SUR LES OSCILLATIONS RADIALES DES MODÈLES STELLAIRES A GRANDE CONCENTRATION MASSIQUE

par P. LEDOUX *, R. SIMON et J. BIERLAIRE.
(Institut d'Astrophysique de Liège, Cointe-Sclessin, Belgique)

ABSTRACT. — *The radial oscillations of two models with high central condensation but with low values of the effective polytropic index in the external layers are studied. It is found that the periods of the fundamental mode extend over an interesting range covering the periods of cepheids of type I and partially at least those of type II.*

An approximate formula for the period of the fundamental mode is given which might prove useful for the whole range of central condensations.

1. INTRODUCTION.

Les modèles stellaires qui, à présent, paraissent les plus aptes à représenter les étoiles géantes, sont tous des modèles à grande concentration massique [1] susceptibles des hautes températures centrales nécessaires pour expliquer par des réactions nucléaires, la production de l'énergie énorme rayonnée par ces étoiles.

Il y a quelques années, l'adoption de tels modèles pour les céphéides paraissait devoir accroître les difficultés en ce qui concerne les périodes τ qui, déjà à peu près deux fois trop petites pour les modèles ordinaires, semblaient devoir diminuer encore avec l'accroissement de la concentration massique.

Mais EPSTEIN [2] en intégrant l'équation régissant les pulsations radiales de tels modèles découvrit que l'augmentation des fréquences $\sigma = (2\pi/\tau)$ était bien moins rapide que prévue. En particulier, la fréquence τ_0 du mode fondamental reste bien en dessous de la valeur fournie par la formule approchée de P. LEDOUX et C. L. PEKERIS [3] basée sur l'hypothèse d'un déplacement relatif, $\xi = (\delta r/r)$, constant :

$$\sigma_0^2 = -(3\gamma - 4)\frac{\Omega}{I} = (3\gamma - 4)\,\frac{4\pi G\bar{\rho}}{3}\,\frac{\int_0^1 \frac{q}{x}\,dq}{\int_0^1 x^2\,dq} \tag{1}$$

où γ, Ω et I représentent respectivement le rapport des chaleurs spécifiques, l'énergie potentielle gravifique et le moment d'inertie par rapport au centre et q et x, la masse et le rayon relatifs $q = m(r)/M$ et $x = r/R$.

(*) Associé du F. N. R. S.

Par exemple, en réservant l'indice *st* pour le modèle standard et l'indice *E* pour le modèle 4 de EPSTEIN, $\tau_E/\tau_{st} = 0{,}82$ alors que la formule (1) donnerait $\tau_E/\tau_{st} \simeq 0{,}15$. Comme EPSTEIN le remarque en se basant sur l'expression vibrationnelle [3] de σ_0^2, ceci est dû à l'accroissement extrême de ξ du centre à la surface ($\xi_R/\xi_c \simeq 6.10^5$) ce qui déplace même la région de plus grand poids pour la détermination des fréquences vers l'extérieur ($r \simeq 0{,}75$R). Il suggère aussi qu'en diminuant suffisamment la valeur de l'indice polytropique effectif n_e dans cette région, on pourrait même ramener l'accord entre périodes théoriques et observées.

Depuis, cette difficulté des périodes a pratiquement disparu dans le cas des céphéides classiques (population I) grâce à l'augmentation de leur luminosité absolue [4] par un facteur de l'ordre de 3,3 à 3,6.

Le tableau I, emprunté en partie à SAVEDOFF [5], résume la situation actuelle. Les deux dernières entrées théoriques se rapportent à des modèles qui seront discutés dans les paragraphes suivants :

TABLEAU I

VALEURS THÉORIQUES ET OBSERVÉES DE $\tau_0\sqrt{\bar\rho/\bar\rho_\odot}$ EXPRIMÉES EN JOURS

$(\tau_0\sqrt{\bar\rho/\bar\rho_\odot})$ observées		$(\tau_0\sqrt{\bar\rho/\bar\rho_\odot})$ théoriques	avec $\gamma = 5/3$	avec γ corrigé (p_R)
δ Céphée	0,039	mod. standard	0,0389	0,042
η Aquilae	0,031 à 0,038	mod. 4 de EPSTEIN	0,0308	0,040
RR Lyrae	0,061			
		modèle I	0,0468	
		modèle II	0,0558	0,060

2. MODÈLES A COUCHES EXTÉRIEURES HOMOGÈNES (MODÈLE I).

Afin de tester l'effet d'une diminution de n_e dans les couches extérieures, le modèle 4 de EPSTEIN a été modifié en remplaçant les couches extérieures à $x^* = 0{,}6$ par une zone homogène $n_e = 0$. Comme ce modèle a été discuté en détail ailleurs [6], nous rappelons simplement ses caractéristiques principales en termes de celles du modèle d'EPSTEIN.

$$R = 0{,}6557\ R_E, \qquad M = 0{,}9998\ M_E$$
$$x^* = \frac{x^* R_E}{R} = 0{,}91505 \qquad \rho_c/\bar\rho = 0{,}282\ (\rho_c/\bar\rho)_E$$

Au lieu de la fréquence σ, il est avantageux comme on le voit d'après (1), d'employer le paramètre sans dimension

$$\omega^2 = \frac{3\sigma^2}{4\pi G\bar\rho} \tag{2}$$

qui est invariant par rapport aux transformations homologues.

Sa valeur pour le mode fondamental et $\gamma = 5/3$ est

$$\omega_0^2 = 6{,}098 = 0{,}433\,(\omega_0^2)_E$$

ou encore pour des configurations de même densité moyenne

$$\tau_I = 1{,}52\,\tau_E = 1{,}23\,\tau_{sl}$$

En accord avec la diminution de $\rho_c/\bar{\rho}$, la variation de ξ est fort réduite ($\xi_R/\xi_c \simeq 1{,}8.10^4$). La période est affectée considérablement mais moins cependant que la corrélation directe entre σ et n_e suggérée par Epstein ne l'aurait indiqué.

Évidemment, du point de vue physique, la plus petite valeur possible de n_e restera de l'ordre de 1,5 (équilibre convectif) mais par contre une telle zone pourra s'étendre beaucoup plus profondément dans l'étoile. Ce cas est discuté au paragraphe suivant.

3. Modèles a couches extérieures en équilibre convectif (modèle II).

Afin de faciliter les comparaisons, ce modèle a été construit comme les modèles étudiés par Epstein à partir d'une des solutions isothermes calculées par Richardson et Schwarzschild [7] et prolongée par Epstein [2] et pour des valeurs de la masse totale et de la température centrale identiques à celles de Epstein. Ce modèle comprend donc une zone convective centrale suivie d'une zone isotherme puis d'une zone en équilibre convectif représentée par une des solutions calculées par Fairclough [8]. Ces modèles sont artificiels puisque comme Gold l'a fait remarquer l'existence d'une telle zone isotherme est impossible. Cependant ceci est sans grande importance pour le but que nous poursuivons ici qui est de dégager simplement les effets de la grande concentration massique sur les périodes.

Les caractéristiques du modèle obtenu sont contenues dans le tableau II. les indices 1 et 2 se référant respectivement aux surfaces de séparation entre la zone convective et la zone isotherme et entre cette dernière et la zone convective extérieure. Les indices c et s se rapportent au centre et à la surface. Les variables suivantes ont été employées, en général :

$$x = \frac{r}{R}, \quad q = \frac{m(r)}{M}, \quad p = \frac{4\pi R^4}{GM^2} P, \quad t = \frac{\mathcal{R} R}{GM} T \tag{3}$$

où $\mathcal{R}$ est la constante de la loi des gaz parfaits et μ le poids moléculaire moyen ;

dans la zone convective centrale :

les variables d'Emden représentées par z et u, $r = \alpha z$, $\rho = \rho_c u^{1,5}$,

dans la zone isotherme :

les variables de Richardson et Schwarzschild χ et ψ, $\chi = t_1 p_1^{-1/2}/x$, $p = p_1\, e^{-\psi}$,

dans la zone convective extérieure :

les variables d'Emden représentées par η et φ, $r = \beta\eta$, $\rho = \lambda\varphi^{1,5}$.

TABLEAU II

CARACTÉRISTIQUES DU MODÈLE

$X = 0{,}5 \quad Y = 0{,}4, \quad Z = 0{,}1, \quad \bar{\mu} = 0{,}74, \quad \rho_c/\rho = 1{,}1983 . 10^6$

Centre	$x = 0$	$T_c = 3 . 10^7$ °K	$P_c = 2{,}9037 . 10^{17}$	$m(r) = 0$	$U_c = 3$ $V_c = 0$
Zone convective centrale	$x = 0{,}00304\ z$	$t = 13{,}28877\ u$	$p = 4{,}77728 . 10^7\ u^{2.5}$	$q = 0{,}10099 \left(- z^2 \dfrac{du}{dz}\right)$	
Première surface de séparation	$z_1 = 2{,}7$	$u_1 = 0{,}24966$		$\left(\dfrac{du}{dz}\right)_1 = - 0{,}320417$	
	$\chi_1 = 0{,}33138$	$t_1 = 3{,}31767$	$\psi_1 = 0{,}0$	$\left(\dfrac{d\psi}{d\chi}\right)_1 = - 26{,}142$	$U_1 = 1{,}056$
	$r_1/R = 0{,}00821$		$p_1 = 1{,}48784 . 10^6$	$m(r)_1/M = 0{,}23590$	$V_1 = 8{,}665$
Zone isotherme	$x = (2{,}71992 . 10^{-3}/\chi)$	$t = t_1$	$p = 1{,}48784 . 10^6 e^{-\psi}$	$q = - 9{,}0238 . 10^{-3} \dfrac{d\psi}{d\chi}$	
Deuxième surface de séparation	$\chi_2 = 0{,}066439$	$t_2 = t_1$	$\psi_2 = 8{,}09052$	$\left(\dfrac{d\psi}{d\chi}\right)_2 = - 32{,}34706$	$U_2 = 0{,}0323$
	$\eta_2 = 0{,}149581$	$\varphi_2 = 1{,}54024$		$\left(\dfrac{d\varphi}{d\eta}\right)_2 = - 8{,}85177$	$V_2 = 2{,}1491$
	$r_2/R = 0{,}0409$			$m(r)_2/M = 0{,}29189$	
Zone convective extérieure	$x = 0{,}27369\ \eta$	$t = 2{,}15400\ \varphi$	$p = 1{,}54852 . 10^2\ \varphi^{2.5}$	$q = 1{,}47381 \left(- \eta^2 \dfrac{d\varphi}{d\eta}\right)$	
Surface	$\eta_s = 3{,}65379$	$\varphi_s = 0$		$\left(\dfrac{d\varphi}{d\eta}\right) = - 0{,}050824$	$U_s = 0$
	$R = 3{,}552 . 10^{12}$ $= 51{,}1\ R_\odot$			$M = 1{,}35 . 10^{35}$ $= 6{,}78\ M_\odot$	$V_s = \infty$

L'intégration numérique de l'équation différentielle régissant les pulsations radiales.

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{\gamma P}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\delta r)\right] + \left(\sigma^2\rho - \frac{4}{r}\frac{dP}{dr}\right)\delta r = 0 \tag{4}$$

ou

$$\frac{d^2\xi}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \frac{1}{P}\frac{dP}{dr}\right)\frac{d\xi}{dr} + \left[\frac{\sigma^2\rho}{\gamma P} + \left(\frac{3\gamma - 4}{\gamma}\right)\frac{1}{rP}\frac{dP}{dr}\right]\xi = 0 \tag{5}$$

avec les conditions aux limites

$$\delta r = 0 \quad \text{en} \quad r = 0$$

$$\delta P = -\frac{\gamma P}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\delta r) = 0 \quad \text{en } r = R$$

a été effectuée dans chaque région avec les variables propres à cette région, la condition de continuité de $d \log \xi/dr$ étant assurée à chaque surface de séparation. De plus, afin de faciliter les calculs, la dérivée première a été éliminée de (4). En particulier, dans la zone convective extérieure, l'équation devient ainsi

$$\frac{d^2 w_3}{d\eta^2} + w_3 \left\{\frac{\omega^2}{\gamma\varphi}\frac{\varphi_2}{\eta_2^2\chi_2^2}\frac{t_1}{p_1} + 10\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\varphi'}{\eta\varphi} + \frac{2}{\eta^2} + 1{,}25\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + 1{,}25\,\varphi^{1/2} - \frac{1}{4}\left[\frac{4}{\eta} + 2{,}5\frac{\varphi'}{\varphi}\right]^2\right\} = 0 \tag{6}$$

avec

$$w_3 = 2{,}5\,\eta^2\varphi^{1{,}25}\xi.$$

Si on y introduit la variable indépendante $y = (1 - \eta/\eta_s)$ et si on tient compte du développement en série de φ aux environs de la surface

$$\varphi = Ay\left[\sum_{i=0} a_i y^i - y^{2{,}5}\, B \sum_{j=0} b_j y^j\right] \tag{7}$$

avec

$$A = -\eta_s\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_s, \quad B^2 = -\eta^5\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_s, \quad a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$$

$$a_5 = 1 + 4\,B^2/700, \qquad b_0 = 4/35, \qquad b_1 = 46/315, \qquad b_2 = 1117/27720$$

on obtient pour la solution qui s'annule à la surface

$$w_3 = y^{1{,}25}\left[\sum_{i=0}\alpha_i y^i + y^{2{,}5}\sum_{j=0}\beta_j y^j\right]$$

avec

$$2{,}5\,\alpha_1 = -(1 + C), \quad 7\,\alpha_2 = -\alpha_1(5{,}375 + C) - \alpha_0(C - 0{,}1875),$$

$$13{,}5\,\alpha_3 = -\alpha_2(14{,}375 + C) - \alpha_1(7{,}3125 + C) - \alpha_0(C - 30)$$

$$22\,\alpha_4 = -\alpha_3(27{,}375 + C) - \alpha_2(20{,}8125 + C) - \alpha_1(7 + C) - \alpha_0(C - 9{,}375),$$

$$32{,}5\,\alpha_5 = -\alpha_4(44{,}375 + C) - \alpha_3(40{,}3125 + C) - \alpha_2(25 + C) - \alpha_1(3{,}125 + C) - \alpha_0(C - 34{,}5562) + \beta_0 B\, 19{,}125$$

et

$$\beta_0 = -0{,}0875\,\alpha_0\,B,\ 17{,}5\,\beta_1 = +1{,}875\,\alpha_1\,B - \beta_0\,(20{,}375 + C) - \alpha_0\,B\left(2{,}27142 - \frac{4}{35}\,C\right)$$

$$27\,\beta_2 = +13{,}125\,\alpha_2\,B - \beta_1\,(35{,}375 + C) + \alpha_1\,B\,(7{,}72857 + 4/35\,C) - \beta_0\,(29{,}7125 + C) - \alpha_0\,B\left(0{,}074852 - \frac{46}{315}\,C\right)$$

où

$$C = \frac{\varphi_2}{\eta_2^2\,\chi_2^2} \cdot \frac{t_1}{p_1} \cdot \frac{\eta^2}{A} \cdot \frac{\omega^2}{\gamma}.$$

TABLEAU III

VARIATIONS DE ξ ET $d\xi/dx$

x	ξ	$d\xi/dx$	x	ξ	ξ/dx
—	—	—	—	—	—
0	1	0,0	0,038857	361,83	13 519
0,001520	1,0128	17,156	0,040490	391,53	12 994
0,002736	1,0435	34,074	0,054738	551,60	10 314
0,003952	1,0984	58,016	0,109475	998,88	6 826,8
0,005168	1,1906	97,330	0,164213	1 335,0	5 605,6
0,006384	1,3495	173,44	0,273688	1 892,7	4 798,0
0,006992	1,4744	242,71	0,383164	2 416,2	4 867,7
0,008208	1,9271	564,92	0,492639	2 976,1	5 436,4
0,008774	2,3296	870,04	0,602114	3 622,1	6 445,8
0,010074	4,0673	1 873,2	0,711590	4 405,2	7 962,9
0,011333	8,9581	3 801,1	0,821065	5 389,7	10 190
0,014316	22,4693	7 091,5	0,93054	6 713,6	13 826
0,018133	58,6301	11 617	0,98528	7 636,1	16 978
0,024727	150,330	15 352	1	7 891,1	17 597

L'intégration numérique du centre vers la surface a été commencée au point $z = 0{,}5$ de la zone convective centrale où des valeurs initiales peuvent être déduites du développement en série d'EPSTEIN puisque les coefficients sont pratiquement indépendants de ω. Cette intégration a été poursuivie jusqu'au point $\eta = 3$ de l'enveloppe convective où les valeurs de w_3 et $dw_3/d\eta$ ainsi obtenues peuvent être comparées à celles déduites du développement en série (8).

Après quelques intégrations, on trouve que la valeur propre correspondant à la fréquence fondamentale est très proche de

$$\omega_0^2 = 4{,}30$$

la solution numérique et le développement en série se raccordant dans ce cas en $\eta = 3$ avec une erreur relative de l'ordre de 0,002. Les valeurs correspondantes de ξ et $d\xi/dr$ sont reprises dans le tableau III.

On constate que malgré la valeur élevée de $\rho_c/\bar{\rho}$, la variation de ξ a encore diminué ($\xi_R/\xi_c \simeq 8.10^3$). Quant à ω^2, il est réduit par un facteur appréciable par rapport au cas précédent. Ceci est dû au fait que les couches extérieures d'indice $n_e = 1{,}5$, s'étendent très profondément dans l'étoile ($\simeq 96$ % du rayon et $\simeq 70$ % de la masse). Malgré cela, remarquons que ω_0^2 reste encore bien supérieur à la valeur 2,7 qu'elle prend pour une étoile entièrement convective. La comparaison avec les autres modèles donne

$$\tau_{\mathrm{II}} = 1{,}8\ \tau_{\mathrm{E}} = 1{,}46\ \tau_{st}$$

Notons aussi que nous n'avons pas tenu compte de la pression de radiation p_R qui n'est pas entièrement négligeable pour aucun de ces modèles et qui, en diminuant γ, tend toujours à faire augmenter la période. Par exemple, dans le cas du modèle 4, Epstein a estimé que cet effet multipliait la période par un facteur de l'ordre de 4/3.

Pour le modèle-standard, $p_R/P = C^{te} = 0{,}035$ et le facteur est de l'ordre de 1,08. Dans le cas du modèle II, c'est surtout à la base de la zone convective extérieure que p_R est important et dans la région de plus grand poids ($x \simeq 0{,}65$), p_R/P n'est plus que de l'ordre de 0,04. Néanmoins, au total, la période serait sûrement augmentée dans le rapport de 1,1.

Les valeurs de $\tau_0\sqrt{\rho/\rho_\odot}$ correspondant aux modèles I et II ont été reportées également dans le tableau I ainsi que les valeurs approximatives corrigées pour l'effet de p_R, afin de faciliter la comparaison avec les valeurs observées. Bien qu'il ne soit pas possible de tirer de conclusion définitive, on voit en tout cas, que ces modèles à grande concentration massique offrent une gamme de périodes fondamentales qui couvrent assez bien le domaine observé tout en offrant une possibilité d'expliquer la génération d'énergie.

Toutefois pour les céphéides de type II, il est probable qu'en moyenne la valeur de $\tau_0\sqrt{\rho/\rho_\odot}$ est un peu plus grande que pour RR Lyrae. Si on admettait l'ancienne relation des céphéides classiques, on aurait $\tau\sqrt{\rho/\rho_\odot} \simeq 0{,}070$ ce qui reste encore dans le domaine des possiblités théoriques. Malheureusement des renseignements précis manquent encore. Par exemple, dans le cas de W Virginis, la céphéide de type II probablement la plus étudiée, si l'on adoptait pour le rayon une des valeurs suggérées par Abt [9], $\tau\sqrt{\rho/\rho_\odot}$ prendrait une valeur entre 0,1 et 0,2 qu'il serait bien difficile d'interpréter. Si ces deux types de variables sont animées de pulsations radiales analogues, c'est sans doute un des cas où la différence entre populations I et II s'affirme le plus nettement et implique le plus directement une différence considérable de structure ou de composition chimique.

Les modes supérieurs d'oscillation de ces modèles offrent aussi un intérêt considérable en relation avec les nombreuses étoiles variables connues à présent dont la courbe de lumière ou de vitesse radiale présente plusieurs périodes. La comparaison de quelques modèles pour une même valeur de γ (voir tableau IV) montre qu'en général, le rapport τ_1/τ_0 augmente avec la concentration massique du moins si on la caractérise par la variation dans l'étoile de q avec x et non pas simplement par $\rho_c/\bar{\rho}$. Le rapport τ_1/τ_0 atteint les plus hautes valeurs connues soient 0,765 et 0,780 respectivement pour les modèles 4 et 7 d'EPSTEIN, valeurs qui pourraient être significatives pour tout un groupe d'étoiles variables [10] où τ_1/τ_0 est de l'ordre de 0,77.

TABLEAU IV

VALEURS DE τ_1/τ_0 POUR DIFFÉRENTS MODÈLES ET $\gamma = 5/3$

MODÈLES	$\tau_0\sqrt{\bar{\rho}/\rho_\odot}$	τ_1/τ_0
Modèle homogène	0,1156	0,28
Modèle de ROCHE	0,0747	0,393
Polytrope $n = 1,5$	0,0704	
Modèle II	0,0558	
Modèle-standard	0,0389	0,738
Modèle d'EPSTEIN (4)......	0,0308	0,765
Modèle d'EPSTEIN (7)......	0,0314	0,780

Nous espérons calculer prochainement τ_1/τ_0 pour le modèle possédant une zone convective très profonde et il sera curieux de voir comment il se comporte par rapport au cas d'une étoile entièrement convective où sa valeur, d'après le tableau IV, devrait être de l'ordre de 0,5.

Il n'est pas inutile de remarquer que, surtout dans les modèles originaux d'EPSTEIN, des masses extérieures de l'ordre de (1/10 000) M jouent un rôle important dans la détermination des périodes. En particulier pour le premier mode, la zone de plus grand poids dans le cas du modèle 4 est centrée sur $x = 0,85$ où $T \simeq 1/300\ T_c$ c'est-à-dire très près des conditions où l'approximation adiabatique cesse d'être valide.

Quant à la stabilité vibrationnelle avec les taux d'accroissement de ξ signalés précédemment, la génération d'énergie n'y joue vraiment plus aucun rôle et par conséquent, l'oscillation doit être entretenue essentiellement par des phénomènes se produisant dans les couches très extérieures. Ainsi, une étude détaillée et délicate de ces couches s'avérera sans doute nécessaire.

4. APPROXIMATION POUR LA FRÉQUENCE FONDAMENTALE.

Nous avons déjà signalé que pour ces modèles fortement condensés vers le centre, la formule (1) cesse d'être une approximation raisonnable. On peut se demander si l'on ne peut pas remplacer ξ = constante par une hypothèse plus favorable. En particulier, si nous désignons par $\bar{\rho}(r)$, la densité moyenne dans la sphère de rayon r les intégrations numériques suggèrent une certaine proportionnalité entre les variations de $\delta\rho/\rho$ et $\bar{\rho}(r)^{-1}$ qui peut s'écrire

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\,\delta r) \div \frac{1}{\bar{\rho}(r)} \tag{9}$$

ou

$$r^2\,\delta r \div \int_0^r \frac{r^2\,dr}{\bar{\rho}(r)} = \mathrm{J}(r) \tag{10}$$

En éliminant δr entre les équations (4) et (9), on obtient une équation différentielle en $\delta\rho/\rho$ qui peut s'écrire

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{\frac{r^2\dfrac{d}{dr}\left(\gamma\,\mathrm{P}\dfrac{\delta\rho}{\rho}\right)}{\rho\left(\sigma^2+\dfrac{16\pi\mathrm{G}\bar{\rho}(r)}{3}\right)}\right\} + \frac{\delta\rho}{\rho} = 0 \tag{11}$$

et le procédé le plus direct consisterait à déduire une expression pour σ^2 de cette équation et à y faire usage de l'approximation (9). Malheureusement, (11) conduit à une équation du second degré en σ^2 qui ne paraît pas fort pratique et qui n'a pas fourni d'approximation satisfaisante. D'autre part, en intégrant l'équation (4) par partie et en tenant compte des conditions aux limites, on a

$$\sigma^2 = (3\gamma - 4)\,\frac{\displaystyle\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{P}\,\frac{d}{dr}(r^2\,\delta r)\,dr}{\displaystyle\int_0 (r^2\delta r)\,\rho r\,dr}.$$

Si on y introduit les approximations (9) et (10), on obtient

$$\sigma^2 = (3\gamma - 4)\,\frac{\displaystyle\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{J}(r)\,\rho r\,dr}{\displaystyle\int_0^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{P}r^2\,dr}{\bar{\rho}(r)}} \tag{12}$$

qui est un peu fastidieuse à évaluer numériquement. Toutefois, on peut remarquer que l'hypothèse (9) n'est pas très différente formellement de celle qui consiste à poser directement

$$\frac{\delta r}{r} \div \frac{1}{\bar{\rho}(r)} \tag{13}$$

En effet, celle-ci entraîne

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \div \frac{3}{\bar{\rho}(r)}\left[2 - \frac{\rho}{\bar{\rho}(r)}\right]$$

et dans les modèles fortement condensés, $\rho/\bar{\rho}(r)$ n'est appréciablement différent de zéro que très près du centre.

La relation (13) conduit alors à la formule approchée plus maniable

$$\sigma^2 = (3\gamma - 4)\,\frac{4\pi G\rho(R)}{3}\,\frac{\int_0^R [\rho/\bar{\rho}(R)]\, r^4\, dr}{\int_0^R [\rho/\bar{\rho}(r)]\, r^4\, dr} \tag{14}$$

Les deux formules ont été appliquées à différents modèles et donnent pratiquement des résultats identiques, comme on peut en juger d'après le tableau V

TABLEAU V

APPROXIMATIONS POUR LA FRÉQUENCE FONDAMENTALE

MODÈLE	$\rho_C/\bar{\rho}(R)$	ω_{exact}	ω approché formule (1)	formule (12)	formule (14)	$\left(\frac{\tau_{app.}}{\tau_{exact}}\right)$
—	—	—	—	—	—	—
Modèle-standard $\gamma = 5/3$	54,18	3,0427	3,643	2,82	2,79	1,08
Polytrope $n = 4$ $\gamma = 1{,}428$	622,44	3,266	4,799	2,816		1,16
Modèle II $\gamma = 5/3$	1,2 .10⁶	2,07		1,75	1,76	1,18
Modèle I $\gamma = 5/3$	5,4 .10⁵	2,47	10,76	2,69	2,66	0,917
Modèle 4 de EPSTEIN	1,92.10⁶	3,753	20,72	4,75	4,87	0,79

On constate que l'approximation (formule 12 ou 14) n'est pas mauvaise et en tout cas, elle peut être utile pour réduire appréciablement les tâtonnements au début d'une intégration numérique. Malheureusement, ici, contrairement au cas de la formule (1) qui donne toujours des valeurs de σ par excès, on ne sait pas *a priori* si la valeur obtenue est trop grande ou trop petite.

On pourrait chercher à améliorer l'approximation à partir de (11) en y remplaçant σ^2 par une première approximation et en déduisant une seconde approximation pour $\delta\rho/\rho$ mais cette méthode n'a donné que des expressions peu maniables et présentant peu d'avantage au point de vue de la précision si ce n'est qu'on peut tenir compte un peu mieux de l'influence de γ.

Remarquons enfin que la seconde approximation dans la méthode de RITZ[3] donne déjà, dans le cas du modèle 4 de EPSTEIN, une valeur du même ordre que celle tirée des formules (12) ou (14).

Manuscrit reçu le 24 *janvier* 1955.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Voir par exemple : P. Dumézil-Curien, *Ann. Astr.*, **17**, 1954, 197.
[2] I. Epstein, *Ap. J.*, **112**, 1950, 6.
[3] P. Ledoux and C. L. Pekeris, *Ap. J.*, **94**, 1941, 124.
[4] Voir par exemple : W. Baade, *Symposium on Astrophysics*, The University of Michigan, 1953.
[5] M. Savedoff, *B. A. N.*, XII, 1953, 59 ; voir aussi : R. P. Kraft, *P. A. S. P.*, **65**, 1953, 146.
[6] P. Ledoux, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1952, 408.
[7] R. S. Richardson and M. Schwarzschild, *Ap. J.*, **108**, 1948, 373.
[8] N. Fairclough, *M. N.*, **92**, 1932, 644.
[9] H. A. Abt, *Ap. J.*, supplement series, **1**, 1954, 63.
[10] Th. Walraven, *B. A. N.*, XII, 1953, 57.