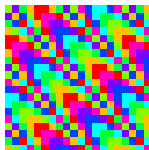


# MAIS QUI EST BENOIT MANDELBROT ?

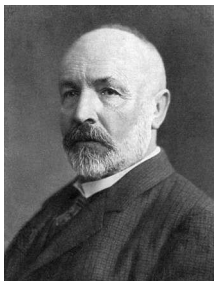
Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>  
<https://orbi.uliege.be/handle/2268/262760>

Congrès SBPMef Août 2021



## L'ensemble triadique de Cantor (1883)

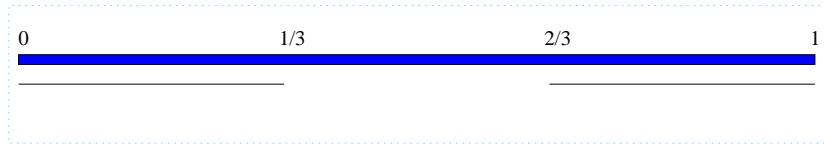


Georg Cantor (1845–1918)

Wikipédia : *“C’est le premier exemple de fractal (bien que le terme ne soit apparu qu’un siècle plus tard). . .”*

L'ensemble triadique de Cantor ; sous-ensemble de l'intervalle  $[0, 1]$

étape 0

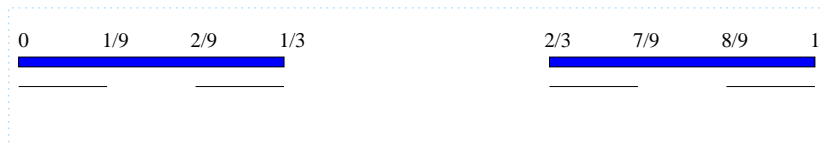


À chaque étape, les extrémités de chaque intervalle appartiennent à  $\mathcal{C}$  puis *enlever le tiers central*

$\mathcal{C} \ni 0, 1$

L'ensemble triadique de Cantor ; sous-ensemble de l'intervalle  $[0, 1]$

étape 1

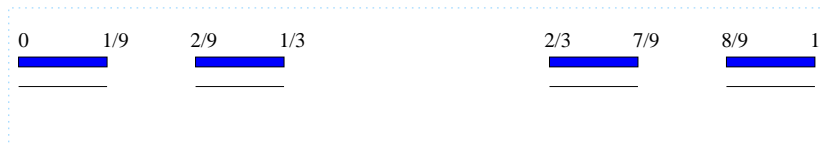


À chaque étape, les extrémités de chaque intervalle appartiennent à  $\mathcal{C}$  puis *enlever le tiers central*

$$\mathcal{C} \ni 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$$

L'ensemble triadique de Cantor ; sous-ensemble de l'intervalle  $[0, 1]$

étape 2

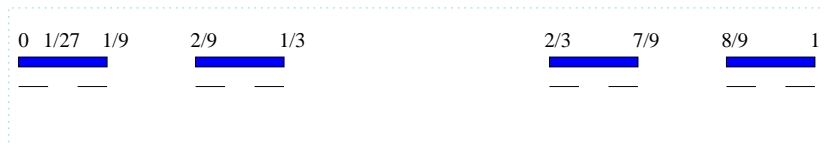


À chaque étape, les extrémités de chaque intervalle appartiennent à  $\mathcal{C}$  puis *enlever le tiers central*

$$\mathcal{C} \ni 0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$$

L'ensemble triadique de Cantor ; sous-ensemble de l'intervalle  $[0, 1]$

étape 2

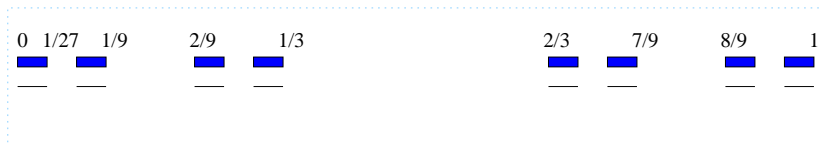


À chaque étape, les extrémités de chaque intervalle appartiennent à  $\mathcal{C}$  puis *enlever le tiers central*

$$\mathcal{C} \ni 0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$$

L'ensemble triadique de Cantor ; sous-ensemble de l'intervalle  $[0, 1]$

étape 3



À chaque étape, les extrémités de chaque intervalle appartiennent à  $\mathcal{C}$  puis *enlever le tiers central*

$$\mathcal{C} \ni 0, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{27}, \frac{8}{27}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{27}, \frac{20}{27}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{25}{27}, \frac{26}{27}, 1$$



Pause technique. . .

Ainsi présenté, l'ensemble ne contient que des rationnels

! Il ne s'agit pas du “véritable” ensemble de Cantor !

Pour l'obtenir, il faut considérer l'*adhérence* de l'ensemble ici défini (on inclut de la sorte les limites des suites d'éléments de l'ensemble) ou, comme classiquement, on considère

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$$

où  $C_0 = [0, 1]$ ,  $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ , . . .



On peut voir que  $x$  appartient à  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $x$  possède un **développement en base 3** ne contenant pas 1

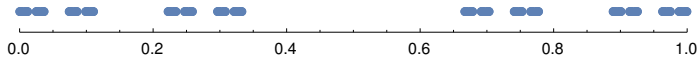
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^n}, \quad c_n \in \{0, 2\}$$

$$\begin{aligned} \frac{2000}{6561} &= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{0}{3^6} + \frac{0}{3^7} + \frac{2}{3^8} \\ \frac{5}{26} &= \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{0}{3^7} + \frac{1}{3^8} + \frac{2}{3^9} + \dots \\ \frac{1}{9} &= \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \dots \end{aligned}$$

Si un développement se termine par une infinité de 2:

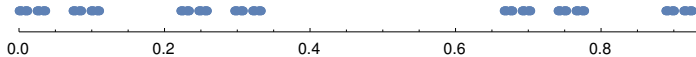
$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} 2/3^i = 1/3^k$$

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 100%



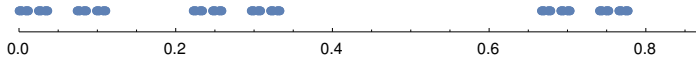
```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{{0,2},8}]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 120%



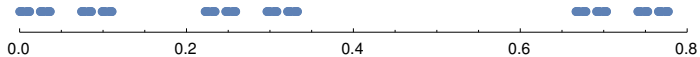
```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{0,2},8]]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 140%



```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{0,2},8]]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 160%



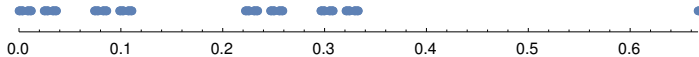
```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{{0,2},8}]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 180%



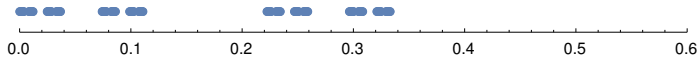
```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{{0,2},8}]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 200%



```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{0,2},8]]]
```

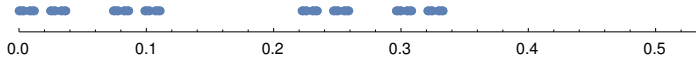
Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 220%



```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{{0,2},8}]]
```

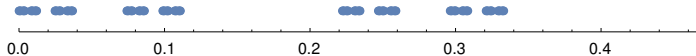


Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 240%



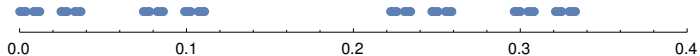
```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{{0,2},8}]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 260%



```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{0,2},8]]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 280%



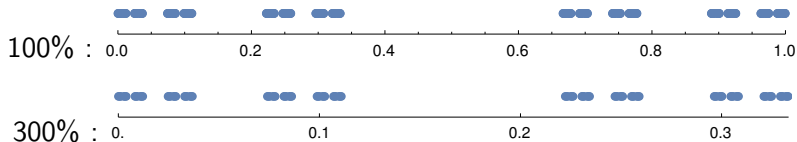
```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{{0,2},8}]]
```

Un zoom sur  $[0, 1/3]$ ... (étape 8) 300%



```
NumberLinePlot[Map[Table[1/3^i, {i,1,8}].# &, Tuples[{0,2},8]]]
```

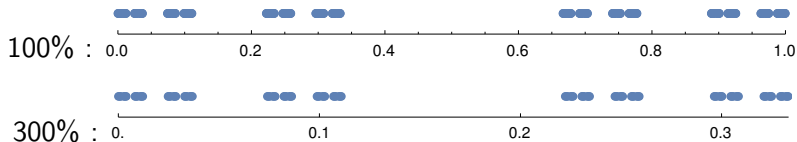
Si on compare  $\mathcal{C}$  sur  $[0, 1]$  et  $[0, 1/3]$



$$\mathcal{C} = \frac{1}{3}\mathcal{C} \cup \left( \frac{1}{3}\mathcal{C} + \frac{2}{3} \right)$$

- ▶ homothétie de rapport  $1/3$  (contraction)
- ▶ translation

Si on compare  $\mathcal{C}$  sur  $[0, 1]$  et  $[0, 1/3]$



$$\mathcal{C} = \frac{1}{3}\mathcal{C} \cup \left( \frac{1}{3}\mathcal{C} + \frac{2}{3} \right)$$

- ▶ homothétie de rapport  $1/3$  (contraction)
- ▶ translation



## Propriétés de $\mathcal{C}$

- ▶ infini (non dénombrable, tout comme  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ )
- ▶ le complémentaire  $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$  est de mesure

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

donc  $\mathcal{C}$  est de mesure (Lebesgue) nulle

- ▶ ensemble *parfait* : tout point de  $\mathcal{C}$  est un point d'accumulation (pas de point isolé)
- ▶ nulle part dense,  $(\overline{\mathcal{C}})^{\circ} = \emptyset$

## DÉFINITION DE FRACTAL

Un sous-ensemble de l'espace euclidien dont la dimension de Hausdorff est supérieure à sa dimension topologique...

Les mathématiciens ne s'accordent pas sur une définition unique mais l'idée est d'avoir **un objet qui, à différentes échelles, est composé de copies semblables à l'objet tout entier.**

Rappel sur les similitudes du plan:

- ▶ Translation
- ▶ Rotation
- ▶ Homothétie
- ▶ Réflexion

On pourra généraliser à d'autres transformations affines (ne conservant pas nécessairement les rapports de distances).





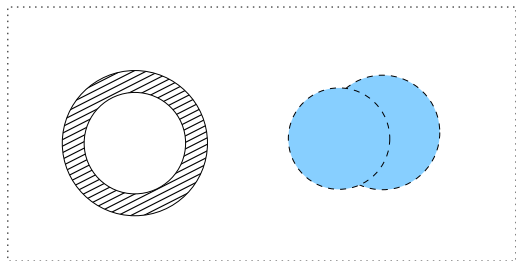
Dans les programmes et référentiels

- ▶ Transformations du plan : translation, symétries, rotation (6e prim.)
- ▶ Solides et Figures : Dégager des régularités, des propriétés, argumenter (2e année)
- ▶ Figures isométriques et figures semblables : triangles semblables (3e année)
- ▶ Suites, Asymptotes et **limites** (5e année)



Soient  $(X, d)$  un espace métrique **complet**,  $A, B$  deux compacts non vides de  $X$ . La *distance de Hausdorff* est définie par

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$



## THÉORÈME

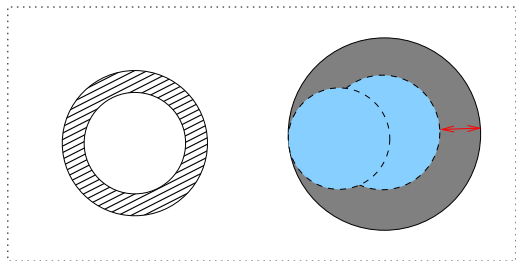
L'ensemble des compacts de  $X$  muni de la distance de Hausdorff est lui-même un espace métrique complet.

On prendra  $X = \mathbb{R}^2$  muni de la distance euclidienne.



Soient  $(X, d)$  un espace métrique **complet**,  $A, B$  deux compacts non vides de  $X$ . La *distance de Hausdorff* est définie par

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$



## THÉORÈME

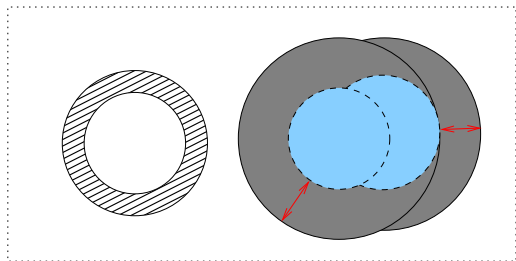
L'ensemble des compacts de  $X$  muni de la distance de Hausdorff est lui-même un espace métrique complet.

On prendra  $X = \mathbb{R}^2$  muni de la distance euclidienne.



Soient  $(X, d)$  un espace métrique **complet**,  $A, B$  deux compacts non vides de  $X$ . La *distance de Hausdorff* est définie par

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$



## THÉORÈME

L'ensemble des compacts de  $X$  muni de la distance de Hausdorff est lui-même un espace métrique complet.

On prendra  $X = \mathbb{R}^2$  muni de la distance euclidienne.



Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet.

L'application  $f : X \rightarrow X$  est une *contraction*, s'il existe  $c < 1$  tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

## THÉORÈME DU POINT FIXE (BANACH)

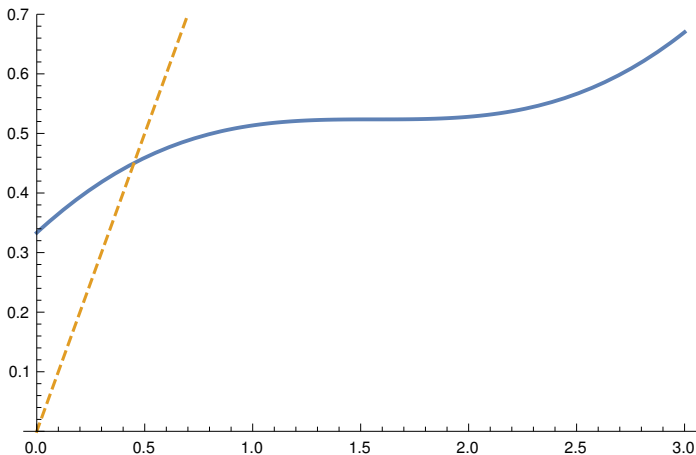
Il existe un **unique élément**  $\ell \in X$  tel que pour toute suite  $a_0, a_1, \dots$  d'éléments de  $X$  définie par  $a_{n+1} = f(a_n) = f^n(a_0)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$$

et, en particulier,  $f(\ell) = \ell$ .

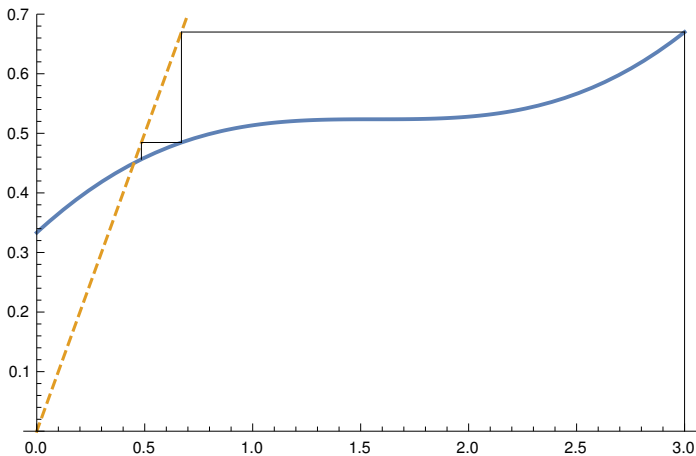


$$f(x) = (x + \cos x)/3$$



vérifier qu'il s'agit d'une contraction :  $f(2) - f(1) \simeq 0,014 < 1$

TAF :  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$  et  $0 \leq f'(\xi) \leq 2/3$ .



$$a_0 = 3, \quad a_1 = f(a_0) \simeq 0,67, \quad a_2 = f(a_1) = 0,48, \\ a_3 = f(a_2) = 0,46, \dots \quad f(\alpha) = \alpha \text{ avec } \cos \alpha = 2\alpha$$



## THÉORÈME (HUTCHINSON–BARNESLEY 1981)

Soient  $f_1, \dots, f_k$  des contractions de  $(X, d)$ . L'application

$$F : A \mapsto f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_k(A)$$

est une contraction de l'ensemble des compacts de  $X$  muni de la distance de Hausdorff.

↪ On peut donc appliquer le thm. du point fixe.

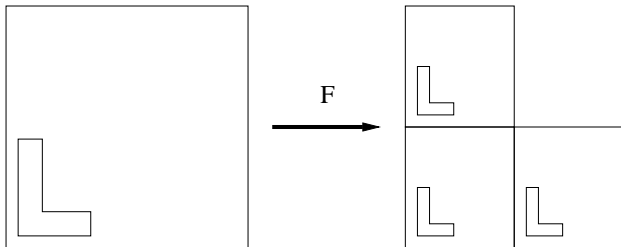
exemple :

$$F(A) = \frac{1}{3}A \cup \left( \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \right)$$

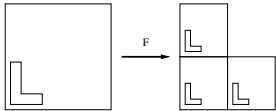
$$C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left( \frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3} \right)$$

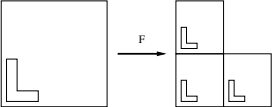


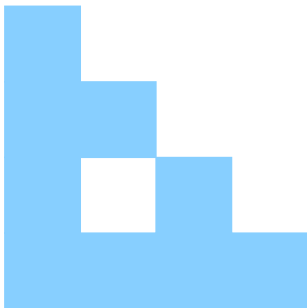
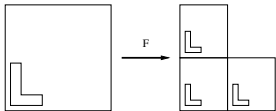
IFS (*iterated function systems*) : composer des contractions...

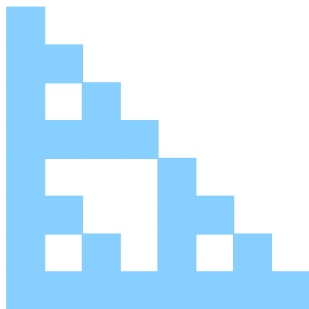
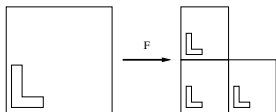


$$F(A) = \underbrace{\frac{1}{2}A}_{f_1(A)} \cup \underbrace{\left(\frac{1}{2}A + \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}_{f_2(A)} \cup \underbrace{\left(\frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)}_{f_3(A)}$$



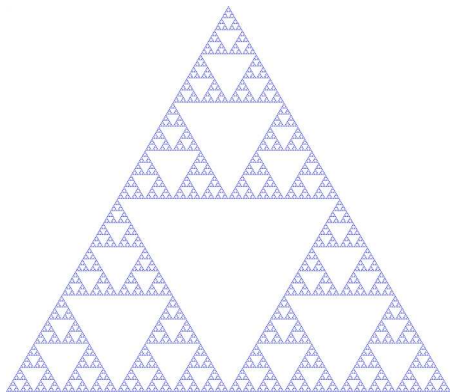








W. Sierpiński (1882–1969)



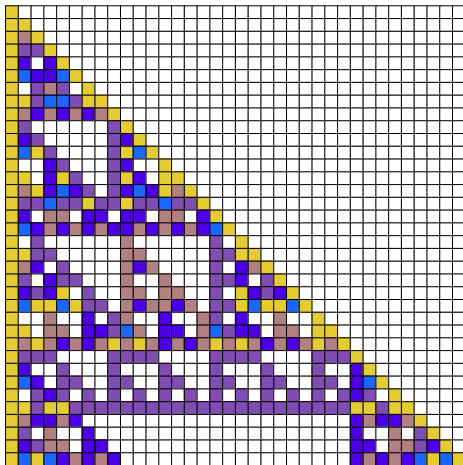
Analyse combinatoire, triangle de Pascal (6e année)

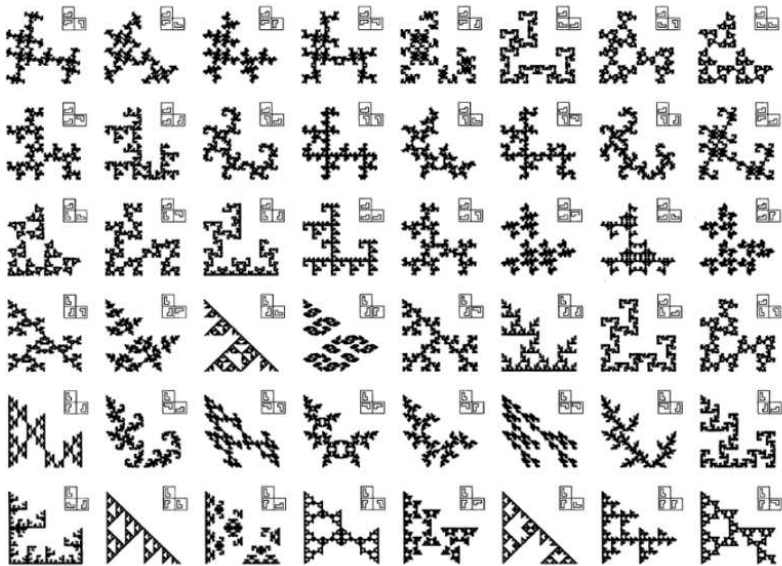
1	0	0	0	0	0	0	0	0	■	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	■	■	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	■	2	■	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	■	■	■	■	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	■	4	6	4	■	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	■	■	10	10	■	■	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	■	6	■	20	■	6	■	0
1	7	21	35	35	21	7	1	1	■	■	■	■	■	■	■	■





Je pourrais parler des heures du triangle de Pascal...





## La “fougère” de Barnsley (*Fractals everywhere*, 1993)



Des applications affines représentées matriciellement

$$f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix};$$

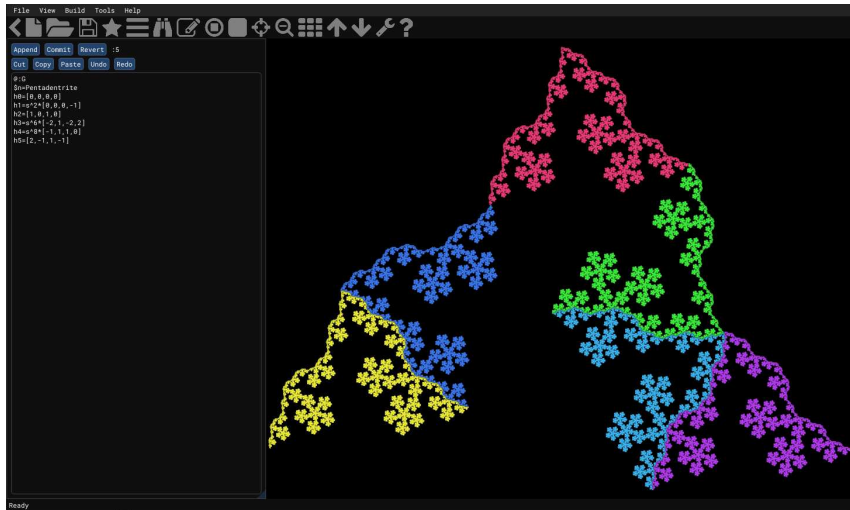
$$f_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}; \quad f_4(x, y) = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}.$$

$f_1$  : tige centrale,  $f_2$  : copie réduite de la fougère toute entière

$f_3$  : branche en bas à g.,  $f_4$  : branche en bas à d.

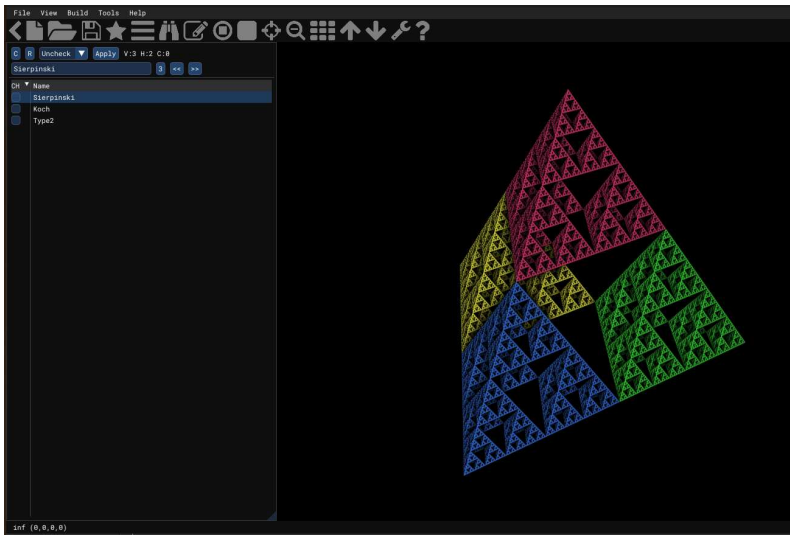
<https://www.youtube.com/watch?v=xoXe0A1jUMA>

# Logiciels pour expérimenter...



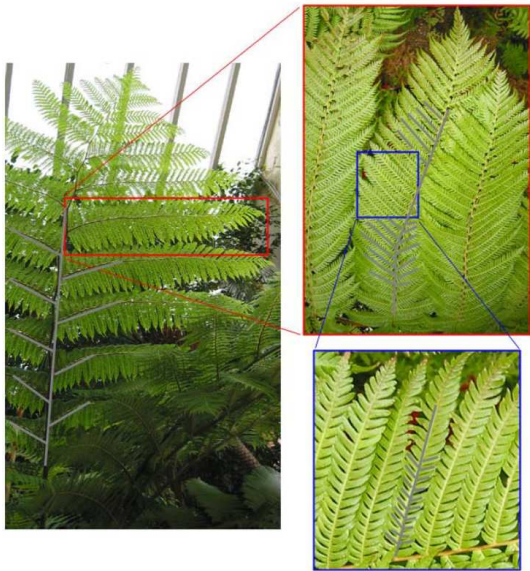
<https://ifstile.com/>

Windows, Mac, Linux, Android, version web en ligne



À quoi cela peut-il “servir” ?

un objet qui, à différentes échelles, est composé de copies  
*semblables* à l'objet tout entier



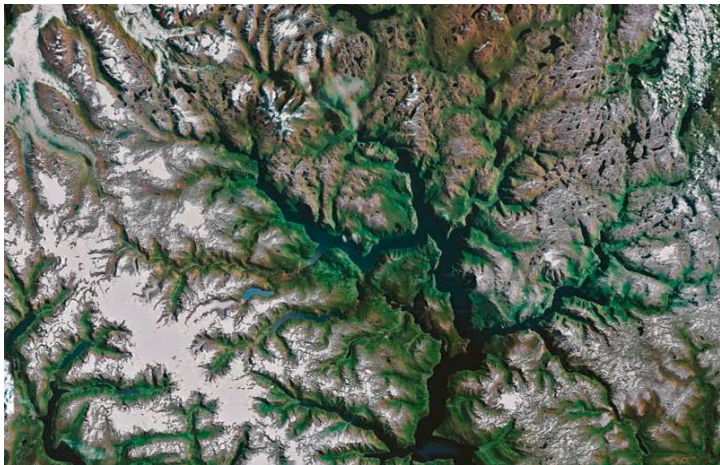


By Schnobby <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19055302>



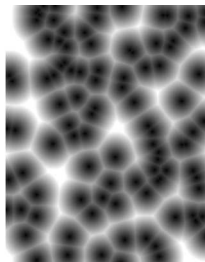
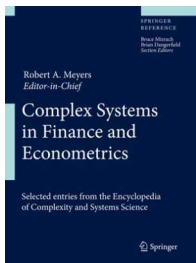


By Jon Sullivan <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=95997>



<http://paulbourke.net/fractals/googleearth/>

- ▶ Pour les mathématiciens :
  - ▶ objets d'étude, géométrie fractale, dimension(s),
  - ▶ propriétés particulières (non-dérivabilité, remplissage de l'espace, ...),
  - ▶ liens avec d'autres branches des mathématiques.
  
- ▶ Pour les physiciens, ingénieurs, géologues, chimistes, infographistes, économistes, architectes, ...
  - ▶ modélisation/simulation de phénomènes naturels,
  - ▶ ingénierie des matériaux, textures procédurales, compression d'images, réseaux, ...



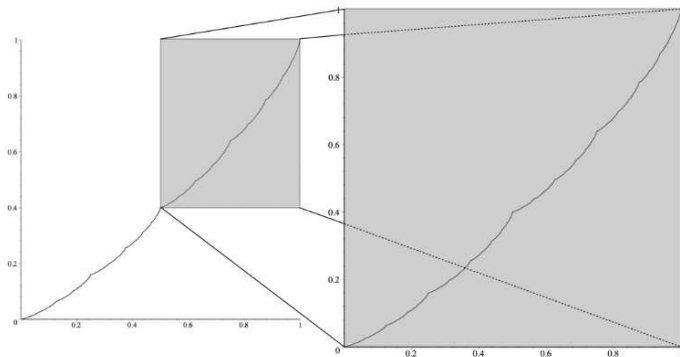
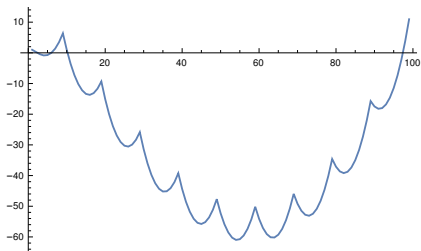


FIGURE 2. The 2-regular Salem ghost distribution with  $(b_0, b_1) = (2, 3)$  (right) is an affine image of a section of the related Salem attractor (left).

[... They were introduced to determine fractal (or self-similar) properties of regular sequences similar to those related to automatic sequences...]

H. Delange (1975) : fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres  $s_{10}$

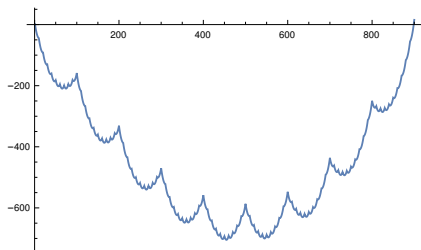
$$\sum_{i=1}^N s_{10}(i) = \frac{9}{2} N \log_{10} N + N \varphi(\log_{10}(N))$$



```
t = Table[Apply[Plus, IntegerDigits[n,10]], {n,1,10000}];  
ListPlot[Table[Total[Take[t, n]] - 4.5 n Log[10, n],  
            {n,1,99}]]
```

H. Delange (1975) : fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres  $s_{10}$

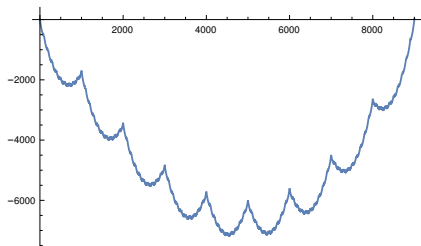
$$\sum_{i=1}^N s_{10}(i) = \frac{9}{2} N \log_{10} N + N \varphi(\log_{10}(N))$$



```
t = Table[Apply[Plus, IntegerDigits[n,10]], {n,1,10000}];  
ListPlot[Table[Total[Take[t, n]] - 4.5 n Log[10, n],  
             {n,100,999}]]
```

H. Delange (1975) : fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres  $s_{10}$

$$\sum_{i=1}^N s_{10}(i) = \frac{9}{2} N \log_{10} N + N \varphi(\log_{10}(N))$$



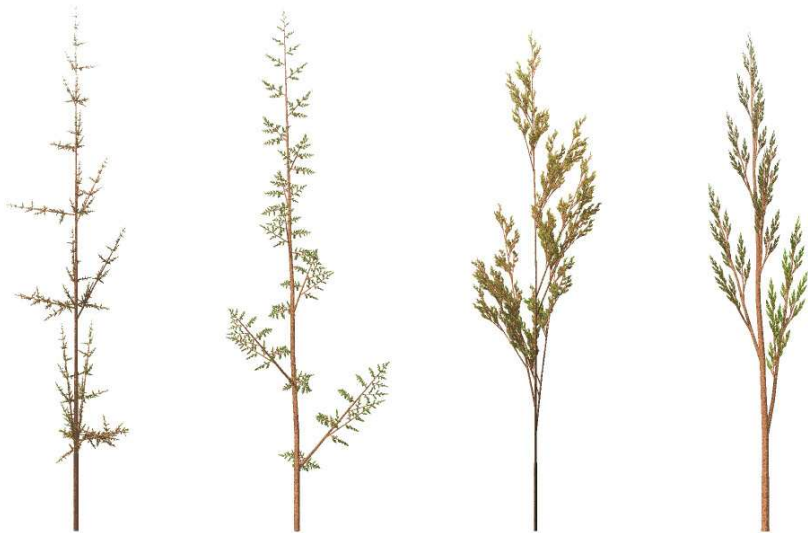
```
t = Table[Apply[Plus, IntegerDigits[n,10]], {n,1,10000}];  
ListPlot[Table[Total[Take[t, n]] - 4.5 n Log[10, n],  
{n,1000,9999}]]
```

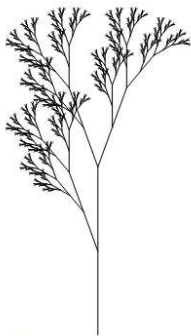


La grande vague de Kanagawa, Hokusai (1829–1833)



# Aristid Lindenmayer (1925-1989) : *L*-systems





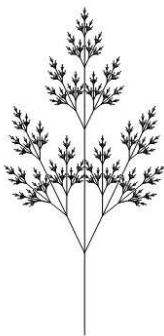
**d**

$n=7, \delta=20^\circ$

X

$X \rightarrow F [+X] F [-X] + X$

$F \rightarrow FF$



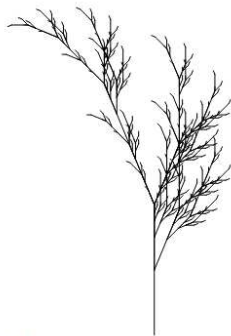
**e**

$n=7, \delta=25.7^\circ$

X

$X \rightarrow F [+X] [-X] FX$

$F \rightarrow FF$



**f**

$n=5, \delta=22.5^\circ$

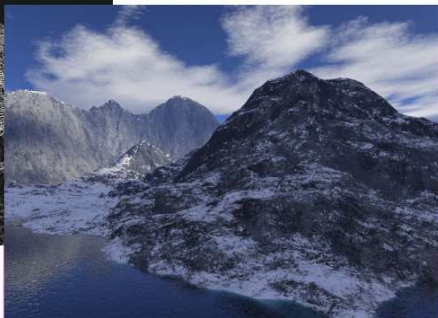
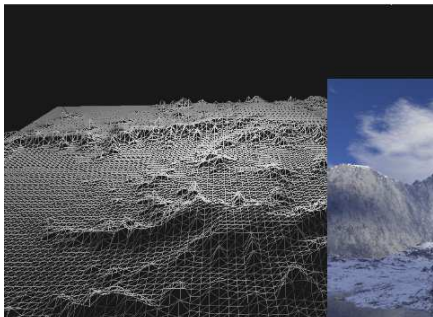
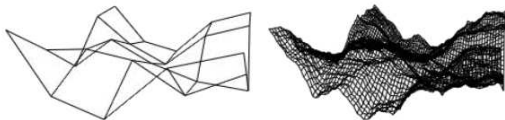
X

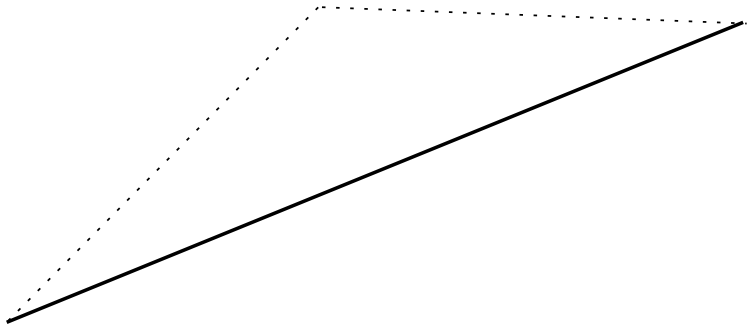
$X \rightarrow F - [[X] + X] + F [+FX] - X$

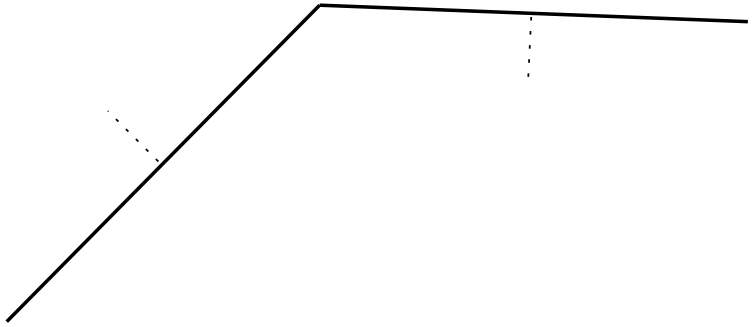
$F \rightarrow FF$

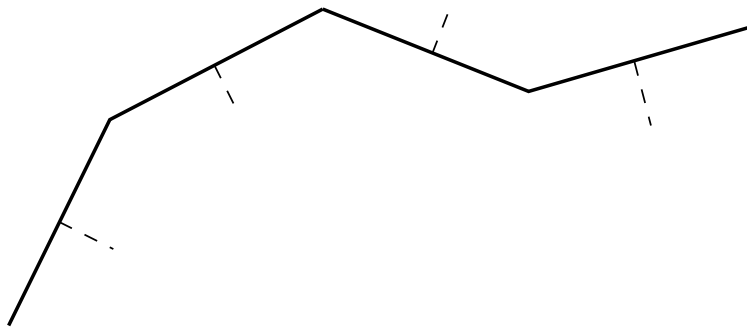
P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag (1996).

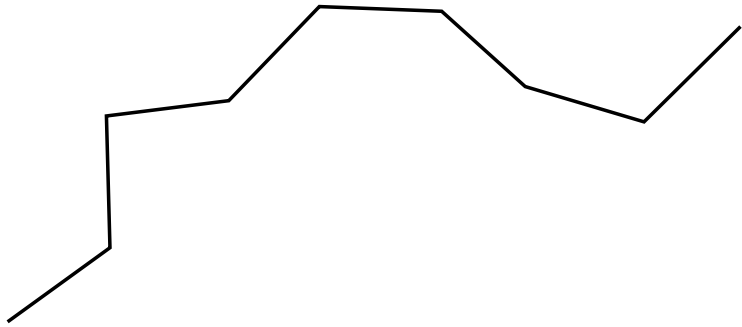
## Génération de paysages "réalistes"

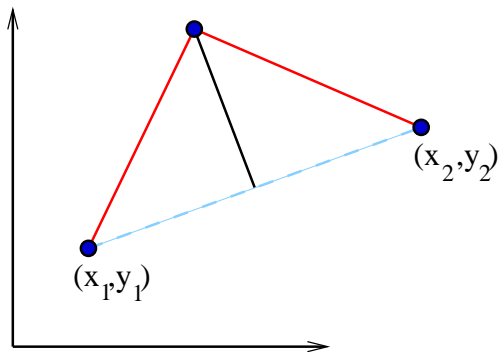










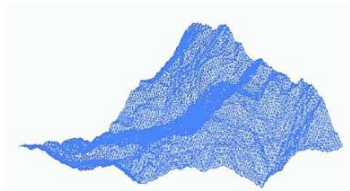
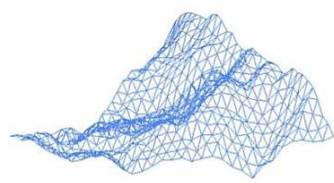
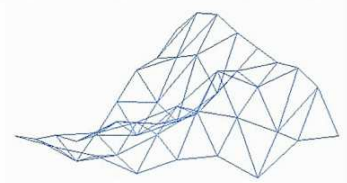
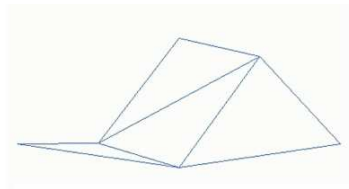
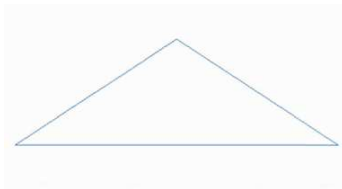


$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} - \rho(y_2 - y_1) r \quad ; \quad Y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \rho(x_2 - x_1) r$$

$\rho$  est un paramètre,  $r \in [-1, 1]$  est un nombre aléatoire

A. Fournier, D. Fussell, L. Carpenter, Computer rendering of stochastic models, Comm. ACM 25 (1982)

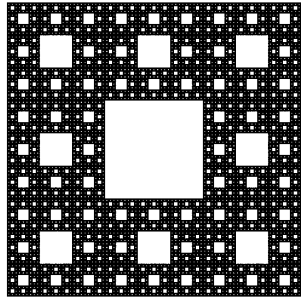




[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Animated\\_fractal\\_mountain.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Animated_fractal_mountain.gif)



Lideta Market (Vilalta Arquitectura) Addis-Abeba



Lideta Market (Vilalta Arquitectura) Addis-Abeba



Tote on the Turf, Mumbai

*“From fractal geometry to architecture: Designing a grid-shell-like structure using the Takagi–Landsberg surface”* in Computer-aided design (2018)

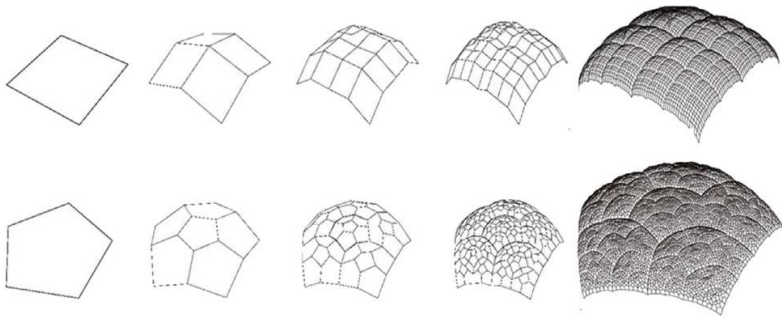


Fig. 7. Construction of Takagi surfaces using different polygonal bases when  $w = 0.5$ .

A non-strict definition of a fractal is a shape or a figure that encapsulates the copies of itself at the infinitely different level of scales, which means it is recursively self-similar as well as rough at every magnifying level.



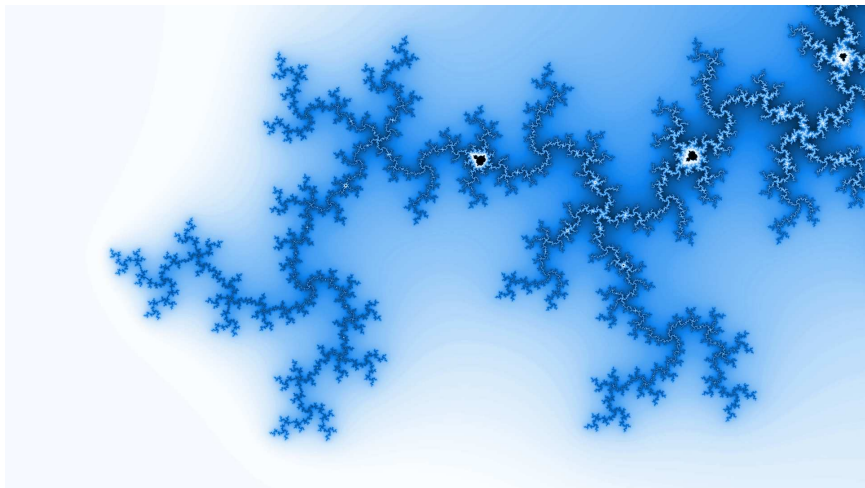
S. Dali (1940), *le visage de la guerre (El Rostro de la Guerra)*



Vue postérieure de l'arbre bronchique droit (A. Ndiaye et al. Researchgate)



## Nombres complexes (6ème année)



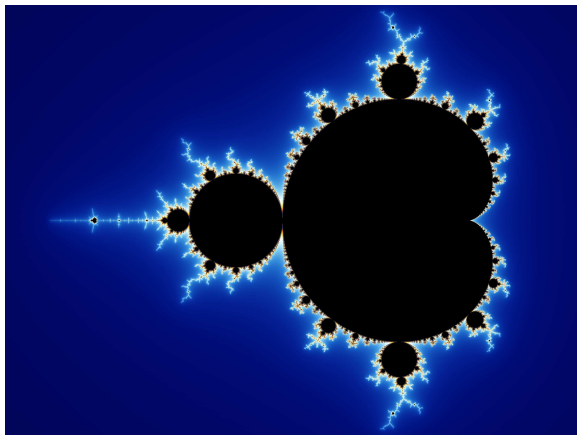


Benoît Mandelbrot (1924–2010)

The fractal geometry of Nature (1982)

How Long Is the Coast of Britain? *Science* (1967)

[https://www.youtube.com/watch?v=ock9Gk\\_aqw4](https://www.youtube.com/watch?v=ock9Gk_aqw4)



$$z_{n+1} = z_n^2 + c, z_0 = 0$$



Pour chaque nombre complexe  $c$ , on définit une suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0,$$

$$z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \quad z_3 = (c^2 + c)^2 + c, \quad \dots$$

Pour chaque suite, on se pose la question de savoir (numériquement) si elle converge ? e.g., a-t-on  $|z_{100}| < 2$  ?

- ▶ L'ensemble de Mandelbrot est constitué des complexes  $c$  pour lesquels la suite correspondante est convergente (pixels noirs).
- ▶ En fonction de la "vitesse d'échappement", on choisit la couleur du pixel correspondant à  $c$ .



```

def pixel2z(i,j):
    # transforme un pixel en un couple (Re, Im)
    return([x_min+i*(x_max-x_min)/longueur,y_min+j*(y_max-y_min)/hauteur])

def sommeC(z1,z2):
    return([z1[0]+z2[0],z1[1]+z2[1]])

def produitC(z1,z2):
    return([z1[0]*z2[0]-z1[1]*z2[1],z1[0]*z2[1]+z1[1]*z2[0]])

def mandelbrot(max_iter):
    for i in range(longueur):
        for j in range(hauteur):
            c=pixel2z(i,j)
            z=[0,0]
            iter=0
            while iter<max_iter and (z[0]**2+z[1]**2)<4:
                z=sommeC(produitC(z,z),c)
                iter += 1
            pt = Point(i,j)
            if iter==max_iter:
                pt.setOutline(color_rgb(0,0,0))
            else:
                pt.setOutline(color_rgb(255-floor(iter/max_iter*255),0,0))
            pt.draw(fenetre)

```

mandelbrot(100)



Mac

iPad

iPhone

Watch

TV

Music

## App Store Preview

This app is only available on the App Store for iOS devices.



### Fast Fractal 4+

Tom Kerrigan

★★★★★ 3.6, 17 Ratings

Free

### You May Also Like

[See All](#)



Fast Fractal  
Education



Wolfram Fractals Reference



FractalScapes Fractals  
Education



Wrist Mandelbrot  
Reference



Fractal\_Factory  
Education

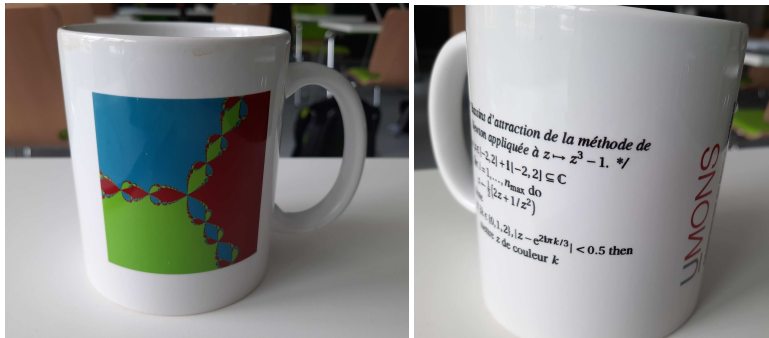


Generative Tree Fractals  
Education

## En analyse numérique, méthode de Newton–Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

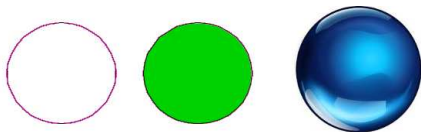
[https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's\\_method#/media/File:NewtonIteration\\_Ani.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method#/media/File:NewtonIteration_Ani.gif)



C. Troestler

## Notion de “dimension fractale”





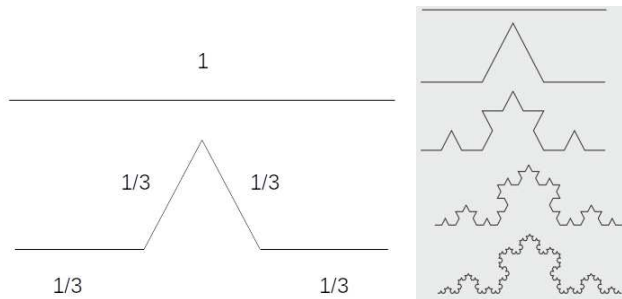
$$\ell = 2\pi R \quad ; \quad A = \pi R^2 \quad ; \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

## PRINCIPE (NOTION NAÏVE) FACTEUR D'ÉCHELLE

Si on multiplie par  $m$  (homothétie de rapport  $m$ ) les dimensions d'une **figure de dimension  $d$** , alors sa mesure (longueur, aire, volume) est multipliée par  $m^d$ .

$$\ell' = 2\pi mR = m\ell \quad ; \quad A' = \pi(mR)^2 = m^2 A \quad ; \quad V' = \frac{4}{3}\pi(mR)^3 = m^3 V.$$

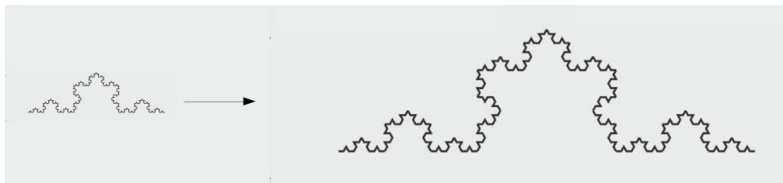
## Courbe de Koch



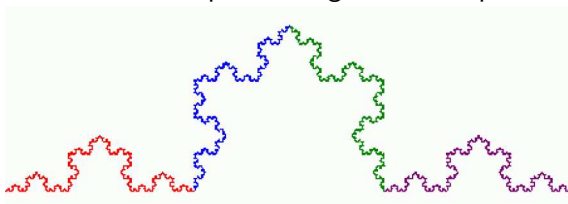
La longueur de la courbe (limite) est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{3} \right)^n = +\infty.$$

Quelle dimension ? Si on multiplie (homothétie de rapport 3) les dimensions du segment par 3 ...



on trouve 4 copies du segment de départ :



“on multiplie par 3 et on obtient 4 fois la mesure de départ”

$$3^d = 4$$

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1,26186.$$



Pour  $s$  fixé

$$\mathcal{H}_r^s(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s \mid X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ et } \text{diam}(A_i) < r \right\}$$

Si  $r$  décroît, moins de recouvrements disponibles, donc  $\mathcal{H}_r^s(X)$  croît. Dès lors, la limite suivante (mesure extérieure) existe

$$\mathcal{H}^s(X) := \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}_r^s(X).$$



Wikipedia



- ▶ si  $\mathcal{H}^s(X)$  est fini alors, pour tout  $t > s$ ,  $\mathcal{H}^t(X) = 0$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^t \leq r^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s \text{ donc } \mathcal{H}_r^t(X) \leq \underbrace{r^{t-s}}_{\rightarrow 0} \mathcal{H}_r^s(X)$$

- ▶ si  $\mathcal{H}^s(X) > 0$  alors, pour tout  $t < s$ ,  $\mathcal{H}^t(X)$  est infini:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^t \cdot r^{s-t} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s$$

donc

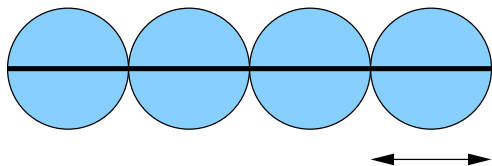
$$\mathcal{H}_r^t(X) \geq \underbrace{\frac{1}{r^{s-t}}}_{\rightarrow \infty} \mathcal{H}_r^s(X)$$

La **dimension de Hausdorff** de  $X$  est caractérisée par

$$\inf\{s \mid \mathcal{H}^s(X) = 0\} = \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(X) = \infty\}.$$



Exemple, le segment  $[0, 1]$  recouvert par des intervalles de longueur  $r = 1/n$



$$\mathcal{H}_r^s(X) = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^s = n^{1-s}$$

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-s} = \begin{cases} 0 & \text{si } s > 1 \\ 1 & \text{si } s = 1 \\ \infty & \text{si } s < 1 \end{cases}$$

Donc, la dimension de Hausdorff vaut 1.



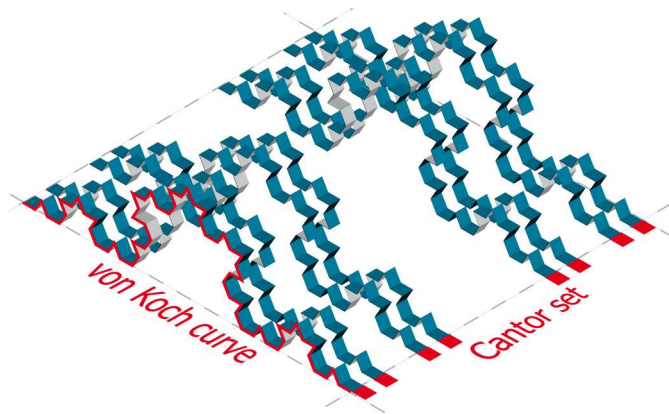
Pour la courbe de Koch, si on suppose l'existence d'un  $s$  tel que  $0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty$  (à justifier), alors

$$\mathcal{H}^s(X) = 4 \mathcal{H}^s\left(\frac{X}{3}\right) = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(X)$$

donc

$$3^s = 4$$

[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_fractals\\_by\\_Hausdorff\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension)



$$\frac{\ln 4}{\ln 3} + \frac{\ln 2}{\ln 3} = 1,8928$$