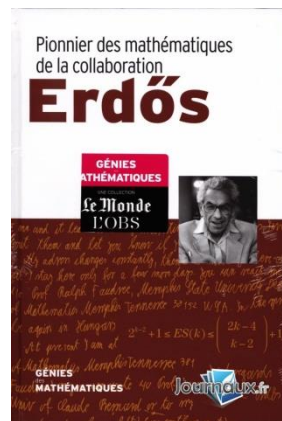


## Distance de collaboration

**Résumé.** L'illustre mathématicien Paul Erdős est quelquefois appelé le « pionnier des mathématiques de la collaboration ».

Cette appellation suggère une petite étude présentant un concept général mesurant en quelque sorte le degré de collaboration entre des mathématiciens-chercheurs.

**Mots clés :** collaborateurs scientifiques ; nombre d'Erdős ; distance de collaboration.



Le mathématicien Paul Erdős est né en 1913 à Budapest et mort en 1996 à Varsovie. Il fut une figure marquante des mathématiques du 20<sup>e</sup> siècle. Il a laissé un héritage scientifique imposant : il a rédigé environ mille cinq cents publications scientifiques dans des domaines variés (théorie des nombres, combinatoire, graphes, topologie, probabilités,...). Il excellait dans la résolution de problèmes, trouvant des solutions élégantes et simples pour des problèmes ardu (parfois faciles à expliquer, mais très difficiles à résoudre) ; il pensait que « tout mathématicien devrait admettre que Dieu possède un grimoire, le ‘Grand Livre’, dans lequel sont rassemblées les plus élégantes démonstrations des théorèmes mathématiques ». Il est encore connu aujourd’hui parce que son nom est associé à de nombreuses conjectures sur lesquelles ont travaillé de grands mathématiciens, tels que T. Gowers et T. Tao dont il est question dans d’autres articles de ce dossier ; certaines d’entre elles constituent des questions non encore résolues.

Plutôt que de détailler ses (multiples) contributions mathématiques ou encore l’histoire (pourtant intéressante) de sa vie, attardons-nous sur un aspect assez particulier et caractéristique de sa méthode de travail. Tout au long de sa carrière, Paul Erdős a privilégié le travail collaboratif : il a publié en collaboration avec plus de cinq cents auteurs différents. D’ailleurs, il menait pratiquement une vie de nomade, voyageant de ville en ville au gré de ses rencontres avec des mathématiciens s’intéressant aux mêmes problèmes que lui.

Cette caractéristique est à la base de la création du nombre d'Erdős ; celui-ci mesure en quelque sorte la proximité, en termes de collaborations successives, entre un chercheur et le mathématicien hongrois.

Précisons ce concept.

Si une personne a un nombre d'Erdős qui vaut 1, cela signifie qu'elle a écrit un article de recherche avec Paul Erdős ; si son nombre d'Erdős est égal à 2, c'est qu'elle a cosigné un article avec un collaborateur direct d'Erdős mais pas avec Paul Erdős lui-même, etc.

Plus formellement, le nombre d'Erdős d'une personne est défini de proche en proche de la façon suivante :

- le nombre d'Erdős de Paul Erdős est évidemment nul par convention ;
- le nombre d'Erdős d'une personne autre que le hongrois mais qui a cosigné un article avec lui est égal à 1 ;
- est égal à 2 le nombre d'Erdős d'une personne qui n'a pas cosigné un article avec Paul Erdős mais qui est co-auteur avec une personne possédant le nombre d'Erdős égal à 1 ;
- et ainsi de suite pour les entiers suivants pris dans l'ordre naturel, sachant que si un chercheur n'est pas collaborateur direct ou indirect d'Erdős, son nombre d'Erdős est par convention considéré comme étant 'infini'.

En termes équivalents, on peut considérer le graphe dont les sommets sont les mathématiciens-chercheurs, tandis qu'une arête entre deux sommets différents indique que les deux auteurs correspondant aux sommets-extrémités ont cosigné au moins un article en commun. Dans ce cas, le nombre d'Erdős d'un sommet  $S$  est la longueur minimale d'une « chaîne » (c'est-à-dire une succession d'arêtes dont l'extrémité de l'une est une extrémité de la suivante) reliant  $S$  au sommet relatif à Paul Erdős.

Bien entendu, les mathématiciens anciens, même les plus grands comme Euler et Gauss, ont un nombre d'Erdős infini. Le concept s'adapte essentiellement aux mathématiciens ayant vécu en même temps que le hongrois ou après celui-ci.

Il existe un site Web entièrement consacré aux nombres d'Erdős ; son titre en anglais est « *The Erdős Number Project* » ; il est entretenu par Jerry Grossman de l'Université d'Oakland (source : <https://www.oakland.edu/enp/>). Ce projet fournit de multiples informations sur les nombres d'Erdős : ce qu'ils sont, à quoi ils peuvent servir, qui s'y intéresse, qui possède un petit nombre d'Erdős, ...



Il est possible de rechercher le nombre d'Erdős de mathématiciens contemporains à partir de *MathSciNet*, une base de données de niveau recherche produite par l'*American Mathematical Society* (AMS en abrégé).



Par exemple, on y découvre qu'il y a 511 mathématiciens dont le nombre d'Erdős est égal à 1 ; certains de ces auteurs ont rédigé plusieurs articles avec le hongrois, le plus grand nombre de collaborations directes est atteint par le spécialiste hongrois de la théorie des nombres András Sárközy (né en 1941) qui compte 62 publications communes. On dénombre actuellement un peu plus de 11000 mathématiciens ayant un nombre d'Erdős égal à 2, dont T. Tao et C. Villani. Posséder un nombre d'Erdős égal à 3 est assez courant ; par exemple, T.

Gowers et l'auteur de ce texte sont dans ce cas. Jusqu'à présent, les titulaires d'une Médaille Fields ont un nombre d'Erdős inférieur ou égal à cinq, avec une moyenne pour ce groupe égale à trois.

Bien plus, *MathSciNet* permet de trouver le degré de proximité, en termes de collaborations successives, entre deux collaborateurs (pour autant bien sûr qu'ils soient tous deux répertoriés dans la base de données américaine) ; il se traduit par un nombre que l'on appelle quelquefois la « distance de collaboration » entre les deux personnes considérées.

	<p>© Copyright 2020, American Mathematical Society</p> 
<p><b>Nom d'un auteur</b></p>	<p><b>Nom d'un autre auteur</b></p>

(source : <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html>)

On l'aura aisément compris en consultant l'image ci-dessus, il suffit simplement d'introduire les noms des deux personnes concernées dans des cases prévues à cet effet : l'ordinateur fournit alors les noms de mathématiciens reliant au mieux les deux auteurs, en indiquant au passage la référence d'un article co-écrit par les deux protagonistes et recensé dans la revue *Mathematical Reviews*<sup>®</sup> (*MR*) produite par l'AMS. Par exemple, la « distance de collaboration » entre Cédric Villani et l'auteur de ces lignes est de 3, car ce dernier a écrit un article en collaboration avec l'israélien Mikhail G. Katz (MR3086638), qui a lui-même publié en collaboration avec l'italien Luigi Ambrosio (MR2803853), tandis que ce dernier a effectivement été le co-auteur de Cédric Villani (MR2006302).

Le concept de nombre d'Erdős et sa généralisation relative à la distance de collaboration font désormais partie du folklore des mathématiques contemporaines. Leur considération peut aussi déboucher sur l'étude de certains réseaux sociaux, en particulier sur le phénomène du « *small world* » (ou, en français, du « petit monde »), mais ceci est une autre histoire !