

Losanges

N°48 Mars 2020



Réflexions



Trigonométrie et physique, *Ch. Mobers et V. Henry*

2



Technologies



Fonctions de recherche, *J.-M. Desbonnez*

6



Excel et LaTeX, *J.-M. Desbonnez*

18

Nombres trigonométriques au cours de physique

Charly Mobers et Valérie Henry

Mots clés : Trigonométrie, physique, force, vecteur.

Résumé. *L'article, issu d'un travail d'étudiant, propose la résolution d'exercices issus du cours de physique et faisant intervenir les nombres trigonométriques. La description de la résolution devrait permettre à l'enseignant de mathématiques qui le souhaite d'utiliser ces exercices comme application des relations dans le triangle rectangle.*

1. Avant-propos

Cet article a été inspiré par un travail d'étudiant, physicien et futur enseignant. Ce travail avait pour objectif d'identifier plusieurs exercices issus de manuels de physique où une même notion mathématique était utilisée et de détailler, pour un enseignant de mathématiques, les notions de physique impliquées. L'idée principale était que l'enseignant de mathématiques qui souhaitait proposer à ses élèves un exercice d'application issu de la physique soit suffisamment informé de la manière dont ce type d'exercices est abordé dans le cours de physique. Un des constats à l'origine de ce travail est que les exercices d'application de physique proposés dans les manuels de mathématiques sont trop souvent des exercices de mathématiques « habillés » et que les élèves ne les identifient pas à des exercices rencontrés en physique. Par ailleurs, l'enseignant de mathématiques est souvent démuni face à un réel problème de physique et l'investissement nécessaire à l'appropriation complète des notions de physique sous-jacentes est vécu comme trop lourd et décourage les plus motivés. Ce type de travail vise à soutenir ces enseignants en amorçant le travail. Bien entendu, un dialogue préalable, voire une réelle collaboration avec l'enseignant de physique rend la démarche d'autant plus efficace et pertinente pour les élèves.

2. Introduction

La notion mathématique qui est illustrée ici porte sur les nombres trigonométriques vus au deuxième

degré en 4^e au sein de l'UAA3 (du référentiel de mathématiques). Les exercices de physique sont eux issus du chapitre 1 de l'UAA3 (du référentiel de physique) : « Travail, énergie, puissance » et sont donc vus par les élèves au cours de la même année. Ce choix nous semble opportun car les deux enseignants pourront encourager les élèves à faire des aller-retours entre leur cours de mathématique et celui de physique afin d'améliorer le transfert. Nous proposons ainsi trois exercices de physique à destination d'enseignants en mathématiques souhaitant illustrer par de réelles applications physiques le cours de mathématiques. Ces derniers sont en lien avec le processus de transfert attendu des élèves par le référentiel, à savoir : « utiliser les relations trigonométriques pour traiter une application géométrique, topographique, physique, ... ». De plus, ces exercices font appel à la notion de vecteur et à la décomposition de ceux-ci dans un repère orthonormé. Cela peut permettre à l'enseignant de mathématiques de faire le lien avec l'UAA6 : « Géométrie analytique plane ».

Les exercices sont issus du manuel « Sciences de base et sciences générales, Physique 4^e (De Boeck, 4^{ème} édition 2017) » ??.

3. Exercice 1

Le premier exercice mettant en jeu les nombres trigonométriques est l'exercice nu-

Trigonométrie et physique

méro 28 dont l'énoncé est repris ci-dessous.

28 Une voiture d'une masse de 800 kg se trouve à l'arrêt sur une route inclinée à 17° par rapport à l'horizontale. Détermine la force qu'exercent les freins.

Fig. 1 : Énoncé de l'exercice 1 ??

Dans le cadre du cours de physique, les élèves sont amenés à réaliser un schéma de la situation en indiquant les forces qui agissent sur la voiture comme illustré ci-dessous. La résolution des exercices est organisée ici en étapes. Les trois premières étapes sont celles portant presque exclusivement sur la physique. Puisque l'objectif est de réaliser cet exercice en classe de mathématique, on imagine que l'enseignant s'appuie sur ce qui aura été vu au cours de physique pour réaliser les trois premières étapes en commun avec les élèves, de manière à pouvoir centrer le travail sur les notions de trigonométrie impliquées dans cet exercice.

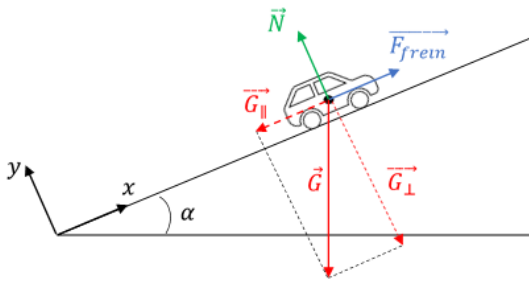


Fig. 2 : Schéma de la situation

3.1. Étape 1 : diagramme de forces

Les forces agissant sur la voiture sont donc

- la force « poids » dirigée verticalement vers le bas, notée $\vec{G}$,
- la force résultante du sol sur la voiture due à la 3^e loi de Newton qui est dirigée perpendiculairement au sol, notée $\vec{N}$,
- la force de retenue due aux freins qui est parallèle au plan incliné, notée $\vec{F}_{\text{frein}}$.

3.2. Étape 2 : choix d'un repère (système d'axes)

Étant donné que notre problème est en 2D, on choisit un système d'axes orthonormé permettant de décrire le plus facilement les différents vecteurs forces de notre problème. Le choix le plus évident pour le physicien est celui d'un repère tel que l'axe Ox soit parallèle au plan incliné (voir figure 2). Ce

choix est peu courant au cours de mathématiques où l'axe Ox est pratiquement toujours horizontal. Il pourrait être intéressant de faire le même exercice avec un autre repère et de constater que la réponse est indépendante du choix du repère. Cela fait, de plus, apparaître d'autres nombres trigonométriques.

3.3. Étape 3 : équilibre des forces

Étant donné que la voiture est au repos, la somme des forces appliquées sur la voiture, aussi appelée force résultante, est nulle.

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{frein}} = 0$$

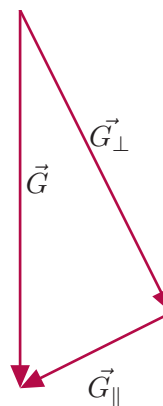
Plus précisément, cela signifie que les forces doivent se compenser suivant les deux directions de l'espace données par le repère. Dès lors, on a

$$\text{suivant } Ox : \|\vec{F}_{\text{frein}}\| - \|\vec{G}_{\parallel}\| = 0 \quad (1)$$

$$\text{suivant } Oy : \|\vec{N}\| - \|\vec{G}_{\perp}\| = 0$$

3.4. Étape 4 : Décomposition de la force poids

C'est ici qu'interviennent les nombres trigonométriques dans les triangles rectangles. En effet, le vecteur $\vec{G}$ et ses deux composantes forment un triangle rectangle comme illustré ci-dessous.



Au vu de l'équation 1, il nous faut obtenir une expression de la norme de $\vec{G}_{\parallel}$ afin de connaître l'intensité, c'est-à-dire la norme, de la force de retenue due au frein. Sachant que $\|\vec{G}\| = mg$ où m est la masse de la voiture et g est la norme de l'accélération de pesanteur qui vaut $9,81 \text{ m/s}^2$, la trigonométrie dans le triangle rectangle permet de relier $\|\vec{G}_{\parallel}\|$ et $\|\vec{G}\|$ puisque

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{G}_{\parallel}\|}{\|\vec{G}\|}$$

ou encore

$$\|\vec{G}_{\parallel}\| = \|\vec{G}\| \sin(\alpha). \quad (2)$$

3.5. Étape 5 : conclusion

En mettant les équations 1 et 2 ensemble, on obtient

$$\|\vec{F}_{\text{frein}}\| = \|\vec{G}\| \sin(\alpha) = mg \sin(\alpha). \quad (3)$$

En remplaçant avec les valeurs de l'énoncé à savoir, $m = 800\text{kg}$, $g = 9,81\text{ms}^{-2}$ et $\alpha = 17^\circ$, on obtient finalement $\|\vec{F}_{\text{frein}}\| = 2295\text{N}$.

4. Exercice 2

L'énoncé de cet exercice est repris ci-dessous et peut-être réalisé à la suite du premier exercice proposé car le raisonnement est similaire, à l'exception du fait qu'il est demandé de calculer un angle et plus la norme d'une force. C'est donc l'occasion pour les élèves de « calculer l'amplitude d'un angle avec une calculatrice » comme demandé dans le référentiel pour cette UAA.

32 Un mobile, sur un plan incliné parfaitement lisse de 30 cm de longueur, est maintenu en équilibre par un dynamomètre. On peut lire sur ce dynamomètre une force de 4,3 N. En sachant que le mobile a une masse de 950 g, calcule l'angle d'inclinaison du plan incliné.

Fig. 3 : Énoncé de l'exercice 2 (??, p. 21)

Les quatre premières étapes sont identiques au problème précédent. La seule chose qui change est que la force due au frein est remplacée par la force exercée par le dynamomètre sur le mobile et qu'on en connaît ici l'intensité. On peut donc repartir de l'équation 3 dans laquelle le membre de gauche est cette fois $\|\vec{F}_d\|$, la force exercée par le dynamomètre. On a

$$\|\vec{F}_d\| = \|\vec{G}\| \sin(\alpha) = mg \sin(\alpha)$$

L'inconnue ici est l'angle α , qu'il faut isoler. On obtient d'abord que

$$\sin(\alpha) = \frac{4,3}{0,95 \times 9,81} = 0,46$$

et par suite $\alpha = 27,5^\circ$.

5. Exercice 3

L'énoncé de l'exercice suivant auquel le diagramme de force a été ajouté est repris ci-dessous. Il est issu du même manuel que les précédents ??.

30 Un grain de poivre de 1,0 g est suspendu à un fin fil. Un tube en PVC frotté à un pull exerce une force électrique sur le grain de poivre et à l'équilibre, le fil forme un angle de 15° avec la verticale. Détermine l'intensité de la force électrique.

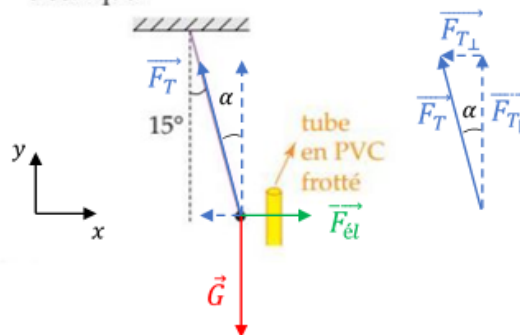


Fig. 4 : Énoncé de l'exercice 2 (??, p. 21)

Les étapes de résolution sont identiques aux exercices précédents.

5.1. Étape 1 : diagramme de forces

Les forces agissant sur le grain de poivre sont la force « poids » dirigée vers le bas et notée $\vec{G}$, la force de tension exercée par la corde dans la direction de celle-ci et notée $\vec{F}_T$ et la force électrique qui est supposée horizontale et est notée $\vec{F}_{el}$.

5.2. Étape 2 : choix du repère

L'objectif de l'exercice étant de calculer la force électrique, il sera plus facile de choisir un repère tel qu'un des axes soit aligné avec le vecteur force électrique. Il est important de noter qu'ici on ne spécifie pas l'origine du repère. Cela est dû au fait que l'on ne s'intéresse qu'à l'intensité des forces, c'est-à-dire aux normes des vecteurs ou de leurs composantes. Ces dernières ne dépendent donc pas du choix d'origine. Il peut être intéressant de préciser ces éléments aux élèves.

5.3. Étape 3 : équilibre des forces

Puisque le grain de poivre est immobile, la force résultante est nulle, ce qui implique que ses composantes selon les deux directions de l'espace le sont. Cela donne les équations suivantes :

5.5. Étape 5 : conclusion

$$\text{suivant } Ox : \|\vec{F}_{\text{él}}\| - \|\vec{F}_{T_{\perp}}\| = 0 \quad (4)$$

$$\text{suivant } Oy : \|\vec{F}_{T_{\parallel}}\| - \|\vec{G}\| = 0 \quad (5)$$

5.4. Étape 4 : décomposition de la force de tension

Au vu de l'équation 4, l'objectif est de trouver l'intensité de la composante perpendiculaire de la tension $\|\vec{F}_{T_{\perp}}\|$. Tout comme dans le premier exercice, le vecteur force de tension et ses composantes forment un triangle rectangle. On a donc ⁽¹⁾

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{F}_{T_{\perp}}\|}{\|\vec{F}_T\|} \Leftrightarrow \|\vec{F}_{T_{\perp}}\| = \|\vec{F}_T\| \sin(\alpha) \quad (6)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{F}_{T_{\parallel}}\|}{\|\vec{F}_T\|} \Leftrightarrow \|\vec{F}_{T_{\parallel}}\| = \|\vec{F}_T\| \cos(\alpha) \quad (7)$$

L'expression de $\|\vec{F}_{T_{\perp}}\|$ dépend de $\|\vec{F}_T\|$ qui n'est pas connu. Afin de trouver $\|\vec{F}_T\|$, on utilise les équations 5 et 7 car $\|\vec{G}\|$ est connu et vaut mg où m est la masse du grain de poivre et g est la norme de l'accélération de pesanteur. On obtient donc

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_{T_{\parallel}}\| = \|\vec{G}\| &\Leftrightarrow \|\vec{F}_T\| \cos(\alpha) = mg \\ &\Leftrightarrow \|\vec{F}_T\| = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{aligned} \quad (8)$$

On peut maintenant injecter l'équation 8 dans l'équation 6 afin d'isoler $\|\vec{F}_{T_{\perp}}\|$:

$$\|\vec{F}_{T_{\perp}}\| = \|\vec{F}_T\| \sin(\alpha) = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \sin(\alpha) = mg \tan(\alpha).$$

Au vu de l'équation 4 et des données de l'énoncé, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_{\text{él}}\| = \|\vec{F}_{T_{\perp}}\| &= 0,001 \times 9,81 \tan(15^\circ) \\ &= 2,63 \times 10^{-3} N = 2,63 mN \end{aligned}$$

Charly Mobers est étudiant en master en sciences physiques à finalité didactique à l'université de Namur.



1. Nous avons conservé ici une résolution calquée sur ce que fait plus naturellement l'enseignant de physique, habitué à projeter les vecteurs perpendiculairement sur les axes grâce au sinus et au cosinus. Néanmoins, il est très probable que l'enseignant de mathématiques pense plus directement à utiliser la tangente qui conduit à une résolution nettement plus courte.