


Manipuler au cours de mathématiques, pour qui, pour quoi ?

Recherche *Math & Manips* 

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht



JN de Bourges – Octobre 2022

Math & Manips

Objet : introduire des manipulations en classe pour favoriser
la construction des apprentissages

Math & Manips

Objet : introduire des manipulations en classe pour favoriser
la construction des apprentissages

- Démarches physiques

Math & Manips

Objet : introduire des manipulations en classe pour favoriser la construction des apprentissages

- Démarches physiques
- Conflits entre ce que les élèves pensaient et ce qu'ils découvrent avec les manipulations

Math & Manips

Objet : introduire des manipulations en classe pour favoriser la construction des apprentissages

- Démarches physiques
- Conflits entre ce que les élèves pensaient et ce qu'ils découvrent avec les manipulations
- Modélisation

Math & Manips

Objet : introduire des manipulations en classe pour favoriser la construction des apprentissages

- Démarches physiques
- Conflits entre ce que les élèves pensaient et ce qu'ils découvrent avec les manipulations
- Modélisation
- Divers registres

En pratique

Une *Math & Manip*

- se déroule dans le local habituel du cours de mathématiques,

En pratique

Une *Math & Manip*

- se déroule dans le local habituel du cours de mathématiques,
- utilise du matériel facile à se procurer,

En pratique

Une *Math & Manip*

- se déroule dans le local habituel du cours de mathématiques,
- utilise du matériel facile à se procurer,
- est d'une durée comparable à celle d'une séquence sans manipulation.

Recherche : méthodologie

- Conception d'activités (pour tous les niveaux d'enseignement)

Recherche : méthodologie

- Conception d'activités (pour tous les niveaux d'enseignement)
 - fondamental
 - collège (secondaire inférieur)
 - lycée (secondaire supérieur)

Recherche : méthodologie

- Conception d'activités (pour tous les niveaux d'enseignement)
 - fondamental
 - collège (secondaire inférieur)
 - lycée (secondaire supérieur)
- Expérimentations dans les classes

Recherche : méthodologie

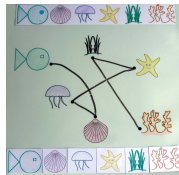
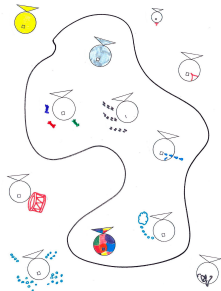
- Conception d'activités (pour tous les niveaux d'enseignement)
 - fondamental
 - collège (secondaire inférieur)
 - lycée (secondaire supérieur)
- Expérimentations dans les classes
- Documents pour les enseignants

Des activités du fondamental au lycée

- Maternel

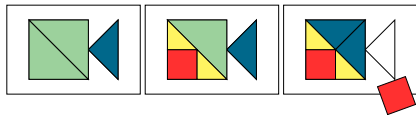
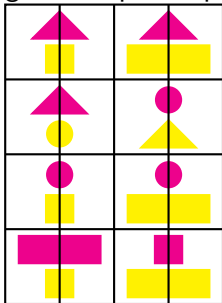
Des activités du fondamental au lycée

- Maternel
 - Repérage dans l'espace : vocabulaire spatial, topologie, notion d'ordre



Des activités du fondamental au lycée

- Maternel
 - Repérage dans l'espace : vocabulaire spatial, topologie, notion d'ordre
 - Reconnaissance de formes : symétrie, formes géométriques, équivalence de surfaces



Des activités du fondamental au lycée

- Maternel
 - Repérage dans l'espace : vocabulaire spatial, topologie, notion d'ordre
 - Reconnaissance de formes : symétrie, formes géométriques, équivalence de surfaces
- Primaire

Des activités du fondamental au lycée

- Maternel
 - Repérage dans l'espace : vocabulaire spatial, topologie, notion d'ordre
 - Reconnaissance de formes : symétrie, formes géométriques, équivalence de surfaces
- Primaire
 - Comparaison de grandeurs : sans mesure



Des activités du fondamental au lycée

- Maternel
 - Repérage dans l'espace : vocabulaire spatial, topologie, notion d'ordre
 - Reconnaissance de formes : symétrie, formes géométriques, équivalence de surfaces
- Primaire
 - Comparaison de grandeurs : sans mesure
 - Des étalons : comparaison de capacités

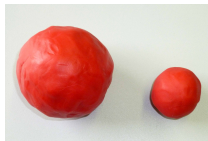
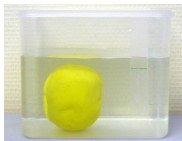


Des activités du fondamental au lycée

- Collège

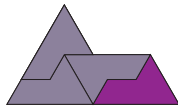
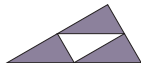
Des activités du fondamental au lycée

- Collège
 - Notion de volume : pré-conceptions et images mentales, objets pleins ou creux, liens avec la taille, la forme, la masse, ... vers la formule du volume du parallélépipède rectangle



Des activités du fondamental au lycée

- Collège
 - Notion de volume : pré-conceptions et images mentales, objets pleins ou creux, liens avec la taille, la forme, la masse, ... vers la formule du volume du parallélépipède rectangle
 - Agrandissements : caractéristiques, aire, décomposition de polygones



Des activités du fondamental au lycée

- Collège
 - Notion de volume : pré-conceptions et images mentales, objets pleins ou creux, liens avec la taille, la forme, la masse, ... vers la formule du volume du parallépipède rectangle
 - Agrandissements : caractéristiques, aire, décomposition de polygones
 - Non-proportionnalité

Des activités du fondamental au lycée

- Collège
 - Notion de volume : pré-conceptions et images mentales, objets pleins ou creux, liens avec la taille, la forme, la masse, ... vers la formule du volume du parallépipède rectangle
 - Agrandissements : caractéristiques, aire, décomposition de polygones
 - Non-proportionnalité
- Lycée

Des activités du fondamental au lycée

- Collège
 - Notion de volume : pré-conceptions et images mentales, objets pleins ou creux, liens avec la taille, la forme, la masse, ... vers la formule du volume du parallépipède rectangle
 - Agrandissements : caractéristiques, aire, décomposition de polygones
 - Non-proportionnalité
- Lycée
 - Fonctions élémentaires et réciproques

Des activités du fondamental au lycée

- Collège
 - Notion de volume : pré-conceptions et images mentales, objets pleins ou creux, liens avec la taille, la forme, la masse, ... vers la formule du volume du parallépipède rectangle
 - Agrandissements : caractéristiques, aire, décomposition de polygones
 - Non-proportionnalité
- Lycée
 - Fonctions élémentaires et réciproques
 - Optimisation : principe, contraintes, modélisation

Un fil conducteur : les grandeurs

- Primaire : longueurs, capacités, masses, aires, volumes
 - comparaison sans mesures
 - mesures avec des étalons familiers
 - mesures avec des étalons conventionnels
- Secondaire : aires, volumes
 - tableaux de nombres
 - liens numériques entre mesures de grandeurs
 - graphiques
 - liens fonctionnels entre mesures de grandeurs
 - processus de modélisation
 - fonctions de référence

Une ingénierie pour l'étude de la proportionnalité et de la non-proportionnalité au début du secondaire

- Cadre de la recherche
 - Analyses préalables et questions de recherche
 - Outils théoriques en didactique des mathématiques
 - Séquence didactique
- Validation interne
 - Analyse *a priori*
 - Expérimentations et analyse *a posteriori*
- Validation externe

Dimension expérimentale

« il semble que la valeur éducative de l'enseignement mathématique ne pourra qu'être augmentée si la théorie y est, le plus souvent possible, mêlée à la pratique » (BOREL)

« le matériel ne doit pas être l'élément fort de ces laboratoires, mais rester au service du questionnement scientifique, et éventuellement support à la représentation » (DIAS)

Questions de recherche

La confrontation entre situation de proportionnalité et de non-proportionnalité est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

Questions de recherche

La confrontation entre situation de proportionnalité et de non-proportionnalité est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

La confrontation entre perceptions initiales des élèves et résultats expérimentaux est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

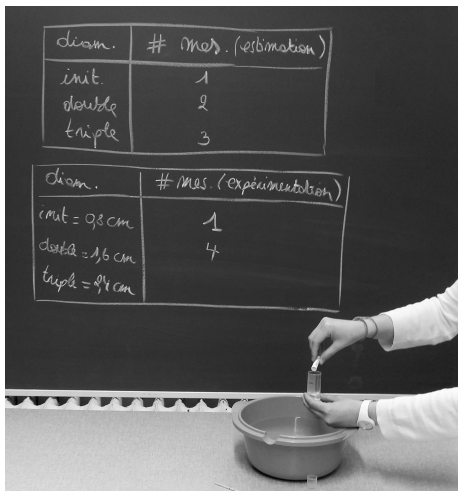
Questions de recherche

La confrontation entre situation de proportionnalité et de non-proportionnalité est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

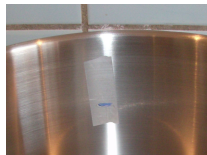
La confrontation entre perceptions initiales des élèves et résultats expérimentaux est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

Une séquence qui intègre situation de non-proportionnalité et expériences permet-elle d'améliorer l'aptitude des élèves à renoncer au modèle proportionnel lorsqu'il ne convient pas ?

Séquence didactique



Activité introductive



Investissement des élèves

14	ens.	[...] Vous regardez, vous réagissez en fonction de ce qui est fait, bien fait, pas bien fait. Ah, un premier me dit qu'il faudrait le tremper à fond, à votre avis ? On va d'abord discuter, tu continueras après [...] Pourquoi ça sera à fond ou pas ?
15	élève	Pour avoir toujours la même chose, la même quantité.
19	élève	Mais, on ne connaît pas la hauteur de la moitié.
33	élève	Moi j'ai une latte qui commence à zéro tout pile parce que celle-là, il y a un petit peu, ça ne commence pas, je ne sais pas comment expliquer. Il y a un petit espace.

Variation hauteur



Variation hauteur

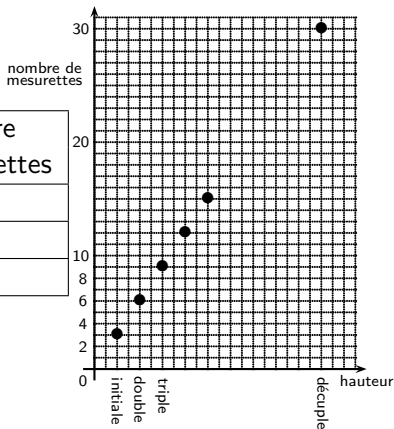


Hauteur (en cm)	Nombre de mesurettes
initiale = ...	3
double =
triple =

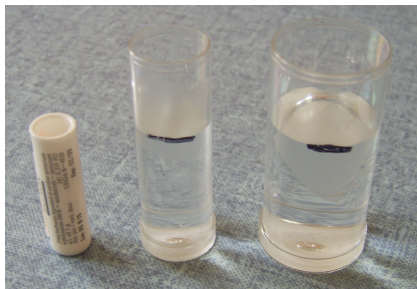
Variation hauteur



Hauteur (en cm)	Nombre de mesurenttes
3,5	3
7	6
10,5	9



Variation diamètre



Analyse *a priori*

- Stratégies attendues
- Savoirs visés
- Composantes spécifiques du milieu
- Variables didactiques

Stratégies attendues

- 1^{re} phase adidactique (variation hauteur cylindre)
 - modèle proportionnel

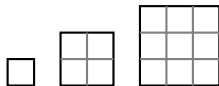
Stratégies attendues

- 1^{re} phase adidactique (variation hauteur cylindre)
 - modèle proportionnel
- 2^e phase adidactique (variation diamètre cylindre)
 - conjecture : modèle proportionnel
 - expérience : pronostics invalidés
 - formule ou analogie disque-carré

Stratégies attendues

- 1^{re} phase adidactique (variation hauteur cylindre)
 - modèle proportionnel
- 2^e phase adidactique (variation diamètre cylindre)
 - conjecture : modèle proportionnel
 - expérience : pronostics invalidés
 - formule ou analogie disque-carré

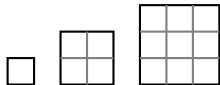
$$V_{\text{cyl}} = \pi r^2 h$$



Stratégies attendues

- 1^{re} phase adidactique (variation hauteur cylindre)
 - modèle proportionnel
- 2^e phase adidactique (variation diamètre cylindre)
 - conjecture : modèle proportionnel
 - expérience : pronostics invalidés
 - formule ou analogie disque-carré

$$V_{\text{cyl}} = \pi r^2 h$$



- Institutionnalisation
 - apprentissage grâce à la confrontation des deux situations

Savoirs visés

Acquisition du concept de proportionnalité via

- la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques

Savoirs visés

Acquisition du concept de proportionnalité via

- la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques
 - structure de proportion simple (VERGNAUD)

Savoirs visés

Acquisition du concept de proportionnalité via

- la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques
 - structure de proportion simple (VERGNAUD)
 - organisation des données

Savoirs visés

Acquisition du concept de proportionnalité via

- la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques
 - structure de proportion simple (VERGNAUD)
 - organisation des données
 - importance donnée à la représentation graphique et aux changements de cadres

Savoirs visés

Acquisition du concept de proportionnalité via

- la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques
 - structure de proportion simple (VERGNAUD)
 - organisation des données
 - importance donnée à la représentation graphique et aux changements de cadres
 - faible probabilité de rencontrer un rapport externe

Savoirs visés

Acquisition du concept de proportionnalité via

- la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques
 - structure de proportion simple (VERGNAUD)
 - organisation des données
 - importance donnée à la représentation graphique et aux changements de cadres
 - faible probabilité de rencontrer un rapport externe
- la prise de conscience que la proportionnalité ne s'applique pas en toutes circonstances

Savoirs visés

Acquisition du concept de proportionnalité via

- la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques
 - structure de proportion simple (VERGNAUD)
 - organisation des données
 - importance donnée à la représentation graphique et aux changements de cadres
 - faible probabilité de rencontrer un rapport externe
- la prise de conscience que la proportionnalité ne s'applique pas en toutes circonstances
 - recherche de l'adéquation d'un modèle

Milieu

Spécificités :

- diversité des cadres (Douady)

Milieu

Spécificités :

- diversité des cadres (Douady)
 - grandeurs

Milieu

Spécificités :

- diversité des cadres (Douady)
 - grandeurs
 - numérique

Milieu

Spécificités :

- diversité des cadres (Douady)
 - grandeurs
 - numérique
 - graphique

Milieu

Spécificités :

- diversité des cadres (Douady)
 - grandeurs
 - numérique
 - graphique
- matériel
(milieu allié ou antagoniste selon la situation)

Milieu

Spécificités :

- diversité des cadres (Douady)
 - grandeurs
 - numérique
 - graphique
- matériel
(milieu allié ou antagoniste selon la situation)

Milieu

Spécificités :

- diversité des cadres (Douady)

- grandeurs
- numérique
- graphique

- matériel

(milieu allié ou antagoniste selon la situation)

« le rôle positif de la manipulation matérielle ne tient pas à ce qu'elle résout des problèmes, mais à ce qu'elle en pose » (CARON-PARGUE)

Variables didactiques

Choix :

- cylindre VS parallélépipède à base carrée
- hauteur initiale en fonction de la mesurette
VS un nombre de cm donné
- cylindre de diamètre initial comme mesurette

Expérimentations

Classes	Pré-test	Séq. did.	Post CT	Post LT
2 classes (grade 6)	06.2009			
Bruxelles (1)	10.2009	11.2009		
Bruxelles (1)	11.2009	11.2009		
Br. wallon (1)		01.2010		
Namur (9+8)	03.2010	03.2010	04.2010	
Sambrev. (5+5)	02.2011	02.2011	03.2011	06.2011
Stavelot (10)		01.2013		06.2013
Bruxelles (3)		02.2013		
Nivelles (4)		03.2013		

Expérimentations

Classes	Pré-test	Séq. did.	Post CT	Post LT
2 classes (grade 6)	06.2009			
Bruxelles (1)	10.2009	11.2009		
Bruxelles (1)	11.2009	11.2009		
Br. wallon (1)		01.2010		
Namur (9+8)	03.2010	03.2010	04.2010	
Sambrev. (5+5)	02.2011	02.2011	03.2011	06.2011
Stavelot (10)		01.2013		06.2013
Bruxelles (3)		02.2013		
Nivelles (4)		03.2013		

Variation diamètre

Phase d'action

- estimations : « 1 - 2 - 3 »

Variation diamètre

Phase d'action

- estimations : « 1 - 2 - 3 »



« plus de 2 mesurettes [...] »

il y a de la place au-dessus et en-dessous »

Variation diamètre

Phase d'action

- estimations : « 1 - 2 - 3 »



« plus de 2 mesurettes [...] »

il y a de la place au-dessus et en-dessous »



« 4 mesurettes car le diamètre double dans un sens
et dans l'autre »

Variation diamètre

Phase d'action

- estimations : « 1 - 2 - 3 »



« plus de 2 mesurette [...] »

il y a de la place au-dessus et en-dessous »



« 4 mesurette car le diamètre double dans un sens
et dans l'autre »

« 1 - 4 - 12, à cause du diamètre qu'on double. Vu que chaque diamètre est en fait deux fois le rayon, il faut multiplier par 4 »

Variation diamètre

Phase d'action

- estimations : « 1 - 2 - 3 »



« plus de 2 mesurettes [...] »

il y a de la place au-dessus et en-dessous »



« 4 mesurettes car le diamètre double dans un sens
et dans l'autre »

« 1 - 4 - 12, à cause du diamètre qu'on double. Vu que chaque diamètre est en fait deux fois le rayon, il faut multiplier par 4 »

« 1 - 4 - 9 » à partir de la formule

Variation diamètre

Phase d'action

- estimations : « 1 - 2 - 3 »



« plus de 2 mesurètes [...] »

il y a de la place au-dessus et en-dessous »



« 4 mesurètes car le diamètre double dans un sens et dans l'autre »



« 1 - 4 - 12, à cause du diamètre qu'on double. Vu que chaque diamètre est en fait deux fois le rayon, il faut multiplier par 4 »

« 1 - 4 - 9 » à partir de la formule

- expériences

Variation diamètre

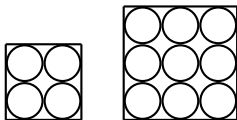
Phases de formulation et de validation
(non-concordance du modèle proportionnel)

- « il y a plus de surface à remplir,
il reste un petit peu » 
- le disque « s'agrandit
dans toutes les directions » 
- « il y en a plus que deux
parce que l'eau s'aplatit sous le poids de l'eau »

Variation diamètre

Phase de formulation

(modèle correspondant à la variation du diamètre)



VS

table de
multiplication
de 4

diversité des résultats déterminante pour inciter
à la validation d'un modèle mathématique

Variation diamètre

Phase de validation

(modèle correspondant à la variation du diamètre)

Diamètre (en cm)	Nbre de mes.
initial (= 0,8)	1
double (= 1,6)	4
triple (= 2,4)	9
quadruple (= 3,2)	
quintuple (= 4)	

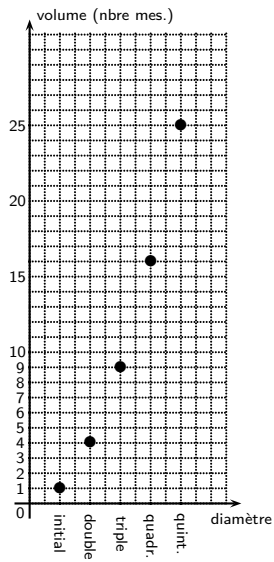
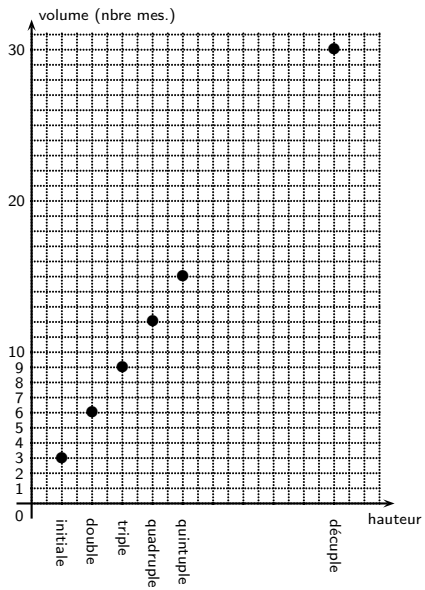
Variation diamètre

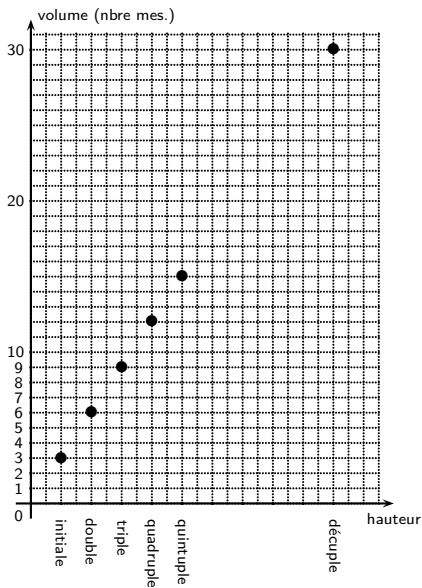
Phase de validation

(modèle correspondant à la variation du diamètre)

Diamètre (en cm)	Nbre de mes.
initial (= 0,8)	1
double (= 1,6)	4
triple (= 2,4)	9
quadruple (= 3,2)	
quintuple (= 4)	

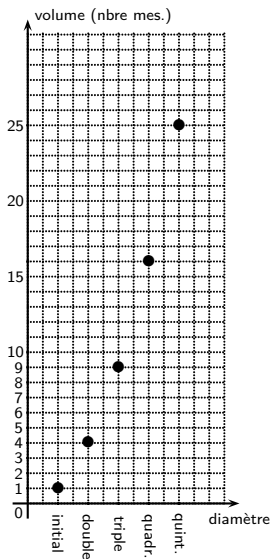
ou à partir de la formule $V_{\text{cyl}} = \pi r^2 h$





- Peut-on relier les points ?
- À partir de l'origine ou du premier point expérimental ?
- Peut-on prolonger au-delà du dernier point placé sur le repère ?
- Peut-on prolonger dans les négatifs ?

- Peut-on relier les points ?
- Par des segments ou « à main levée » ?
- À partir de l'origine ou du premier point expérimental ?
- Peut-on prolonger au-delà du dernier point placé sur le repère ?
- Peut-on prolonger dans les négatifs ?



Recherche *Math & Manips*
Séquence didactique
Analyse *a priori*
Expérimentations
Analyse *a posteriori*
Validation externe

Validation externe

Validation externe

L'insertion de la non-proportionnalité n'a pas pu être un élément différenciateur entre classes expérimentales et témoins

- ni à Namur :
synthèse des classes témoins influencée
par la séquence didactique proposée

Validation externe

L'insertion de la non-proportionnalité n'a pas pu être un élément différenciateur entre classes expérimentales et témoins

- ni à Namur :
synthèse des classes témoins influencée
par la séquence didactique proposée
- ni à Sambreville :
situation de non-proportionnalité présente
dans le cours pour les classes témoins

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié
 - inversion de comportement d'élèves au sein des classes

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié
 - inversion de comportement d'élèves au sein des classes
 - inversion moins marquée dans les classes expérimentales à long terme

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié
 - inversion de comportement d'élèves au sein des classes
 - inversion moins marquée dans les classes expérimentales à long terme
- Repérage proportionnalité

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié
 - inversion de comportement d'élèves au sein des classes
 - inversion moins marquée dans les classes expérimentales à long terme
- Repérage proportionnalité
 - résultats similaires ou significativement meilleurs pour classes expérimentales

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié
 - inversion de comportement d'élèves au sein des classes
 - inversion moins marquée dans les classes expérimentales à long terme
- Repérage proportionnalité
 - résultats similaires ou significativement meilleurs pour classes expérimentales
 - présence des écarts constants dans classes expérimentales

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié
 - inversion de comportement d'élèves au sein des classes
 - inversion moins marquée dans les classes expérimentales à long terme
- Repérage proportionnalité
 - résultats similaires ou significativement meilleurs pour classes expérimentales
 - présence des écarts constants dans classes expérimentales
 - coefficient de proportionnalité

Résultats Sambreville

- Choix d'un modèle approprié
 - inversion de comportement d'élèves au sein des classes
 - inversion moins marquée dans les classes expérimentales à long terme
- Repérage proportionnalité
 - résultats similaires ou significativement meilleurs pour classes expérimentales
 - présence des écarts constants dans classes expérimentales
 - coefficient de proportionnalité
 - importance de la définition graphique

Merci pour votre attention et participation



e-mail : info@crem.be

site web : www.crem.be