SUR LA STABILITÉ GRAVITATIONNELLE D'UNE NÉBULEUSE ISOTHERME

P. Ledoux *

(Institut d'Astrophysique, Cointe-Sclessin, Belgique.)

Abstract. — *This paper deals with the gravitational stability of an isothermal nebula stratified in plane parallel layers symmetrical with respect to a central plane of density* ρ_0. *It is shown that* Jeans' *criterion is still valid provided that one takes for the density which appears in it, the value* $\rho_0/2$. *This justifies the use made by* G. P. Kuiper *of* Jeans' *criterion in his discussions of the origin of the solar system. More generally, a preliminary condensation of nebulous matter according to this model might help in the formation by gravitational instability of smaller condensations then hitherto possible.*

1. — Introduction.

Au cours d'une discussion qui suivit les leçons sur les planètes et leur origine données par le Dr G. P. Kuiper à l'Observatoire de Princeton au printemps dernier, la question se posa de savoir si le critère de stabilité gravitationnelle de Jeans s'appliquait au cas de la nébuleuse solaire envisagée dans ces théories.

On sait que le calcul de Jeans [1] quand on tient compte des différentes hypothèses qu'il implique, se rapporte en fait à un milieu pratiquement infini et de densité et de pression uniformes. Dans ces conditions, une perturbation sinusoïdale adiabatique de longueur d'onde λ sera instable et donnera lieu à la formation d'une série de condensations qui tendront à grandir sous l'action de leur propre gravitation si

$$\lambda^2 > \frac{\pi\gamma P}{G\rho^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi\gamma \mathfrak{R} T}{\mu G \rho} \tag{1}$$

où P, ρ et T représentent respectivement la pression, la densité et la température et γ est le rapport des chaleurs spécifiques ; $\mathfrak{R}$, la constante des gaz parfaits ; G, la constante de gravitation ; μ, le poids moléculaire moyen.

Les conditions de validité de (1) sont assez éloignées de celles que nous pouvons imaginer être réalisées dans la nébuleuse solaire pour justifier une nouvelle discussion du problème. D'après le point de vue moderne, la masse totale de la nébuleuse peut être de l'ordre du dixième de la masse solaire si bien que son attraction sur elle-même n'est pas négligeable. D'après Kuiper [2] une des premières phases dans l'évolution de cette nébuleuse serait une contraction suivant l'axe de rotation du

(*) Associé du Fonds National de la Recherche Scientifique.

système, conduisant à une distribution de densité symétrique par rapport au plan contenant le soleil et perpendiculaire à cet axe et déterminée essentiellement par l'attraction de la nébuleuse sur elle-même. Dans le plan de symétrie, les particules peuvent être considérées comme décrivant des orbites képlériennes circulaires et on peut en première approximation ignorer le gradient de pression dans ce plan. A partir de l'état actuel du système planétaire et moyennant quelques hypothèses, on peut chercher à préciser cet état initial. Néanmoins, les modèles essentiellement numériques auxquels on est conduit de cette façon, deviennent vite très complexes du point de vue du problème considéré. A la suggestion du Dr Spitzer, le modèle idéalisé qui fut finalement retenu consiste en une nébuleuse infinie isotherme stratifiée parallèlement à un plan de symétrie où la densité est maximum.

2. — État d'équilibre.

Si nous adoptons comme système de référence des axes x et y contenus dans le plan de symétrie et pour axe des z une direction perpendiculaire, la condition d'équilibre hydrostatique se réduit à

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz} = \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = \frac{dU}{dz} \tag{2}$$

où $\alpha = \mathfrak{R}T/\mu$ est une constante et U représente le potentiel gravifique.

Si nous introduisons la variable

$$m = \int_0^z \rho dz \tag{3}$$

qui en module représente la masse contenue dans une colonne de 1 cm² de section et de hauteur $|z|$, ayant sa base dans le plan de symétrie, l'équation (2) devient

$$\alpha\frac{d\rho}{dm} = \rho\frac{dU}{dm}. \tag{4}$$

En dérivant par rapport à m une seconde fois et tenant compte de l'équation de Poisson

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho \tag{5}$$

on obtient

$$\alpha\frac{d^2\rho}{dm^2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho^2 dU^2}{dm^2} + \rho\frac{d\rho}{dm}\cdot\frac{dU}{dm}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d^2U}{dz^2} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\rho}\nabla^2 U = -4\pi G.$$

Après intégration et identification des constantes, et si l'on désigne par M, la masse totale par cm² d'un côté du plan de symétrie, il vient

$$\rho = \frac{2\pi G M^2}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2\right] = \rho_0(1 - x^2). \tag{7}$$

Si l'on introduit cette valeur de ρ dans la définition de m, on en tire facilement une expression de m en fonction de z ou $t = (2\pi\ \mathrm{GM}/\alpha)z$ qui permet d'écrire (7) sous la forme

$$\rho = \frac{8\pi \mathrm{GM}^2}{\alpha} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} \tag{8}$$

qui montre que ρ tend vers zéro comme $e^{-2|t|}$ quand t ou z tendent vers $\pm\infty$.

3. — Équations aux perturbations.

Si nous supposons cet état d'équilibre soumis à une petite perturbation adiabatique, les variations P′, ρ', T′ correspondant au petit déplacement $\overrightarrow{\delta r}$ doivent satisfaire aux équations

$$-\sigma^2\overrightarrow{\delta r} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{P}' + \frac{\rho'}{\rho^2}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{P} + \mathrm{grad}\ \mathrm{U}' \tag{9}$$

$$\rho' = -\,\mathrm{div}\,(\rho\overrightarrow{\delta r}) = -\rho\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{\delta r} - \delta z\,\frac{d\rho}{dz} \tag{10}$$

$$\mathrm{P}' = \frac{\gamma \mathrm{P}}{\rho}\,\rho' + \overrightarrow{\delta r}.\left(\frac{\gamma\mathrm{P}}{\rho}\,\mathrm{grap}\ \rho - \mathrm{grad}\ \mathrm{P}\right) = \gamma\alpha\rho' + \alpha(\gamma-1)\delta z\,\frac{d\rho}{dz} \tag{11}$$

$$\nabla^2\mathrm{U}' = -\,4\pi\mathrm{G}\rho'. \tag{12}$$

Grâce à l'équation de piézotropie (11), l'équation (9) peut encore s'écrire

$$-\sigma^2\overrightarrow{\delta r} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{U}'-\Theta) - \Theta\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ \rho - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ \rho\,.\,\overrightarrow{\delta r}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{P} \tag{13}$$

où l'on a posé $\Theta = \mathrm{P}'/\rho$.

On sait qu'en général, ce système d'équations est équivalent à une équation différentielle du 4e ordre qui est fort compliquée [3]. Cependant, comme ce problème se rapporte à des milieux de densité extrêmement faible, il semble raisonnable d'admettre que les modificationsy sont isothermes ($\gamma = 1$) et dans ce cas, les équations (11) et (13) se réduisent à

$$\Theta = \alpha\,\frac{\rho'}{\rho} \tag{11'}$$

et

$$-\sigma^2\overrightarrow{\delta r} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{U}'-\Theta). \tag{13'}$$

Comme nous sommes intéressés particulièrement par les dimensions critiques de la perturbation pour lesquelles l'instabilité s'amorce, nous pouvons espérer les déterminer en posant $\sigma^2 = 0$ dans l'équation (13′) ce qui nous fournit la relation

$$\mathrm{U}' = \Theta. \tag{14}$$

Grâce à (11′) et (14), l'équation (12) peut s'écrire

$$\nabla^2\Theta = -\frac{4\pi\mathrm{G}\rho}{\alpha}\,\Theta \tag{15}$$

ou encore si la perturbation consiste en une onde plane perpendiculaire à l'axe des x, de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, $\Theta = \theta(z)\, e^{ikx'}$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \left(\frac{4\pi G\rho}{\alpha} - k^2\right)\theta = 0. \tag{16}$$

Si nous utilisons x comme variable indépendante et introduisons l'expression (7) de ρ, cette équation devient, en posant $\nu = kM/\rho_0$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{d\theta}{dx} + \theta\left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{\nu^2}{(1-x^2)^2}\right] = 0 \tag{17}$$

la solution cherchée devant rester finie dans tout l'intervalle $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

Si σ^2 n'est pas nul, on établit d'ailleurs facilement dans ce cas l'équation du 4e ordre en prenant la divergence de (13) multipliée par ρ puis éliminant $\partial U'/\partial z$ au moyen de l'équation de Poisson. On trouve

$$\nabla^2\left[\frac{\nabla^2\Theta + \Theta\left(\dfrac{4\pi G\rho}{\alpha} + \dfrac{\sigma^2}{\alpha}\right)}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}\right] + \frac{d}{dz}\left(\nabla^2\Theta + \frac{4\pi G\rho}{\alpha}\Theta\right) = 0 \tag{18}$$

qui se réduit à (15) si σ^2 tend vers zéro.

4. — Valeur critique de λ.

L'équation (17) qui est de la même forme que l'équation définissant les polynomes associés de Legendre ($\nu \leqslant 1$), admet comme solution générale [4]

$$\theta = K\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\nu/2}(\nu - x) + K'\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\nu/2}(\nu + x). \tag{19}$$

Comme les solutions qui nous intéressent doivent être symétriques par rapport au plan x (ou z) $= 0$, K' doit être égal à K et dans ce cas, pour que la solution reste finie quand x tend vers ± 1, il faut que

$$\nu = \frac{kM}{\rho_0} = 1. \tag{20}$$

Nous référant à la définition de k et M la condition (20) nous fournit pour la longueur d'onde critique

$$\lambda_c^2 = \frac{2\pi\alpha}{G\rho_0} = \frac{2\pi\mathfrak{R}T}{\mu G\rho_0} \tag{21}$$

qui est tout à fait analogue à la valeur critique de Jeans, excepté que la densité moyenne qui figure dans cette dernière doit être remplacée ici par la demi-densité dans le plan de symétrie.

Naturellement, nous aurions pu considérer d'autres types de perturbations, mais la conclusion reste essentiellement la même. Par exemple, si la perturbation dépend également de y par un facteur $e^{ik_y y}$, les valeurs critiques de k_x et k_y (ou λ_x et λ_y) sont

$$(k_x^2 + k_y^2)\frac{M^2}{\rho_0^2} = 4\pi^2\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}\right)\frac{M^2}{\rho_0^2} = 1. \tag{20'}$$

Si λ_x et λ_y sont du même ordre, nous voyons que leur valeur critique sera deux fois plus grande que celle définie par (21)

$$\lambda_x^2 = \lambda_y^2 = \frac{4\pi\mathfrak{R}T}{\mu G\rho_0} = 2\lambda_c^2 \tag{21'}$$

Ou encore si nous passons à des coordonnées cylindriques, la solution générale de (15), qui reste finie est de la forme

$$\Theta = CI_n(kr)\,(1 - x^2)^{1/2}\, e^{in\varphi}$$

où x a la même signification que précédemment et r représente la distance à l'axe supposé normal au plan de symétrie. I_n est la fonction de BESSEL de première espèce qui reste finie en $r = 0$ et k doit comme précédemment satisfaire à la condition (20). La distance entre les nœuds de $I_n(kr)$ n'est pas rigoureusement constante, mais elle ne s'écarte guère cependant de π/k si bien que la longueur d'onde critique est encore du même ordre que (21).

Il semble difficile de poursuivre cette discussion d'une façon rigoureuse mais comme très généralement, l'instabilité augmente avec la longueur d'onde, il semble raisonnable d'admettre que toute perturbation de dimensions supérieures à λ sera effectivement instable. D'ailleurs diverses approximations viennent renforcer cette conclusion.

Si nous nous reportons à l'équation générale (18), nous voyons que lorsque σ^2 tend vers zéro, les solutions générales doivent différer aussi peu que l'on veut de celles de

$$\nabla^2\Theta + \Theta\left(\frac{4\pi G\rho}{\alpha} + \frac{\sigma^2}{\alpha}\right) = 0$$

qui exprimée avec les mêmes variables que précédemment devient

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{d\theta}{dx} + \theta\left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{\nu^2 - \dfrac{\sigma^2M^2}{\alpha\rho_0^2}}{(1-x^2)^2}\right] = 0. \tag{22}$$

La discussion de l'équation (17) peut être répétée dans ce cas et conduit à la conclusion que des solutions finies dans tout l'intervalle $-1 \leqslant x \leqslant 1$, n'existent que si

$$\nu^2 - \frac{\sigma^2M^2}{\alpha\rho_0^2} = 1 \tag{23}$$

d'où on tire

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\rho_0^2}{M^2}(\nu^2 - 1) = \frac{\alpha\rho_0^2}{M^2}\left(\frac{2\pi\alpha}{G\rho_0\lambda^2} - 1\right) \tag{24}$$

ce qui montre que σ^2 tend vers zéro par valeurs négatives ou positives suivant que λ^2 approche sa valeur critique (21) par excès ou par défaut.

Quand σ^2 n'est pas infiniment petit, U′ et Θ cessent d'être du même ordre de grandeur et Θ l'emporte rapidement sur U′. En effet, il est évident que si ρ' change de signe assez rapidement le long de l'axe des x(λ petit, k et ν grands), les contributions de signes opposés dans

$$U' = \int \frac{\rho' dV}{r}$$

tendent de plus en plus à se détruire mutuellement et U′ devient rapidement très petit. Si nous négligeons le terme en U′ dans l'équation (13′), la multiplions par ρ et en prenons la divergence, nous obtenons, avec les mêmes notations que précédemment, et en tenant compte des équations (10) et (11′)

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\cdot\frac{d\theta}{dz} + \left(\frac{\sigma^2}{\alpha} - k^2\right)\theta = 0. \tag{25}$$

La seule solution de cette équation qui reste finie est

$$\theta = \text{constante}, \quad \delta z = 0, \quad \sigma^2 = \alpha k^2 \tag{26}$$

et correspond donc à une onde sonore plane se propageant dans la direction des x avec la vitesse du son de NEWTON $= \sigma/k = \sqrt{\alpha}$.

Si d'autre part, nous procédons comme précédemment mais cette fois en ne négligeant que $\partial U'/\partial z$ et non $\nabla^2 U'$ qui apparaît quand on prend la divergence de l'équation complète (13′), l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\cdot\frac{d\theta}{dz} + \theta\left(\frac{4\pi G\rho}{\alpha} + \frac{\sigma^2}{\alpha} - k^2\right) = 0 \tag{27}$$

qui est équivalente à (25) si k^2 et σ^2 deviennent très grands vis-à-vis de $4\pi G\rho/\alpha$. Introduisant x, comme variable indépendante, cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dx}\left[\rho^2\frac{d\theta}{dx}\right] + \theta\left[\frac{4\pi G M^2 \rho}{\alpha} + (\sigma^2 - k^2\alpha)\frac{M^2}{\alpha}\right] = 0 \tag{28}$$

ou en explicitant ρ par la formule (7)

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{4x}{1-x^2}\frac{d\theta}{dx} + \theta\left[\frac{2}{1-x^2} + \frac{\sigma^2 - k^2\alpha}{(1-x^2)^2}\frac{M^2}{\alpha\rho_0{}^2}\right] = 0. \tag{29}$$

Si nous multiplions l'équation (28) par θ et intégrons dans l'intervalle $-1 \leqslant x \leqslant +1$, le premier terme intégré par partie nous donne

$$\left[\rho^2\theta\frac{d\theta}{dx}\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\rho^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx$$

Pour les solutions qui nous intéressent θ doit rester fini en $x = \pm 1$ ainsi que δz. Mais d'après l'équation (13′), ceci implique que $d\theta/dx$ ne peut tendre vers l'∞ plus vite que $1/\rho$. Dans ces conditions, la partie intégrée dans l'expression précédente disparaît et il nous reste

$$\sigma^2 = k^2\alpha + \frac{\alpha}{M^2} \frac{\int_{-1}^{+1} \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx}{\int_{-1}^{+1} \theta^2 dx} - 4\pi G \frac{\int_{-1}^{+1} \theta^2 \rho dx}{\int_{-1}^{+1} \theta^2 dx} \tag{30}$$

formule qui illustre bien le problème. Si la longueur d'onde devient très petite, le terme en $k^2\alpha$ l'emporte et la perturbation dégénère en une onde sonore. Au contraire quand la longueur d'onde augmente, $k^2\alpha$ devient de plus en plus petit et pourvu que θ ne varie pas trop rapidement avec x, σ^2 finit par prendre des valeurs négatives.

D'ailleurs dans le cas qui nous intéresse, on peut montrer que la seule solution de l'équation (29) qui reste finie dans tout l'intervalle est donnée par

$$\theta = C(1 - x^2)^{-1/2} (1 - x^2)^{\frac{\sqrt{17}-1}{4}} \tag{31}$$

avec

$$\sigma^2 = k^2\alpha - \frac{14 - 2\sqrt{17}}{4} \alpha \frac{\rho_0^2}{M^2}. \tag{32}$$

On en déduit que

et (33)
$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 > 0 \quad & \text{si} \quad \lambda^2 \ll \frac{8\pi}{14 - 2\sqrt{17}} \frac{\Re T}{\mu G \rho_0} \\ \sigma^2 < 0 \quad & \text{si} \quad \lambda^2 \gg \frac{8\pi}{14 - 2\sqrt{17}} \frac{\Re T}{\mu G \rho_0} \end{aligned}\right\}$$

Ainsi, nous voyons bien que la subdivision en perturbations stables et instables d'après leur longueur d'onde, subsiste quel que soit l'ordre de grandeur de σ^2.

La valeur critique de λ obtenue ici, diffère d'ailleurs très peu de la valeur (21).

Il faut cependant remarquer que ces résultats ne peuvent être extrapolés au cas limite $k = 0$, $\lambda = \infty$. Ces oscillations purement verticales doivent, en effet, être traitées séparément et l'on obtient facilement l'équation différentielle exacte qui régit le déplacement δz correspondant,

$$\frac{d^2\delta z}{dx^2} - \frac{4x}{1 - x^2} \frac{d\delta z}{dx} + \delta z \frac{\sigma^2 M^2}{\gamma\alpha\rho_0^2} \frac{1}{(1 - x^2)^2} = 0. \tag{34}$$

Toutes les solutions de cette équation tendent à grandir indéfiniment quand x tend vers ± 1. Cependant, si on ne retient que celles pour lesquelles la masse totale reste inchangée, les σ^2 correspondants sont toujours positifs. Il n'y a donc pas d'instabilité gravitationnelle vis-à-vis de ces oscillations purement verticales et la tendance de l'amplitude à grandir indéfiniment avec z ne doit pas être interprétée dans ce sens. En fait, bien que l'amplitude croisse indéfiniment, l'énergie cinétique par unité de volume qui est proportionnelle à $\rho(\delta z)^2$ est une constante. En particulier, parmi ces oscillations, le mode de fréquence la plus basse est représenté par $\delta z = Cx(1 - x^2)^{-1/2}$ et sa fréquence est

$$\sigma = \frac{2\pi GM}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{35}$$

si nous désignons par g, la valeur de la gravité à l'endroit où $m = M/2$ et par l une hauteur d'échelle définie par $gl = \alpha = \mathfrak{R}T/\mu$.

Le fait que nous ayons posé $\gamma = 1$, n'affecte pas matériellement les résultats en ce qui concerne la stabilité gravitationnelle. Cependant, comme nous l'avons déjà indiqué, les équations sont beaucoup plus compliquées dans le cas général [5] et la discussion est rendue plus difficile par la question de la stabilité dynamique. Mais ici, les cas d'instabilité dynamique qui pourraient se présenter ($\gamma < 1$) ne semblent pas avoir d'intérêt physique.

Conclusions

On peut donc conclure que le critère de Jeans reste applicable dans le cas de la nébuleuse isotherme considérée ici, pourvu que la densité qui y figure soit posée égale à la moitié de la densité dans le plan de symétrie de cette nébuleuse.

La masse minimum $\mathfrak{M}$ d'une condensation formée par instabilité gravitationnelle sera d'après (21′) de l'ordre de $4M\lambda_c^2$ ou d'après les valeurs de M et λc

$$\mathfrak{M} = 4M\lambda_c^2 = 4\sqrt{\frac{2\pi}{\rho_0}}\left(\frac{\mathfrak{R}T}{\mu G}\right)^{3/2} \tag{36}$$

et si l'on se souvient que dans le cas de Jeans, la masse minimum est de l'ordre de $\rho\lambda_c^3$, on voit que la dépendance de $\mathfrak{M}$ vis-à-vis de ρ et T est de la même forme dans les deux cas. Toutefois, la condensation préalable d'une nébuleuse suivant le modèle considéré ici, favoriserait la formation de masses plus petites, ρ_0 pouvant en effet devenir considérablement plus grand que ρ, la même masse totale restant en jeu.

Dans le cas de la nébuleuse solaire dont la discussion suscita ce travail, les résultats obtenus ici justifient bien, à un facteur numérique près sans grande importance, l'usage que G. P. Kuiper [2] a fait du critère de Jeans. Toutefois, il y a lieu de remarquer que ceci suppose en plus que le critère (21) subsiste dans le cas où la densité et la température varient dans le plan de symétrie. Il est probable que ceci est vrai dans la partie médiane de la nébuleuse suffisamment loin du soleil et du bord extérieur pourvu que les variations de ρ_0 et T n'y soient pas trop rapides. Par contre, près du soleil ou du bord, le critère de Jeans perd toute signification. Il serait d'ailleurs fort intéressant de pouvoir discuter, de plus près, le cas où ρ_0 et T varient dans le plan de symétrie mais le problème promet d'être fort compliqué.

Néanmoins, en admettant que le critère (21) soit applicable à ce cas, on trouve comme Kuiper l'a déjà indiqué [2] que λ_c est proportionnel à la distance a du point considéré au soleil, si la température varie comme a^{-1} et si la densité est proportionnelle à la densité de ROCHE, $\rho = C\rho_R \div a^{-3}$. En fait, en prenant pour la température à la distance de la Terre, T = 300°K, on a

$$\lambda^2 = \frac{7{,}6\ 10^{-3}}{C} a^2. \tag{37}$$

On peut remarquer qu'une loi en $\lambda = \beta a$ marque un certain accord avec les distances observées des planètes, car en première approximation, ceci donne pour deux planètes quelconques

$$a_2 - a_1 = \left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right) = \frac{\beta}{2}(a_1 + a_2). \tag{38}$$

TABLE I

PLANÈTES	a	$a_2 - a_1$	$a_2 + a_1$	$\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1} = \frac{2}{\beta}$
Mercure	0,387			
		0,336	1,110	3,30
Vénus	0,723			
		0,277	1,723	6,22
Terre	1,0			
		0,524	2,524	4,82
Mars	1,524			
		1,296	4,344	3,35
Astéroïde	2,82			
		2,383	8,023	3,37
Jupiter	5,203			
		4,337	14,743	3,40
Saturne	9,54			
		9,65	28,73	2,98
Uranus	19,19			
		10,88	49,26	4,53
Neptune	30,07			
		9,45	69,59	7,36
Pluto	39,52			

et d'après la table I, on voit qu'en fait le β observé ne varie pas très fort et qu'il tend à se stabiliser pour les planètes médianes aux environs de $\beta = 2/3$, qui serait la valeur limite exacte dans le cas de la loi de BODE. On en déduit que C doit être de l'ordre de 0,02. Autrement dit, la densité initiale dans le plan de symétrie devrait être de l'ordre du cinquantième de la densité critique de ROCHE. Si on introduit ces valeurs dans la formule (36), on trouve que la masse d'une condensation est indé-