Sur certains espaces fonctionnels généralisés

Thomas Lamby

GDR AMA 2021

27 Septembre 2021

Plan

1. Espaces de Calderón-Zygmund
2. Espaces de Calderón-Zygmund généralisés
   - Fonctions de Boyd et espaces de C-Z généralisés
   - Généralisation du théorème de Rademacher
3. Espaces de Besov généralisés
   - Interpolation
   - Interpolation généralisée

Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \geq 0$, une fonction $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'*espace de Hölder ponctuel* $\Lambda^\alpha(x_0)$ s'il existe $J \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et un polynôme P de degré au plus α tels que

$$\|f - P\|_{L^\infty(B(x_0,2^{-j}))} \leq C\,2^{-\alpha j} \quad \forall j \geq J.$$

Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et $u \geq -d/p$, on dit que $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'espace $T^p_u(x_0)$ s'il existe un polynôme P de degré plus petit ou égal à u et une constante $C > 0$ tels que pour r suffisamment petit,

$$r^{-d/p} \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C\, r^u.$$

Pour $f \in T_u^p(x_0)$, on utilise naturellement les notions suivantes.
Le *p-exposant* de f en x_0 est défini par

$$h_p(x_0) = \sup\{u \geq -d/p : f \in T_u^p(x_0)\}.$$

Le *p-spectre* de f est défini par

$$d_p : \left[-\frac{d}{p}, +\infty\right] \to [0, d] \cup \{-\infty\} : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 \in \mathbb{R}^d : h_p(x_0) = h\}).$$

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ dans un voisinage de x_0 et si on pose

$$p_0(f) = \sup\left\{p \geq 1 : f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \text{ dans un voisinage de } x_0\right\},$$

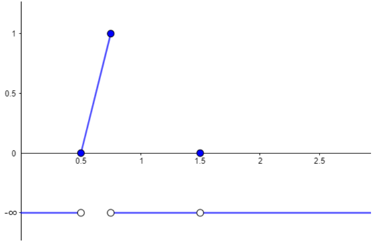
alors la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ est décroissante et à valeurs dans $[-d/p_0(f), +\infty]$.

Prenons par exemple la fonction de Riemann définie par

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi j^2 x}}{j^2}.$$

Le spectre de Hölder de $\mathcal{R}$ est donné par

$$d_\infty(h) = \begin{cases} 4h-2 & \text{si } h \in [1/2, 3/4]\,, \\ 0 & \text{si } h = 3/2, \\ -\infty & \text{sinon}\,. \end{cases}$$



On généralise la fonction de Riemann $\mathcal{R}$ de la manière suivante.

Pour $s \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, on pose

$$\mathcal{R}_s(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi j^2 x}}{j^s}.$$

Théorème

Soit $s \in]1/2, 1]$, pour tout $h \in \left[0, \frac{s}{2} - \frac{1}{4}\right]$, le 2-spectre de $\mathcal{R}_s$ est donné par

$$d_2(h) = 4h + 2 - 2s.$$

Définition

Une fonction $\phi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ est une *fonction de Boyd* (ou encore *fonction à variation régulière uniforme*) si

(i) $\phi(1) = 1$,

(ii) ϕ est continue,

(iii) pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\overline{\phi}(x) := \sup_{y>0} \frac{\phi(xy)}{\phi(y)} < +\infty.$$

L'ensemble des fonctions de Boyd est noté $\mathcal{B}$. On pose

$$\underline{b}(\phi) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \overline{b}(\phi) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x}.$$

Exemple

Si $\gamma \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\phi(x) = x^\theta(1 + |\log x|)^\gamma \ \forall x > 0$ alors $\phi \in \mathcal{B}$ et que $\underline{b}(\phi) = \overline{b}(\phi) = \theta$.

Proposition

Soient $\phi \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$ et $R > 0$. Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ telles que

(i) *Pour tout $r \in]0, R]$,*

$$C_1\, r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon} \leq \phi(r) \leq C_2\, r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon}.$$

(ii) *Pour tout $r \in [R, +\infty[$,*

$$C_3\, r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon} \leq \phi(r) \leq C_4\, r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon}.$$

Définition

Une suite $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ de nombres réels positifs est une *suite admissible* s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\,\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C_2\,\sigma_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\,.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on définit

$$\underline{\sigma_j} = \inf_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \text{ et } \overline{\sigma_j} = \sup_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}.$$

On pose

$$\underline{s}(\sigma) = \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2 \underline{\sigma_j}}{j} \text{ et } \overline{s}(\sigma) = \lim_{j\to+\infty} \frac{\log_2 \overline{\sigma_j}}{j}.$$

Proposition

Soit $\phi \in \mathcal{B}$, la suite $(\phi(2^{-j}))_{j \in \mathbb{N}_0}$ est admissible.

Proposition

Soit σ une suite admissible, il existe $\phi \in \mathcal{B}$ telle que $\phi\left(2^{-j}\right) = \sigma_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

En posant $\sigma_0 = 1$, on définit

$$\phi : x \in]0, +\infty[\mapsto \begin{cases} \frac{(\sigma_{j+1} - \sigma_j)(1 - 2^j x)}{2^j x} + \sigma_j & \text{si } x \in \left]2^{-(j+1)}, 2^{-j}\right], \, j \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\, . \end{cases}$$

Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$.
Une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'espace $T^p_\phi(x_0)$ s'il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ et une constante $C > 0$ tels que

$$r^{-d/p} \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C\,\phi(r) \quad \forall r > 0.$$

Si on a de plus

$$r^{-d/p} \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} = o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+,$$

alors on dit que $f \in t^p_\phi(x_0)$.

On pose

$$|f|_{T^p_\phi(x_0)} = \sup_{r>0} \phi(r)^{-1} r^{-d/p} \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))},$$

et

$$\|f\|_{T^p_\phi(x_0)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha|<\underline{b}(\phi)} \frac{|D^\alpha P(x_0)|}{|\alpha|!} + |f|_{T^p_\phi(x_0)}.$$

Proposition

L'espace $(T^p_\phi(x_0), \|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)})$ est un espace de Banach.

Proposition

$t^p_\phi(x_0)$ est un sous-espace fermé de $T^p_\phi(x_0)$ pour la topologie issue de la norme $\|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)}$.

Proposition

Soient φ une fonction réelle non négative dans $\mathcal{D}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx = 1$ et telle que $[\varphi] \subset \overline{B(0,1)}$, $p \in [1,+\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, et posons pour tout $\lambda > 0$,

$$f_\lambda = \lambda^d\,\varphi(\lambda\cdot) * f.$$

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$ et supposons que soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < n+1$ ou soit que $\underline{b}(\phi) \leq 0$. Alors, si $f \in t^p_\phi(x_0)$, on a

$$\|f_\lambda - f\|_{T^p_\phi(x_0)} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, l'espace $\mathcal{D}$ est dense dans $t^p_\phi(x_0)$

Définition

Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$, on écrit $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$ pour signifier qu'il existe des constantes $R, C > 0$ telles que pour tout $r \in]0, R[$, on a $\phi_1(r) \leq C\,\phi_2(r)$.

Proposition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi_1) > -d/p$ et $\underline{b}(\phi_2) > -d/p$.

Supposons que soit $\overline{b}(\phi_2) \leq 0$, soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi_2) \leq \overline{b}(\phi_2) < n + 1$.

Si $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$, alors $T^p_{\phi_1}(x_0) \subseteq T^p_{\phi_2}(x_0)$.

De plus, si $\phi_1(r) = o(\phi_2(r))$ quand $r \to 0^+$, alors $T^p_{\phi_1}(x_0) \subseteq t^p_{\phi_2}(x_0)$.

Généralisation du théorème d'extension de Whitney

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ fermé, $U = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, E) < 1\}$, $p \in [1, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $n < \underline{b}(\phi)$.
Si $f \in T^p_\phi(x_0)$ vérifie $\|f\|_{T^p_\phi(x_0)} \leq M$ pour un $M > 0$ et pour tout $x_0 \in E$, alors il existe $F \in C^n(U)$ telle que $F = f$ presque partout sur E.

Théorème de Rademacher

Toute fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ est différentiable presque partout.

Lemme

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable, $p \in [1, +\infty]$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi) > -d/p$. Si $f \in T^p_\phi(x_0)$, alors la fonction $\xi_f : x \in E \mapsto \|f\|_{T^p_\phi(x)}$ est mesurable.

Lemme

Soient $p \in [1, +\infty[$, $\phi \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{b}(\phi) > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, si

$$r^{-d/p} \|f\|_{L^p(B(x,r))} \leq C\,\phi(r) \quad \forall r > 0$$

et pour tout x dans un sous-ensemble mesurable E de $\mathbb{R}^d$, alors pour presque tout $x \in E$,

$$r^{-d/p} \|f\|_{L^p(B(x,r))} = o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+.$$

Généralisation du théorème de Rademacher

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable, $p \in]1, +\infty[$, $\phi \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < n + 1$. Si $f \in T^p_\phi(x)$ pour tout $x \in E$, alors $f \in t^p_\phi(x)$ pour presque tout $x \in E$.

Une suite $(\gamma_j)_j$ est *fortement croissante* s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$2\gamma_j \leq \gamma_k \ \ \forall j, k \in \mathbb{N} \ \text{ tels que } j + k_0 \leq k.$$

Pour une suite admissible fortement croissante $(\gamma_j)_j$, soit $\rho \in \mathcal{D}$ une fonction positive telle que $\rho = 1$ sur $[-1, 1]$, ρ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et

$$[\rho] \subset [-2, 2]\,.$$

Soit $J \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi_j^{\gamma,J} = \rho(\gamma_j^{-1}|\cdot|) \quad \text{si } j \in \{0, ..., k_0 J - 1\}.$$

et

$$\varphi_j^{\gamma,J} = \rho(\gamma_j^{-1}|\cdot|) - \rho(\gamma_{j-Jk_0}^{-1}|\cdot|) \quad \text{si } j \geq k_0 J.$$

Définition

Soient $(\sigma_j)_j$ et $(\gamma_j)_j$ deux suites admissibles avec $(\gamma_j)_j$ fortement croissante, et soient $p, q \in [1, +\infty]$, l'*espace de Besov généralisé* $B^{\sigma,\gamma}_{p,q}$ est défini par

$$B^{\sigma,\gamma}_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \left\| \left(\sigma_j \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi^{\gamma,J}_j \mathcal{F} f \right) \right\|_{L^p} \right)_j \right\|_{l^q} < +\infty \right\}.$$

- Si $\phi \in \mathcal{B}$ est telle que $\phi(2^j) = \sigma_j$ pour tout j et si $(\gamma_j)_j = (2^j)_j$, alors on pose $B^{\phi}_{p,q} = B^{\sigma,\gamma}_{p,q}$.
- Si $s > 0$ et $(\sigma_j)_j = (2^{sj})_j$ et si $(\gamma_j)_j = (2^j)_j$, alors on a $B^{\sigma,\gamma}_{p,q} = B^s_{p,q}$.

Soient A_0 et A_1 deux espaces vectoriels normés inclus dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff H. Par conséquent, les espaces $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$ sont aussi vectoriels normés.

Le *K-opérateur d'interpolation* est défini pour $t > 0$ et $a \in A_0 + A_1$ par

$$K(t, a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\}.$$

Si $\theta \in]0, 1[$ et $q \in [1, +\infty]$, a appartient à l' *espace d'interpolation* $[A_0, A_1]_{\theta,q}$ si $a \in A_0 + A_1$ et

$$\left(2^{-\theta j} K(2^j, a)\right)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z}).$$

Définition

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty]$, on définit l'*espace de Sobolev* H_p^s par

$$H_p^s = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\left(1 + |\cdot|^2\right)^{s/2} \mathcal{F} f \right) \right\|_{L^p} < +\infty \right\}.$$

Soient $t, u \in \mathbb{R}$, $\theta \in]0, 1[$, si $s = (1 - \theta)t + \theta u$, alors

$$[H_p^t, H_p^u]_{\theta,q} = B_{p,q}^s.$$

Définition

Soient $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux suites et $q \in [1,+\infty]$, alors a appartient à l' *espace d'interpolation généralisé* $[A_0,A_1]_q^{\alpha,\psi}$ si $a \in A_0 + A_1$ et

$$\big(\alpha_j K(\psi_j, a)\big)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z}).$$

Soient $r, s \in \mathbb{R}$, si $(\sigma_j)_j$ et $(\gamma_j)_j$ sont deux suites admissibles telles que $\underline{\gamma}_1 > 1$ et

$$r < \min\{\underline{s}(\sigma)\underline{s}(\gamma)^{-1}, \bar{s}(\sigma)\underline{s}(\gamma)^{-1}\} \leq \max\{\bar{s}(\sigma)\underline{s}(\gamma)^{-1}, \bar{s}(\sigma)\bar{s}(\gamma)^{-1}\} < s,$$

on pose

$$[A_0,A_1]_q^{\sigma,\gamma} = [A_0,A_1]_q^{\alpha,\psi},$$

où

$$\alpha_j = \begin{cases} \gamma_{-j}^{-r}\sigma_{-j} & \text{si } j \in -\mathbb{N}, \\ \gamma_j^r \sigma_j^{-1} & \text{si } j \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_j = \begin{cases} \gamma_{-j}^{-(s-r)} & \text{si } j \in -\mathbb{N}, \\ \gamma_j^{s-r} & \text{si } j \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

Théorème

Soient $p, q \in [1, +\infty]$, $r, s \in \mathbb{R}$ et $(\sigma_j)_j$ et $(\gamma_j)_j$ deux suites admissibles vérifiant les deux conditions précédentes, alors

$$[H_p^r, H_p^s]_q^{\sigma,\gamma} = B_{p,q}^{\sigma,\gamma}.$$

- Interpolation généralisée de Besov généralisés

- Interpolation généralisée de Sobolev généralisés

- Interpolation généralisée de Hardy-Sobolev généralisés

Merci pour votre attention !