Caractérisation S-adique des dendriques

France Gheeraert

Travail en collaboration avec Marie Lejeune et Julien Leroy

5 mai 2021

LA LIBERTÉ DE CHERCHER

Mots et langages dendriques

Graphes d'extension

$\mathcal{L}$ est un langage récurrent (langage d'un mot infini ou d'un shift)

$$\begin{aligned} E^-_{\mathcal{L}}(w) &= \{a \in \mathcal{A} \mid aw \in \mathcal{L}\} \\ E^+_{\mathcal{L}}(w) &= \{b \in \mathcal{A} \mid wb \in \mathcal{L}\} \\ E_{\mathcal{L}}(w) &= \{(a,b) \in E^-_{\mathcal{L}}(w) \times E^+_{\mathcal{L}}(w) \mid awb \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

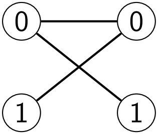
Définition

Le *graphe d'extension* de $w \in \mathcal{L}$ est le graphe biparti $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(w)$ ayant pour sommets $E^-_{\mathcal{L}}(w) \sqcup E^+_{\mathcal{L}}(w)$ et tel que pour tous $a \in E^-_{\mathcal{L}}(w)$, $b \in E^+_{\mathcal{L}}(w)$, (a,b) est une arrête si et seulement si $(a,b) \in E_{\mathcal{L}}(w)$.

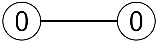
Exemple

Si $\mathcal{L}$ est le langage du mot de Fibonacci sur $\{0, 1\}$,

$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\varepsilon)$



$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(1)$



Dendriques

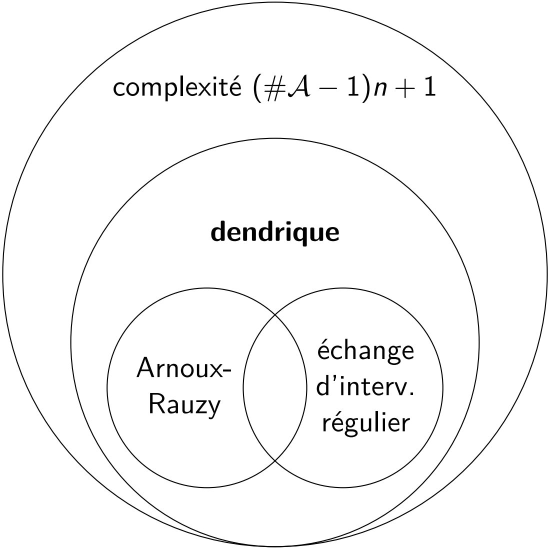
Un mot $w \in \mathcal{L}$ est *dendrique* si son graphe d'extension dans $\mathcal{L}$ est un arbre.

Un langage $\mathcal{L}$ est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}$ le sont.

Un mot infini x est *dendrique* si $\mathcal{L}(x)$ l'est.

Un shift X est *dendrique* si $\mathcal{L}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$ l'est.

Hiérarchie


complexité $(\#\mathcal{A}-1)n+1$
dendrique
Arnoux-Rauzy
échange d'interv. régulier

Représentations S-adiques des dendriques

Suites primitives

On note

$$\sigma^f(\mathcal{L}) = \mathrm{Fac}(\sigma(\mathcal{L})) = \{u \in \mathrm{Fac}(\sigma(v)) \mid v \in \mathcal{L}\}.$$

Définition

La suite de morphismes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n)_n$ est *primitive* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \geq n$ tel que, pour tous $a, b \in \mathcal{A}$,

$$|\sigma_n \dots \sigma_N(a)|_b > 0.$$

Représentations S-adiques

Définition

Une *représentation S-adique primitive* d'un langage récurrent $\mathcal{L}$ est une suite primitive de morphismes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n)_n$ telle que

$$w \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}, a \in \mathcal{A} \text{ tq. } w \in \mathrm{Fac}(\sigma_0 \dots \sigma_N(a)).$$

Si $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}((\sigma_n)_{n \geq N})$, alors

$$\mathcal{L} = \sigma_0^f(\mathcal{L}_1) = \sigma_0^f(\sigma_1^f(\mathcal{L}_2)) = \dots.$$

Représentation S-adique des sturmiens

$$L_0 : \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 01 \end{array} \qquad L_1 : \begin{array}{l} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 1 \end{array}$$

Théorème (Morse, Hedlund)

Tout langage sturmien admet une représentation S-adique $\boldsymbol{\sigma} \in \{L_0, L_1\}^{\mathbb{N}}$ non ultimement constante.
Réciproquement, toute suite $\boldsymbol{\sigma} \in \{L_0, L_1\}^{\mathbb{N}}$ non ultimement constante est une représentation S-adique d'un langage sturmien.

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \neq \varepsilon$ dans $\mathcal{L}$ est un mot u tel que

- $uw \in \mathcal{L}$,
- $|uw|_w = 2$,
- $uw \in w\mathcal{A}^*$.

On note $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(w)$ l'ensemble des mots de retour pour w dans $\mathcal{L}$.

Si $\mathcal{L}$ est le langage du mot de Fibonacci sur $\{0, 1\}$, les mots de retour pour 0 sont 0 et 01.

Propriétés dans le cas dendrique

Théorème (Dolce, Perrin)

Si $\mathcal{L}$ est un langage dendrique récurrent, alors pour tout $w \in \mathcal{L}$,

$$\#\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(w) = \#\mathcal{A}.$$

Théorème (Berthé *et al.*)

Soient $\mathcal{L}$ un langage dendrique récurrent et $w \in \mathcal{L}$. Si $\sigma : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ est tel que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(w)$ et si $\mathcal{L}'$ est le langage dérivé de $\mathcal{L}$ par rapport à σ, i.e.

$$\mathcal{L}' = \{u \in \mathcal{A}^* \mid \sigma(u)w \in \mathcal{L}\},$$

alors $\mathcal{L}'$ est dendrique récurrent.

Images dendriques par morphisme de retour

Morphismes de retour

Définition

Un *morphisme de retour* pour $w \neq \varepsilon$ est un morphisme $\sigma : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ injectif sur les lettres et tel que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $|\sigma(a)w|_w = 2$ et $\sigma(a)w \in w\mathcal{A}^*$.

Dans le cas où $w \in \mathcal{A}$, on parle de morphisme (injectif) fortement propre à gauche.

$$\sigma : \begin{cases} 0 \mapsto 010 \\ 1 \mapsto 0210 \\ 2 \mapsto 0222210 \end{cases} \qquad \tau : \begin{cases} 0 \mapsto 0101 \\ 1 \mapsto 01001 \\ 2 \mapsto 0121001 \end{cases}$$

But

Hypothèses :

- $\mathcal{L}$ est un langage dendrique (récurrent),
- σ est un morphisme de retour pour w.

Question :

Quand est-ce que $\sigma^f(\mathcal{L})$ est dendrique (récurrent) ?

$\longrightarrow$ Etant donné $u \in \sigma^f(\mathcal{L})$, que peut-on dire de $\mathcal{E}_{\sigma^f(\mathcal{L})}(u)$?

Morphismes dendriques

Si $|u|_w = 0$, alors

$$aub \in \mathrm{Fac}(\sigma(v)) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathcal{A} \text{ tq. } aub \in \mathrm{Fac}(\sigma(\alpha)w).$$

Si

$$F_\sigma = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{Fac}(\sigma(\alpha)w),$$

on a alors

$$\mathcal{E}_{\sigma^f(\mathcal{L})}(u) = \mathcal{E}_{F_\sigma}(u).$$

Définition

Un morphisme de retour σ pour w est *dendrique* si, pour tout $u \in F_\sigma$ tel que $|u|_w = 0$, u est dendrique dans F_σ.

Images étendues

Proposition (G., Lejeune, Leroy)

Si $u \in \sigma^f(\mathcal{L})$ est tel que $|u|_w \geq 1$, il existe d'uniques $s, p \in \mathcal{A}^*$, $v \in \mathcal{L}$ tels que

- *$u = s\sigma(v)p$,*
- *s est suffixe propre d'un élément de $\sigma(\mathcal{A})$,*
- *$p \in w\mathcal{A}^*$ est préfixe propre d'un élément de $\sigma(\mathcal{A})w$.*

On a alors $aub \in \sigma^f(\mathcal{L})$ si, et seulement si,

$$\exists (\alpha, \beta) \in E_{\mathcal{L}}(v) \text{ tq. } \sigma(\alpha) \in \mathcal{A}^* as \text{ et } \sigma(\beta)w \in pb\mathcal{A}^*.$$

On dit alors que u est une *image étendue* de v (sous σ).

Lien entre les graphes d'extensions

$$(a, b) \in E_{\sigma^f(\mathcal{L})}(u)$$
$$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in E_{\mathcal{L}}(v) \text{ tq. } \sigma(\alpha) \in \mathcal{A}^* as \text{ et } \sigma(\beta)w \in pb\mathcal{A}^*$$

Pour tous $s, p \in \mathcal{A}^*$,

$$\mathcal{A}_s^- = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma(\alpha) \in \mathcal{A}^* s\},$$
$$\mathcal{A}_p^+ = \{\beta \in \mathcal{A} \mid \sigma(\beta)w \in p\mathcal{A}^*\}.$$

On note

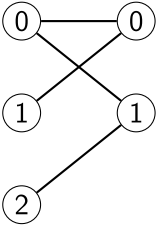
$$E_{\mathcal{L},s,p}(v) = E_{\mathcal{L}}(v) \cap \left(\mathcal{A}_s^- \times \mathcal{A}_p^+\right)$$

et $\mathcal{E}_{\mathcal{L},s,p}(v)$ le sous-graphe de $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(v)$ engendré par $E_{\mathcal{L},s,p}(v)$.

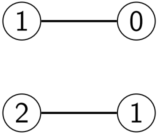
$$\tau : \begin{cases} 0 \mapsto 0101 \\ 1 \mapsto 01001 \\ 2 \mapsto 0121001 \end{cases}$$

$$u = 0|010|010 \quad \Rightarrow \quad s = 0, \quad v = 1, \quad p = 010$$

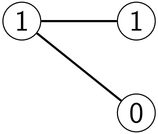
$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(v)$



$\mathcal{E}_{\mathcal{L},s,p}(v)$



$\mathcal{E}_{\tau^f(\mathcal{L})}(u)$



Images étendues dendriques

Théorème (G., Lejeune, Leroy)

Si v est dendrique, les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. *Toutes les images étendues de v sont dendriques dans $\sigma^f(\mathcal{L})$.*
2. *Pour tous $s, p \in \mathcal{A}^*$, $\mathcal{E}_{\mathcal{L},s,p}(v)$ est connexe.*
3. *Pour tous $s, p \in \mathcal{A}^*$, $\mathcal{E}_{\mathcal{L},s,\varepsilon}(v)$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L},\varepsilon,p}(v)$ sont connexes.*

$$\mathcal{C}_\sigma^-(\mathcal{L}) \equiv \forall\, s \in \mathcal{A}^*, \forall\, v \in \mathcal{L}, \mathcal{E}_{\mathcal{L},s,\varepsilon}(v) \text{ est connexe}$$

$$\mathcal{C}_\sigma^+(\mathcal{L}) \equiv \forall\, p \in \mathcal{A}^*, \forall\, v \in \mathcal{L}, \mathcal{E}_{\mathcal{L},\varepsilon,p}(v) \text{ est connexe}$$

Image dendrique d'un dendrique

Corollaire

L'image d'un langage dendrique récurrent $\mathcal{L}$ par un morphisme de retour σ est dendrique si et seulement si σ est dendrique et $\mathcal{C}_\sigma^-(\mathcal{L})$ et $\mathcal{C}_\sigma^+(\mathcal{L})$ sont vrais.

Corollaire

L'image d'un Arnoux-Rauzy par un morphisme de retour est dendrique si et seulement si le morphisme est dendrique.

Graphes $G^-(\mathcal{L})$ et $G^+(\mathcal{L})$

Nouveau but

Hypothèses :

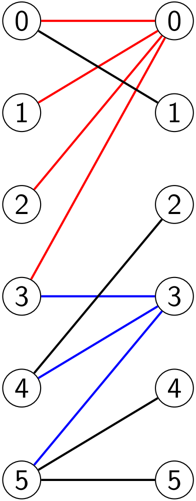
- $\mathcal{L}$ est un langage dendrique (récurrent),
- σ est un morphisme dendrique (pour w).

Question : Peut-on associer à $\mathcal{L}$ un "objet", tel que

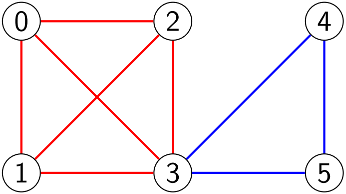
- la condition $\mathcal{C}_\sigma^-(\mathcal{L})$ (resp., $\mathcal{C}_\sigma^+(\mathcal{L})$) se voie sur l'objet,
- l'objet associé à $\sigma^f(\mathcal{L})$ dépende uniquement de l'objet associé à $\mathcal{L}$ et de σ ?

Exemple

$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\varepsilon)$

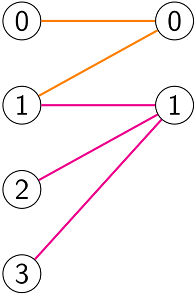


$G_1^-(\mathcal{L})$

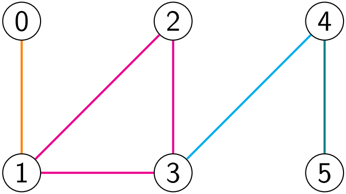


Exemple (suite)

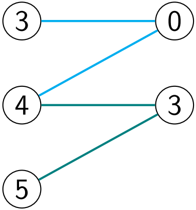
$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(0)$



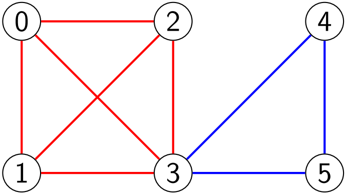
$G_2^-(\mathcal{L})$



$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(3)$



$G_1^-(\mathcal{L})$



Définition de $G^-(\mathcal{L})$

$G_n^-(\mathcal{L})$ a pour sommets les éléments de $\mathcal{A}$ et contient une arête entre a et b s'il existe $v \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}^n$ tel que $a, b \in E_{\mathcal{L}}^-(v)$.

$$G^-(\mathcal{L}) = \lim_{n \to \infty} G_n^-(\mathcal{L})$$

Proposition

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout $v \in \mathcal{L}$, le sous-graphe de $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(v)$ obtenu en supprimant, à gauche, les éléments de $\mathcal{B}$ et en supprimant les sommets isolés créés est connexe.*
2. *Le graphe $G^-(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{B}$ est connexe.*

Définition de $G^+(\mathcal{L})$

$G_n^+(\mathcal{L})$ a pour sommets les éléments de $\mathcal{A}$ et contient une arête entre a et b s'il existe $v \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}^n$ tel que $a, b \in E_{\mathcal{L}}^+(v)$.

$$G^+(\mathcal{L}) = \lim_{n \to \infty} G_n^+(\mathcal{L})$$

Proposition

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout $v \in \mathcal{L}$, le sous-graphe de $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(v)$ obtenu en supprimant, à droite, les éléments de $\mathcal{B}$ et en supprimant les sommets isolés créés est connexe.*
2. *Le graphe $G^+(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{B}$ est connexe.*

Image dendrique d'un dendrique (2)

Théorème

Soient $\mathcal{L}$ un langage dendrique récurrent et σ un morphisme dendrique. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *Le langage $\sigma^f(\mathcal{L})$ est dendrique récurrent.*
2. *Les conditions $\mathcal{C}_\sigma^-(\mathcal{L})$ et $\mathcal{C}_\sigma^+(\mathcal{L})$ sont satisfaites.*
3. *Pour tous $s, p \in \mathcal{A}^*$, les graphes $G^-(\mathcal{L}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_s^-)$ et $G^+(\mathcal{L}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_p^+)$ sont connexes.*

$$\mathcal{D}_\sigma^-(G) \equiv \forall\, s \in \mathcal{A}^*, G \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_s^-) \text{ est connexe}$$

$$\mathcal{D}_\sigma^+(G) \equiv \forall\, p \in \mathcal{A}^*, G \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_p^+) \text{ est connexe}$$

Graphe G^- de l'image

Proposition

Soient $\mathcal{L}$ un langage dendrique récurrent et σ un morphisme dendrique. Si $\sigma^f(\mathcal{L})$ est dendrique récurrent, alors $G^-(\sigma^f(\mathcal{L}))$ est entièrement déterminé (de façon constructive) par $G^-(\mathcal{L})$ et par σ. De la même façon, $G^+(\sigma^f(\mathcal{L}))$ est entièrement déterminé par $G^+(\mathcal{L})$ et par σ.

Notons $\sigma^-(G)$ le graphe obtenu à partir du graphe G via la construction "à gauche" et $\sigma^+(G)$ le graphe obtenu via la construction "à droite".

Graphe G^- de l'image (suite)

Idée :

- $G_n^-(\mathcal{L})$ est déterminé par les extensions gauches des mots de $\mathcal{L} \cap \mathcal{A}^n$;
- si u est une image étendue de v, les extensions de u sont déterminées par celles de v (et par σ) ;
- pour m assez grand, les antécédents des éléments de $\mathcal{L} \cap \mathcal{A}^m$ sont de longueur au moins N.

$\Rightarrow$ pour n et m assez grand, $G_m^-(\sigma^f(\mathcal{L}))$ est déterminé par $G_n^-(\sigma^f(\mathcal{L}))$.

Résultat principal

Enoncé

Le graphe $\mathcal{G}^-$

- a pour ensemble de sommets

$$\{G^-(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ dendrique récurrent}\},$$

- a une arête de G vers G' étiquetée par σ dendrique si $\mathcal{D}_\sigma^-(G')$ est vrai et $\sigma^-(G') = G$.

Enoncé

Le graphe $\mathcal{G}^+$

- a pour ensemble de sommets

$$\{G^+(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ dendrique récurrent}\},$$

- a une arête de G vers G' étiquetée par σ dendrique si $\mathcal{D}_\sigma^+(G')$ est vrai et $\sigma^+(G') = G$.

Théorème

Un langage est dendrique récurrent si, et seulement si, il admet une représentation S-adique primitive qui étiquette un chemin infini dans $\mathcal{G}^-$ et dans $\mathcal{G}^+$.

Simplification du graphe

- Pour construire $\mathcal{G}^-$ et $\mathcal{G}^+$, on peut ne prendre que les arbres dont les sommets sont étiquetés par $\mathcal{A}$.
- En jouant avec les symétries, on peut imposer un étiquetage particulier des sommets (soit à gauche, soit à droite).

Taille des graphes

Type de graphe	$\#\mathcal{A} = n$	$\#\mathcal{A} = 3$
Ens. de graphes d'ext	?	≥ 33
Graphes "réalisables"	? ($\leq$ "A001187"^{2})	$4 \times 4 = 16$
Arbres	$n^{n-2} \times n^{n-2}$	9
Avec symétries	"A000055" $\times n^{n-2}$	$1 \times 3 = 3$
Avec symétries (2)	?	2

Conclusion

Morphismes dendriques

- Composition de morphismes élémentaires
- Ils ne sont pas tous nécessaires

Question :

Peut-on décrire une famille $\mathcal{S}$ "suffisante" de morphismes dendriques en fonctions des décompositions en morphismes élémentaires ?

Suite

- Echanges d'intervalles
- Symétries
- Ultimement dendriques
- ...

Fin

Merci pour votre écoute !