Un travail sur des tâches complexes : le cas du théorème fondamental de l'analyse

Kevin BALHAN
ULiège-Cifen-Didactique des Mathématiques
Ladimath - DIDACTIfen

1. Contexte et objectif

Le travail sur les tâches complexes, décrit dans ce texte, s'inscrit dans le cadre d'un cours de mathématique et, plus précisément d'un cours d'analyse mathématique, destiné à des élèves de 5e et de 6e années de l'enseignement secondaire, dans les filières générale et technique de qualification en électronique. L'enseignement du théorème fondamental et son apprentissage par les élèves y sont principalement visés par l'enseignant. Il ne s'agit en effet pas de n'importe quel théorème. Dans l'histoire des mathématiques, celui-ci a eu une importance capitale car, une fois établi, il a permis la résolution de nombreux problèmes mathématiques à priori étrangers les uns aux autres, qui ne trouvaient pas de réponse jusque-là : problèmes d'optimisation, problèmes géométriques de recherche des tangentes à des courbes, problèmes de vitesses variables et problèmes de quadratures, de cubatures… Ce théorème a alors été à l'origine d'une discipline nouvelle que l'on a appelée dans l'histoire des mathématiques : le calcul « infinitésimal », et c'est cette discipline qui est devenue par la suite l'analyse mathématique.

Au départ, Fermat établit une méthode qu'il nomme d'« *adégalité* » et qui, comme il le dit lui-même, s'est avérée efficace et fiable pour traiter un certain nombre de ces problèmes :

« Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles ; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses …». (Fermat, 1896, vol. 3 p. 123)

Cette méthode a permis à l'époque de fédérer trois des types de problèmes cités *supra* : les problèmes d'optimisation, les problèmes géométriques de recherche des tangentes à des courbes, et ceux de vitesses variables. Par la suite, Leibniz et Newton ont établi une nouvelle méthode permettant de répondre aux problèmes de quadratures et de cubatures, mais, au-delà de cela, ils ont également établi un lien de réciprocité entre leur méthode et le processus d'*adégalité* de Fermat. Ce lien de réciprocité est précisément ce qui touche au théorème fondamental, dont l'émergence a permis la construction d'une organisation mathématique plus vaste qui a fédéré tous les problèmes mathématiques de l'époque.

C'est là le fait à mettre en évidence, à savoir : le regroupement de problèmes à priori étrangers les uns aux autres en catégories de problèmes de plus en plus larges, réalisé par les mathématiciens de l'époque en raison d'une même technique permettant de les traiter tous. Ces problèmes sont rencontrés par les élèves de l'enseignement secondaire supérieur durant les deux dernières années de leur cursus (5e et 6e années du secondaire de transition ou de qualification en électronique), du moins, par des élèves ayant choisi au minimum quatre heures de mathématiques par semaine. La tâche que se donne alors l'enseignant, sur cette période, est de montrer à ses élèves que, pour répondre à ces problèmes spécifiques, il existe des « techniques gagnantes » construites par différentes institutions scientifiques qui s'y voient confrontées. La section suivante présente, globalement, le dispositif mis en place par l'enseignant dans ce but.

2. Description globale du dispositif

L'objectif principal visé par l'enseignant est avant tout la construction de savoirs mathématiques qui vont outiller les élèves lorsqu'ils seront amenés à résoudre des problèmes de classes de plus en plus larges, jusqu'à pouvoir résoudre tous les problèmes du calcul dit *infinitésimal*. Dans les faits, l'enseignant s'appuie sur des situations didactiques, au sens de Brousseau (1998), issues de la recherche, dont le but est d'amener les élèves à construire la nouvelle technique, tout en s'interrogeant sur la validité de celle-ci. Voici un exemple d'une telle situation :

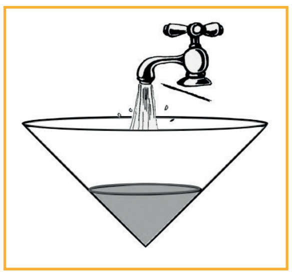

Figure 1 : Vase alimenté par la pompe

> Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm^3/min ? (Schneider 1988, p. 157)

Ce problème appartient à la classe des problèmes de vitesses variables mentionnés à la section précédente, dont la problématique est celle de la détermination de grandeurs instantanées. L'enjeu pour les élèves est de passer de leur connaissance du débit moyen au débit instantané, après avoir éprouvé les limites de cette connaissance antérieure, en ce sens que celle-ci ne permet plus de répondre à la question à laquelle ils se voient désormais confrontés. Pour y parvenir, ils doivent impérativement construire la nouvelle technique de calcul propre à traiter les problèmes de cette classe. Celle-ci devra nécessairement être à nouveau mobilisée par les élèves lorsqu'ils rencontreront d'autres problèmes de cette classe.

Une fois cette situation didactique explorée, l'enseignant examine avec les élèves diverses situations qui relèvent de la même problématique, afin de faire émerger l'essence commune inhérente à toutes ces situations : la nouvelle technique-type de résolution qu'enseignant et élèves ont construite ensemble lors de la situation didactique initiale. Suit ensuite une phase d'enseignement au cours de laquelle le professeur « épingle » la nouvelle technique comme réponse à la classe de problèmes explorée. Durant cette phase d'enseignement, il importe que les élèves prennent conscience que le succès de la résolution des problèmes étudiés ne dépend pas de leur ingéniosité personnelle, mais plutôt du fait qu'il existe des « méthodes gagnantes », construites et utilisées par les institutions qui les étudient.

Alors seulement, le professeur entraine les élèves à la résolution de problèmes de cette classe jusqu'à en éprouver les limites, avant de pouvoir enfin envisager une évaluation portant sur la capacité des élèves à « transférer » la méthode de résolution à de nouveaux problèmes de cette même classe qu'ils n'auront pas encore rencontrés.

Les critères de réussite de la tâche complexe lors de cette évaluation reposent sur l'identification de la classe de problèmes à laquelle appartient la tâche demandée, sur la mise en œuvre de la technique associée pour y répondre, sans oublier la justification qui rend intelligible cette technique et sans laquelle il ne peut y voir de travail mathématique à proprement parler. L'identification de la classe à laquelle appartiennent les problèmes posés faisant partie des critères de réussite, il importe de ne pas interroger d'emblée les élèves sur une seule classe de problèmes. Si l'on veut pouvoir constater la capacité des élèves à identifier à quelle classe un problème appartient, il est nécessaire que l'évaluation soit différée jusqu'à ce qu'ils en aient rencontré plusieurs. L'évaluation de fin d'année est sans doute le moment le plus propice.

Nous reviendrons sur l'évaluation lors de la conclusion. Dans la section suivante, nous nous focaliserons sur le point d'appui crucial de ce dispositif ; d'une part, pour lever d'éventuelles ambiguïtés sur ces situations initiales et, d'autre part, parce que c'est lors de ces situations de départ que se joue la construction de la technique de résolution de problèmes d'une classe qui sera réinvestie par les élèves.

3. Un « zoom » sur le point d'ancrage du dispositif et l'impact qu'il peut avoir sur les élèves

Le dispositif que nous venons de « mettre à plat » s'appuie donc sur des situations didactiques telles que celle donnée en exemple *supra*. Toutefois ces situations didactiques initiales n'ont pas été conçues pour entrainer les élèves à la résolution de problèmes. L'enjeu est, avant tout, la construction d'un savoir précis, même si, dans le cas présent, ce savoir est remobilisé par la suite afin de résoudre des tâches complexes. Le caractère « concret » de ces situations didactiques n'est pas non plus visé à travers les expériences de pensée proposées aux élèves. Dans « le problème du vase conique », personne n'est dupe du fait qu'une telle pompe n'existe pas, ni l'enseignant ni les élèves. Cela n'empêche cependant pas l'enseignant qui le souhaite de proposer par la suite aux élèves des situations « concrètes » dans lesquelles le savoir construit à partir de ces situations initiales sera réinvesti. Par contre, un autre enjeu majeur à ces situations est de travailler sur certains obstacles à l'apprentissage des savoirs par les élèves, en particulier l'obstacle empiriste (Schneider, 1988).

Celui-ci relève d'une posture consistant à penser que les modèles mathématiques construits par l'esprit humain afin de modéliser le « monde physique » devraient être le reflet exact de ce dernier. Il en résulte, chez les élèves, des amalgames entre le « monde physique » et le « monde mathématique », construit par la pensée humaine pour modéliser ce « monde physique ». Dès lors, la mise à distance entre ces deux univers, celui que l'on souhaite modéliser et sa modélisation mathématique, n'est pas réalisée par les élèves qui appréhendent les concepts mathématiques par ce que leurs « sens » leur en livrent. C'est ce qui pousse, par exemple, certains élèves à dire qu'« un débit instantané, ça n'existe pas » car, disent-ils, « en un temps nul, aucun volume n'est versé et on ne peut avoir un débit avec un volume nul » (Schneider 1992, p. 321).

Les choix faits dans ces situations didactiques initiales jouent ainsi un rôle important. En effet, persuadés qu'un débit instantané ne peut pas exister, les élèves pourraient même ne pas s'engager dans la question consistant à déterminer le débit de la pompe en un instant donné. C'est pourquoi la question se voit ici inversée, et porte non pas directement sur le débit mais sur le temps auquel le débit vaut 100 cm^3/min. En outre, le choix d'un vase qui s'élargit au fur et à mesure du remplissage ainsi que celui d'une vitesse de montée constante du niveau de l'eau, n'est pas non plus anodin. En effet, ces trois choix combinés ont pour impact d'amener les élèves à s'engager dans la question sans douter de l'existence d'une réponse à celle-ci. D'une part, sous une hypothèse implicite de continuité, et en supposant que le vase est suffisamment grand, le niveau de l'eau devant augmenter constamment pour conserver une vitesse constante de montée de l'eau de 1 cm/min, les élèves en déduisent que le débit doit augmenter constamment lui aussi et ne doutent pas qu'il finira bien par passer par 100 cm^3/min à un moment donné. D'autre part, comme la question ne porte pas directement sur le débit instantané, les élèves mobilisent leur connaissance antérieure du débit moyen jusqu'à en éprouver la limite, à savoir que cette connaissance n'est désormais plus suffisante pour leur permettre de répondre au problème auquel ils se voient confrontés ici. Ce n'est qu'au moment où ils se trouvent dans cette impasse que certains d'entre eux prennent la décision de passer à l'instantané par un geste audacieux consistant à annuler l'intervalle de temps considéré dans l'expression du débit moyen sur les intervalles de temps $[t,t+\Delta t]$ obtenue après certaines simplifications, qu'ils ont égalée à 100 : $\pi t^2+\pi t.\Delta t+\frac{\pi}{3}(\Delta t)^2=100$. Cela les conduit à la solution au problème posé après résolution de l'équation $\pi t^2=100$. Ce n'est qu'alors que ce geste audacieux fait débat dans la classe et renvoie à la question de l'existence d'un débit en un instant donné. Certains élèves, en prise avec l'obstacle empiriste, n'osent considérer un temps nul et écrivent « prudemment » :

$$\pi t^2+\pi t.\textit{presque } 0+\frac{\pi}{3}.\textit{presque } 0=100.$$

À l'issue de cette situation didactique initiale, le débit instantané doit donc être institutionnalisé[1], au sens de Brousseau (1998), par l'enseignant comme le résultat d'un calcul nouveau, consistant à supprimer les termes contenant Δt dans l'expression du débit moyen sur les intervalles de temps *[t,t+Δt]*, après y avoir fait toutes les simplifications algébriques standards. Il s'agit d'un premier pas vers une vision du débit instantané en tant que construction mentale, et non comme une grandeur physique impossible à déterminer par la mesure, qui devra nécessairement être réinvestie pour répondre aux problèmes de même classe.

4. Conclusion

Comme nous l'avons vu, la tâche que se donne cet enseignant pour outiller ses élèves à la résolution de tâches complexes pourrait être énoncée comme suit : montrer aux élèves que la résolution de problèmes ne dépend pas de leur ingéniosité personnelle mais qu'il y a des catégories de problèmes et des méthodes spécifiques qui permettent de les traiter. La description globale du dispositif a explicité la démarche mise en place par l'enseignant pour amener les élèves à en prendre conscience, ainsi que le travail réalisé pour construire cette technique spécifique avec les élèves et la remobiliser dans d'autres problèmes d'une même catégorie.

Mais une fois ce travail réalisé avec les élèves, peut-on encore parler de tâches complexes lors de leur évaluation ? En effet, bien que les problèmes proposés aux élèves lors de celle-ci puissent leur sembler à priori étrangers en raison du contexte nouveau dans lequel l'enseignant les plonge, ces problèmes ne peuvent pas pour autant être qualifiés d'« inédits », en raison de leur appartenance à une catégorie de problèmes déjà étudiée. Les élèves n'en sont pas dupes, au vu de l'enseignement reçu. Ils savent que les problèmes auxquels ils se voient confrontés sont à associer à une technique de résolution qui leur est propre et qu'ils ont rencontrée. Il apparait alors qu'un tel enseignement empêche d'observer la capacité intrinsèque des élèves à résoudre des problèmes nouveaux.

Il y a là une « tension inévitable entre le souci d'une évaluation scientifique et, tout simplement, la volonté d'enseigner » mise en évidence par Schneider (2008, p. 286), qui pousse l'enseignant en question à adopter une posture « modeste » quant à l'évaluation des tâches complexes.

5. Bibliographie

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques. 1970-1990.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Fermat, P. (1896). *Œuvres de Fermat* (publiées par les soins de P. Tannery et C. Henry vol. 3). Paris : Gauthier-Villars et fils.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives* (thèse de doctorat). Louvain-la-Neuve : Université Catholique de Louvain.

Schneider, M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 317-350.

Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques.* Liège : Les Éditions de l'Université de Liège.

6. Note

[1] L'enseignant pointe du doigt ce qui, dans l'activité des élèves, a une valeur culturelle jugée importante par la société.