	30	34.89102503	40	33.25757702	50	32.0434255
8.333333333	42.20944942	16.66666667	37.60434438	25	35.14709847	33.33333333	33.50166221	41.66666667	32.27859974
7.142857143	42.45320925	14.28571429	37.82150971	21.42857143	35.35007318	28.57142857	33.69513451	35.71428571	32.46500885
6.25	42.65154678	12.5	37.99820835	18.75	35.51522551	25	33.85255511	31.25	32.61668241
5.555555556	42.81607745	11.11111111	38.14478852	16.66666667	35.65222743	22.22222222	33.98314319	27.77777778	32.74250305
5	42.95459298	10	38.26819183	15	35.76756698	20	34.09308305	25	32.84842927
4.545454545	43.07255732	9.090909091	38.3732861	13.63636364	35.8657939	18.18181818	34.1867114	22.72727273	32.93863949
4.166666667	43.1739394	8.333333333	38.46360726	12.5	35.95021305	16.66666667	34.26717841	20.83333333	33.01616884
3.846153846	43.261706	7.692307692	38.54179842	11.53846154	36.02329483	15.38461538	34.33683881	19.23076923	33.08328612
3.571428571	43.33812817	7.142857143	38.60988284	10.71428571	36.08693028	14.28571429	34.39749513	17.85714286	33.14172802
3.333333333	43.40497957	6.666666667	38.66944066	10	36.14259631	13.33333333	34.45055511	16.66666667	33.19285092
3.125	43.46366939	6.25	38.72172735	9.375	36.19146634	12.5	34.49713726	15.625	33.23773247
2.941176471	43.515334	5.882352941	38.76775528	8.823529412	36.23448659	11.76470588	34.53814349	14.70588235	33.27724166
2.777777778	43.56090173	5.555555556	38.80835151	8.333333333	36.27243007	11.11111111	34.57431061	13.88888889	33.31208841
2.5	43.6366881	5	38.87586949	7.5	36.33553611	10	34.6344623	12.5	33.37004411
2.380952381	43.66808647	4.761904762	38.90384226	7.142857143	36.361681	9.523809524	34.6593832	11.9047619	33.39405521
2.173913043	43.72019919	4.347826087	38.95026942	6.52173913	36.40507439	8.695652174	34.70074509	10.86956522	33.43390709
1.923076923	43.77677613	3.846153846	39.00067373	5.769230769	36.45218505	7.692307692	34.74565024	9.615384615	33.47717285
1.785714286	43.80311626	3.571428571	39.02414013	5.357142857	36.47411804	7.142857143	34.76655642	8.928571429	33.4973158
1.5625	43.83505715	3.125	39.05259622	4.6875	36.50071468	6.25	34.79190792	7.8125	33.52174178
1.388888889	43.8460407	2.777777778	39.06238145	4.166666667	36.5098605	5.555555556	34.80062556	6.944444444	33.53014117
1.19047619	43.83494212	2.380952381	39.05249374	3.571428571	36.5006189	4.761904762	34.79181662	5.952380952	33.52165381
0.980392157	43.76197199	1.960784314	38.98748475	2.941176471	36.4398579	3.921568627	34.73390019	4.901960784	33.46585177
0.793650794	43.19018797	1.587301587	38.4780831	2.380952381	35.96374296	3.174603175	34.28007491	3.968253968	33.02859453
0.595238095	40.76709654	1.19047619	36.31935405	1.785714286	33.94607549	2.380952381	32.35686597	2.976190476	31.17559716
0.396825397	34.39660379	0.793650794	30.64389022	1.19047619	28.64147334	1.587301587	27.30060252	1.984126984	26.30392534
0.199203187	30.22312332	0.398406375	26.92574183	0.597609562	25.16628637	0.796812749	23.98810888	0.996015936	23.11236261
0.149700599	28.69979277	0.299401198	25.56860859	0.449101796	23.89783464	0.598802395	22.77904061	0.748502994	21.94743443
0.099800399	26.1550814	0.199600798	23.30152849	0.299401198	21.77889629	0.399201597	20.75930186	0.499001996	20.00143132
0.05	20.64325091	0.1	18.39104577	0.15	17.18928776	0.2	16.3845591	0.25	15.78639955

H	K (k=0,3)	H	K (k=0,35)	H	K (k=0,4)	H	K (k=0,45)	H	K (k=0,5)
300	28.55743924	350	27.83309252	400	27.22050253	450	26.69136095	500	26.2267496
150	29.74078009	175	28.98641846	200	28.34844445	225	27.79737671	250	27.31351316
100	30.37190165	116.6666667	29.6015319	133.3333333	28.95001961	150	28.38725779	166.6666667	27.8931263
75	30.78567505	87.5	30.00481012	100	29.34442191	112.5	28.77399328	125	28.27312996
60	31.08436947	70	30.29592829	80	29.62913274	90	29.05316959	100	28.5474467
50	31.31250497	58.33333333	30.51827723	66.66666667	29.84658792	75	29.26639764	83.33333333	28.75696313
42.85714286	31.49333489	50	30.69452048	57.14285714	30.01895215	64.28571429	29.43541127	71.42857143	28.92303477
37.5	31.64046887	43.75	30.83792248	50	30.15919795	56.25	29.57293083	62.5	29.05816055
33.33333333	31.76252371	38.88888889	30.95688145	44.44444444	30.27553871	50	29.68701003	55.55555556	29.170254
30	31.86527957	35	31.05703095	40	30.37348398	45	29.78305133	50	29.26462353
27.27272727	31.95278981	31.81818182	31.14232153	36.36363636	30.45689736	40.90909091	29.86484323	45.45454545	29.34499169
25	32.02799872	29.16666667	31.2156228	33.33333333	30.52858532	37.5	29.93513764	41.66666667	29.4140625
23.07692308	32.09310718	26.92307692	31.27907982	30.76923077	30.59064568	34.61538462	29.99599161	38.46153846	29.47385719
21.42857143	32.14979993	25	31.33433458	28.57142857	30.64468432	32.14285714	30.04897978	35.71428571	29.52592301
20	32.19939273	23.33333333	31.38266947	26.66666667	30.69195539	30	30.09533195	33.33333333	29.57146834
18.75	32.24293097	21.875	31.42510339	25	30.73345536	28.125	30.1360252	31.25	29.61145325
17.64705882	32.28125766	20.58823529	31.46245794	23.52941176	30.76998776	26.47058824	30.17184744	29.41176471	29.64665194
16.66666667	32.31506145	19.44444444	31.49540432	22.22222222	30.802209	25	30.20344233	27.77777778	29.67769687
15	32.37128254	17.5	31.55019938	20	30.85579806	22.5	30.25598967	25	29.72932952
14.28571429	32.394575	16.66666667	31.57290103	19.04761905	30.87800006	21.42857143	30.27776008	23.80952381	29.75072098
13.04347826	32.43323411	15.2173913	31.61057957	17.39130435	30.91484932	19.56521739	30.31389303	21.73913043	29.78622497
11.53846154	32.47520494	13.46153846	31.65148583	15.38461538	30.95485526	17.30769231	30.35312128	19.23076923	29.82477038
10.71428571	32.49474501	12.5	31.67053028	14.28571429	30.97348055	16.07142857	30.37138451	17.85714286	29.84271571
9.375	32.51843992	10.9375	31.69362418	12.5	30.99606616	14.0625	30.39353109	15.625	29.86447678
8.333333333	32.52658791	9.722222222	31.7015655	11.11111111	31.00383271	12.5	30.40114665	13.88888889	29.87195979
7.142857143	32.51835459	8.333333333	31.69354101	9.523809524	30.99598483	10.71428571	30.39345133	11.9047619	29.86439841
5.882352941	32.46422269	6.862745098	31.64078215	7.843137255	30.94438715	8.823529412	30.34285667	9.803921569	29.81468444
4.761904762	32.0400525	5.555555556	31.22737085	6.349206349	30.54007479	7.142857143	29.94640377	7.936507937	29.42513252
3.571428571	30.24251514	4.166666667	29.47542722	4.761904762	28.82669041	5.357142857	28.26632601	5.952380952	27.77429955
2.380952381	25.51665189	2.777777778	24.86943338	3.174603175	24.32207179	3.571428571	23.84927304	3.968253968	23.43413336
1.195219124	22.42061226	1.394422311	21.85192342	1.593625498	21.37097545	1.792828685	20.9555433	1.992031873	20.59077422
0.898203593	21.29055025	1.047904192	20.75052492	1.19760479	20.29381808	1.347305389	19.89932489	1.497005988	19.5529412
0.598802395	19.40279079	0.698602794	18.91064764	0.798403194	18.49443542	0.898203593	18.13492057	0.998003992	17.81924952
0.3	15.31391443	0.35	14.92548382	0.4	14.5969827	0.45	14.31323076	0.5	14.06408312

**XII.7.20 Variation du coefficient de Strickler mesurée sur la Warche à Thioux (Figure 33)**

H	K
0.34	16.22
0.47	20.71
0.515	21.41
0.53	22.21
0.53	21.89
0.72	22.18
0.71	22.3
1	25.62
1.6	24.41

### XII.7.21 Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Wyompont (Figure 34)

H	K
0.58	21.44
0.97	20.08
1.07	22.78
1.64	29.93
1.65	33.97

### XII.7.22 Variation du coefficient de Strickler mesurée sur l'Ourthe à Amberloup (Figure 35)

H	K
0.195	25.69
0.215	24.15
0.24	23.41
0.26	26.55
0.28	25.26
0.37	30.14
0.39	27.45
0.49	32.88

### XII.7.23 Variation de la hauteur d'eau avec le débit (Figures 38, 39 et 40)

Q	Lit mineur (Maille 2)		Bord (Maille 6)		Lit majeur (Maille 8)	
	H (avec turbulence)	H (sans turbulence)	H (avec turbulence)	H (sans turbulence)	H (avec turbulence)	H (sans turbulence)
40	1.03	1.03				
60	1.24	1.23	0.15	0.11	0.23	0
80	1.41	1.4	0.32	0.3	0.5	0.33
100	1.56	1.55	0.48	0.46	0.74	0.62

## XII.7.24 Profil en long de la surface libre à Moircy (Figure 48)

X	SL (Réel)	X	SL (Manning n=0,07)	X	SL (New k=0,5)
282.929	415.394	283	415.4040222	283	415.4100037
280.84	415.397	279	415.3974915	279	415.4017334
278.517	415.393	275	415.3921814	275	415.3950195
275.32	415.386	271	415.3668213	271	415.3730774
268.328	415.364	267	415.3599854	267	415.3668213
265.583	415.358	263	415.3555298	263	415.3605042
262.762	415.311	259	415.350708	259	415.3544312
259.928	415.29	255	415.3487244	255	415.3499451
255.211	415.279	251	415.3444824	251	415.3439941
250.711	415.273	247	415.341217	247	415.3391724
246.443	415.271	243	415.336792	243	415.3328247
244.364	415.249	239	415.3302612	239	415.3249207
241.569	415.246	235	415.3153992	235	415.3121033
238.33	415.246	231	415.2958374	231	415.2882385
235.38	415.242	227	415.2850952	227	415.2772217
230.586	415.235	223	415.2417908	223	415.2377625
226.053	415.204	219	415.1881104	219	415.181488
221.356	415.182	215	415.1767578	215	415.1694946
213.967	415.169	211	415.1647644	211	415.1568604
207.746	415.162	207	415.0982361	207	415.0915527
202.057	415.162	203	415.0692749	203	415.068573
198.133	415.152	199	415.0585327	199	415.0578308
195.48	415.136	195	415.0567017	195	415.0536804
192.505	415.135	191	415.0492859	191	415.043396
188.628	415.128	187	415.0349731	187	415.0296936
185.63	415.11	183	415.0152588	183	415.0121155
182.244	415.072	179	415.0003967	179	414.9998169
179.1	415.057	176.6205368	414.9891357	176.0605545	414.9861145
176.116	414.985				