Le développement des connaissances mathématiques pour enseigner en formation initiale

Une étude exploratoire auprès de formateurs de futurs professeurs de mathématiques du secondaire inférieur

Nicolas LUCCHESE
Annick FAGNANT

ULiège
Centre interfacultaire de formation des enseignants (Cifen)
UR Évaluation et qualité de l'enseignement (ÉQUALE)

1. Introduction

Notre étude se situe dans le prolongement de celle menée par Defrance (2010) sur la formation initiale des enseignants de mathématiques en Belgique francophone. En partant du constat selon lequel les enseignants novices éprouvent des difficultés face à leurs classes (en partie dues aux différences qui existent entre la formation reçue, la réalité du terrain et les représentations multiples du métier), l'auteure s'est penchée sur la formation qu'ils reçoivent, et plus particulièrement sur le développement de la *compétence enseignante*. Sur la base d'observations et d'entretiens réalisés auprès de différents profils de formateurs, elle a souligné un manque de collaboration entre ces derniers. Les résultats montrent notamment que les formateurs de mathématiques ignorent les acquis de la recherche en didactique des mathématiques, ou du moins s'y intéressent peu, reléguant ces savoirs entre les mains des psychopédagogues, eux-mêmes peu informés et considérant que ces spécificités disciplinaires ne sont pas de leur ressort. Les connaissances didactiques sont pourtant au cœur de la *compétence enseignante* telle qu'on la considère aujourd'hui. Alors comment se construisent-elles en formation initiale ?

La *compétence enseignante* est complexe et bon nombre de chercheurs ont tenté de la définir et de la modéliser. Dans le domaine mathématique, plusieurs études s'appuient sur les travaux fondateurs de Shulman (1986, 1987) qui, en évoquant la notion de « paradigme manquant », a mis en exergue les manquements criants des modèles passéistes de formation d'enseignants. En caricaturant quelque peu, on a longtemps cru que disposer de connaissances disciplinaires solides et de « trucs et ficelles » en matière de gestion de classe suffisait à former des enseignants compétents. Un des apports majeurs de Shulman est d'avoir mis en avant le concept de « connaissances pédagogiques liées au contenu » (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*), élément-clé selon lui de la spécificité de ladite compétence.

Selon Kermen et Izquierdo-Aymerich (2017), l'arrivée de ce courant dans le monde francophone est récente. Ce n'est qu'en 2007, dans la revue *Éducation et Didactique*, qu'apparait la traduction du texte fondateur de Shulman (1986) sur les *PCK*. Depuis, dans cette même revue, on peut recenser quelques textes, certes encore peu nombreux, qui traitent explicitement des *PCK* (Silvy *et al.*, 2013) ou qui l'intègrent dans leur réflexion sur les connaissances professionnelles des enseignants (par ex. Jameau, 2015). Si la littérature scientifique appuyée sur la conceptualisation originale de Shulman n'abonde pas encore dans le monde francophone, elle est en revanche très développée du côté anglosaxon, comme en témoigne l'article de synthèse de Depaepe *et al.* (2013).

Les recherches empiriques menées dans le domaine mathématique ont notamment montré que les enseignants efficaces disposaient non seulement de bonnes connaissances mathématiques, mais aussi, et surtout, de connaissances pédagogiques ciblées sur les contenus à enseigner (Depaepe *et al.*, 2013). À notre connaissance, les recherches portant sur le développement des *PCK* en formation initiale sont peu nombreuses. Les plus significatives pour nos propos sont celles menées par nos collègues flamands de l'université catholique de Leuven (KUL). Ainsi, Depaepe *et al.* (2015) se sont intéressés à la transition primaire-secondaire en mesurant la maitrise des connaissances mathématiques pour enseigner (dans le domaine spécifique des nombres rationnels) auprès d'un public de futurs instituteurs primaires et de futurs AESI en mathématiques. Constatant d'importantes lacunes, tant au niveau des connaissances matières qu'au niveau des *PCK*, ils ont alors mené une étude quasi-expérimentale (Depaepe *et al.*, 2018) au cours de laquelle ils ont expérimenté un dispositif de formation en vue d'influencer positivement le développement des *PCK* en formation initiale, comparativement à la formation délivrée habituellement. Leurs résultats prometteurs montrent l'intérêt de poursuivre les travaux dans ce domaine.

Finalement, hormis l'étude réalisée par Defrance (2010), mais qui s'appuie sur un tout autre modèle théorique, il n'y a, à notre connaissance, aucune recherche effectuée en Belgique francophone sur la façon dont se développent les connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques en formation initiale au degré inférieur. C'est l'enjeu de la présente étude exploratoire qui, au départ d'entretiens semi-directifs réalisés auprès d'une douzaine de formateurs œuvrant dans les sections pédagogiques de trois hautes écoles situées en région liégeoise, interroge la façon dont la formation initiale dote les futurs enseignants de ces connaissances.

2. Les connaissances mathématiques pour enseigner

Ce point débute par une brève présentation du modèle des connaissances enseignantes de Shulman (1986) ; modèle généraliste qui concerne a priori toutes les disciplines. À notre connaissance, c'est toutefois dans les domaines mathématique et scientifique que les recherches ont pris leur envol (Depaepe *et al.*, 2013 ; Grangeat, 2015). En mathématiques, les deux modèles les plus connus sont le modèle *MKT* (*Mathematical Knowledge for Teaching*), développé par des chercheurs américains de l'université du Michigan (Ball *et al.*, 2008 ; Hill *et al.*, 2008) et le modèle *COACTIV*, développé par une équipe allemande (Kunter *et al.*, 2013). Nous avons retenu le modèle *MKT*, que nous présentons au point 2.2, parce qu'il a été développé pour l'enseignement fondamental et secondaire inférieur.

2.1. Les connaissances pédagogiques liées au contenu (*PCK*) selon Shulman

Shulman (1986) introduit la notion de *PCK* dans le but de professionnaliser le métier d'enseignant, c'est-à-dire de le distinguer des autres professionnels d'une même discipline. Selon lui, cette catégorie de connaissances est spécifique au métier : « C'est un amalgame de contenu et de pédagogie, unique aux enseignants » (Shulman, 1987, p. 8). Il distingue deux dimensions dans les *PCK* : les représentations et stratégies d'enseignement, d'une part, et les (pré)conceptions des élèves, d'autre part. La première dimension concerne les méthodes d'enseignement utilisées pour rendre la matière plus accessible (proposer de bonnes représentations, poser de bonnes questions…). La seconde dimension a trait aux conceptions préalables et *backgrounds* des élèves dont l'enseignant doit tenir compte pour adapter sa leçon. D'après l'auteur, ces deux composantes constituent, ou du moins devraient constituer, l'essence de la profession et, dans le même sens, l'élément central de la formation initiale.

La typologie de Shulman a fait l'objet de critiques (pour une synthèse, voir Depaepe *et al.*, 2013). Il lui a principalement été reproché de concevoir les *PCK* comme une catégorie à part de connaissances décontextualisées, c'est-à-dire sans liens avec les autres types de connaissances ni caractère évolutif possible. Il semblerait également que seules les deux dimensions précitées ne suffisent pas à définir les *PCK*. En effet, les connaissances curriculaires, liées aux référentiels et matériel didactique, et qui permettent de dispenser un enseignement adapté, en feraient partie intégrante. Le modèle *MKT* tient compte de ces critiques.

2.2. La modélisation des connaissances mathématiques pour enseigner (modèle *MKT*)

Hill *et al*. (2008) ont développé une modélisation qui cible les différentes facettes des connaissances pour enseigner les mathématiques. Elle est composée de deux grandes parties, connectées et intégrées : les connaissances du contenu (*CK*) et les connaissances pédagogiques liées au contenu (*PCK*). Le premier versant — les *CK* — contient des connaissances mathématiques communes (*CCK*) (celles que partagent tous les mathématiciens, qu'ils soient enseignants, ingénieurs, physiciens, etc.), des connaissances mathématiques spécialisées (*SCK*) (propres aux enseignants de mathématiques) et des connaissances mathématiques horizontales (*KMH*) (relatives aux liens qui existent entre les différents points de matière). Le second versant — les *PCK* — est composé des connaissances pour enseigner liées au contenu (*KCT*), des connaissances des élèves liées au contenu (*KCS*) et enfin des connaissances curriculaires (*KCC*).

Les connaissances mathématiques spécialisées (*SCK*) sont d'abord des connaissances mathématiques, car elles appartiennent au premier versant. Elles sont définies comme « une forme de résolution de problèmes mathématiques utilisée dans l'enseignement » (Ball *et al*., 2008, p. 398). En 1990, Ball (citée par Ball *et al*., 2008, p. 393) différencie les « connaissances *des* mathématiques » des « connaissances *sur les* mathématiques ». Alors que les premières se rapprochent des connaissances mathématiques communes, les secondes s'apparentent aux *SCK*. En effet, un enseignant de mathématiques ne doit pas uniquement savoir appliquer correctement des procédures (*CCK*), mais il doit également être capable d'expliquer comment, pourquoi et pour quoi il le fait, de déterminer si une procédure peut être généralisée, si un argument est mathématiquement correct, d'identifier une erreur et d'analyser la source de cette erreur (*SCK*).

Par ailleurs, l'enseignement des mathématiques « nécessite une interaction entre une compréhension spécifique des mathématiques et une compréhension spécifique en pédagogie générale, celle-ci affectant l'apprentissage de l'élève » (Ball *et al*., 2008, p. 401). Cette interaction est ce que Hill *et al.* (2008) appellent les connaissances pour enseigner liées au contenu (*KCT*) ; elles correspondent à la première dimension des *PCK* selon Shulman (1986). Les *KCT* s'intéressent à l'organisation et à la planification des séquences, aux activités que l'enseignant propose, aux méthodes qu'il adopte et aux explications qu'il utilise. Un enseignant doit être capable de savoir sur quelles interventions rebondir, quel support didactique choisir, quel enchainement d'activités proposer, quel temps prévoir pour une activité ou encore s'il est préférable de travailler individuellement ou collectivement sur un point de matière précis.

Enfin, un enseignant peut avoir de bonnes connaissances en mathématiques et éprouver des difficultés à anticiper les difficultés des élèves. Les connaissances des élèves liées au contenu (*KCS*) sont une sous-dimension des *PCK* dans les deux modèles présentés. Hill *et al*. (2008) s'accordent avec la définition initiale de Shulman (1986, p. 9) selon laquelle ces connaissances traduisent « une compréhension de ce qui rend facile ou difficile l'apprentissage du contenu matière : les (pré)conceptions les plus fréquentes sur des contenus-matières enseignés que les élèves, d'âges et de bagages différents, apportent avec eux en classe ». Autrement dit, ces connaissances sont liées à la façon dont les élèves apprennent les mathématiques.

3. Méthodologie

3.1. Question de recherche

Notre étude exploratoire tente de comprendre comment les formateurs œuvrant dans les sections pédagogiques de hautes écoles situées en Belgique francophone dotent les futurs bacheliers AESI en mathématiques de connaissances mathématiques pour enseigner. Nous avons fait le choix de nous centrer sur les connaissances mathématiques spécialisées (*SCK*), sur les connaissances pour enseigner liées au contenu (*KCT*) et sur les connaissances des élèves liées au contenu (*KCS*), situées au cœur du modèle *MKT*.

3.2. Échantillon

Notre échantillon est composé de douze formateurs issus des sections pédagogiques de trois hautes écoles situées en Belgique francophone : huit formateurs de mathématiques et quatre psychopédagogues de la section bacheliers AESI en mathématiques. Pour les distinguer, nous avons attribué aux psychopédagogues la lettre « P » et aux formateurs de mathématiques la lettre « M ». Aussi, nous les avons numérotés en fonction de la chronologie des entretiens.

3.3. Présentation globale de la formation initiale des bacheliers AESI en mathématiques

En Fédération Wallonie-Bruxelles, les bacheliers AESI en mathématiques sont formés en haute école. En trois ans d'études, ils reçoivent, entre autres, des cours de psychopédagogie et d'autres relatifs à la discipline enseignée, agrémentés de notions épistémologiques et didactiques. Ils participent à des ateliers de formation professionnelle (AFP), effectuent des stages d'enseignement et rédigent un travail de fin d'études. Les psychopédagogues dispensent, entre autres, les cours suivants : pédagogie générale, un tiers des AFP, psychologie/évaluation/différenciation des apprentissages et initiation à la recherche en éducation. La formation mathématique de base est composée des cours suivants : nombres et algèbre, suites et séries, géométrie (plane, dans l'espace, vectorielle et analytique), fonctions, trigonométrie, traitement numérique des données/probabilités et statistiques, analyse, algorithmique, logique et structure. Les formateurs de mathématiques dispensent également un tiers des AFP (le dernier tiers étant dispensé par les maitres de formation pratique – MFP) et, pour certains, un cours de liaison (normale) primaire-secondaire et des ateliers didactiques.

3.4. Guides d'entretien et analyse inductive générale des données brutes

Nous avons mené des entretiens semi-directifs d'une quarantaine de minutes chacun, dans le courant du mois de mai 2016. Trois guides d'entretien ont été conçus (cf. annexe 2 pour un exemple) : un pour les psychopédagogues, un pour les formateurs d'algèbre et un pour les formateurs de géométrie. Ces guides, à la fois structurés et flexibles, sont issus d'un long processus de réalisation, nourri par des lectures didactiques et des échanges avec des formateurs de mathématiques et des psychopédagogues (en dehors de notre échantillon). Des prétests ont été effectués pour augmenter la praticabilité et la validité. Une synthèse descriptive et générale du modèle des *MKT* figurait dans l'introduction. La première partie était composée de questions invitant le formateur à se présenter, le but étant de dresser le profil de chaque individu, mais aussi de se faire une idée plus précise de l'organisation de la formation et de la collaboration entre les différents acteurs dans chaque haute école. Une revue de la littérature centrée sur les enjeux de transition en algèbre et en géométrie a permis de construire la deuxième partie du guide en l'organisant selon les trois types de connaissances ciblés. Enfin, chacune des trois thématiques était divisée en trois questions : « Comment formez-vous les futurs enseignants à ce type de connaissances ? », « À quelle fréquence ? » et « Selon quelle organisation ? ».

Après la retranscription des entretiens, nous nous sommes inspirés de la méthode de Thomas (2006, cité par Blais & Martineau, 2006), l'« analyse inductive générale des données brutes », dans le but de catégoriser les données recueillies en lien avec les trois types de connaissances ciblés. Ainsi, nous avons lu plusieurs fois chacun des entretiens et utilisé un code couleur en fonction du type de connaissances. Après avoir constitué une première classification, nous obtenions un nombre trop élevé de catégories, qu'il a donc fallu restreindre (l'objectif étant d'arriver à une fourchette comprise entre trois et huit catégories, d'après Blais et Martineau). La version finale de notre catégorisation permet de structurer la présentation des résultats (cf. annexe 3).

4. Résultats

Les résultats sont présentés en suivant la catégorisation à laquelle l'analyse inductive a conduit. Le premier niveau organisationnel est logiquement celui des trois catégories de connaissances analysées (*SCK*, *KCT* et *KCS*). Le second niveau précise les types d'activités mises en place par les formateurs pour viser l'acquisition des connaissances concernées.

4.1. Les connaissances mathématiques spécialisées (*SCK*)

4.1.1. *La démarche inductive*

La démarche inductive, contrairement à la démarche déductive, privilégie d'abord l'observation de cas pour inférer ensuite des théories. En général, les formateurs de mathématiques favorisent cette méthode : « Je n'amène pas d'écrits théoriques à ce moment-là. […] Ça reste pratique pour eux » (M3), « Moi je dirais plutôt que je leur fournis l'exercice, qu'ils le résolvent, et puis j'analyse avec eux les différentes méthodes qu'ils ont utilisées pour le résoudre » (M4) ou « Je les mets […] devant une situation à analyser, […] et on va pouvoir plutôt aller sur une démarche d'appropriation du problème sur laquelle ils font un travail […] » (M11). Les activités proposées sont issues de revues comme *Math & Sens* ou *Losanges*. Elles peuvent aussi provenir de pistes didactiques des évaluations externes ou de guides méthodologiques des manuels scolaires.

En géométrie, la manipulation est un exemple de démarche inductive : « Il y a des gens qui disent qu'il ne faut plus manipuler, mais si ! Donc, on manipule en primaire, on manipule encore en secondaire […] » (M2) ou « J'insiste d'abord beaucoup sur la manipulation. Par exemple, en géométrie dans l'espace, j'ai beaucoup de matériel, […] et puis, au fur et à mesure, on essaye d'amener une théorie plus poussée » (M8). Ainsi, pour comprendre l'évolution de la géométrie entre le primaire et le secondaire, les étudiants reproduisent des figures planes. Ils peuvent dès lors visualiser les propriétés de ces objets et les formuler en termes de conditions nécessaires et suffisantes. Aussi, ils sont amenés à construire des solides pour une meilleure visualisation en trois dimensions. La manipulation permet aux formateurs d'expliciter la transition entre perception et démonstration afin que les étudiants prennent conscience des limites de l'intuition et de l'expérience : « On repart d'une géométrie naturelle pour arriver à une géométrie […] axiomatique, […] on va chercher les axiomes et, en fin de parcours, on démontre des propriétés » (M2).

4.1.2. *Les analyses matières*

Les analyses matières consistent à faire des recherches historiques et épistémologiques, à lier des concepts et à identifier les difficultés rencontrées lors de l'élaboration de ceux-ci. Elles favorisent prioritairement l'approfondissement des connaissances mathématiques et, secondement, contribuent à une meilleure analyse des activités mathématiques. Elles semblent dès lors indispensables car les étudiants éprouvent des difficultés avec la matière : « Il y a des moments où on a travaillé […] l'analyse matière parce que je me rendais compte que ça ne fonctionne pas, ils ne savent pas exactement ce que c'était. […] L'analyse matière est ce qui compte d'abord » (M2). En outre, ces analyses influencent les représentations des futurs enseignants car « une fois qu'on fait de l'épistémologie, on devient différent » (M2).

Concrètement, les formateurs M2 et M3 déclarent avoir fait des analyses matières sur les équations, les angles ou Thalès (*brainstorming*, formulation et application du concept, liens établis avec d'autres points de matières [*KMH*]…). Le formateur M11 a également mené avec ses étudiants une analyse sur les polyèdres : « Il y a un moment donné, dans le programme de première année secondaire, une approche des polyèdres extrêmement rudimentaire […]. Donc j'ai incorporé dans mes cours une analyse plus générale de la constitution des polyèdres qui me permet de lancer énormément de situations-problèmes pour mes étudiants » (M11).

4.2. Les connaissances pour enseigner liées au contenu (*KCT*)

4.2.1. *La démarche déductive*

La démarche déductive privilégie comme point de départ les concepts théoriques avant de les appliquer à un domaine précis. Les psychopédagogues usent de cette démarche. Par exemple, pour illustrer les modèles d'enseignement-apprentissage, ils agrémentent leurs propos d'exemples mathématiques : « On a organisé une activité en collaboration "psychopédagogues – formateurs de mathématiques" et l'objectif était de sensibiliser les étudiants aux différents modèles d'enseignement-apprentissage. […] Donc l'objectif était davantage pédagogique. […] Et donc Monsieur X (formateur de mathématiques) leur a proposé une série d'activités à vivre […]. J'essaie vraiment de prendre des exemples, d'illustrer les choses de façon beaucoup plus concrète » (P1), « Il y a aussi les exemples que je vais chercher dans la théorie pédagogique, je vais les chercher en mathématiques » (P9). Cependant, les psychopédagogues éprouvent des difficultés à concrétiser les concepts théoriques et déclarent que c'est dans le cadre des AFP qu'ils ciblent davantage le contenu mathématique, soit parce qu'ils travaillent en collaboration avec les formateurs de mathématiques, soit parce que les étudiants vont en stage ou en reviennent et ont donc des exemples concrets à partager : « Et à ce moment-là, […] donc qu'ils viennent de revenir de stage, eh bien là on peut illustrer de manière plus pragmatique ce qu'ils avaient vu en théorie en première » (P7).

4.2.2. *Les séquences d'enseignement-apprentissage*

D'abord, les étudiants sont amenés à analyser des activités provenant de différentes sources. Après les avoir résolues, ils sont invités à se poser des questions quant à la transposition de ces activités dans l'enseignement : pourquoi proposer telle activité et quel en est l'intérêt ? Quels sont les prérequis que nécessite cette activité ? À quel moment présenter cette activité ? Quel matériel choisir ? Quelles sont les compétences visées ? Les analyses d'activités et les analyses matières sont bien sûr complémentaires : « Pour moi, les analyses d'activités, c'est vraiment le nœud pour pouvoir enseigner […]. C'est comme ça qu'on sait effectivement mieux choisir les activités […]. Pour ça, il faut faire aussi des analyses matières fouillées » (M3). Ces propos nous confortent dans l'idée que les *SCK* sont nécessaires pour développer des *KCT*. Cependant, les étudiants éprouvent des difficultés : « C'est pour moi une difficulté majeure de nos étudiants, c'est d'aller pouvoir analyser ce qui est là et se dégager de l'élève qu'ils étaient pour devenir le professeur » (M3).

Mais les représentations des étudiants sur les mathématiques influencent leur comportement. Ainsi, lors des préparations de stage, les formateurs de mathématiques déplorent leur manque de sens critique. Les étudiants ont tendance à consulter et à adopter directement un manuel scolaire. Dès lors, ils apprennent aux futurs enseignants à comparer des manuels scolaires, principalement dans le cadre des AFP ou des ateliers didactiques : « Généralement, on met à leur disposition des manuels, on leur donne un sujet, on leur demande […] de comparer ce qui s'y fait, […], et puis on débriefe et on essaye de reconstruire » (M12) ou « Pour l'introduction de l'addition dans Z, par exemple, […] je vais chercher 3–4–5 manuels différents, […] voir un petit peu les introductions qu'ils proposent, le sens de la lettre aussi ça c'est quelque chose selon qu'on les introduit avec les solides, le nombre de faces, arêtes, sommets, pour les prismes et les pyramides, et puis alors avec des suites […] » (M10).

Lorsque les étudiants sont capables d'analyser des matières et des activités, ils sont amenés à participer à des micro-enseignements : « Alors les séquences d'apprentissage du micro-enseignement, c'est un exercice courant, donc nous faisons ça de manière très régulière » (M11), « On essaie de les mettre en situation, comme on leur demande aussi de donner des leçons, de faire du micro-enseignement […]. On leur fait donner à leurs condisciples » (M12). Les formateurs de mathématiques et les psychopédagogues assistent aux présentations et « chacun réagit en fonction de sa casquette respective » (P5). Alors que les premiers sont davantage centrés sur la pertinence des concepts mathématiques, les seconds sont portés sur le registre méthodologique. Ces derniers déclarent apporter plus une démarche qu'un contenu. En effet, lors des micro-enseignements, un de leurs objectifs principaux est d'illustrer les différentes méthodes d'apprentissage qui existent.

Enfin, certains formateurs mentionnent qu'ils utilisent ou construisent des outils didactiques avec leurs étudiants. Ainsi, lors des AFP, les étudiants conçoivent des jeux mathématiques ou apprennent à utiliser la technologie.

4.2.3. *Les observations sur le terrain et les stages d'enseignement*

Les étudiants sont aussi envoyés sur le terrain, que ce soit pour observer ou donner cours. Les stages d'enseignement permettent de s'exercer au métier. Les retours de stage sont importants car ils permettent aux étudiants de revenir sur une situation professionnelle vécue et de réguler leur pratique : « C'est avant tout essayer de traiter des situations problématiques qui ne sont pas encore résolues. Et donc on essaie que les élèves choisissent eux-mêmes une situation dans laquelle ils veulent qu'on discute pour essayer de trouver des pistes de solution » (M3), « […] avant les stages, on organise systématiquement une séance de réponses aux questions par rapport aux sujets de leçon que les étudiants auront à donner en stage. Et donc là, on est là à nouveau tous ensemble pour répondre en fonction des demandes et de nos casquettes respectives […] » (P5).

4.3. Les connaissances des élèves liées au contenu (*KCS*)

Les formateurs invitent les étudiants à analyser des productions et démarches d'élèves du secondaire. Ils expliquent que ces connaissances sont essentielles, mais reconnaissent par ailleurs éprouver des difficultés à trouver du matériau adapté : « Ce qui m'intéresse surtout ce sont les erreurs des élèves. Et donc moi, en tant que prof d'école normale […], je n'ai jamais de contact avec ces élèves-là » (M3). Dès lors, plusieurs affirment ne pas proposer assez souvent ce type d'activités : « Non, même si c'est très intéressant et qu'on a envie de le faire, par manque de temps, on ne le fait pas. […] Ça reste très anecdotique par rapport à tout ce qu'on pourrait faire au niveau de l'analyse de l'erreur » (M12).

Peu de formateurs proposent des lectures didactiques aux étudiants : « Je pense que c'est ça qui nous manque en fait. Ce sont des lectures suffisamment pointues pour justement aller plus loin » (M3). Ils utilisent plutôt des productions de vulgarisation pour faire vivre et analyser des activités à leurs étudiants. Seuls les formateurs M2 et M3 proposent des publications de la recherche sur l'enseignement des mathématiques dans lesquelles figurent des productions d'élèves : « Je n'ai jamais enseigné à ces élèves, et donc je suis obligé de passer par des écrits. Et je vois bien que si on veut justement poser des bonnes questions aussi, réagir ou bien attirer l'attention sur des difficultés, il faut passer par là. […] Et donc j'amène ce genre de lectures » (M3).

Les formateurs vont aussi puiser dans les travaux de fin d'études (TFE) d'anciens étudiants pour montrer aux étudiants des productions d'élèves. Les futurs enseignants analysent les préconceptions des élèves et peuvent ainsi se rendre compte de leurs démarches de résolution dans différents domaines mathématiques : « En première, ils ont travaillé sur les fractions à partir d'un TFE et, régulièrement, en algèbre, je reprends aussi des extraits des TFE » (M3). Ces travaux constituent également une aide précieuse pour les psychopédagogues qui déclarent ne pas avoir les compétences matières nécessaires pour proposer eux-mêmes des lectures didactiques sur les modes de pensée, les démarches et difficultés des élèves.

De manière beaucoup plus systématique, les formateurs font des anecdotes sur l'un ou l'autre point de matière qu'ils abordent dans leurs cours : « Je pense que je fais plutôt des remarques à ce sujet-là au niveau de mes cours, dans les cours de maths, […]. Par exemple, le sens du signe d'égalité j'en parle notamment quand je fais des fractions équivalentes, je leur dis : "C'est quand-même bizarre, on a des fractions, elles sont équivalentes, elles ne sont pas égales, mais on utilise quand-même le symbole égal, c'est quand-même bizarre, est-ce qu'il n'aurait pas fallu utiliser un autre symbole, ça n'aurait pas été moins compliqué pour les élèves…" » (M4), « Pour moi, c'est anecdotique. Y a pas un cours qui est consacré à ce genre de choses » (P5).

Enfin, lors des préparations et retours de stages, les formateurs abordent les difficultés que les élèves du secondaire inférieur pourraient rencontrer face à telle ou telle activité ou les démarches qu'ils seraient susceptibles d'adopter : « Dans les périodes précédant le stage, il arrive régulièrement que leurs demandes vis-à-vis des leçons et des préparations soient : "Les élèves, qu'est-ce qu'ils savent ? […] Comment pourrais-tu, toi, savoir ce qu'ils ont vu et ce qu'ils savent réellement ?" » (M11), « Il m'est arrivé de dire "Je veux une situation mathématique vécue, je ne veux pas un problème de comportement. […] Qu'est-ce qui s'est passé réellement au cours de cette activité ?" » (M2) ou « Il arrive qu'ils reviennent (de stage) avec des questions précises sur lesquelles on peut rentrer dans un détail » (M11).

5. Discussion et conclusion

L'analyse des entretiens a mis en évidence un panorama des moyens mis en œuvre par les formateurs de notre échantillon pour doter les futurs bacheliers AESI en mathématiques des trois types de connaissances ciblés. Ce panorama donne une vision assez riche de la formation, car celle-ci s'appuie sur une diversité d'activités. Toutefois, ces formateurs déplorent la faible intensité avec laquelle ils déploient ce type d'activités. Ils pointent en effet le faible niveau mathématique des étudiants et estiment qu'ils doivent impérativement y remédier. Dès lors, la plupart des cours de mathématiques sont davantage axés sur la maitrise des contenus que sur les divers types de *PCK*. Sayac (2012, p. 116–117) allait dans le même sens en estimant que « le niveau de connaissances en mathématiques de certains professeurs des écoles stagiaires est si faible qu'il parasite l'acquisition de savoirs didactiques ou professionnels […] ». Nous sommes donc face à un premier paradoxe : alors que les écrits scientifiques (Depaepe *et al.*, 2013 ; Hill *et al.*, 2008) s'accordent sur l'importance de développer les différentes dimensions des *PCK*, les lacunes observées au niveau de la maitrise du contenu semblent les reléguer partiellement au second plan. Dans leur étude de 2015, Depaepe *et al.* pointaient eux aussi les faibles performances des étudiants (surtout du primaire) quant à leurs connaissances mathématiques sur les nombres rationnels. Dans leur étude de 2018, ils ont pourtant axé leur programme de formation sur le développement des *PCK* et ont constaté que ces activités d'apprentissage impactaient aussi (et même davantage) la maitrise des connaissances de contenu. Il y a sans doute là une voie intéressante à explorer.

Si les résultats de nos entretiens montrent une certaine complémentarité entre didacticiens et psychopédagogues pour œuvrer au développement des connaissances mathématiques pour enseigner, ils permettent aussi de pointer les difficultés rencontrées pour développer le versant « élèves » de ces connaissances (*KCS*) et, partant, pour aider les étudiants à analyser les démarches spontanées des élèves et donner du sens aux difficultés qu'ils rencontrent. Le développement des *KCS* parait pourtant essentiel pour permettre aux enseignants d'« aller de l'élève vers les mathématiques (et non l'inverse) » (Rouche, 2005, cité par De Block-Docq & Hauchart, 2009, p. 4). Deblois et Squalli (2002) insistent aussi sur l'importance (et la difficulté) d'intégrer l'analyse de productions d'élèves dans la formation. Une telle analyse nécessite de la part des futurs enseignants un déplacement de la posture d'ancien élève vers celle d'enseignant. Ces deux auteurs mettent en garde les formateurs : « La tendance à vouloir corriger ponctuellement l'erreur de l'élève semble la manifestation d'une conception de l'enseignement selon laquelle intervenir à la suite d'une erreur d'élève consiste à ré-enseigner la portion de savoir déjà enseignée et non assimilée par l'élève, une manifestation de la posture de l'ancien élève » (p. 232). Il est donc nécessaire d'accompagner la réflexion des futurs enseignants dans ce type de tâches ; il ne s'agit pas uniquement d'identifier une erreur et de la corriger, mais bien de replacer l'analyse de l'erreur au sein du développement de la compréhension d'un concept. Alors que les formateurs reconnaissent volontiers l'intérêt de ce type d'activités, seul le formateur M3 déclare s'appuyer sur des productions réelles : « Ce que je reprends, ce sont des lectures du CREM où, justement, les activités sont présentées telles qu'elles sont données aux élèves, mais en plus analysées et en laissant présentés les choix et parfois les productions d'élèves. » Il s'agit là d'un deuxième paradoxe auquel pourrait en partie répondre la prise en compte des acquis de la recherche en didactique des mathématiques dans la formation initiale, puisque de nombreux articles reposent justement sur l'analyse de démarches d'élèves et sur la mise à jour de leurs conceptions erronées, pouvant ainsi constituer un matériau d'analyse sur lequel appuyer certains cours.

Bien qu'il y ait une réelle volonté de la part des formateurs de sensibiliser les futurs enseignants à la didactique disciplinaire, ils intègrent relativement peu les acquis de la recherche en didactique des mathématiques. Pourtant, sensibiliser les futurs enseignants à la recherche semble incontournable si l'on veut former de réels professionnels réflexifs (Sayac, 2013). Diverses hypothèses peuvent être émises pour tenter d'expliquer ce troisième paradoxe. D'abord, les psychopédagogues estiment que la sphère de la didactique n'est pas de leur ressort, mais bien de celui des formateurs de mathématiques, et déclarent ne pas avoir les compétences matières suffisantes pour exploiter ces écrits. Parallèlement, les formateurs de mathématiques apportent peu de lectures scientifiques et privilégient la maitrise des savoirs disciplinaires. Ils estiment que les étudiants ont trop peu de recul sur la matière et que certains ont trop de lacunes dans ce domaine pour se montrer réceptifs aux travaux didactiques. Defrance (2010) et Sayac (2012) avaient établi le même constat en pointant d'une part, la focalisation sur la maitrise de la matière et, d'autre part, le manque de collaboration entre les différents acteurs pour expliquer les lacunes constatées au niveau de la formation proprement didactique. Finalement, chacun reste enfermé dans ses conceptions et a tendance à reléguer à autrui les tâches de formation avec lesquelles il se sent le moins à l'aise.

Il semble dès lors nécessaire que les formateurs soient initiés eux aussi à la recherche en éducation et en didactique et développent la posture du chercheur car « initier les enseignants à la recherche dans le cadre de leur formation initiale bouscule à la fois les pratiques des formateurs et celles des chercheurs en éducation et les oblige à se questionner mutuellement » (Sayac, 2013, p. 2). Dès lors, on peut espérer que le décret de réforme de la formation initiale des enseignants, voté en mars 2019 au Parlement de la Fédération Wallonie-Bruxelles, sera l'occasion de tenter un rapprochement entre le monde éducatif et celui de la recherche.

Pour terminer, il semble essentiel d'amener les étudiants à pragmatiser les savoirs issus de la recherche, c'est-à-dire à les opérationnaliser (Pastré, 2011). À l'instar de Defrance (2010, p. 196), nous pensons que les AFP, au même titre que les stages d'enseignement, peuvent (doivent ?) constituer un lieu où les futurs enseignants « mettent en œuvre […] une série de pratiques issues des théories étudiées ». Nous émettons l'hypothèse que les maitres de formation pratique sont vecteurs de la professionnalisation du métier d'enseignant et devraient être formés à la didactique professionnelle (Schillings, 2015). De par leur expérience dans le secondaire inférieur, ces professionnels pourraient amener les étudiants à pragmatiser les concepts apportés par les formateurs de mathématiques et les psychopédagogues et, par conséquent, rendre plus explicites les connaissances mathématiques pour enseigner et œuvrer ainsi au développement de la *compétence enseignante.*

Bibliographie

Arsac, G. & Mante, M. (1996). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 21–43.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407 [doi : 10.1177/0022487108324554].

Blais, M. & Martineau, S. (2006). L'analyse inductive générale : Description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches Qualitatives*, 26(2), 1–18.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat non publiée. Genève : Université de Genève.

Clivaz, S. (2012). Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations didactiques : Analyse d'un épisode. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14, 29–45.

De Block-Docq, C. & Hauchart, C. (2009). Les idées principales de Nicolas Rouche à propos de l'enseignement des mathématiques. *Losanges*, 5, 4–10.

Deblois, L. & Squalli, H. (2002). Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres du primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 213–238.

Defrance, A. (2010). La compétence de l'enseignant de mathématiques en formation initiale. *Éducation & Formation*, 293, 185–198.

Demonty, I. (2017). *Regards croisés sur le développement de la pensée algébrique : Entre raisonnements des élèves et connaissances des enseignants*. Thèse de doctorat en sciences de l'éducation non publiée. Liège : Université de Liège.

Demonty, I., Vlassis, J. & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1), 1–19.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82–92.

Depaepe, F., Van Roy, P., Torbeyns, J., Kleickmann, T., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2018). Stimulating pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 197–216.

Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12–25.

Grangeat, M. (2015) (éd.). *Understanding Science Teacher's Professionnal Knowledge Growth*. Rotterdam : Sense Publishers.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400.

Jameau, A. (2015). Les connaissances professionnelles des enseignants et leur évolution à travers une analyse de l'activité. Une étude de cas en physique au collège. *Éducation et Didactique*, 9(1), 9–32.

Kermen, I. & Izquierdo-Aymerich, M. (2017). Connaissances professionnelles didactiques des enseignants de sciences : Un thème de recherche encore récent dans les recherches francophones. *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, 15, 9–32.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (2013). *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers: Results from the COACTIV Project.* Berlin : Springer.

Lucchese, N. (2016). *Les connaissances mathématiques pour enseigner : Comment les formateurs des hautes écoles pédagogiques de la région liégeoise préparent-ils les futurs bacheliers AESI en mathématiques à assurer la transition primaire-secondaire dans les domaines algébrique et géométrique ?* Mémoire de Master en Sciences de l'éducation. Manuscrit non publié. Liège : Université de Liège.

Pastré, P. (2011). *La didactique professionnelle. Approche anthropologique du développement chez les adultes*. Paris : Presses Universitaires de France.

Sayac, N. (2012). Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré : Les savoirs de la formation. *Recherche et Formation*, 71, 115–130.

Sayac, N. (2013). La recherche dans la formation des enseignants : Quel impact sur les étudiants en termes de développement professionnel et de rapport au(x) savoir(s) ? *Formation et Profession*, 21(1), 1–12 [doi : 10.18162/fp.2013.43].

Schillings, P. (2015). *Didactique professionnelle et formation initiale des enseignants : Partim II. Notes de cours.* Liège : Université de Liège.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1–21.

Shulman, L.S. (2007). Ceux qui comprennent : Le développement de la connaissance dans l'enseignement. *Éducation et Didactique*, 1(1), 97–114.

Silvy, C., Delcroix, A. & Mercier, A. (2013). Enquête sur la notion de « *pedagogical content knowledge* », interrogée à partir du « site local d'une question ». *Éducation et didactique*, 7(1), 33–58.

Annexes

1. Activités d'apprentissage visant l'acquisition des connaissances mathématiques pour enseigner dans les trois hautes écoles concernées par l'étude

N.B. : La lettre « B » signifie ici que le cours en question est dispensé en lien avec la discipline, ici les mathématiques, contrairement aux cours de type A, qui se donnent de manière décontextualisée ou générale. Par exemple, le cours d'évaluation des apprentissages (A) est un cours qui peut être donné en amphi, toute section confondue. *A contrario*, le cours d'évaluation des apprentissages (B) est un cours donné au sein d'une même section/discipline et de manière contextualisée.

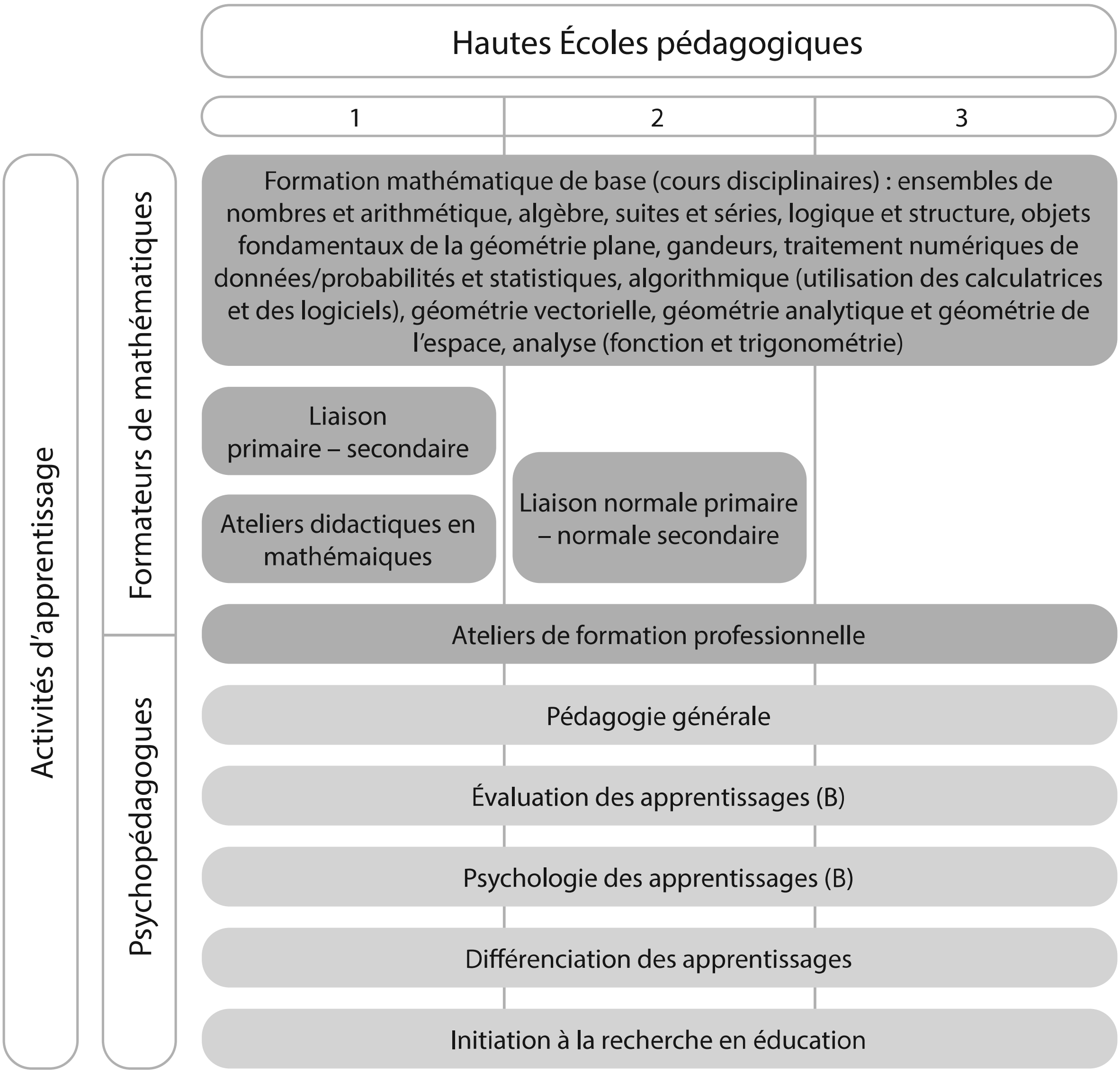

Figure 1 : *Activités d'apprentissage visant l'acquisition des connaissances mathématiques pour enseigner dans les trois hautes écoles concernées par l'étude*

2. Exemple de guide d'entretien pour les connaissances pour enseigner liées au contenu

Pour favoriser la transition primaire-secondaire en géométrie, un enseignant de mathématiques doit être capable de choisir des situations didactiques permettant aux élèves du secondaire de passer d'un paradigme géométrique à un autre. D'où l'importance de bien choisir les exemples, les activités/tâches (et leur enchainement) et les représentations. Voici un exemple extrait du cours de géométrie (Arsac & Mante, 1996).

Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 4 cm, 5 cm et 9 cm ? Les élèves confrontent leurs démarches :

Oui, il existe un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 4 cm et 9 cm.

Explication : Nous traçons une hypoténuse de 9 cm. Nous mettons la pointe du compas sur l'hypoténuse, puis nous traçons un arc de cercle de 5 cm et nous faisons la même chose pour 4 cm. Les deux arcs de cercles forment un point et nous n'avons plus qu'à rejoindre le point de l'hypoténuse au point des arcs de cercles pour tracer le triangle.

Exemple :

Non, il n'existe pas car si on additionne les deux plus petits nombres des trois, cela donne le même nombre que le troisième.

Il faudrait que les deux plus petits nombres donnent un chiffre plus grand que le troisième. Ex. : 9 cm, 5 cm, 6 cm (5 + 6 = 11).

Il en existe 2 si on prend comme base 4 ou 5 cm. Si on prend 9 cm comme base du triangle, les arcs de cercle ne se croisent pas.

4 cm comme base   5 cm comme base   9 cm comme base

Figure 2 : *Activité sur l'inégalité triangulaire (Arsac & Mante, 1996).*

a) Comment et pourquoi préparez-vous les futurs bacheliers en mathématiques à développer des connaissances pour enseigner liées au contenu ?

1. Avec les étudiants, vous comparez différents manuels scolaires et repérez les exercices récurrents, l'enchainement des activités, etc.
2. Vous proposez à vos étudiants de créer des séquences d'apprentissage ou des micro-enseignements abordant la thématique « liaison primaire-secondaire » dans le domaine géométrique et vous en discutez en classe.
3. Vous apportez vous-même aux étudiants les éléments théoriques ou vous leur demandez d'effectuer des recherches avant une mise en commun collective (par exemple des lectures didactiques sur les modes de pensée en géométrie).
4. Vous combinez ces précédentes façons de faire.
5. Vous avez une autre manière de faire. Pouvez-vous l'expliquer ?
6. Vous ne préparez pas vos étudiants à ce type de connaissances.

b) Au niveau de la fréquence :

1. Si vous préparez les étudiants à ce type de connaissances, à quelle fréquence le faites-vous ?

   Jamais 1 2 3 4 5 6 7 Toujours

2. Si vous ne préparez pas les étudiants à ce type de connaissances, à quel(s) type(s) de connaissances les préparez-vous ?

c) Au niveau organisationnel :

1. Si vous préparez les étudiants à ce type de connaissances, dans quel cours le faites-vous ? (cours de géométrie, AFP, etc.)
2. Si vous ne préparez pas les étudiants à ce type de connaissances, pensez-vous que cela doit quand même se faire ? Pourquoi ? Par qui ? Dans quel cours ?

3. Classification finale des données brutes

1. Les connaissances mathématiques spécialisées :
   - La démarche inductive, dont la manipulation (1)
   - Les analyses matières (2)
2. Les connaissances pour enseigner liées au contenu :
   - La démarche déductive (3)
   - Les élaborations et présentations de séquences d'enseignement-apprentissage (4)
     - Les analyses d'activités et des référentiels
     - Les micro-enseignements
     - Les comparaisons de manuels
     - L'utilisation et la construction d'outils didactiques
   - Les observations (sur le terrain) et les stages pédagogiques (5)
     - Les stages pédagogiques dans le primaire et le spécialisé (y compris les préparations et les retours de stage)
     - Les cours de liaison (normale) primaire-secondaire
3. Les connaissances des élèves liées au contenu :
   - Les analyses de productions d'élèves et de leurs démarches (6)
     - Les travaux de fin d'études
     - Les écrits à caractère didactique (articles, ouvrages, travaux)
     - Les apports des formateurs
     - Les discussions lors des préparations et retours de stage

4. Acronymes dans l'ordre alphabétique

Acronymes	Significations	Traductions	Explications ou exemples
CCK	*Common Content Knowledge*	Connaissances communes liées au contenu (ici, mathématique)	Être capable de résoudre une équation
CK	*Content Knowledge*	Connaissances liées au contenu	Ensemble de connaissances formé par les *CCK*, *KMH* et les *SCK*
KCC	*Knowledge of Content and Curriculum*	Connaissances curriculaires liées au contenu	Que dit le *curriculum* officiel (ou Programme) sur les équations ? Quels sont les objectifs à atteindre ?
KCS	*Knowledge of Content and Students*	Connaissances des élèves liées au contenu	Quels obstacles les élèves sont-ils susceptibles de rencontrer face à la résolution d'équations ? Quelles démarches ou stratégies mettent-ils en place pour résoudre une équation ? Une démarche arithmétique ou plutôt algébrique ?
KCT	*Knowledge of Content and Teaching*	Connaissances pour enseigner liées au contenu	Quelles activités mettre en place pour favoriser l'apprentissage des équations ?
KMH	*Knowledge at the Mathematical Horizon*	Connaissances mathématiques horizontales	Quels sont les concepts connexes ? (Ici, les sens de la lettre et de l'égalité, le calcul algébrique…)
MKT	*Mathematical Knowledge for Teaching*	Connaissances mathématiques pour enseigner	Ensemble de connaissances formé par les *PCK* et les *CK*
PCK	*Pedagogical Content Knowledge*	Connaissances pédagogiques liées au contenu	Ensemble de connaissances formé par les *KCS*, *KCT* et les *KCC*
SCK	*Specialized Content Knowledge*	Connaissances spécialisées liées au contenu	Ne pas uniquement être capable de résoudre une équation, mais être capable de la résoudre de différentes manières, de comprendre pourquoi et pour quoi la résoudre de telle ou de telle manière…