

UNIVERSITE DE LIEGE

324

CENTRE D'ETUDES, DE RECHERCHES ET D'E  
SCIENTIFIQUES DU GENIE CIVIL



**CALCUL DES STRUCTURES  
CYLINDRIQUES METALLIQUES  
ORTHOTROPES**

par

**Ph. RIGO**

**L.H.C.N.**

Laboratoires d'Hydrodynamique, d'Hydraulique  
Appliquée, de Constructions Hydrauliques et Navales  
6, Quai Banning - 4000 Liège  
Tel. 0477/520480

**MEMOIRES. C.E.R.E.S.**

(NOUVELLE SERIE) n° 60 - Octobre 1988

# MEMOIRES. C.E.R.E.S.

(NOUVELLE SERIE) n° 60 - Octobre 1988

## SOMMAIRE

Ph. RIGO

CALCUL DES STRUCTURES CYLINDRIQUES METALLIQUES  
ORTHOTROPES

CENTRE d'ETUDES, de RECHERCHES et d'ESSAIS SCIENTIFIQUES du  
GENIE CIVIL

Fondateur : F. CAMPUS

Professeurs associés : R. BAUS, F. BONNECHERE, W. CHAPEAU, N.M. DEHOUSSE,  
V. de KOSINSKY, J. ENGLEBERT, G. FONDER, A. LEJEUNE,  
R. MAQUOI, A. MONJOIE, F. PETERS

**CALCUL DES STRUCTURES  
CYLINDRIQUES METALLIQUES  
ORTHOTROPES**

par

**Ph. RIGO**

Ingénieur Civil des Constructions  
Docteur en Sciences Appliquées

# TABLE DES MATIERES

<b>I.</b>	<b>INTRODUCTION</b>	1
<b>II.</b>	<b>PRINCIPE DU LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS</b>	3
II.1.	Actions concentrées des traverses	8
II.2.	Extension de la méthode à des conditions d'appui particulières	10
II.2.1.	Développement en série des forces et moments de bord	13
II.2.2.	Raisons d'être des forces et moments de bord	13
II.2.3.	Détermination des effets de bord	15
<b>III.</b>	<b>ANALYSE DE LA PHILOSOPHIE DES DIVERSES METHODES DE CALCUL ET ETUDE DE LEURS INTERCONNEXIONS</b>	
III.1.	Classement des méthodes d'analyse harmonique des structures	18
III.1.1.	La solution de Goldberg et Leve pour les coques prismatiques simplement appuyées à leurs extrémités	18
III.1.2.	Les bandes finies	19
III.1.3.	Méthode de Guyon - Massonnet	20
III.2.	Comparaison entre les méthodes d'analyse harmonique et la méthode des bordages raidis	20
III.3.	Comparaison entre les méthodes d'analyse harmonique et les éléments finis classiques	20
III.4.	Classification des modèles de calcul selon le type d'hypothèses - contraintes (S.A.), déplacements (C.A.).	21

<b>IV.</b>	<b>APPLICATIONS AUX STRUCTURES HYDRAULIQUES</b>	
IV.1.	La vanne segment d'un barrage mobile	23
IV.2.	Calcul d'une porte marée-tempête	26
<b>V.</b>	<b>ACCESSIBILITE A LA METHODE DES BORDAGES RAIDIS</b>	
V.1.	En pratique	27
<b>VI.</b>	<b>CONCLUSION</b>	29
<b>VII.</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	30

## I INTRODUCTION

Depuis longtemps, les constructeurs se sont attachés à l'analyse des coques prismatiques, raidies ou non. Nous définirons par coque prismatique, un assemblage de plaques rectangulaires et de tronçons de coques cylindriques rigidement liées le long de leurs arêtes communes et appuyées à leurs extrémités sur des diaphragmes rigides.

Ces coques prismatiques sont d'un emploi très fréquent, aussi bien dans la construction métallique que dans celle en béton armé, ou précontraint. Parmi leurs utilisations les plus fréquentes, on peut citer les ponts métalliques ou en béton, les ouvrages hydrauliques tels que portes d'écluses ou barrages mobiles dont les divers éléments qui sont toujours fortement raidis, les toitures de bâtiments industriels, les profils réalisés en tôle mince pliée, les coques de navires, ....

Les coques prismatiques possèdent des particularités géométriques qui rendent leur calcul difficile, surtout lorsque ces coques sont raidies (fig. 1 et 2).

Plusieurs méthodes ont été proposées dans ce but.

La méthode la plus simple est sans doute la **méthode de la poutre**; la plus compliquée est, à coup sûr celle qui analyse chaque élément par la **théorie de l'Elasticité**. Entre ces deux extrêmes, il y a beaucoup d'autres théories. Une des plus célèbres est celle de **Guyon-Massonnet**, elle est basée sur des coefficients de répartition. Dans les méthodes modernes, celle qui connaît le plus de développements est la méthode des éléments finis.

Pour les coques prismatiques, les méthodes les plus performantes sont celles qui utilisent des décompositions en séries des charges et des déplacements, suivant une direction privilégiée. On peut les regrouper sous l'appellation générale d'**analyse harmonique des structures**.

Avant de reprendre ces diverses approches pour en rappeler les hypothèses fondamentales ainsi que leur domaine d'investigation, propre ou commun aux autres méthodes (§III), nous allons présenter en détail (§II) le principe du **logiciel des bordages raidis** qui repose également sur une méthode d'analyse harmonique. Ensuite, viendront les applications (§IV), une discussion sur l'accessibilité de notre méthode (§V) et les conclusions (§VI).

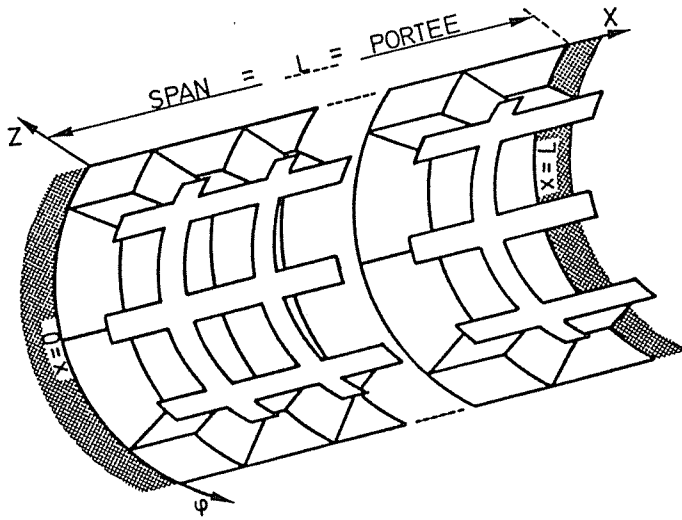


FIGURE 1

Elément de coque raidie; les nervures pouvant être des raidisseurs, des aiguilles ou des traverses.

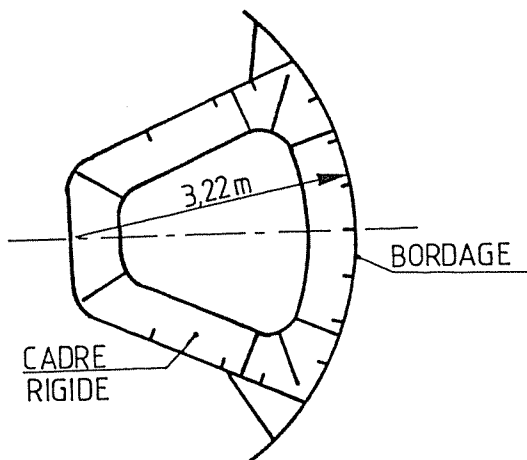


FIGURE 2

Vanne de barrage mobile composée de coques et de plaques raidies.

## II PRINCIPE DU LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS.

Cette méthode de calcul des plaques et des coques cylindriques (figures 1 et 2) repose sur une résolution analytique des équations différentielles des coques cylindriques d'épaisseur constante (fig. 3). Ces équations différentielles sont issues de la méthode de Donnell, von Karman et Jenkins (DEHOUSSE 1961).

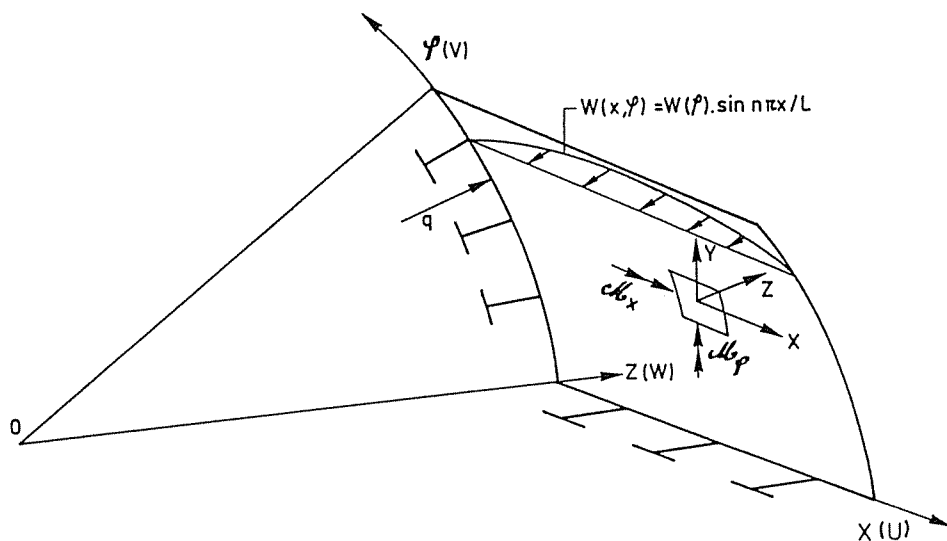


FIGURE 3.  
Élément de coque cylindrique raidie.

L'élément de base est une coque cylindrique de longueur  $L$  et le système de coordonnées dont on fait usage est représenté figure 3. L'axe des  $X$  est orienté selon les génératrices du cylindre et l'axe des  $\varphi$  selon la circonférence. A chaque axe est associé un déplacement,  $u$  selon  $OX$ ,  $v$  selon l'axe des  $\varphi$  et  $w$  selon  $OZ$ . La surface schématisée est celle du feuillet moyen et c'est à partir d'elle que sont comptées les coordonnées  $Z$  positivement vers le haut.



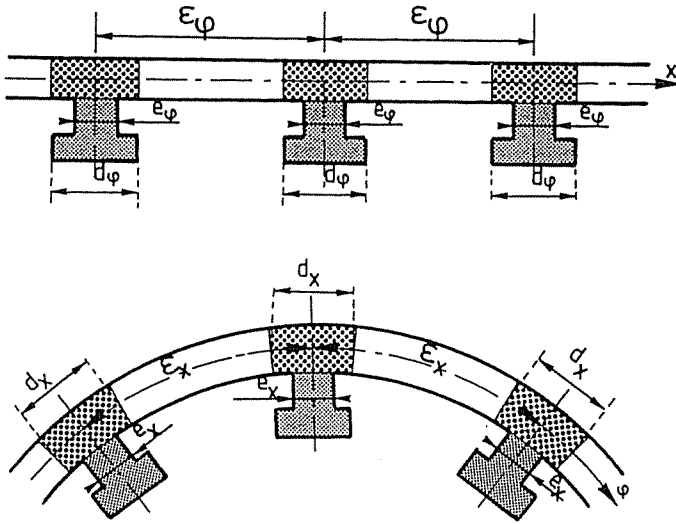


FIGURE 4  
Eléments de raidissage longitudinaux et traversaux.

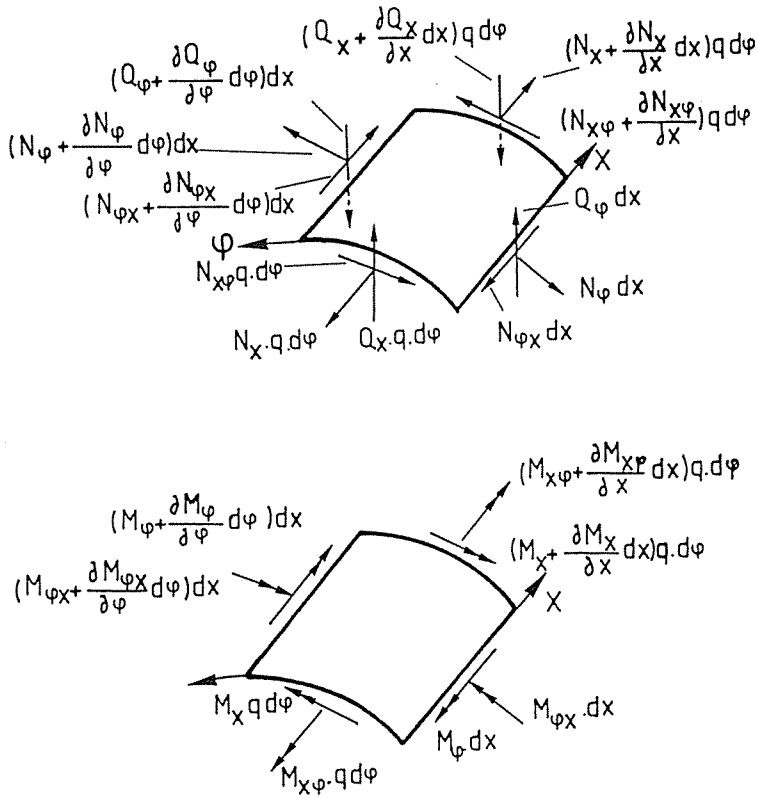


FIGURE 5  
Forces et moments unitaires.

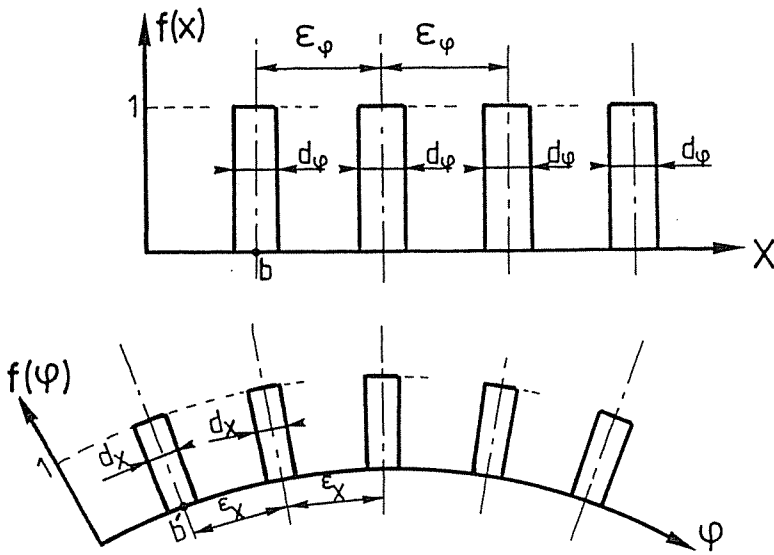


FIGURE 6

Allures des fonctions  $f(x)$  et  $f(\varphi)$  permettant de tenir compte exactement de la position des diverses nervures.

Cet élément de référence est compris entre les surfaces d'intrados et d'extrados de la coque ; il est raidi par des nervures longitudinales et transversales, respectivement espacées de  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_\varphi$  (figure 4). A cet élément on associe les efforts unitaires et les moments unitaires calculés par rapport à la surface moyenne (figure 5). On les nomme  $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}, Q_x, Q_\varphi, M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}$  et  $M_{\varphi x}$  ; à titre d'exemple voici les expressions de  $N_x$  (1) et  $M_x$  (2).

$$N_x = \frac{E \delta}{(1-\nu)q} (u' q + \nu v^\circ + \nu w) + f(\varphi) \frac{E}{d_x} (u' \omega_x - w'' h_x) \quad (1)$$

$$M_x = \frac{E \delta^3}{(1-\nu)q^2} (q^2 w'' + \nu w^{\circ\circ}) - f(\varphi) \frac{E}{d_x} (u' h_x - w'' I_x) \quad (2)$$

Les fonctions  $f(\varphi)$  sont des fonctions composées de fonctions de Heaviside (FRIEDMAN 1956) et elles permettent d'obtenir des fonctions (fig. 6) parfaitement compatibles avec la géométrie du système (figure 4). Ces fonctions  $f(\varphi)$  sont égales à l'unité mais s'annulent en dehors des zones ( $dx$  et  $d\varphi$ ) où les nervures agissent (fig 4 et 6).

La surface moyenne (figure 3) reçoit la charge extérieure et celle-ci peut être subdivisée comme suit :

- $X, Y, Z$  les pressions spécifiques en  $N/m^2$
- $M_x, M_\varphi, M_z$  les moments spécifiques en  $N.m/m^2$

Cela étant, il est possible d'écrire les 6 équations d'équilibre (3 à 8) contenant les 10 grandeurs inconnues nommées ci-avant (figure 5).

$$N'_{x\varphi} + \frac{N^\circ_{\varphi x}}{q} + X + g_x \delta = 0 \quad (3)$$

$$\frac{N^\circ_\varphi}{q} + N'_{x\varphi} - \frac{Q_\varphi}{q} + Y + g_\varphi \delta = 0 \quad (4)$$

$$\frac{N_\varphi}{q} + \frac{Q^\circ_\varphi}{q} + Q'_x = Z + g_z \delta \quad (5)$$

$$\frac{M^\circ_\varphi}{q} + M'_{x\varphi} - Q_\varphi + M_x = 0 \quad (6)$$

$$M'_{x\varphi} + \frac{M^\circ_{\varphi x}}{q} - Q_x + M_\varphi = 0 \quad (7)$$

$$N_{x\varphi} - N_{\varphi x} + \frac{M_{\varphi x}}{q} + M_z = 0 \quad (8)$$

A ce stade aucune hypothèse restrictive n'a été émise, néanmoins si on veut résoudre le problème, il faut introduire les simplifications suivantes:

- le domaine de validité des développements est le régime élastique
- on doit admettre les simplifications conduisant à la méthode D.K.J à savoir :
  - une coque mince (épaisseur  $\lll$  rayon)
  - de faibles déformations
  - et les hypothèses dites de Love-Kirchhoff

Ces dernières conditions correspondent en fait à imposer une variation linéaire des contraintes selon l'épaisseur de la coque.

Cela permet d'écrire les expressions des efforts et moments unitaires (figure 5) en fonction des seuls déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ , avec  $D$  et  $K$  des constantes dépendant uniquement du matériau (à savoir du module de Young  $E$  et du coefficient de poisson  $\nu$ ) et de l'épaisseur  $\delta$  de la coque. En remplaçant les efforts et moments unitaires (1 et 2) par leurs expressions analytiques dans les 6 équations (3 à 8), on obtient après calcul trois équations différentielles à coefficients constants (9 à 11).

Ces trois équations (9),(10) et (11) relatives à une coque cylindrique raidie sont fonctions des déplacements  $u,v,w$  et de leurs dérivées, et s'écrivent:

$$D (q u'' + \nu v^{o'} + \nu w') + \frac{D (1-\nu)}{q^2} (u^{oo} + q v^{o'}) + f(x) \left[ \frac{S_\varphi}{q} \left( v^{o'} + \frac{u^{o'o}}{q} \right) \right] + \frac{f'(\varphi)}{q} \left[ S_x \left( v' + \frac{u^p}{q} \right) \right] \\ + f(\varphi) \left[ \Omega_x u'' - H_x w''' + \frac{S_x}{q} \left( v^{o'} + \frac{u^{o'o}}{q} \right) \right] + X = 0 \quad (9)$$

$$\frac{D}{q^2} (v^{oo} + w^o + \nu q u^{o'}) + \frac{D (1-\nu)}{q} (u^{o'} + q v'') + f(x) \left[ \frac{\Omega_\varphi}{q^2} (v^{oo} + w^o) - \frac{H_\varphi}{q^3} w^{ooo} + S_\varphi \left( v'' + \frac{u^{o'o}}{q} \right) \right] \\ + \frac{f'(x)}{q} \left[ S_\varphi \left( v' + \frac{u^p}{q} \right) \right] + f(\varphi) \left[ S_x \left( v'' + \frac{u^{o'o}}{q} \right) \right] + Y = 0 \quad (10)$$

$$\frac{D}{q^2} (v^o + w + \nu q u') + \frac{K}{q^4} w^{oooo} + \frac{2K}{q^2} w^{oo''} + K w'''' \\ + f(x) \left[ \frac{\Omega_\varphi}{q^2} (v^o + w) - \frac{2H_\varphi}{q^3} w^{oo} - \frac{H_\varphi}{q^3} v^{ooo} + \frac{R_\varphi}{q^4} w^{oooo} + \frac{T_\varphi}{q^2} w^{oo''} + \frac{L_\varphi}{q} (v^{oo''} + u^{oo'}) \right] \\ + f(\varphi) \left[ \frac{T_x}{q^2} w^{oo''} + \frac{L_x}{q} \left( v^{oo''} + \frac{u^{oo'}}{q} \right) - H_x u'''' + R_x w'''' \right] + \frac{f'(\varphi)}{q} \left[ \frac{T_x}{q} w^{oo''} + \frac{L_x}{q} \left( v'' + \frac{u^{o'o}}{q} \right) \right] \\ + f'(x) \left[ \frac{T_\varphi}{q} w^{oo''} + \frac{L_\varphi}{q} \left( v'' + \frac{u^{o'o}}{q} \right) \right] = - \frac{M_x^o}{q} + M'_\varphi + Z \quad (11)$$

Remarque : Les fonctions  $f'(\varphi) = df(\varphi)/d\varphi$  et  $f'(x) = df(x)/dx$  dérivées de fonctions de Heaviside, sont des fonctions de Dirac et sont nulles partout sauf au droit des nervures où elles valent 1.

Le processus de résolution de ce système (9 à 11) est celui utilisé jadis par Jakobsen et Eggwertz (JAKOBSEN 1958). Il consiste à ramener le problème à un système classique de 3 équations à 3 inconnues dont les coefficients sont des opérateurs de dérivation et les

inconnues les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Après élimination des  $u$ ,  $v$  et  $w$ , on obtient une équation différentielle en  $w$  du 8ème ordre à 2 variables,  $x$  et  $\varphi$ . Mais afin d'obtenir une équation à variables séparées, on est astreint à poser :

$$w(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} w(\varphi) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12)$$

$$v(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v(\varphi) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (13)$$

$$u(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u(\varphi) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (14)$$

Les charges extérieures (fig. 3) couramment utilisées sont les charges hydrostatiques  $Z$  ou encore des charges variant linéairement selon  $O\varphi$  et restant constantes selon  $OX$  (ex: poids propre).

## II.1 ACTIONS CONCENTREES DES TRAVERSEES.

Dans les 3 équations (9),(10) et (11) il existe 3 types de termes

- ceux relatifs aux charges extérieures  $X, Y, Z, M_x, M_\varphi$  (fig. 3)
- ceux relatifs aux nervures, affectés des fonctions  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f(\varphi)$  et  $f'(\varphi)$  dont les sigles  $S_x, S_\varphi, L_x, L_\varphi, \dots, T_x, T_\varphi$  sont des coefficients dépendant uniquement de la géométrie des nervures (DEHOUSSE 1961)
- ceux relatifs à la coque lisse.

La signification de cette observation est évidente : la charge appliquée est reprise partiellement par la coque et partiellement par les nervures. Le rôle des nervures se caractérise donc par 5 types de forces (figure 7).

- les  $X_o, Y_o$  et  $Z_o$  sont des pressions agissant sur la surface médiane de la coque et le long de bandes dont la largeur est celle de la nervure correspondante.
- les  $U_{ox}$  et  $U_{oz}$  sont des lignes de moment agissant le long de ces mêmes nervures.

Les lignes de moments  $U_{ox}$  et  $U_{oz}$  résultent de l'apparition de termes contenant des dérivées de fonction de Heaviside dans les équations différentielles (9 à 11). Comme la dérivée d'une fonction de Heaviside est une fonction de Dirac, on obtient bien des lignes de moment.

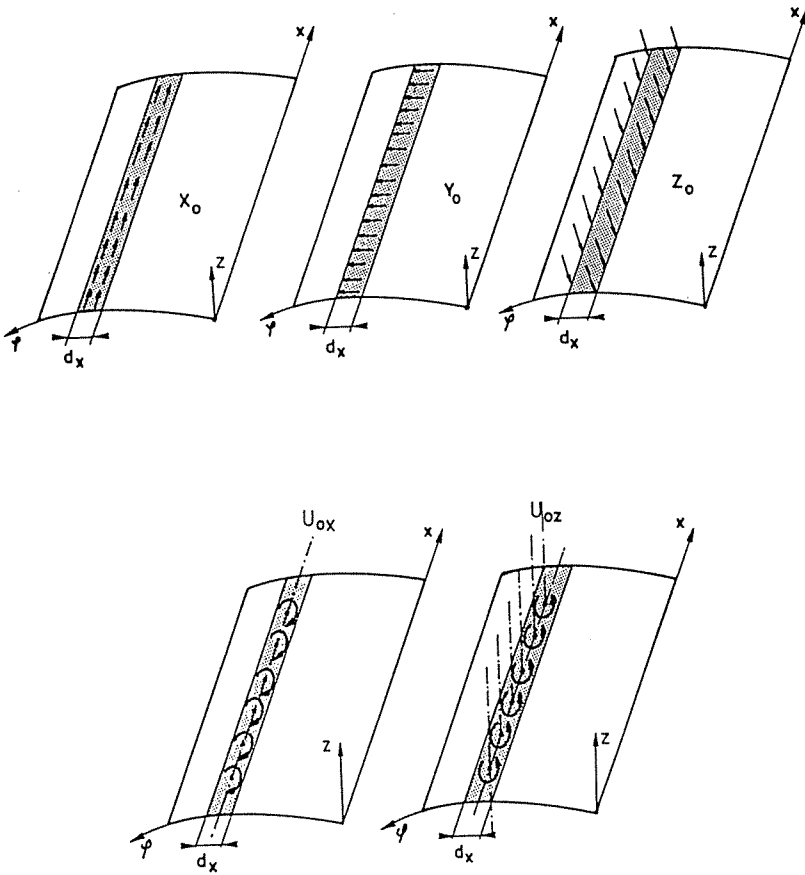


FIGURE 7

Représentation des 5 types de forces et de moments que transmet une traverse à la coque ( $d_x$  étant la largeur de la traverse).

Résoudre le problème de la coque raidie revient donc à considérer une coque non raidie sur laquelle agit la charge extérieure ainsi que 5 lignes de forces et de moments agissant au droit de chaque traverse. La détermination de ces lignes de charge repose sur la résolution d'un système de  $5.M$  équations intégrales ( $M$  étant le nombre de traverse) dites de "VOLTEIRA-FREDHOLM" de la 2<sup>ème</sup> espèce mais dégénérées en sommes (HILDEBRAND 1952).

$$\alpha(x) f(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (15)$$

$$\Psi(K_i) = (X_o d_x)_{o,\varphi=K_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\Psi(K_j)}{10000} [ (X_o d_x)_{A,\varphi=K_i,\Lambda=K_j} ] + \dots \quad (16)$$

Comparons l'expression théorique des équations de Volterra-Fredholm (15) avec la première équation de notre système (16), on remarque que :

- $\Psi(K_i)$  est la fonction inconnue notée  $f(x)$  dans l'équation de référence.
- le coefficient  $\alpha(x)$  de l'équation de référence (15) vaut dans notre cas 1 (16), on a donc bien des équations intégrales de Volterra-Fredholm de la 2ème espèce
- la fonction  $(X_o d_x)_o$  est une fonction connue puisque relative à la coque lisse soumise à la charge extérieure, elle correspond à la fonction  $F(x)$ .
- les  $(X_o d_x)_A$  (ou indice B,C,D et E) sont les noyaux des équations intégrales à l'image de la fonction  $K(x,\epsilon)$ . Elles s'obtiennent en introduisant les solutions des fonctions de Gréen dans les expressions des  $(X_o d_x)$ ,  $(Y_o d_x)$ ,  $(Z_o d_x)$ ,  $(Uox d_x)$  et  $(Uoz d_x)$ .
- le signe d'intégration est lui par contre remplacé par un signe de sommation

Les développements analytiques ne pouvant être repris ici, nous signalons simplement qu'à l'aide des séries de Fourier, il est possible de résoudre aisément le système des trois équations différentielles (9),(10) et (11) relatives aux coques cylindriques raidies soumises à des forces de pression de type Z. Pour le détail des développements analytiques, le lecteur est invité à consulter le manuscrit de référence de l'auteur (RIGO 1988).

## II.2 EXTENSION DE LA METHODE A DES CONDITIONS D'APPUI PARTICULIERES (encastremets, appuis élastiques,...).

Le logiciel des bordages raidis n'était auparavant applicable qu'aux structures ayant des conditions d'appuis simples ( $w=v=Mx=Nx=0$ ). Mais grâce aux effets de bord, le logiciel est applicable à une large gamme de conditions d'appuis (encastremets, appuis élastiques, ...).

Les effets de bords (fig. 8) sont des forces et des moments que l'on applique aux extrémités  $x=0$  et  $x=L$  des coques ou des plaques de la structure. Ces forces de bord  $N_b$  et moments de bord  $M_b$ , vont permettre de simuler par exemple, les forces et moments que transmettent les bras aux extrémités d'une vanne segment de barrage mobile (figure 9).

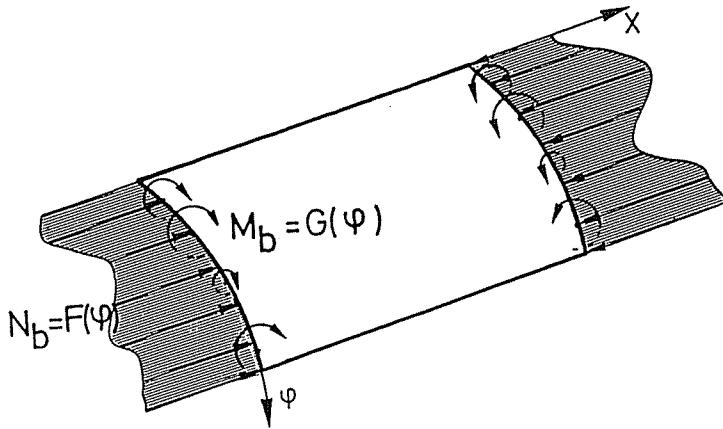


FIGURE 8  
Forces de bord  $N_b$  et moments de bord  $M_b$ .

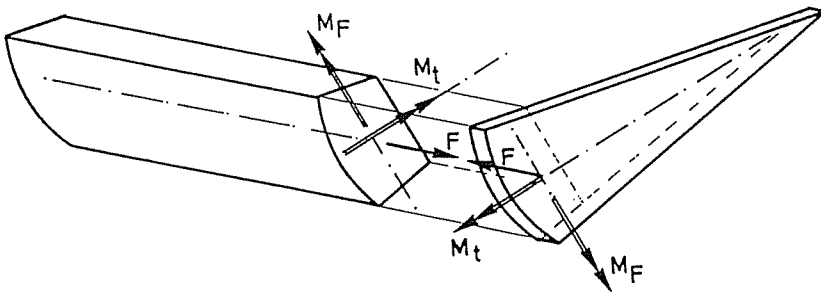


FIGURE 9  
Forces et moments de liaison entre la vanne et les bras

Pour ce qui est des forces de bord  $N_b$  (fig. 10), on a obtenu précédemment la solution analytique d'un cylindre complet chargé par une ligne de force de  $10000 \cos \lambda x$  dirigée selon  $OX$ . Si au lieu d'utiliser le développement en série de Fourier d'une charge uniforme, on utilise celui correspondant à 2 charges d'extrémités antisymétriques, on obtient la solution analytique de cette même coque soumise à des forces axiales  $F$  (antisymétriques) agissant aux extrémités  $x=0$  et  $x=L$ .

Pour les moments de bord  $M_b$ , nous utilisons le même procédé. Néanmoins, une différence importante existe, les charges extérieures de type moment  $M_\varphi$  n'apparaissent dans l'équation (11) que sous forme de leur dérivée première. D'où, pour un diagramme de moment de bord  $M_b$  donné qui est appliqué à la structure (fig. 11), c'est en fait l'effet dérivé que l'on applique.



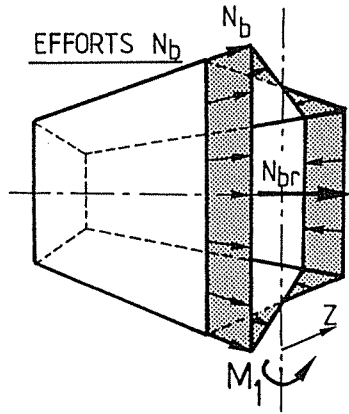


FIGURE 10

Exemple de répartition de forces de bord  $N_b$  appliquées aux extrémités de la structure.

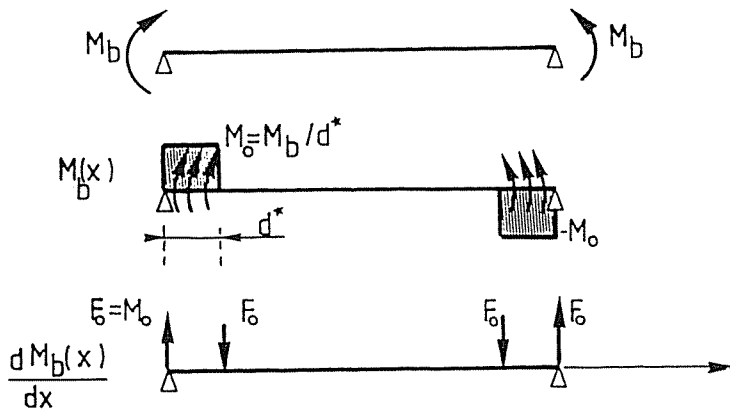


FIGURE 11

Moments de bord  $M_b$ .

Analytiquement cela se traduit par l'expression (17) d'un moment d'extrémité  $M_b$  développé en série de Fourier et par l'expression (18) de la dérivée du moment qui, au coefficient  $H$  près, est identique à l'expression obtenue pour le développement des forces de bord  $N_b$ .

$$M_b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4 M_b}{(2n-1)\pi d^*} (-1)^{n+1} \cos \frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{L} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right] \quad (17)$$

$$\frac{dM_b(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4 M_b}{(2n-1)\pi d^*} H (-1)^{n+1} \cos \frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{L} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right] \quad (18)$$

$$\text{avec } H = -\frac{(2n-1)\pi}{L} M_b$$

### II.2.1 Développement en série des forces et moments de bord.

La figure 12 montre que pour les développements des effets de bord et plus spécialement pour les moments de bord, il faut un nombre de termes très important pour représenter exactement les charges, mais, en pratique 7 termes suffisent pour représenter ces charges ponctuelles d'extrémités avec suffisamment de précision.

Il est à noter que les charges concentrées n'existent pas et qu'elles sont toujours réparties plus ou moins localement. Ainsi, les forces de bord  $N_b$  et les moments de bord  $M_b$  sont-ils appliqués sur de petits intervalles  $d^*$  placés aux extrémités. Pour ces effets de bord, on obtient des résultats très satisfaisants en se limitant à l'utilisation de 7 termes de la série de Fourier.

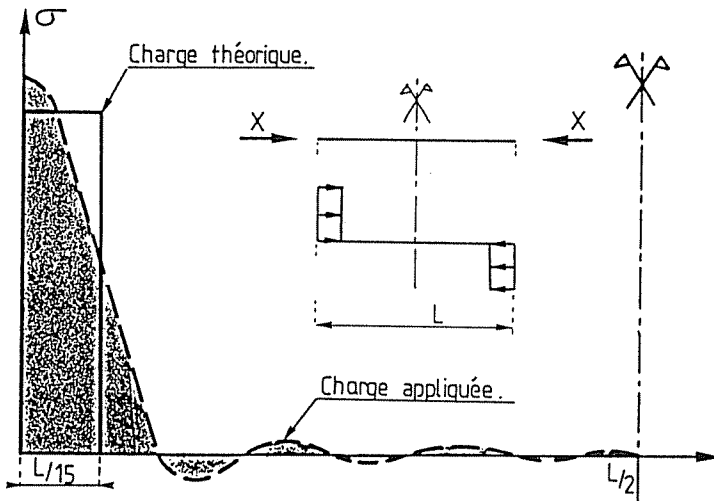


FIGURE 12

Développement d'une charge antisymétrique localisée sur un intervalle  $d^*$  situé aux extrémités.

### II.2.2 Raisons d'être des forces et moments de bord.

Afin de bien comprendre la raison d'être de ces effets de bord, il est important de se rappeler ce que l'on entend par *structure sur appuis simples*. Le développement en série de sinus de  $w(x, \varphi)$  (12), a imposé les variations des déplacements suivants :  $v(x, \varphi)$  varie selon le  $\sin \lambda x$  et  $u(x, \varphi)$  selon le  $\cos \lambda x$ . Dès lors, en  $x=0$  et  $x=L$  les déplacements  $w$  et  $v$  seront nuls, par contre le déplacement longitudinal  $u$  sera non nul.

On constate donc que les extrémités de la structure se comportent comme des flasques infiniment rigides dans leur plan mais autorisant des déformations perpendiculairement à ce plan; il s'agit des déplacements longitudinaux  $u$ .

Sur la figure 13 est représentée la déformation d'extrémité, on y constate qu'en plus du déplacement  $u$ , on observe une rotation  $dw/dx$  de chaque tronçon de coque et cela indépendamment les uns des autres.

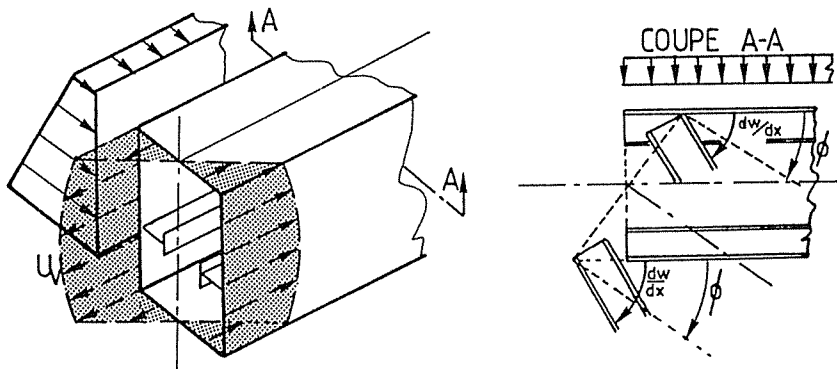


FIGURE 13  
Déformations d'extrémité de l'ensemble de la structure.

Le cas des appuis élastiques peut également être envisagé. On entend par appui élastique la liaison rigide d'un corps avec un autre sans liaison avec la fondation. Ainsi, dans le cas des vannes-segment (figure 14), la structure vanne-bras se comporte comme un portique; les sections d'extrémités de la vanne ne sont donc pas libres de se déformer d'une manière quelconque comme c'est le cas pour des appuis simples et il ne s'agit pas non plus d'un encastrement.

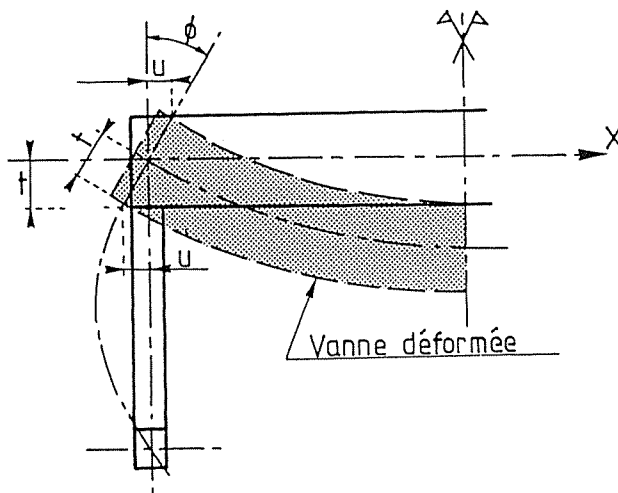


FIGURE 14  
Schéma d'une structure-portique, les bras et le corps de la vanne segment.

Si l'on admet que les extrémités des bras d'une vanne segment subissent une rotation d'ensemble  $\phi$ , les déplacements longitudinaux  $u$  et les rotations  $dw/dx$  à la jonction vanne-bras sont alors automatiquement déterminés en fonction de cette variable  $\phi$ .

Il faut donc appliquer aux extrémités de la vanne des forces de bord  $N_b$  et des moments de bord  $M_b$  qui ensemble, vont faire coïncider les déplacements de la section d'extrémité de la vanne avec ceux correspondant à la rotation  $\phi$  du bras.

### II.2.3 Détermination des effets de bord.

Il reste à présenter la technique utilisée pour déterminer les forces de bord  $N_b$  et les moments de bord  $M_b$  pour des champs de déplacement  $u$  et de rotation  $dw/dx$  donnés.

Les expressions des forces et moments de bord sont théoriquement de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & [ a_i \cos (\beta_i q \varphi) + b_i \sin (\beta_i q \varphi) ] e^{-\alpha_i q \varphi} + [ c_i \cos \{ \beta_i q (\varphi_0 - \varphi) \} + \dots ] e^{-\alpha_i q (\dots)} + \\ & \dots + \dots + [ g_i \cos \{ \beta_i q [2\pi - (\varphi_0 - \varphi)] \} + \dots ] e^{-\alpha_i q (\dots)} \quad (19) \end{aligned}$$

Mais ces expressions présentent des inconvénients majeurs qui sont liés à la lourdeur des développements analytiques nécessaires compte tenu de la forme de ces fonctions.

A des fins de simplicité et de rationalisation, nous avons opté pour un développement des fonctions de bord en série polynomiale du 3ème degré (20) et (21).

Soit  $F(\varphi)$  la fonction fixant la répartition des forces de bord

$$F(\varphi) = a (q \varphi)^3 + b (q \varphi)^2 + c (q \varphi) + d \quad (20)$$

avec  $a, b, c, d$  les paramètres inconnus de la fonction force de bord

Soit  $G(\varphi)$  la fonction fixant la répartition des moments de bord

$$G(\varphi) = e (q \varphi)^3 + f (q \varphi)^2 + g (q \varphi) + h \quad (21)$$

avec  $e, f, g, h$  les paramètres inconnus de la fonction moment de bord

Ces paramètres sont à déterminer de manière à avoir une équivalence entre  $F(\varphi)$  et  $N_b$  (fig. 15) et entre  $G(\varphi)$  et  $M_b$ .



## L.B.R.-3

LE LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS  
(appuis élastiques en  $x=0$  et  $x=L$ )

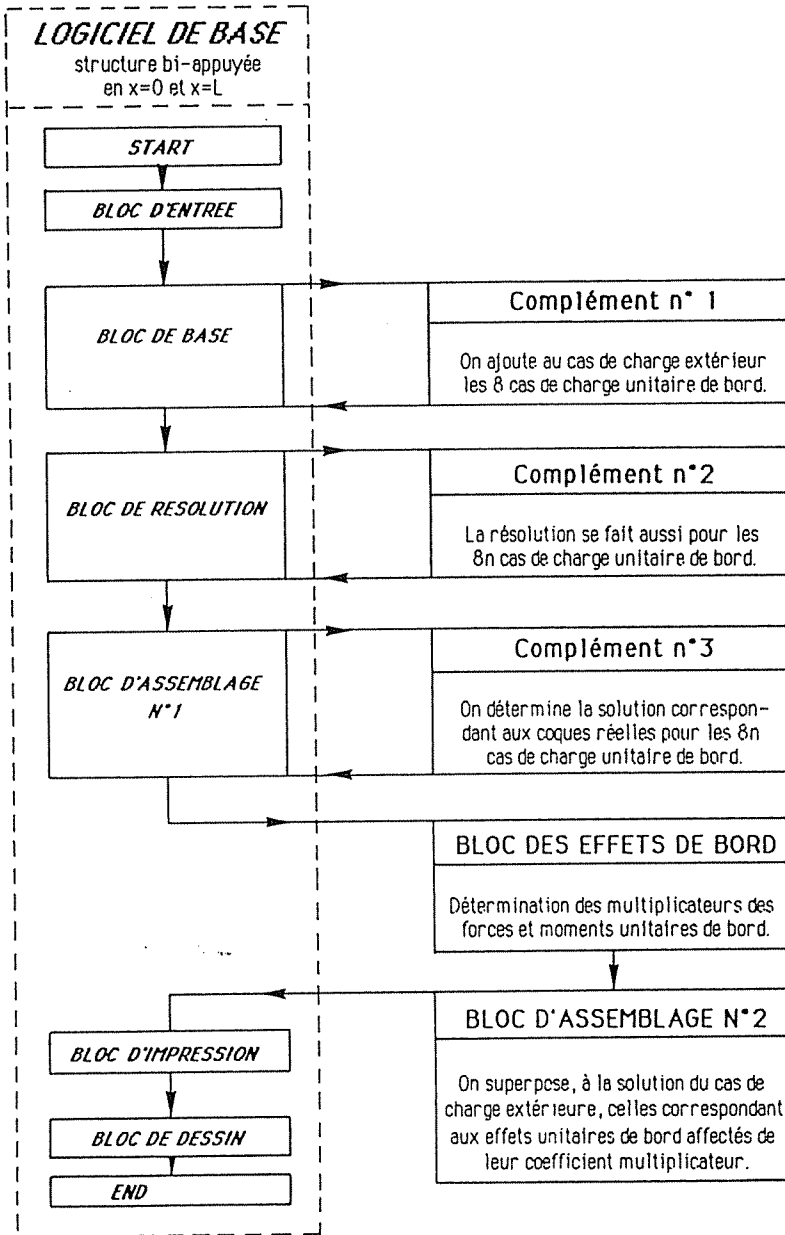


FIGURE 17  
Schéma de l'algorithme complet du logiciel L.B.R.-3.

### III. ANALYSE DE LA PHILOSOPHIE DES DIVERSES METHODES DE CALCUL ET ETUDE DE LEURS INTERCONNEXIONS.

Notre but n'est pas de développer de manière exhaustive toutes les méthodes de calcul en vue d'en expliquer les mécanismes, mais plutôt de déterminer la filiation existant entre les grandes méthodes d'analyse harmonique des structures.

#### III.1 CLASSEMENT DES METHODES D'ANALYSE HARMONIQUE DES STRUCTURES.

La figure 18 reprend ces méthodes ainsi que leurs liens tels qu'ils nous apparaissent aujourd'hui. Il ne faut pas y voir un classement par ordre d'importance ou une généalogie entre ces diverses techniques mais seulement un essai de classement de méthodes semblables autour de leurs points communs.

Reprenons maintenant ces diverses approches.

##### III.1.1 La solution de Goldberg et Leve pour les coques prismatiques simplement appuyées à leurs extrémités.

La méthode de calcul de Golberg et Leve (GOLBERG, LEVE 1957) ainsi que celle des bandes finies se basent sur la théorie des plaques élastiques. Dans les structures métalliques à parois minces, les hypothèses relatives à cette théorie correspondent bien à la réalité.

Comme dans la méthode des bordages raidis, l'analyse du problème montre que des efforts correspondant à un harmonique donné produisent des déplacements du même type. Cette propriété permet d'étudier la structure sous l'action des charges et des déplacements correspondant à chaque terme du développement en série, puis de sommer les résultats, en appliquant le principe de superposition.

On constate une grande similitude de raisonnement entre notre méthode et celle élaborée par Goldberg et Leve. La distinction essentielle réside dans le choix de l'équation

différentielle; le choix de l'équation des plaques lisses fait par Goldberg et Leve simplifie quelque peu les expressions analytiques par rapport à ce qu'elles sont dans la méthode des bordages raidis. Par contre le domaine d'investigation de la méthode des bordages raidis est bien plus vaste et englobe totalement celui correspondant à Goldberg et Leve.

### II.1.2 Les bandes finies.

Certains expérimentateurs (CHEUNG 1968) ont utilisé dans leurs calculs un champ de déplacement qui est représenté par des polynômes. Les éléments de ce type ont reçu le nom de bandes finies (FINITE STRIPS). Ce type de champ de déplacement est plus simple à calculer que le champ réel. Il ne contient pas de fonctions hyperboliques, pour lesquelles l'ordinateur exige un temps de calcul appréciable. A ce point de vue, les bandes finies offrent un avantage sur la méthode de Golberg et Leve.

D'autre part, les champs de déplacements et des contraintes ne correspondent pas exactement à la réalité. Comme pour les éléments finis, la précision des résultats dépend en outre de la discrétisation de la structure analysée. Pour obtenir des résultats satisfaisants, on doit donc multiplier le nombre des bandes.

Au total, il est difficile de prévoir a priori laquelle des deux méthodes donne les résultats les plus intéressants.

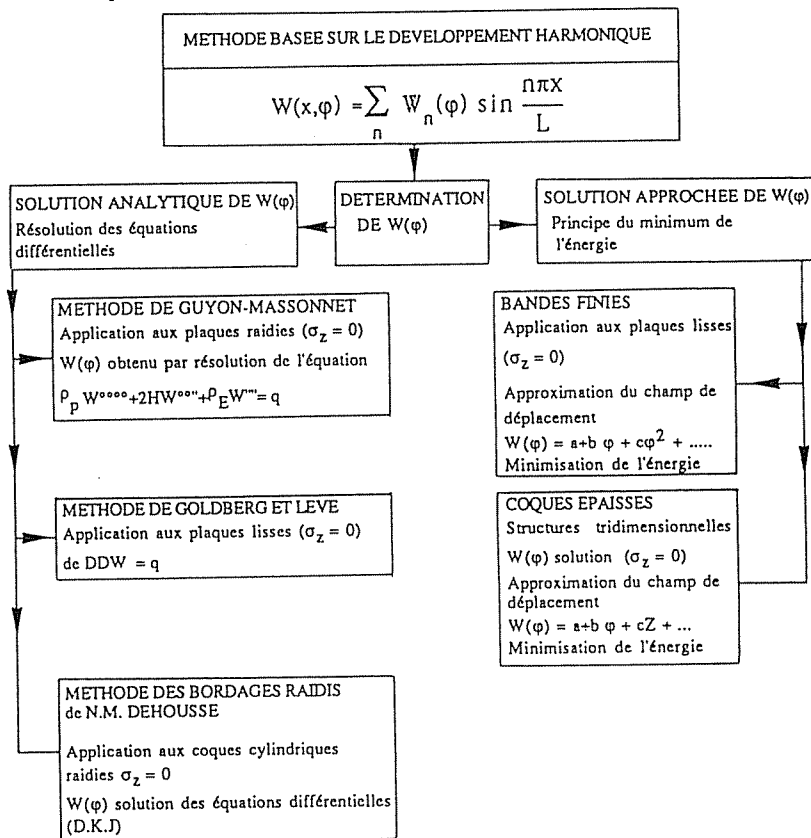


FIGURE 18  
Filiation des grandes méthodes d'analyse harmonique des structures.



### III.1.3 Méthode de GUYON - MASSONNET.

Cette méthode universellement connue (BARES, MASSONNET 1966), a comme principal champ d'application, le calcul des ponts à poutres multiples et ces hypothèses sont identiques à celles admises dans les autres méthodes. Cette méthode a débouché sur l'élaboration de tables très aisées à utiliser et permettant aux concepteurs de réaliser un dimensionnement précis sans devoir recourir à de lourds calculs.

Vis-à-vis des bandes finies et surtout de la méthode des bordages raidis, cette méthode demande de nombreuses hypothèses et simplifications supplémentaires. Malgré ces restrictions, cette méthode reste toujours d'application et fournit des résultats suffisamment précis au stade d'un avant-projet.

### III.2 COMPARAISON ENTRE LES METHODES D'ANALYSE HARMONIQUE ET LA METHODE DES BORDAGE RAIDIS.

La méthode développée par Goldberg et Leve pour le calcul des structures prismatiques ainsi que celle des bordages raidis donnent de très bons résultats. Ces méthodes demandent la résolution de matrices à bandes étroites et, pour cette raison, elles procurent un gain de temps très appréciable. La taille des matrices est, de plus, réduite du fait du découplage total entre les groupes d'équations correspondant aux différents termes de la série.

Pour chaque terme du développement, le champ de déplacement est obtenu par la résolution des équations de l'élasticité des coques raidies. Le **champ de déplacement est donc le champ réel**, du moins si la structure considérée répond aux hypothèses de la théorie des coques.

### III.3 COMPARAISON ENTRE LES METHODES D'ANALYSE HARMONIQUE ET LES ELEMENTS FINIS CLASSIQUES.

Bien que la démarche soit tentante, axer la comparaison de deux méthodes au niveau du temps de calcul pris par l'ordinateur est une erreur. Les progrès sont tels, avec notamment l'apparition des ordinateurs vectoriels et l'interconnexion des réseaux, que tout problème soumis à l'ordinateur a sa solution endéans les 24 voire les 48 heures. De plus, l'économie de temps ne se solde pas toujours par une économie d'argent pour qui dispose de son propre ordinateur.

Laissons donc au second plan cet avantage indéniable des méthodes harmoniques tout en notant que le rapport de réduction du temps de calcul vis-à-vis des éléments finis peut aller de 1 à 100.

Insistons par contre beaucoup plus sur le **temps de discrétisation** de la structure. En effet, avant la soumission du problème à l'ordinateur, le temps requis pour créer le fichier de données et l'encoder peut varier de quelques minutes, à plusieurs heures, voire plusieurs jours. De plus, le risque d'erreurs d'encodage et leurs conséquences sont proportionnels à la taille des données. C'est pour ces raisons, qu'il convient de choisir la méthode adéquate en fonction de la structure, du niveau de précision demandée, du type d'analyse requis, du temps et de l'argent dont on dispose.

Il n'échappe à personne que toute méthode d'analyse harmonique ne nécessite qu'une discrétisation transversale au contraire des éléments finis. A ce niveau, l'économie financière potentielle est bien réelle et non négligeable.

Le découplage total entre les équations des différents termes de la série peut permettre d'implanter de telles méthodes sur des ordinateurs de plus petites dimensions et notamment sur des ordinateurs individuels pour ce qui concerne la méthode des bordages raidis.

Une facilité des méthodes de Goldberg et Leve et des bordages raidis par rapport aux éléments finis et bandes finies, est la clarté et la souplesse des résultats. Les déplacements et les contraintes étant connus en tous points de manière exacte et non pas moyenne. En effet, dans les éléments finis dits cinématiquement admissibles, on ne dispose que d'une connaissance faible des contraintes, et inversement pour les éléments statiquement admissibles, on ne dispose que d'une connaissance faible des déplacements.

Il ne faudrait pourtant pas croire, suite à cette comparaison, que les éléments finis riment avec lourdeur, imprécision, et coût excessif. Ce n'est, en effet, que dans certains cas, que ceux-ci sont victimes de leur puissance et de leur souplesse; et peuvent être avantageusement remplacés par les méthodes d'analyse harmonique dont fait partie la méthode des bordages raidis.

#### III.4 CLASSIFICATION DES MODELES DE CALCUL SELON LE TYPE D'HYPOTHESES - CONTRAINTES (S.A), DEPLACEMENTS (C.A) -

On a rassemblé dans ce paragraphe les méthodes de calcul les plus éprouvées pour les types courants de coques. Il est capital que l'ingénieur connaisse les hypothèses sur lesquelles elles sont basées, soit conscient de leurs limitations et ne dissocie pas de son calcul la conception et l'exécution de la structure. Il doit savoir que les meilleurs calculs ne rachèteront jamais une conception défectueuse et que, de l'exécution, peut dépendre la validité des hypothèses sur lesquelles il a basé son dimensionnement.

La classification utilisée ici (figure 19) est celle des éléments finis; elle consiste à classer les théories ou éléments, en fonction des hypothèses émises. Soit celles-ci concernent les déplacements, ce qui conduit à un modèle **cinématiquement admissible** ( C.A ), soit elles sont relatives aux forces ou contraintes, ce qui signifie qu'il s'agit d'un modèle **statiquement admissible** ( S.A ). Si les deux types d'hypothèses sont émises, on parle de **modèle hybride**.

Ainsi, pour en arriver à la théorie de Kirchhoff, il faut admettre des hypothèses sur les déplacements mais aussi sur les contraintes  $\sigma_z=0$ . Par conséquent, tout modèle issu de la théorie de kirchhoff est globalement hybride et de ce fait, la méthode des bordages raidis doit également être classée comme modèle hybride à l'instar des éléments finis les plus performants.

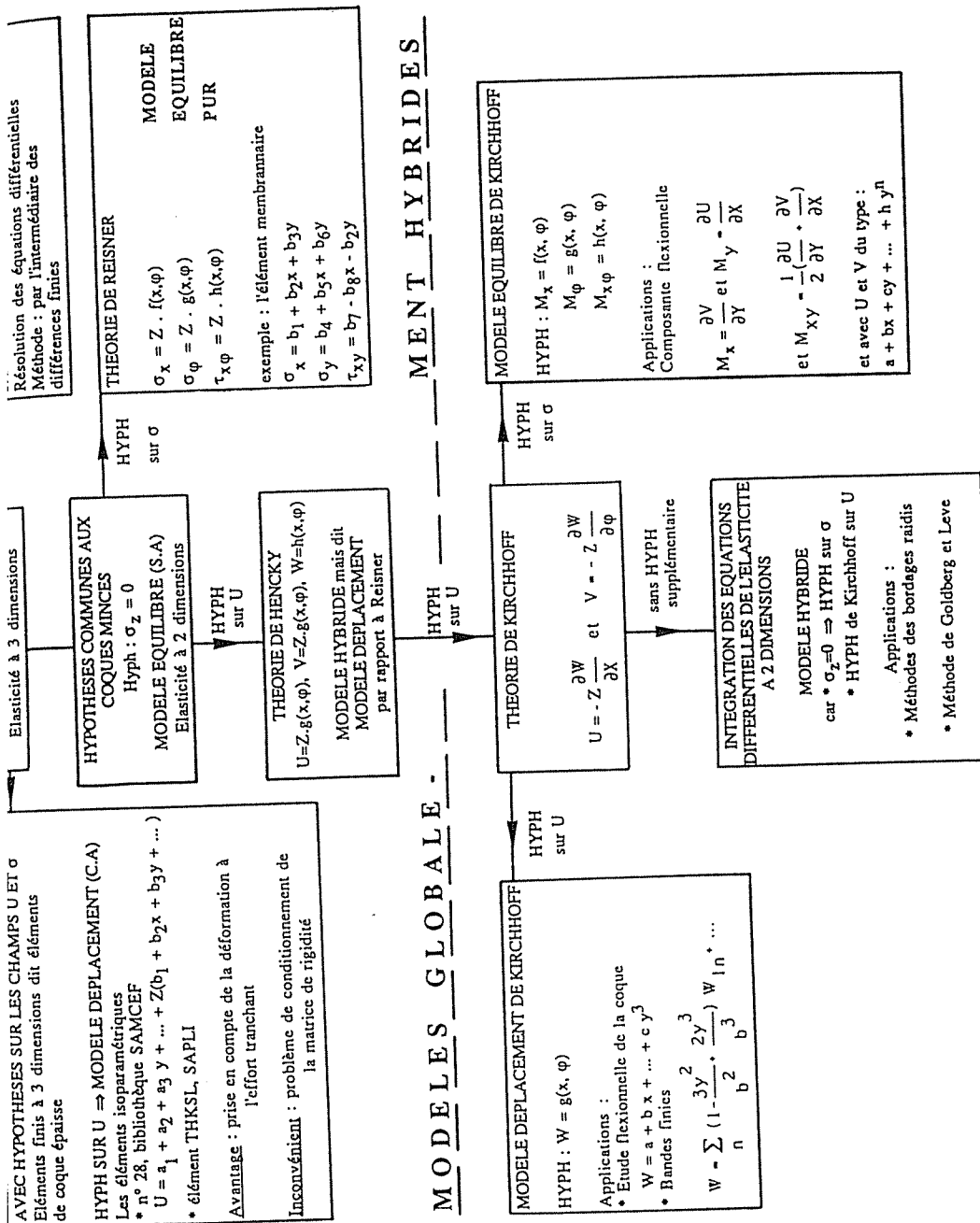


FIGURE 19  
 Classification des méthodes de calcul des structures métalliques orthotropes en fonction des hypothèses émises.

## IV. APPLICATIONS AUX STRUCTURES HYDRAULIQUES.

Avec le calcul d'une vanne de barrage mobile et d'une porte marée-tempête, nous allons montrer aussi succinctement que possible, la puissance et la facilité d'utilisation du logiciel des bordages raidis.

### IV.1 LA VANNE SEGMENT D'UN BARRAGE MOBILE.

Le corps principal de la plupart des vannes de barrage mobile est généralement un caisson ouvert ou fermé composé de coques et plaques orthotropes. Ainsi en est-il des vannes levantes, des vannes secteur, des vannes-clapet, des vannes segment, .... Tous ces corps de vannes sont donc susceptibles d'être étudiés à l'aide du logiciel L.B.R.-3.

Dans le cadre de cet exposé, nous avons choisi de présenter le cas de la vanne segment (figure 20) dont l'étude est particulièrement délicate (DEHOUSSE, RIGO 1987) et dont les caractéristiques géométriques sont reprises ci-dessous.

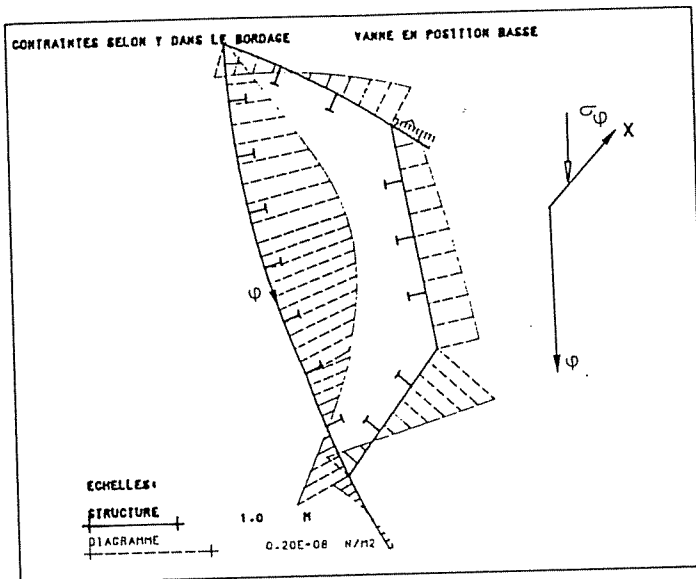


FIGURE 20.  
Vue en coupe de la vanne segment

Panneau amont :	aiguilles	300 x 150 x 10	( tous les 1.8 m)
	raidisseurs	130 x 65 x 8	( tous les 0.6 m)
Panneaux supérieurs et inférieurs :	aiguilles	300 x 150 x 10	( tous les 1.8 m)
	raidisseurs	95 x 65 x 6	( tous les 0.6 m)
Panneau aval :	aiguilles	300 x 150 x 10	( tous les 1.8 m)
	raidisseurs	95 x 65 x 6	( tous les 0.6 m)

Les premiers calculs effectués à l'aide du logiciel ont permis de contrôler le prédimensionnement. Ces passages effectués avec 1 terme et sans les effets de bord (vanne considérée comme simplement appuyée sur ses bras) ne nécessitent que 72 lignes de données et 20 secondes de calcul sur un IBM 4381. Les derniers passages effectués avec 7 termes et les effets de bord ( $X$  et  $M_{\varphi}$ ) ne nécessitent que 3 lignes de données supplémentaires et demandent 411 secondes.

Ces données extrêmement réduites et ces faibles temps de calcul renforcent l'intérêt qu'il y a d'utiliser le logiciel L.B.R.-3 pour le calcul de telles structures, d'autant que le logiciel fournit des résultats nombreux, diversifiés et fiables. Ainsi, la discrétisation, l'entrée des données, la résolution par ordinateur et l'analyse des résultats peuvent être réalisés pour l'exemple cité, en moins de 8 heures. Cette méthode raccourcit donc considérablement le temps nécessaire à de telles études et voit s'ouvrir à elle la voie de la conception assistée par ordinateur.

Compte tenu des caractéristiques décrites ci-avant, on peut obtenir l'allure des déplacements, contraintes et efforts agissant au sein de la vanne. Ainsi, la figure 21 donne-t-elle les contraintes transversales  $\sigma_{\varphi}$  dans le bordage à mi-portée.

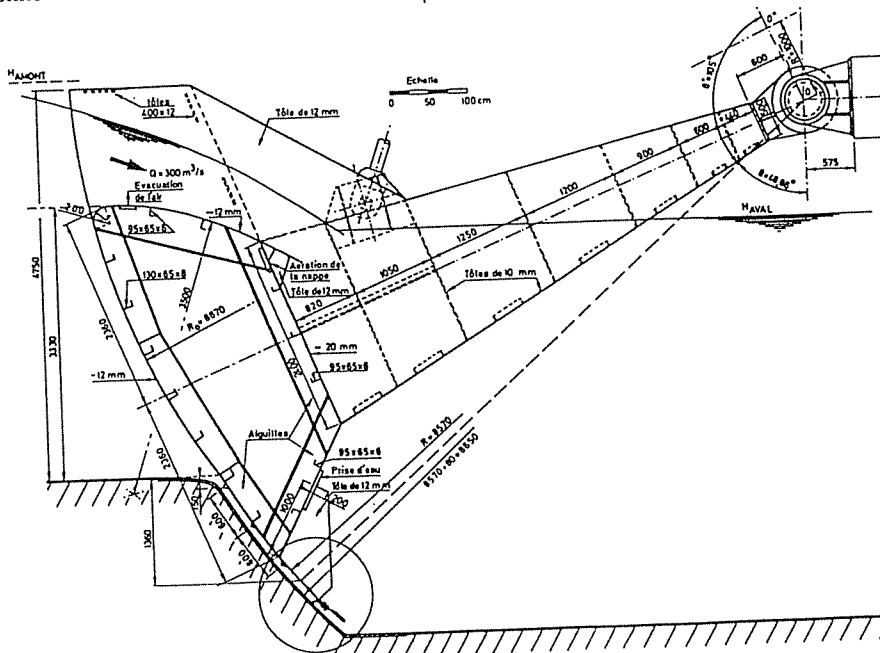


FIGURE 21  
Contraintes transversales  $\sigma_{\varphi}$  dans le bordage à mi-portée,  $x=L/2$





## V. ACCESSIBILITE A LA METHODE DES BORDAGES RAIDIS.

Pour le familier à une méthode de calcul quelle qu'elle soit, le domaine d'utilisation, les avantages, les restrictions, la discrétisation optimale, ... sont des données de base avec lesquelles il est habitué de travailler. Mais pour que cette méthode soit, en pratique également, accessible à un utilisateur néophyte en ce domaine, une formation très réduite suffit pour lui permettre de tirer le meilleur parti de cette méthode. Nous définirons ce problème comme étant celui de "l'accessibilité" à la méthode.

Les méthodes les plus accessibles seront donc celles qui nécessiteront le moins d'apprentissage de la part de l'utilisateur non initié. On peut sans aucun doute classer la **Méthode des Bordages Raidis** dans la catégorie des méthodes ayant la meilleure accessibilité. En effet, les données nécessaires étant peu nombreuses, simples à déterminer et, de plus, fort systématiques, l'accessibilité au logiciel est très aisée.

En ce qui concerne la discrétisation, qui constitue souvent le point nécessitant le plus de formation de la part de l'utilisateur, elle est pour la **Méthode des Bordages Raidis** fort simple et de plus évidente car elle se fait naturellement en fonction de l'unique géométrie de la structure.

Au niveau de la méthode proposée dans cette thèse, la solution provenant de la résolution des équations différentielles étant exacte, subdiviser un élément en deux n'est d'aucune utilité. En effet, la solution restera la même et seul le temps de calcul sera inutilement accru. Pratiquement, il suffit donc de discrétiser la structure comme un ensemble de plaques et de coques cylindriques dont les dimensions relatives n'ont pas d'importance. Seul le paramètre fixant le nombre de termes de la série de Fourier nécessite un peu d'expérience de manière à pouvoir fixer le niveau de précision souhaité pour les résultats. Plus ce nombre croît, plus la précision augmente mais aussi le coût ; de plus, un accroissement exagéré du nombre de termes n'apporte pratiquement plus aucune amélioration et risque au contraire de poser des problèmes numériques.

### V.1. EN PRATIQUE.

Ce qu'il faut connaître en pratique pour utiliser la **Méthode des Bordages Raidis** est résumé dans ce paragraphe.

Pour les charges uniformes selon OX comme la pression hydrostatique, un seul terme constitue une bonne approximation au point de vue des déplacements ; pour les contraintes 7 termes sont un idéal mais 3 termes peuvent être considérés comme un



## VI. CONCLUSION.

Les fondements des diverses méthodes modernes de calcul des structures orthotropes sont semblables, c'est dans leur développement que les différences apparaissent. Chaque méthode ayant ses propres spécificités, elles conviennent particulièrement pour un domaine précis d'applications.

A notre niveau, le but est de présenter une méthode originale, adaptée aux exigences des constructions hydrauliques métalliques, économique à l'usage, d'utilisation aisée et rapide et donnant des résultats clairs; ces derniers devant être précis, nombreux et détaillés aussi bien au niveau des déplacements que des contraintes.

Ainsi, le logiciel des bordage raidis est particulièrement performant lorsque le raidissage est important car, tout en tenant compte des effets locaux des nervures, il intègre les nervures au sein du système d'équations différentielles sans alourdir sa résolution. Ainsi, l'étude complète d'une structure complexe comme une porte marée-tempête ou une vanne segment peut, grâce à ce logiciel, être réalisée en 12 heures.

Le logiciel est très aisé d'accès, les données nécessaires sont fort réduites et très simples à exprimer. Les résultats sont eux, par contre, très détaillés et d'une haute précision, aussi bien sur les contraintes que sur les efforts et les déplacements. En effet, le principe de la méthode, reposant sur une résolution analytique des équations, garantit l'obtention d'une solution pouvant être qualifiée d'exacte.

Le logiciel permet, au stade actuel de son développement, outre la prise en compte des charges extérieures classiques, l'introduction de toutes sortes de conditions d'appuis (appui simple, encastrement, appui élastique). Cela permet d'envisager l'étude complète de nombreuses structures, métalliques et en béton dont notamment les constructions hydrauliques telles que : pont-canal, porte d'écluse, vanne de barrage mobile, ...

## BIBLIOGRAPHIE

1. N.M. DEHOUSSE, Ph. RIGO, (1987), "*Le réglage des niveaux par barrages mobiles pour des ouvrages à faibles retenues*", Bulletin n°57 de l'AIPCN.
2. B. FRIEDMAN, (1956), "*Principles and Techniques of Applied Mathematics*", New-York.
3. Ph. RIGO, (1988), "*Applications des développements harmoniques aux calculs des ouvrages hydrauliques métalliques*", Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège
4. N.M. DEHOUSSE, (1961), "*Les bordages raidis en construction hydraulique*", Mémoires du Centre d'Etudes, de Recherche et d'Essais Scientifiques du Génie Civil (Nouvelle série), Vol. n°1, Liège.
5. A. JAKOBSEN, (1958), "*Die Berechnung der Zylinderschalen*", Springer-Berlin
6. L.H.C.N., (1987), "*Stormvloedkering, Nieuwe Waterweg*", Rapport interne du LHCN de l'Université de Liège.
7. F. B. HILDEBRAND, (1952), "*Method of Applied Mathematics*", New-York, Prentice-Hall, Inc.
8. J. E. GOLBERG, H. L. LEVE, (1957), "*Theory of Prismatic Folded Plate Structures*", Mémoires AIPC, Vol 17.
9. Y. K. CHEUNG, (Dec.1968), "*Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 94, n°EM6.
10. R. BARES, Ch. MASSONNET, (1966), "*Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes*", DUNOD, Paris.

