SUR LES OSCILLATIONS D'UNE ÉTOILE GAZEUSE POSSÉDANT UN CHAMP MAGNÉTIQUE FAIBLE

par P. LEDOUX et R. SIMON (*)
(Institut d'Astrophysique, Cointe-Sclessin.)

ABSTRACT. — *The perturbation theory is used to compute the frequencies of the oscillations of a star pervaded by a weak magnetic field. We show that, in general, the degree of degeneracy which affects the non-perturbed problem in the case of non-radial oscillations is reduced by the presence of a magnetic field.*

Some special cases such as that of a force-free field or a uniform field are discussed more explicitly. In the last case, we find that the degeneracy is not lifted completely but, for a non-radial oscillation corresponding to a spherical harmonic of degree n, *its degree is reduced at most from* (2n + 1) *to* 2 *and for some models such as the homogeneous compressible model, the degeneracy subsists entirely. In other cases, the relative perturbation of the frequency as already pointed out by* CHANDRASEKHAR *and* LIMBER, *is proportional to the ratio of the magnetic energy to the gravitational potential energy.*

Резюме. — Теория возмущений используется для вычисления частот колебаний звезды, обладающей слабым магнитным полем. Авторы показывают, что, в общем, степень вырождения, имеющего место в невозмущенной задаче, понижается в случае нерадиальных колеваний благодаря присутсвию магнитного поля.

Некоторые особые случаи рассматриваются более подробно. К таковым относятся : случай поля, свободного от сил, и случай равномерного поля. Авторы находят, что в последнем случае вырождение не исчезает вполне, но для нерадиальных колебаний, соответствующих сферической гармонике степени n, его порядок уменьшается более, чем в отношении $(2n + 1)$ к 2. Для некоторых же моделей, как например, однородная сжимаемая моделв, вырождение полностью сохраняется. В других случаях. как эго уже было указано Чандрасекаром и Лимбером, относительное возмущение частоты пропорционально отношению магнитной энергии к потенциальной энергии тяготения.

1. INTRODUCTION.

La découverte par H. W. BABCOCK d'étoiles possédant un champ magnétique variable a suscité une série de travaux se proposant d'interpréter ces variations en termes d'oscillations magnéto-hydrodynamiques [1]. La complexité du problème a bien souvent conduit les auteurs à recourir à des hypothèses simplificatrices (incompressibilité, influence des forces gravifiques négligeable) peu justifiables et qui, comme COWLING [2] l'a montré, peuvent dénaturer les solutions du problème.

Même dans le cas des exemples les plus simples [3] (fluide homogène incompressible), ces hypothèses couplées à une interprétation fautive de la condition à la

(*) Chercheur agréé par l'Institut Inter-universitaire des Sciences Nucléaires.

surface S pour la pression p (annulation de la perturbation eulérienne p'_s au lieu de la variation lagrangienne $\delta p_s = p'_s - (\delta r \, g\rho)_s$, conditions qui ne sont pas équivalentes ici, puisque la densité ρ_s ne s'annule pas) ont conduit à des fréquences directement proportionnelles à l'intensité H du champ magnétique qui ne peuvent être significatives que pour des oscillations de torsion.

On peut s'attendre à ce que, généralement, la fréquence soit donnée par

$$\sigma^2 = \sigma_G^2 + C \frac{H^2}{\rho R^2} \tag{1}$$

où σ_G est la fréquence sous l'action des forces gravifiques et C une constante dépendant du modèle. En fait, CHANDRASEKHAR et LIMBER [4] en utilisant une extension du théorème du viriel ont établi une expression générale pour σ^2 qui est de ce type moyennant la condition que les tensions totales (dynamiques et magnétiques) s'annulent à la surface de l'étoile.

La question des conditions aux limites peut être assez délicate comme illustrée par la discussion de COWLING [2]. De plus, le problème est encore compliqué par le fait que les configurations d'équilibre sous l'action combinée des champs gravifique et magnétique et autour desquelles les oscillations doivent se produire, sont encore relativement mal connues [5]. Cette situation est un peu analogue à celle qui concerne les étoiles en rotation et, comme dans ce cas, on peut espérer néanmoins dégager quelques-uns des effets du champ magnétique et préciser quelque peu la forme de la relation (1). En particulier tant que ces effets sont faibles, la méthode des perturbations qui, dans le cas de la rotation, offre une des voies d'approche les plus simples (6), peut également être appliquée ici et c'est ce que nous nous proposons de faire dans cet article.

2. OSCILLATIONS PUREMENT GRAVIFIQUES.

Rappelons d'abord les équations fondamentales et quelques-unes des caractéristiques de leurs solutions [7] en l'absence de toute force électromagnétique. Si nous caractérisons ce cas par un indice zéro, les oscillations s'effectuent au voisinage d'un état d'équilibre pour lequel nous avons avec des notations connues

$$\text{grad } p_0 + \rho_0 \text{ grad } U_0 = 0 \tag{2}$$

$$\Delta U_0 = 4\pi G \rho_0. \tag{3}$$

Si nous désignons par $\vec{\zeta_0}$ le déplacement et par le signe « prime » les perturbations eulériennes des différentes variables, les oscillations linéaires adiabatiques au voisinage de cet état d'équilibre sont régies par

$$\rho'_0 = - \text{div } \rho_0 \vec{\zeta_0} = - \rho_0 \text{ div } \vec{\zeta_0} - \vec{\zeta_0} . \text{grad } \rho_0, \tag{4}$$

$$p'_0 = -\gamma p_0 \operatorname{div} \vec{\zeta}_0 - \vec{\zeta}_0 . \operatorname{grad} p_0, \tag{5}$$

$$\operatorname{grad} p'_0 + \rho_0 \operatorname{grad} U'_0 + \rho'_0 \operatorname{grad} U_0 = \rho_0 \sigma_2^0 \vec{\zeta}_0, \tag{6}$$

$$\Delta U'_0 = 4\pi G \rho'_0. \tag{7}$$

De plus sur la surface S_0 de l'étoile qui se réduit ici à une sphère de rayon R_0, la pression doit toujours être nulle et le potentiel gravifique continu. La première de ces conditions donne

$$\delta p_0 = \gamma p_0 \operatorname{div} \vec{\zeta}_0 = 0 \quad (\text{sur } S_0), \tag{8}$$

et la seconde, en désignant par (r, θ, φ) un système de coordonnées sphériques,

$$\frac{\partial}{\partial r}(U'_0 - U'_{0,e}) = -4\pi G \rho_0 \zeta_0^r \qquad (\text{sur } S_0), \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(U'_0 - U'_{0,e}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi}(U'_0 - U'_{0,e}) = 0, \qquad (\text{sur } S_0) \tag{10}$$

en désignant par ζ_0^r la composante radiale de $\vec{\zeta}_0$, par $U_{0,e}$ et $U'_{0,e}$ le potentiel gravifique extérieur à l'équilibre et sa variation eulérienne, pour lesquels on a

$$\Delta U_{0,e} = 0, \qquad \Delta U'_{0,e} = 0. \tag{11}$$

Le problème posé par les équations et les conditions limites précédentes admet [7] des valeurs propres réelles σ_{0i}^2 et des fonctions propres $\vec{\zeta}_{0i}$ orthogonales deux à deux :

$$\int \rho_0 \vec{\zeta}_{0i} \times \vec{\zeta}_{0k} \quad dV_0 = 0, \tag{12}$$

l'intégration étant effectuée dans le volume d'équilibre V_0.

Les variables étant séparables, on peut prendre pour $\vec{\zeta}_0$ un vecteur du type suivant, en composantes sphériques covariantes

$$\vec{\zeta}_0 = \left(\alpha Q, \quad r^2 \beta \frac{\partial Q}{\partial \theta}, \quad r^2 \beta \frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right), \tag{13}$$

où α et β sont des fonctions de r seulement et où Q désigne le produit du facteur temporel $e^{i\sigma_0 t}$ par un harmonique sphérique de degré $n (n = 1,2, \ldots)$, c'est-à-dire par une fonction $Y(\theta, \varphi)$ de la forme

$$Y = \sum_{m=0}^{m=n} P_n^m (\cos \theta) \ (S_m \sin m\varphi + C_m \cos m\varphi), \tag{14}$$

où les P_n^m sont les fonctions de FERRER associées aux polynomes de LEGENDRE ; S_m et C_m sont des constantes.

Dans ces conditions, les variations eulériennes de densité et de pression deviennent

$$\rho'_0 = \left\{ -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\alpha\rho_0) + n(n+1)\beta\rho_0 \right\} Q, \tag{15}$$

$$p'_0 = \left\{ -\frac{\gamma p_0}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\alpha) + n(n+1)\beta\gamma p_0 - \alpha\frac{dp_0}{dr} \right\} Q. \tag{16}$$

On voit donc que les variations eulériennes des potentiels gravifiques sont du type

$$U'_0 = A(r)\,Q, \qquad U'_{0,e} = A_e(r)\,Q, \tag{17}$$

ce qui nous donne, d'après les équations (7) et (11)

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA}{dr}\right) - n(n+1)A = -4\pi G\left\{ \frac{d}{dr}(r^2\alpha\rho_0) - n(n+1)r^2\beta\rho_0 \right\}, \tag{18}$$

et

$$A_e(r) = C r^{-n-1}, \tag{19}$$

où C est une constante que l'on déterminera en ayant recours aux conditions limites (9) et (10). Ces conditions donnent en effet, en $r = R$

$$\frac{dA}{dr} + (n+1)\frac{A}{r} = -4\pi G\rho_0\alpha, \qquad A = A_e \tag{20}$$

il vient donc pour C

$$C = R_0^{n+1} A(R_0). \tag{21}$$

D'ailleurs, l'équation de mouvement (6) donne

$$\frac{d}{dr}\left\{ \frac{\gamma p_0}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\alpha) - n(n+1)\gamma\beta p_0 + \alpha\frac{dp_0}{dr} \right\} - \rho_0\frac{dA}{dr} + \frac{dU_0}{dr}\left\{ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\alpha\rho_0) - n(n+1)\beta\rho_0 \right\} + \rho_0\sigma_0^2\alpha = 0, \tag{22}$$

et

$$\frac{\gamma p_0}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\alpha) - n(n+1)\gamma\beta p_0 + \alpha\frac{dp_0}{dr} - \rho_0 A + \rho_0\sigma_0^2 r^2\beta = 0. \tag{23}$$

Enfin la condition (8) devient

$$\gamma p_0\left\{ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\alpha) - n(n+1)\beta \right\} = 0, \qquad (\text{en } r = R_0). \tag{24}$$

Le problème aux valeurs propres qui se pose est déterminé par les équations (18), (22) et (23), ainsi que par les conditions limites (20) et (24), auxquelles il faut adjoindre

$$\alpha = 0, \qquad r^2\beta = 0, \qquad (\text{en } r = 0). \tag{25}$$

Toutes ces équations sont indépendantes de m, par conséquent, elles font correspondre aux $(2n+1)$ fonctions propres obtenues en prenant pour Y, successivement

$$P_n^m (\cos\theta) \cos m\varphi, \qquad (m = 0, 1, \ldots, n), \tag{26}$$

et

$$P_n^m (\cos\theta) \sin m\varphi, \qquad (m = 1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

une seule et même valeur propre σ_0^n. Le problème considéré est donc bien dégénéré, le degré de la dégénérescence étant $(2n+1)$.

3. Oscillations magnéto-hydrodymaniques.

En présence d'un champ magnétique stationnaire $\vec{H}$, nous avons pour l'équilibre d'une étoile gazeuse

$$\text{grad } p + \rho \text{ grad } U = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \vec{H} \wedge \vec{H}, \tag{28}$$

$$\Delta U = 4\pi G \rho, \tag{29}$$

$$\text{div } \vec{H} = 0, \tag{30}$$

en supposant que la perméabilité magnétique μ de la matière stellaire est constante et égale à l'unité. Nous avons aussi, pour les oscillations magnéto-hydrodynamiques en supposant la conductibilité électrique infinie et les oscillations linéaires, stationnaires et adiabatiques

$$\rho' = -\text{div } \rho\vec{\zeta} = -\rho \text{ div } \vec{\zeta} - \vec{\zeta} \text{ grad } \rho, \tag{31}$$

$$p' = -\gamma p \text{ div } \vec{\zeta} - \vec{\zeta}.\text{grad } p, \tag{32}$$

$$\text{grad } p' + \rho \text{ grad } U' + \rho' \text{ grad } U - \vec{F}' = \rho\sigma^2 \vec{\zeta}, \tag{33}$$

$$\Delta U' = 4\pi G \rho', \tag{34}$$

où $\vec{F}'$ est la variation eulérienne de la force électromagnétique par unité de volume :

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi} \left(\text{rot } \vec{H} \wedge \vec{H}' + \text{rot } \vec{H}' \wedge \vec{H}\right).$$

ou

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi} \left|\text{rot } \vec{H} \wedge \text{rot}\left(\vec{\zeta} \wedge \vec{H}\right) + \text{rot rot}\left(\vec{\zeta} \wedge \vec{H}\right) \wedge \vec{H}\right| \tag{35}$$

en tenant compte des équations de Maxwell qui donnent, en négligeant le courant de déplacement

$$\vec{H}' = \text{rot}\left(\vec{\zeta} \wedge \vec{H}\right). \tag{36}$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que le champ magnétique $\vec{H}$ est faible, de telle sorte que $\vec{F'}$ puisse être regardée comme une perturbation de l'ordre de H^2 vis-à-vis des autres termes qui interviennent dans l'équation de mouvement ; d'autre part, nous négligerons les perturbations d'ordre supérieur.

Il faut cependant remarquer que le problème est non seulement caractérisé par une perturbation des équations de mouvement mais aussi par une perturbation de l'état d'équilibre ce qui complique considérablement le traitement mathématique puisque les surfaces S et S_0 limitant les domaines d'équilibre perturbé et non perturbé différent de l'ordre de H^2. Toutefois, pour tout modèle physique où la densité tend vers zéro à la surface, la masse dans les couches très extérieures est très faible et on peut espérer obtenir une approximation raisonnable pour les fréquences tout en négligeant la différence entre S et S_0.

Dans ce cas, si nous désignons encore par $\vec{\zeta}_i$ et $\vec{\sigma}_i$ les vecteurs et fréquences propres lorsque les forces électromagnétiques entrent en jeu, nous pouvons représenter $\vec{\zeta}_i$ par un développement du type

$$\vec{\zeta}_i = \vec{\zeta}_{0i} + \Sigma a_{ik} \vec{\zeta}_{0k} \tag{37}$$

où les a_{ik} sont des constantes très petites de l'ordre de H^2, la sommation étant effectuée pour toutes les valeurs de k. Introduisant (37) dans (31), (32) et (34), il vient en négligeant les termes de degrés supérieurs à H^2 :

$$\rho'_i = \rho'_{0i} + \Sigma a_{ik} \rho'_{0k} - \operatorname{div}\left[(\rho - \rho_0)\vec{\zeta}_{0i}\right] \tag{38}$$

$$p'_i = p'_{0i} + \Sigma a_{ik} p'_{0k} - \gamma(p - p_0) \operatorname{div} \vec{\zeta}_{0i} - \vec{\zeta}_{0i}.\operatorname{grad}(p - p_0) \tag{39}$$

$$\Delta U'_i = \Delta U'_{0i} + \Sigma a_{ik} \Delta U'_{0k} - 4\pi G \operatorname{div}\left[(\rho - \rho_0)\vec{\zeta}_{0i}\right] \tag{40}$$

ou

$$\operatorname{grad} U'_i = \operatorname{grad}(U'_{0i} + \Sigma a_{ik} U'_{0k}) - 4\pi G(\rho - \rho_0)\vec{\zeta}_{0i} \tag{41}$$

où toutes les différences $(p - p_0)$, $(\rho - \rho_0)$ et $(U - U_0)$ sont de l'ordre de H^2.

L'équation de mouvement (33) où l'on introduit (38), (39) et (41) devient en se limitant de nouveau aux termes en H^2 et en simplifiant par (6)

$$\begin{aligned}(\sigma_{0i}^2 - \sigma_i^2)\vec{\zeta}_{0i} + \Sigma a_{ik}(\sigma_{0k}^2 - \sigma_i)\vec{\zeta}_{0k} &= \frac{1}{\rho_0}\vec{F}'(\vec{\zeta}_{0i}) \\ &+ \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad}\left\{\gamma(p - p_0)\operatorname{div}\vec{\zeta}_{0i} + \vec{\zeta}_{0i}.\operatorname{grad}(p - p_0)\right\} \\ &+ \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\operatorname{grad}(\gamma p_0 \operatorname{div}\vec{\zeta}_{0i} + \vec{\zeta}_{0i}.\operatorname{grad} p_0) + \frac{1}{\rho_0}(\operatorname{div}\rho_0\vec{\zeta}_{0i})\operatorname{grad}(U - U_0) \\ &+ \frac{1}{\rho_0}\left\{\operatorname{div}(\rho - \rho_0)\vec{\zeta}_{0i}\right\}\operatorname{grad} U_0 + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(\operatorname{div}\rho_0\vec{\zeta}_{0i})\operatorname{grad} U_0 \\ &+ 4\pi G(\rho - \rho_0)\vec{\zeta}_{0i}.\end{aligned} \tag{42}$$

Si nous multiplions alors cette équation scalairement par $\rho_0 \vec{\zeta}_{0i} dV_0$ et intégrons sur V_0 il vient, en tenant compte de l'orthogonalité des fonctions $\vec{\zeta}_{0i}$

$$(\sigma_{0i}^2 - \sigma_i^2) \int \rho_0 \vec{\zeta}_{0i} . \vec{\zeta}_{0i} \, dV_0 = \int \vec{F}'(\vec{\zeta}_{0i}) . \vec{\zeta}_{0i} \, dV_0 \tag{43}$$

$$+ \int \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad} \left\{ \gamma (p - p_0) \text{ div } \vec{\zeta}_{0i} + \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad } (p - p_0) \right\} dV_0$$

$$+ \int \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad} \left\{ \gamma p_0 \text{ div } \vec{\zeta}_{0i} + \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad } p_0 \right\} dV_0$$

$$+ \int \left(\text{div } \rho_0 \vec{\zeta}_{0i} \right) \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad } (U - U_0) dV_0 + \int \left\{ \text{div } (\rho - \rho_0) \vec{\zeta}_{0i} \right\} \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad } U_0 \, dV_0$$

$$+ \int \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \left(\text{div } \rho_0 \vec{\zeta}_{0i} \right) \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad } U_0 \, dV_0 .$$

$$+ \int 4 \pi G (\rho - \rho_0) \rho_0 \vec{\zeta}_{0i} . \vec{\zeta}_{0i} \, dV_0$$

ce qui montre que $(\sigma_{0i}^2 - \sigma_i^2)$ est aussi de l'ordre de H^2. Toutefois comme on le voit, son calcul explicite exige la connaissance de la perturbation de l'état d'équilibre. Il existe cependant des cas particuliers où cette perturbation est négligeable ou nulle et où la formule (43) se simplifie considérablement. Par exemple, si la force de LORENTZ dérive d'un potentiel scalaire, on peut avoir

$$\rho = \rho_0, \qquad U = U_0, \qquad \text{grad } (p - p_0) = \frac{1}{4\pi} \text{ rot } \vec{H} \wedge \vec{H} \tag{44}$$

et dans ces conditions (43) devient

$$(\sigma_i^2 - \sigma_{0i}^2) \int \rho_0 \vec{\zeta}_{0i} . \vec{\zeta}_{0i} \, dV_0 = - \int \vec{F}'(\vec{\zeta}_{0i}) . \vec{\zeta}_{0i} \, dV_0 \tag{45}$$

$$- \int \zeta_{0i} . \text{grad} \left\{ \gamma (p - p_0) \text{ div } \vec{\zeta}_{0i} + \vec{\zeta}_{0i} . \text{grad } (p - p_0) \right\} dV_0 .$$

Un cas encore plus simple est celui où le champ $\vec{H}$ lui-même dérive d'un potentiel scalaire, de sorte que les forces magnétiques s'annulent à l'équilibre ; on a alors

$$\rho = \rho_0, \qquad U = U_0, \qquad p = p_0, \tag{46}$$

et par suite en tenant compte de (35) où seul le second terme subsiste

$$\sigma_i^2 - \sigma_{0i}^2 = \frac{ - \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \text{rot rot} \left(\vec{\zeta}_{0i} \wedge \vec{H} \right) \wedge \vec{H} \right\} . \vec{\zeta}_{0i} \, dV_0 }{ \int \rho_0 \vec{\zeta}_{0i} . \vec{\zeta}_{0i} \, dV_0 } . \tag{47}$$

Remarquons que ces deux derniers cas échappent à la difficulté mentionnée plus haut concernant la perturbation des conditions aux limites.

4. Cas d'un champ magnétique uniforme.

Pour un champ magnétique uniforme, la relation (47) est donc applicable puisque un tel champ dérive d'un potentiel du type $\mathrm{H}r\cos\theta$, H désignant le module du champ exprimé en gauss. Nous allons expliciter cette relation pour une solution ζ_{0i} du type (13). En négligeant ici l'indice i du mode, nous aurons alors pour le numérateur de (47)

$$(48)\qquad -\frac{\mathrm{H}^2}{4\pi}\sum_{m=0}^{m=n}(\mathrm{S}_m^2\mathbf{A}_m+\mathrm{C}_m^2\,\mathrm{B}_m)\Big[(m^2\,\mathrm{J}_1+\mathrm{J}_2)\int_{-1}^{+1}\{\mathrm{P}_n^m(u)\}^2\,du + \mathrm{J}_3\int_{-1}^{+1}(1-u^2)\{\mathrm{P}_n^m(u)\}^2\,du\Big],$$

et pour le dénominateur

$$(49)\qquad \sum_{m=0}^{m=n}(\mathrm{S}_m^2\mathrm{A}_m+\mathrm{C}_m^2\mathrm{B}_m)\,\mathrm{J}_4\int_{-1}^{+1}\{\mathrm{P}_n^m(u)\}^2\,du,$$

avec

$$(50)\qquad \mathrm{A}_m=\begin{cases}0\ (m=0),\\ \pi\ (m\neq 0),\end{cases}\qquad \mathrm{B}_m=\begin{cases}2\pi\ (m=0),\\ \pi\ \ (m\neq 0),\end{cases}$$

$$(51)\qquad \mathrm{J}_i=\int_0^{\mathrm{R}} f_i(r)\,r^2\,dr,\qquad (i=1,2,3,4)$$

Les fonctions $f_i(r)$ sont données ci-dessous, les accents désignant les dérivations par rapport à r

$$(52)\qquad f_1=\frac{\alpha^2}{r^2}-n(n+1)\,\beta^2-\alpha\beta'+\alpha'\beta,$$

$$(53)\qquad f_2=\mathrm{V}(r)\left\{n(n+1)\,\beta-2\beta-\frac{\alpha}{r}\right\}-\mathrm{W}(r)\,\beta.$$

$$(54)\qquad f_3=\mathrm{V}(r)\left\{\frac{3\alpha}{2r}-n(n+1)\,\beta+3\beta\right\}+\mathrm{W}(r)\left\{\frac{\alpha}{r}+\frac{3\beta}{2}\right\},$$

$$(55)\qquad f_4=\rho_0\{\alpha^2+n(n+1)\,r^2\beta^2\},$$

avec

$$(56)\qquad \mathrm{V}(r)=\frac{2\alpha}{r}+(r^2\beta)''-n(n+1)\,\beta,$$

$$(57)\qquad \mathrm{W}(r)=(r\alpha)''-\frac{2\alpha}{r}-n(n+1)\frac{\alpha}{r}+2n(n+1)\,\beta.$$

Nous avons aussi [8]

$$(58)\qquad \int_{-1}^{+1}\{\mathrm{P}_n^m(u)\}^2\,du=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

et pour $\int_{-1}^{+1}(1-u^2)\{\mathrm{P}_n^m(u)\}^2\,du$:

$$(59)\qquad \left\{\frac{1}{2n+1}\right\}^2\left\{\frac{2}{2n+3}\frac{(n+m+2)!}{(n-m)!}+\frac{2}{2n-1}\frac{(n+m)!}{(n-m-2)!}\right\},\ \text{si } m\leqslant n-2$$

1957AnAp...20..185L

et

$$\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}^2 \frac{2}{2n+3}\,\frac{(n+m+2)!}{(n-m)!}, \text{ si } m > n-2. \tag{60}$$

Si Y se réduit à un seul terme de la somme (14), il vient :

$$\sigma^2 - c_0^2 = -\frac{\mathrm{H}^2}{4\pi}\left[m^2\left\{\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{J}_4} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4}\right\} + \frac{m}{2n+1}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4} + \frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}_4} + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4}\right], \text{ si } m > n-2 \tag{61}$$

et

$$\sigma^2 - c_0^2 = -\frac{\mathrm{H}^2}{4\pi}\left[m^2\left\{\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{J}_4} + \frac{2}{(2n-1)(2n+3)}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4}\right\} + \frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}_4} + \frac{4n^3+6n^2-2n-2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4}\right], \text{ si } m \leqslant n-2. \tag{62}$$

Par exemple, pour $n = 2$, nous avons pour la perturbation σ' de σ_0 ($\sigma' = \sigma - \sigma_0$)

$$\sigma' = \frac{-\mathrm{H}}{8\pi\sigma_0}\left[m\left\{\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{J}_4} + \frac{1}{35}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4}\right\} + \frac{m}{5}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4} + \frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}_4} + \frac{12}{35}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4}\right], \ m = 1 \text{ et } m = 2 \tag{63}$$

et pour $m = 0$

$$\sigma' = \frac{-\mathrm{H}^2}{8\pi\sigma_0}\left[\frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}_4} + \frac{10}{21}\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_4}\right]. \tag{64}$$

Remarquons encore que les J_i sont indépendants de m, ils ne dépendent que de n et du mode d'oscillation considéré.

D'après (61) et (62), on voit que la perturbation de la fréquence σ_0 est une grandeur réelle, proportionnelle au carré du champ magnétique et dépendant de m. Ainsi, la présence du champ magnétique lève la dégénérescence qui affectait le problème non perturbé. Il faut cependant remarquer qu'ici, σ' prend la même valeur pour une oscillation en sin $m\varphi$ que pour une oscillation en cos $m\varphi$. Ainsi, contrairement à ce qui se passe dans le cas de la rotation où la dégénérescence est complètement levée, les forces électromagnétiques, dans le cas présent du moins, réduisent seulement le degré de dégénérescence de $2n + 1$ à 2. Il semble que ceci restera vrai tant que la formule (47) reste applicable et que $\vec{\mathrm{H}}$ garde la symétrie axiale mais il est possible que, dans des cas plus généraux, la dégénérescence soit levée complètement. En particulier, pour une oscillation radiale ($n = 0$, $m = 0$), soit

$$\vec{\zeta}_0 = (\alpha, 0, 0), \tag{65}$$

il vient pour un champ magnétique uniforme, en vertu de (61) ou (62)

$$\sigma' = -\frac{\mathrm{H}^2}{12\pi\sigma_0}\,\frac{\displaystyle\int_0^{\mathrm{R}}\left[(r\alpha)'' - \frac{2\alpha}{r}\right]\alpha r\,dr}{\displaystyle\int_0^{\mathrm{R}}\rho_0\alpha^2 r^2\,dr} \tag{66}$$

comme le montre d'ailleurs un calcul direct de l'expression (47).

5. Champ magnétique uniforme et modèle homogène.

Le modèle homogène compressible est le seul pour lequel nous possédions des solutions analytiques à la fois pour les modes d'oscillations radiales [9] et non radiales [10]. Il paraît donc naturel d'illustrer le problème en appliquant (66) à ce cas. Mais dans le cas du mode fondamental d'oscillations radiales, $\alpha \propto r$ et l'on vérifie immédiatement que σ' est nulle. Bien que moins évident, il en est encore de même pour le premier mode. Ceci pourrait paraître en contradiction avec le résultat de Chandrasekhar et Limber mais il convient de rappeler que leur formule n'est applicable que si les tensions électromagnétiques s'annulent sur S ce qui n'est pas le cas ici.

En ce qui concerne les oscillations non radiales, σ' s'annule encore pour le mode fondamental ($k = 0$) de l'oscillation $n = 2$ et cela pour les trois valeurs possibles de m. Ainsi dans ce cas, la dégénérescence reste complète malgré la présence d'un champ magnétique. Ce résultat qui, probablement, peut se généraliser à tous les modes du modèle homogène est sans doute dû au caractère très particulier des hypothèses adoptées tant pour le champ magnétique que pour l'étoile. Par exemple, on verra au paragraphe suivant que, dans le cas du modèle de Sterne [9], la présence du champ magnétique implique bien une perturbation non nulle de la fréquence du mode fondamental de pulsation radiale.

6. Champ magnétique uniforme et modèle de Sterne.

Le modèle considéré ici a été étudié par T. E. Sterne [9] et il est caractérisé par

$$\rho_0 = \frac{M}{4\pi R}\frac{1}{r^2}, \tag{67}$$

où M désigne la masse totale de l'étoile et R son rayon.

Pour l'oscillation radiale fondamentale de ce modèle, on a

$$\alpha = c\, r^q, \tag{68}$$

c désignant une constante arbitraire et q une grandeur dépendant de γ

$$q = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 8\left(3 - \frac{4}{\gamma}\right)}\right]. \tag{69}$$

On a aussi, en appelant $\bar{\rho}$ la densité moyenne de l'étoile

$$\omega^2 = \frac{3\sigma_0^2}{4\pi G\bar{\rho}} = \frac{\gamma}{2}(q^2 + q - 2). \tag{70}$$

Il vient alors, d'après (66) et (68)

$$\sigma' = -\frac{H^2}{4\pi\sigma_0 R_0^2 \rho_0}(q^2 + q - 2) \tag{71}$$

qui correspond bien à une fréquence totale du type (1).

Grâce à (70), cette expression peut encore être écrite sous la forme

$$\frac{\sigma^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{2\sigma'}{\sigma_0} = -\frac{8}{\gamma}\frac{\frac{H^2}{8\pi}V_0}{\frac{GM^2}{R_0}} \tag{72}$$

qui montre que, pour ce modèle, le rapport $(\sigma^2 - \sigma_0^2)/\sigma_0^2$ est bien de l'ordre du rapport de l'énergie magnétique à l'énergie potentielle gravifique bien qu'à l'équilibre, la force magnétique s'annule.

Le modèle standard (7 *b*, *c*) permettrait des illustrations plus physiques des formules (66) ou (61) et (62) ou même de (45) mais ceci nécessiterait des calculs numériques qui n'ont pas encore été entrepris. Quant à la formule générale (43), son application requiert la connaissance d'un modèle hydrostatique en présence d'un champ magnétique.

Manuscrit reçu le 30 octobre 1957.

RÉFÉRENCES

[1] Voir par exemple l'excellente revue du problème par H. W. Babcock et T. G. Cowling, *M. N.*, **113**, 1953, 357.

[2] T. G. Cowling, *M. N.*, **112**, 1952, 527.

[3] M. Schwarzschild, *Ann. Astroph.*, **12**, 1949, 148 ; V. C. A. Ferraro and D. J. Memory, *M. N.*, **112**, 1952, 361.

[4] S. Chandrasekhar and D. N. Limber, *Ap. J.*, **119**, 1954, 10.

[5] Voir par exemple, S. Chandrasekhar and K. H. Prendergast, *Proc. Nat. Ac. Sciences*, **42**, 1956, 5 ; K. H. Prendergast, *Ap. J.*, **123**, 1956, 496 ; V. C. A. Ferraro, *Ap. J.*, **119**, 1954, 407 ; L. Mestel, *M. N.*, **116**, 1956, 324.

[6] P. Ledoux, *Ap. J.*, **114**, 1951, 373.

[7] Voir : *a*) C. L. Pekeris, *Ap. J.*, **88**, 1938, 189 ; *b*) T. G. Cowling, *M. N.*, **101**, 1941, 367 ; *c*) Z. Kopal, *Ap. J.*, **109**, 1949, 509 ; P. Ledoux, *Mém. Soc. Roy. Sc.*, Liège, **9**, 1949, chap. III et V.

[8] W. Magnus und F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Berlin, 1948.

[9] T. E. Sterne, *M. N.*, **97**, 1937, 582.

[10] C. L. Pekeris, *Ap. J.*, **88**, 1938, 189 ; E. Sauvenier-Goffin, *Bull. Soc. Roy. Sc.*, Liège, **20**. 1951, 20.