

12 — SUR LES CONDITIONS D'EQUILIBRE AU CENTRE DES ETOILES ET LEUR EVOLUTION

PAR

P. LEDOUX

Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège

1. — INTRODUCTION

Si la composition chimique est uniforme et si la pression de radiation est négligeable, la condition d'instabilité de l'équilibre radiatif peut s'écrire, là où le gaz stellaire peut être considéré comme monoatomique,

$$\left(\frac{d \log T}{d \log P} \right)_r = - \frac{3\kappa L(r) P}{16\pi acGT^4 m(r)} > \frac{2}{5} \quad (1)$$

grâce aux définitions des gradients de température et de pression

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3\kappa \rho L(r)}{16\pi acT^3 r^2} \quad (2) \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho}{r^2} \quad (3)$$

Suivant les notations habituelles a , c , G désignent respectivement la constante de Stefan-Boltzmann, la vitesse de la lumière et la constante de gravitation et κ le coefficient d'opacité. La pression P et la température T sont reliées entre elles et à la densité ρ et au poids moléculaire moyen μ par la loi des gaz parfaits $P = \mathfrak{R}\rho T/\mu$. La luminosité et la masse sont définies par

$$L(r) = \int_0^r 4\pi \rho \varepsilon r^2 dr \quad (4) \quad \text{et} \quad m(r) = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr \quad (5)$$

où ε est le taux de génération d'énergie.

Si nous désignons par α_c , la limite du premier membre de (1) quand $r \rightarrow 0$, on a

$$\alpha_c = \frac{3 \kappa_c \rho_c \varepsilon_c}{16 \pi a c G \mu T_c^3} \quad (6)$$

et la condition (1) devient au centre

$$\alpha_c > \frac{2}{5} \quad (7)$$

Malheureusement, il n'existe pas de relation analytique qui permette de déterminer, à partir des grandeurs macroscopiques M , L , R caractérisant l'étoile, les valeurs de T_c et ρ_c pour la solution régulière qui satisfait à la condition à la surface $\rho \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow R$. Par conséquent, la condition (7) n'est pas directement utilisable ⁽¹⁾. Cependant, pour la loi de Kramers et si on peut poser $\varepsilon \div \rho T^\nu$, de nombreuses intégrations numériques ont confirmé la conclusion de T.G. Cowling ⁽²⁾ qu'un noyau convectif existe certainement si ν est plus grand qu'une certaine valeur critique comprise entre 4 et 6.

Dans le cas du cycle du carbone ($\nu \cong 17$ à 20), ceci ne laisse guère de doute quant au modèle à adopter, mais dans le cas de la réaction proton-proton comme ν est de l'ordre de 4, on est au voisinage même des conditions critiques. Dans le cas du soleil, on peut vérifier ceci immédiatement en évaluant α_c grâce aux valeurs numériques des modèles de Epstein ⁽³⁾ et Epstein et Motz ⁽⁴⁾. On trouve respectivement

$$\alpha_c = 0,3932 \text{ et } 0,3877$$

si bien que la radiation à elle seule suffirait à transporter l'énergie libérée sans que le gradient radiatif devienne instable. Ces nombres sont cependant très proches de la valeur critique 0,4 de α_c et dans des cas semblables, une étude plus détaillée des conditions de stabilité aux environs du centre semble justifiée d'autant plus que l'existence ou non d'un noyau convectif au centre de l'étoile peut affecter considérablement son évolution.

2. — STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE RADIATIF AUX ENVIRONS DU CENTRE QUAND LE POIDS MOLÉCULAIRE MOYEN EST CONSTANT

Si nous désignons par des indices primes les dérivées, on a

$$\left(\frac{\rho''}{\rho}\right)_c = -\frac{4\pi G \rho_c \mu}{3\mathfrak{R}T_c} (1 - \alpha_c) \quad (8)$$

$$\left(\frac{T''}{T}\right)_c = -\frac{4\pi G \rho_c \mu}{3\mathfrak{R}T_c} \alpha_c \quad (9)$$

et suffisamment près du centre

$$L(r) = 4\pi \rho_c \varepsilon_c \frac{r^3}{3} \left[1 + \frac{3}{5} \frac{\rho_c''}{\rho_c} r^2 + \frac{3\nu T_c''}{10 T_c} r^2 \right] \quad (10)$$

$$m(r) = 4\pi \rho_c \frac{r^3}{3} \left[1 + \frac{3}{10} \frac{\rho_c''}{\rho_c} r^2 \right] \quad (11)$$

On en déduit à partir de (1), en supposant $\kappa \div \rho^n T^{-m}$

$$\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_R = \alpha_c \left[1 + \frac{r^2}{2} \frac{\rho_c''}{\rho_c} \left(n + \frac{8}{5}\right) + \frac{r^2 T_c''}{2 T_c} \left(\frac{3\nu}{5} - m - 3\right) \right] \quad (12)$$

$$\text{ou } \left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_R = \alpha_c \left\{ 1 - \frac{4\pi G \rho_c \mu}{6\mathfrak{R}T_c} r^2 \left[n + \frac{8}{5} + \alpha_c \left(\frac{3}{5} \nu - m - n - \frac{23}{5}\right) \right] \right\} \quad (13)$$

On remarque que si

$$\nu > \frac{5}{3} \left(m + n + \frac{23}{5} \right); \nu > 15,2 \text{ (loi de Kramers);}$$

$$\nu > 7,7 \text{ (diffusion)}$$

$(d \log T / d \log P)_R$ et donc aussi l'instabilité sont toujours maximum au centre ce qui sera toujours vrai en particulier pour le cycle du carbone.

Au contraire, si

$$\nu < \frac{5}{3} \left[m + n + \frac{23}{5} - \frac{1}{\alpha_c} \left(n + \frac{8}{5} \right) \right] \quad (14)$$

$(d \log T / d \log P)_R$ possède un minimum au centre et l'instabilité croît avec r . Pour la valeur critique $\alpha_c = 0,4$, on trouve

$$\nu < 4,33 \text{ (} n = 1, m = 3,5 \text{); } \nu < 3,91 \text{ (} n = 0,5, m = 2,5 \text{);}$$

$$\nu < 1 \text{ (diffusion)} \quad (15)$$

Notons aussi que les valeurs critiques de ν varient rapidement avec α_c . Pour la loi de Kramers, la condition devient : $\nu < 2,7$ si $\alpha_c = 0,35$ et $\nu < 5,5$ si $\alpha_c = 0,45$. Ainsi, tant que les processus de photoionisation restent dominants, on voit que l'exposant caractérisant la réaction proton-proton est encore très proche de ces nouvelles valeurs critiques qui aux environs du centre déterminent le sens de variation de $(d \log T / d \log P)_R$ quand on approche de la limite de stabilité. Si $(d \log T / d \log P)_R$ atteint la valeur critique 0,4 en un point au voisinage du centre, on admet d'ordinaire que l'équilibre convectif s'établit dans la région intérieure. Mais dans le cas de la réaction proton-proton, d'après ce que nous avons vu plus haut, il est fort possible que la stabilité se renforce à nouveau plus près du centre. Pour vérifier à posteriori, la nécessité de la convection dans cette région, il faut évaluer en chaque

point, au moyen de l'équation (2) où ρ et T prennent leurs valeurs convectives, le gradient radiatif qui serait nécessaire pour transporter l'énergie et voir s'il est ou non superadiabatique. Dans ce cas également, nous pouvons encore discuter la variation de l'instabilité aux environs du centre à partir de l'équation (12) où nous remplaçons ρ_c''/ρ_c et T_c''/T_c par leurs valeurs adiabatiques ce qui donne, en terme des variables polytropiques ξ et θ .

$$\left(\frac{d\log T}{d\log P}\right)_{r,A} = \alpha_{c,A} \left\{ 1 - \frac{\xi^2}{2} \left[\frac{1}{2} \left(n + \frac{8}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3\nu}{5} - m - 3 \right) \right] \right\} \quad (16)$$

où nous avons rappelé par un indice A qu'il s'agit de grandeurs calculées dans la zone adiabatique. On en déduit que $(d\log T/d\log P)_{r,A}$ aura un minimum en $r = 0$, si

$$\nu < 1 + \frac{5}{3}m - \frac{5}{2}n \quad (17)$$

Remarquons que cette condition est équivalente à (14) si dans cette dernière on pose $\alpha_c = 0,4$ et qu'elle nous fournit par conséquent les mêmes valeurs critiques (15).

La discussion complète dépendra à la fois des valeurs de α_{cR} et α_{cA} et des valeurs critiques ν_r et ν_A et il n'est pas impossible que dans certains cas, il soit difficile pour l'étoile de trouver un véritable état d'équilibre, les conditions purement radiatives conduisant à l'instabilité mais les modifications générales entraînées par la convection faisant disparaître la cause de celle-ci.

La condition (17) prise avec le signe contraire est équivalente à celle établie récemment par P. Naur et D.E. Osterbrock (4) en généralisant à une région où $L(r)$ varie, la condition nécessaire (5) pour que $(d\log T/d\log P)_r$ grandisse pour des valeurs de r plus petites que celle où elle atteint la valeur critique 0,4 et que la solution radiative

puisse donc être prolongée à partir de ce point par une solution convective. Considérée à partir de la solution convective, c'est la condition nécessaire pour que au point où $(d\log T/d\log P)_{r,A}$ atteint la valeur 0,4, l'équilibre radiatif puisse se substituer à l'équilibre convectif. Mais elle ne peut en elle-même être considérée comme une condition nécessaire pour l'existence d'un noyau convectif. En effet, si par exemple, α_c est juste égal à 0,4 et si ν est plus petit que la valeur critique (15), l'instabilité croît en s'éloignant du centre et il y aura certainement une petite zone instable.

Dans un certain sens cependant, un exposant ν satisfaisant à la condition (14) peut être considéré comme favorable à la stabilité et à l'équilibre radiatif. En effet, dans ce cas, si on parvient à s'approcher raisonnablement près du centre le long d'une solution radiative sans que $(d\log T/d\log P)_r$ dépasse la valeur 0,4, il y a plus de chance pour que l'équilibre radiatif subsiste jusqu'au centre puisque à partir d'un certain point $(d\log T/d\log P)_r$ doit commencer à diminuer avec r .

3. — EFFET D'UNE VARIATION DU POIDS MOLÉCULAIRE MOYEN μ SUR LA STABILITÉ AUX ENVIRONS DU CENTRE

D'après les résultats rappelés dans l'introduction concernant les valeurs de $\alpha_{c,A}$ au centre des modèles de Epstein et Epstein et Motz et d'après la discussion précédente, il semble fort probable que dans certains cas tout au moins, la réaction proton-proton n'entraînera pas l'existence d'un noyau convectif. Dans ce cas, la composition chimique variera lentement dans les régions centrales de l'étoile créant un gradient de μ dont il faut tenir

compte dans la condition d'instabilité qui s'écrit alors ⁽⁵⁾ :

$$\frac{d \log T}{d \log P} - \frac{d \log \mu}{d \log P} > \frac{2}{5} \quad (18)$$

Remarquons d'abord qu'ici, $d\mu/dr$ et $d\varphi/dr$ ne s'annulent pas nécessairement en $r = 0$ tandis qu'à cause de leurs définitions (2) et (3) dT/dr et dP/dr y sont toujours nuls. Naturellement, si $(d\mu/dr) \neq 0$ au centre, toute convection y devient impossible. Cependant, ce cas reste purement formel tant qu'un processus physique capable de produire une telle distribution de μ n'a pas été découvert.

Si nous nous bornons aux effets de la réaction proton-proton, la variation au cours du temps, de l'abondance en masse X de l'hydrogène H dans un élément de matière donné est déterminée par

$$X_0 - X = \frac{1}{E_0} \int_0^t \varepsilon dt \quad (19)$$

où E est l'énergie libérée par la transformation complète d'un gramme d'hydrogène en hélium. Si Y désigne l'abondance de He et si on tient compte de la condition

$$X + Y = \text{constante} = C$$

$$\mu = \frac{2}{1 + 2,5 X + 0,5 C} \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dr} = - \frac{4}{5\mu^2} \frac{d\mu}{dr} \quad (20)$$

et si on se rappelle que pour cette réaction ε est de la forme $\varepsilon_0 X^2 \rho T^\nu$, on tire de (19) en première approximation

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} = \frac{5}{4 E_0} \int_0^t \left\{ 1 + (\nu - 1) \frac{d \log T}{d \log P} - \frac{d \log \mu}{d \log P} \cdot \frac{10 + (5 + 2,5C)\mu}{10 - (5 + 2,5C)\mu} \right\} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \varepsilon dt \quad (21)$$

ou encore

$$\frac{d \log \mu}{d \log P} = \frac{5}{4} \mu \left[\int_0^t \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \varepsilon dt \Big/ \frac{E}{P} \frac{dP}{dr} \right] \times \\ \times \left\{ 1 + (\nu - 1) \frac{d \log T}{d \log P} - \frac{10 + (5 + 2,5C)\mu}{10 - (5 + 2,5C)\mu} \cdot \frac{d \log \mu}{d \log P} \right\}$$

Si nous désignons par λ , le rapport entre crochets qui doit être de l'ordre de la proportion d'hydrogène transformé en hélium et par β , le rapport du dernier terme de l'accrochage au premier membre ($\beta \simeq 1$ à 2) il vient

$$\left(1 - \frac{5}{4} \mu \lambda \beta \right) \frac{d \log \mu}{d \log P} = \frac{5}{4} \mu \lambda \left\{ 1 + (\nu - 1) \frac{d \log T}{d \log P} \right\} \quad (22)$$

Comme $(d \log T / d \log P)$ ne varie que très lentement au cours du temps et que ce sont les conditions au début de l'évolution quand X est encore ~~petit~~ qui nous intéressent surtout, nous pouvons encore écrire (22) en négligeant les termes du second ordre en λ

$$\frac{d \log \mu}{d \log P} = \frac{5}{4} \mu \lambda \left\{ 1 + (\nu - 1) \frac{d \log T}{d \log P} \right\}$$

La condition d'instabilité (18) devient ainsi

$$\frac{d \log T}{d \log P} \left[1 - (\nu - 1) \frac{5}{4} \mu \lambda \right] > \frac{2}{5} + \frac{5}{4} \mu \lambda \quad (23)$$

qui à ce degré d'approximation est aussi valide pour le cycle du carbone. La correction ainsi introduite peut être déterminante dans des cas critiques comme ceux discutés plus haut, même pour des valeurs relativement faibles de λ .

Par exemple, aux confins de la zone radiative des modèles(3) et(4), $\varepsilon \simeq 10$ ergs /gr.sec. et avec $E = 6,4 \cdot 10^{18}$ ergs

on voit qu'en 3.10^9 années $X_0 - X = \lambda \approx 0,15$. Avec cette valeur de λ et $\mu \approx 0,6$, $\nu = 4,5$, la condition (23) devient

$$\frac{d \log T}{d \log P} [1 - 0,40] > 0,4 + 0,11 \quad \text{ou} \quad \frac{d \log T}{d \log P} > 0,85$$

ce qui constitue un accroissement considérable de la stabilité et il est certain que si l'on tenait compte de cette variation de μ dans la zone radiative, celle-ci pourrait s'étendre jusqu'au centre.

D'autre part, si au cours de son évolution, une étoile reste suffisamment longtemps dans un stade où la réaction proton-proton est dominante, on peut même se demander si cette dernière n'aura pas créé un gradient de μ suffisant pour empêcher la convection même si ultérieurement, le cycle du carbone entre en jeu. Ainsi quand les deux réactions sont égales au centre, soit pour $T_c \approx 16.10^6$ °K et $\rho_c \approx 100$ gr/cm³ on trouve en utilisant pour ε et κ , les expressions de Epstein et Motz, $\alpha_c \approx 0,6$ si bien que dans des circonstances analogues à celles considérées ci-dessus, l'équilibre radiatif subsisterait encore. Notons que dans un cas semblable, le gradient de μ et la stabilité croîtraient rapidement sous l'effet du cycle du carbone à cause de la grande valeur de ν dans ce cas.

En procédant comme au paragraphe 2, mais en tenant compte des variations de X et de μ et en notant que puisque $X + Y = C$, $\kappa \div (1 + X)$, on trouve qu'aux environs du centre

$$\left(\frac{d \log T}{d \log P} \right)_r = \alpha_c \left\{ 1 + r^2 \left[\frac{X_c''}{2(1+X_c)} + \frac{3 X_c''}{5 X_c} + \frac{\rho_c''}{2 \rho_c} \left(n + \frac{8}{5} \right) + \frac{T_c''}{2 T_c} \left(\frac{3\nu}{5} - m - 3 \right) - \frac{\mu_c''}{2 \mu_c} \right] \right\} \quad (24)$$

D'autre part, un calcul approché comme ci-dessus nous permet d'écrire en négligeant les termes d'ordre supérieur en λ

$$\frac{d \log \mu}{d \log P} = \frac{5}{4} \mu_c \lambda \left\{ 1 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\rho_c''}{\rho_c} + \nu \frac{T_c''}{T_c} \right) + \right. \\ \left. + (\nu - 1) \alpha_c \left[1 + \frac{r^2}{2} \frac{\rho_c''}{\rho_c} \left(n + \frac{13}{5} \right) + \frac{r^2}{2} \frac{T_c''}{T_c} \left(\frac{8\nu}{5} - m - 3 \right) \right] \right\} \quad (25)$$

De même, on a

$$X_c'' = -\lambda \left(\frac{\rho_c''}{\rho_c} + \nu \frac{T_c''}{T_c} \right) \quad (26)$$

et les valeurs des différentes dérivées secondes apparaissant dans ces expressions sont

$$\frac{\mu_c''}{\mu_c} = -\frac{5}{4} \mu_c X_c'', \quad \frac{\rho_c''}{\rho_c} = -\frac{4\pi G \rho_c \mu_c}{3 \mathfrak{R} T_c} (1 - \alpha_c) + \frac{\mu_c''}{\mu_c}, \quad \frac{T_c''}{T_c} = -\frac{4\pi G \rho_c \mu_c}{3 \mathfrak{R} T_c} \alpha_c$$

Notons que dans les expressions (25) et (26), on peut remplacer ρ_c''/ρ_c par sa valeur (8) puisque l'on néglige les termes en λ^2 etc. tandis que dans (24) il faut introduire son expression complète. On trouve ainsi que la condition (18) peut s'écrire

$$\alpha_c \left[1 - \frac{5}{4} \mu_c \lambda (\nu - 1) \right] - \frac{r^2}{2} \frac{4\pi G \rho_c \mu_c \alpha_c}{3 \mathfrak{R} T_c} \times \\ \times \left\{ \left[n + \frac{8}{5} + \alpha_c \left(\frac{3\nu}{5} - m - n - \frac{23}{5} \right) \right] \left[1 - \frac{5}{4} \mu_c \lambda (\nu - 1) \right] \right. \\ \left. - \frac{5}{4} \mu_c \lambda \left[\frac{24}{25} \frac{5}{4 - (2 + C) \mu_c} + \frac{4}{4 + (3 - C) \mu_c} - \left(n + \frac{3}{5} \right) + \nu \right] \right. \\ \left. \times [\alpha_c (\nu - 1) + 1] + \frac{5}{4} \mu_c \lambda (\nu - 1) [\alpha_c - 1] \right\} - \frac{5}{4} \mu_c \lambda > 0.4 \quad (27)$$

Si on évalue le coefficient de r^2 pour $m = 3,5$, $n = 1$,

$\alpha_c = 0,4$, on trouve que pour $\lambda > 0,03$ c'est-à-dire dans le cas de la réaction proton-proton, après une durée relativement courte de l'ordre de $2 \cdot 10^8$ années, le coefficient de r^2 est toujours négatif si bien que l'instabilité a toujours un minimum au centre quel que soit ν .

Pour des valeurs de λ plus petites et par conséquent des évolutions plus courtes, il apparaît deux valeurs critiques pour ν (égales respectivement à 5 et 41 et à 4,39 et 464 pour $\lambda = 0,01$ et $\lambda = 0,001$) dont l'une tend rapidement vers l'infini et l'autre vers la valeur 4,33 quand λ tend vers zéro. Pour des valeurs de ν comprises entre ces limites, l'instabilité a un maximum au centre. On voit donc qu'une évolution relativement courte de 10^7 à 10^8 années peut déjà modifier la stabilité aux environs du centre et affecter appréciablement la valeur critique de ν qui sépare les cas de stabilité ou d'instabilité maximum au centre.

4. — CONCLUSIONS

Bien qu'il subsiste quelque incertitude au sujet des réactions nucléaires envisagées et surtout en ce qui concerne la loi d'opacité, les considérations précédentes suffisent cependant à montrer qu'une discussion détaillée de la stabilité convective aux environs du centre peut être nécessaire du moins dans le cas de la réaction proton-proton.

Comme nous l'avons vu, il se pourrait dans certains cas que l'étoile oscille alternativement entre l'équilibre convectif et l'équilibre radiatif dans ses régions centrales.

D'autre part, il y a sûrement des cas où l'équilibre radiatif subsiste jusqu'au centre et il y a lieu alors de

tenir compte du gradient de μ qui résulte de la transformation d'hydrogène en hélium ce qui, comme nous l'avons montré au dernier paragraphe, renforce considérablement la stabilité.

D'autre part, l'évolution de l'étoile dépend très fort de l'existence ou non d'un noyau convectif. En effet, dans le premier cas, la région centrale restera bien mélangée, ses réserves d'hydrogène ne diminueront que lentement et uniformément et l'apparition d'une région centrale isotherme une fois tout l'hydrogène consumé dans le noyau convectif reste un phénomène complexe et difficile à décrire. Dans l'autre cas, au contraire, l'hydrogène sera relativement vite consumé au centre et ceci permettra un amorçage hâtif du noyau isotherme et son développement régulier.

Inversement, dans toute tentative de représenter l'état actuel des étoiles, il ne faut pas perdre de vue que toute l'évolution antérieure peut avoir une influence considérable sur le type d'équilibre qui règne dans les régions centrales. Ainsi les modèles solaires (^{3,4}) basés sur la réaction proton-proton sont supposés de composition chimique uniforme et l'abondance de l'hélium y est négligeable. Or l'âge du soleil est au moins de 3.10^9 années et en cette période, la réaction proton-proton elle-même aurait produit au moins 15 à 20 % d'hélium dans les régions centrales. Si de plus, on adoptait pour les couches extérieures une abondance normale de l'hélium, la température centrale augmenterait et il est possible que la contribution du cycle du carbone cesse alors d'être négligeable. En tout cas, il n'y a pas de doute que pour le soleil, un modèle présentant une variation de composition chimique, soit sous la forme d'une saute brusque à la séparation entre l'enveloppe radiative et le noyau convectif (⁷), soit sous une forme plus générale

telle que celle discutée ici, constitue une possibilité plus logique que les modèles uniformes encore si souvent considérés.

Enfin, remarquons qu'il serait urgent d'avoir quelque idée des premiers stades d'évolution stellaire car comme nous l'avons signalé au paragraphe 3, si au cours de son évolution, l'étoile est passée par un état où des réactions à faible dépendance de la température ont créé un gradient suffisant de μ , il se peut que même le cycle du carbone ne puisse dans la suite rendre l'équilibre radiatif instable aux environs du centre.

BIBLIOGRAPHIE

1. Voir une tentative intéressante due à J. WASIUTYNSKI, « Studies in Hydrodynamics and Structure of Stars and Planets », *Astrophysica Norvegica*, vol. 4, par. 26.5, p. 340, 1946.
2. T. G. COWLING, *M. N.*, **94**, 768, 1934.
3. I. EPSTEIN, *Ap. J.*, **114**, 488, 1951.
4. I. EPSTEIN et L. MOTZ, *Ap. J.*, **117**, 311, 1953.
5. P. NAUR et D. E. OSTERBROCK, *Ap. J.*, **117**, 306, 1953.
6. P. LEDOUX, *Ap. J.*, **105**, 306, éq. (59) et (60), 1947; *Mem. Soc. Roy. Sc. Liège*, 4^o Série, T. IX, ch. II, par. 6, 1949.
7. P. LEDOUX, *Ann. Aph.*, **11**, 174, 1948.