

UNIVERSITE DE LIEGE  
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

LE PROBLEME A N CORPS  
DANS LES NOYAUX ATOMIQUES.

ANNEE ACADEMIQUE  
1973 - 1974

TRAVAIL DE FIN D'ETUDES  
PRESENTE PAR  
ROCHUS Pierre  
POUR L'OBTENTION DU GRADE  
D'INGENIEUR PHYSICIEN



Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. HUMBLET pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire, et pour m'avoir permis de le faire dans les meilleures conditions.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur C. MAHAUX pour ses explications très instructives, qui m'ont permis d'éclaircir certaines difficultés.

J'ai également tiré un grand profit des cours enseignés par Monsieur le Professeur L. WINAND, qui m'ont donné le goût pour la physique nucléaire.

Ce travail a été réalisé avec la collaboration de Messieurs les Drs. A. LEJEUNE et J.P. JEUKENNE. Je leur adresse mes remerciements pour leur aide très efficace et constante, et pour le choix difficile des points intéressants à considérer lors d'une première approche de la vaste théorie à N corps dans les noyaux atomiques. Je remercie cordialement Monsieur J.P. JEUKENNE, qui a bien voulu lire ce mémoire.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes parents, qui m'ont permis d'entreprendre ces études.

## TABLE DES MATIERES

	<u>Page</u>
<u>INTRODUCTION</u> . . . . .	i à v
 <u>CHAPITRE I - THEORIE DE BRUECKNER</u>	
I.1. Introduction . . . . .	1
I.2. Interaction nucléon-nucléon . . . . .	2
I.3. Calcul de l'énergie d'un système de A nucléons. . . . .	5
I.4. Diagrammes de Feynman-Goldstone . . . . .	6
I.5. Théorème de Goldstone . . . . .	10
I.6. Matrice de Brueckner . . . . .	12
 <u>CHAPITRE II - LA MATIERE NUCLEAIRE INFINIE</u>	
II.1. Introduction . . . . .	18
II.2. Définition et propriétés de la matière nucléaire . . . . .	18
II.3. Résolution de l'équation de Bethe-Goldstone . . . . .	20
II.4. Méthode du spectre de référence . . . . .	24
II.5. Méthode de séparation . . . . .	29
II.6. Choix du potentiel U à une particule . . . . .	33
II.7. Résultats pour la matière nucléaire . . . . .	39
 <u>CHAPITRE III - LES NOYAUX FINIS</u>	
III.1. Introduction . . . . .	45
III.2. Principales différences entre les noyaux finis et la matière nucléaire . . . . .	46
III.3. Base de fonctions d'oscillateur harmonique . . . . .	47
III.4. Approximation de la densité locale . . . . .	49
III.5. Traitement de l'opérateur de Pauli . . . . .	52
III.6. Choix du potentiel U pour les noyaux finis . . . . .	58
 <u>CHAPITRE IV - RESULTATS ET CONCLUSIONS</u>	
IV.1. Historique . . . . .	68
IV.2. Calculs et résultats . . . . .	73
IV.3. Conclusions . . . . .	94

<u>APPENDICE A</u>	- Développement de Rayleigh-Schrödinger . . . . .	96
<u>APPENDICE B</u>	- Signe des diagrammes de Feynman-Goldstone . . . . .	99
<u>APPENDICE C</u>	- Calcul de l'énergie d'interaction de deux particules dans le vide . . . . .	101
<u>APPENDICE D</u>	- Relation entre $G_A$ et $G_B$ . . . . .	103
<u>REFERENCES</u>	. . . . .	105

## INTRODUCTION

La connaissance de la structure atomique constitue le but principal de la physique nucléaire théorique. Partant de l'interaction fondamentale entre deux nucléons (que nous désignerons par interaction N-N ), les physiciens s'efforcent de comprendre les propriétés des noyaux que suggèrent les expériences en laboratoire. Ce programme comprend deux grandes étapes.

A. Tout d'abord, il y a lieu de rechercher la meilleure approximation à l'interaction à deux corps réelle. Cette approximation peut être déduite de l'analyse de la diffusion de deux nucléons libres et de l'étude des propriétés du deutéron. Cependant, les résultats ainsi obtenus ne donnent des renseignements que sur les éléments de la matrice d'interaction, qui sont sur la couche en énergie. Les éléments en dehors de la couche en énergie qui sont nécessaires dans les calculs de structures nucléaires, ne sont pas accessibles expérimentalement. Un potentiel N-N unique n'existe pas et, ces dernières années, on a pu assister à l'apparition de plusieurs potentiels reproduisant les propriétés du système à deux nucléons avec plus ou moins de précision.

Il est possible d'espérer que l'interaction N-N puisse être déduite, d'une manière plus fondamentale, de la théorie mésique. Cependant, cette approche ne peut être utilisée que dans des approximations de basse énergie et ne fournit pas encore une description complète de l'interaction N-N . En fait, la plupart des potentiels utilisent, dans une proportion variable, les résultats de la théorie mésique pour la partie extérieure de l'interaction, la partie intérieure étant décrite de façon phénoménologique.

B. La seconde étape consiste à sélectionner parmi les différentes interactions auxquelles induit l'analyse des données expérimentales, celles qui reproduisent le plus correctement les propriétés de la matière nucléaire infinie, système uniforme pour lequel les calculs de structure sont grandement simplifiés par rapport au cas des noyaux. Les interactions ainsi retenues peuvent ensuite être utilisées dans le calcul des propriétés physiques fondamentales des noyaux finis, qui peuvent être comparées aux propriétés révélées par l'expérience.

Cette voie microscopique n'a cependant pas toujours été suivie.

Certains physiciens, comme Landau et Migdal, pensaient qu'il n'était pas possible de déterminer toutes les propriétés du noyau à partir de l'interaction fondamentale N-N . Landau et Migdal donnent une description phénoménologique des noyaux : ils paramétrisent les quantités étudiées et utilisent certaines valeurs extraites des expériences pour prédire d'autres phénomènes. La principale raison pour laquelle ces physiciens n'ont pas suivi une voie microscopique, qui nous semble cependant la plus attirante, a été la suivante. Landau croyait en l'existence d'un petit paramètre en fonction duquel les propriétés pourraient être développées en séries. Cet espoir fut déçu par les résultats de son étude de l' $^3\text{He}$  liquide. Aussi a-t-il préféré considérer une étude phénoménologique plutôt que de développer en série de puissances d'une grandeur qui n'est pas petite.

Ces considérations n'ont pas empêché Brueckner de concevoir une théorie microscopique à laquelle Goldstone a donné une base formelle, et dont la plupart des récents progrès et des applications sont dus à Bethe et à ses collaborateurs. Cette théorie a été abondamment appliquée à la matière nucléaire, pour laquelle on peut réellement calculer les propriétés à partir de l'interaction fondamentale. Les propriétés sont développées en séries de puissances d'un petit paramètre  $\kappa$  qui est faible dans le cas de la matière nucléaire ( $\kappa \approx 0,14$ ) mais n'est pas très petit pour l' $^3\text{He}$  liquide ( $\kappa \approx 0,55$ ) . La définition exacte de  $\kappa$  sera donnée plus tard. (Disons cependant que  $\kappa$  représente la proportion du volume moyen par nucléon, que le nucléon ne peut pas occuper à cause des forces exercées par les autres nucléons).

La description de la matière nucléaire a aussi été abordée par d'autres méthodes qui, pour la plupart, sont une simple application de la théorie d'un gaz de Fermi interagissant au zéro absolu. Puff [PUF 61] a appliqué la méthode de la fonction de Green de la mécanique statistique, proposée par Martin et Schwinger. Mohling [MOH 61,62] a développé la théorie de Lee et Yang de la mécanique quantique. Feenberg, Clark et d'autres [CLA 66] ont utilisé une méthode variationnelle inventée par Yastrow.

Dans ce travail, nous n'étudierons que la théorie de Brueckner, qui est de loin la plus utilisée et aussi la plus évoluée. Comme le problème à trois corps ne peut pas être résolu exactement, aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique quantique, cette théorie de-

vra utiliser des techniques d'approximations pour résoudre le problème à  $N$  corps qui se présente dans les noyaux finis (où  $N = 3$  à 250). La nature de ce problème est cependant différente de la nature des problèmes à  $N$  corps généralement rencontrés. En effet, les noyaux ne contiennent pas assez de nucléons pour que les méthodes statistiques donnent des résultats aussi bons que dans le cas des liquides et des gaz ; contrairement aux atomes, les noyaux ne possèdent pas non plus un centre de force. D'autre part, les méthodes de perturbations habituelles pour le calcul de l'énergie d'un système de  $N$  particules ne peuvent être utilisées. Les séries de perturbations donnant l'énergie totale divergent à cause du comportement singulier du potentiel d'interaction  $N-N$ . Celui-ci possède, à courtes distances, un coeur trop répulsif qui est dû à l'interaction des nuages de mésons qui entourent les nucléons. Nous verrons, dans le chapitre I, comment Brueckner a résolu le problème. Il suppose que, lorsque deux nucléons se rencontrent, le coeur répulsif de l'interaction  $N-N$  les fait passer par toute une série d'états intermédiaires qui, à cause du principe d'exclusion de Pauli, sont différents des états des autres nucléons. S'inspirant de la matrice de transition  $T$  utilisée pour l'étude de la diffusion, Brueckner définit alors une nouvelle matrice, appelée "matrice de réaction"  $G$  ou "matrice de Brueckner". Cette matrice vérifie une équation intégrale très semblable à l'équation de Lippman-Schwinger définissant la matrice  $T$ , mais il impose en plus que les états intermédiaires soient différents des états des autres nucléons dans le noyau. (Pour une matière nucléaire de très basse densité, les deux matrices  $T$  et  $G$  se confondent). Nous montrerons comment Brueckner propose d'écrire le développement en série donnant l'énergie non plus en fonction des éléments de la matrice d'interaction  $N-N$ , mais en fonction des éléments de la matrice  $G$ . Ceux-ci sont moins importants et si les termes de la série sont classés de façon à ce que la densité joue le rôle de petit paramètre, la série donnant l'énergie convergera. Ce développement, appelé développement de Goldstone, peut s'exprimer en termes de diagrammes de Feynman-Goldstone. Nous expliquerons comment ces diagrammes de Feynman-Goldstone peuvent être construits et évalués. Nous énoncerons aussi l'important théorème de Goldstone, qui démontre l'annulation de certains diagrammes gênants sous certaines conditions.

Dans le chapitre II, nous verrons de quelle manière la théorie de Brueckner peut être testée en l'appliquant à la matière nucléaire infinie. Dans ses calculs, Brueckner a résolu, de façon directe, l'équation intégrale définissant  $G$ . Ce calcul est très compliqué et nous exposerons deux autres méthodes plus simples et très précises, qui sont très utilisées : la méthode de séparation du potentiel N-N proposée par Moszkowski et Scott, et la méthode du spectre de référence de Bethe, Brandow et Petschek. Les résultats obtenus pour les propriétés de la matière nucléaire infinie sont en bon accord avec les estimations faites de façon empirique, par extrapolation des propriétés des noyaux finis. Ces premiers tests satisfaisants de la théorie de Brueckner ont conduit à envisager l'application de cette théorie à l'étude des noyaux finis, afin de calculer certaines de leurs propriétés, avec les approximations du potentiel N-N, qui ont donné les résultats les plus satisfaisants pour la matière nucléaire.

Nous verrons, dans le chapitre III, que les méthodes générales de résolution, vues lors de l'étude de la matière nucléaire, restent valables pour les noyaux finis. Les calculs sont cependant plus compliqués, car les fonctions d'onde des nucléons ne sont plus connues a priori, comme dans le cas de la matière nucléaire, où l'invariance du système vis-à-vis d'une translation impose que ces fonctions soient des ondes planes. Ces calculs nécessitent un certain nombre d'approximations que nous discuterons. Lorsque les résultats ne sont pas tout à fait en accord avec l'expérience, il est assez difficile de décider si l'origine du désaccord doit être attribuée à un mauvais choix du potentiel N-N ou aux approximations utilisées. Pour ces raisons, de très nombreux procédés de calcul ont été proposés en vue d'améliorer progressivement la convergence et la précision. Quelques-uns de ces procédés seront analysés. Il subsiste cependant une incertitude dans la théorie, concernant le choix du spectre des particules dans les calculs de la matrice  $G$ , que nous évoquerons aussi, et qui entraîne une incertitude sur l'énergie de liaison par nucléon de l'ordre de quelques MeV.

Dans le dernier chapitre, nous analyserons quatre types différents de calcul. Nous montrerons que les résultats obtenus pour l'énergie de liaison, l'énergie à une particule, les rayons et la distribution de la densité, sont très satisfaisants et permettent de conclure que la théorie de Brueckner pourra probablement être



étendue à l'étude des déformations des noyaux et des réactions nucléaires. Cependant, étant donné la durée d'un calcul de structure du  $^{208}\text{Pb}$  (deux à trois heures), celui d'effets collectifs réalistes nécessiterait un temps de calcul énorme (200.000 heures) avec les méthodes actuelles. Il faudra donc créer de nouvelles méthodes de calcul plus rapides, mais aussi précises, pour aborder ces problèmes nouveaux.

## CHAPITRE I - THEORIE DE BRUECKNER

---

### I.1. Introduction

Le premier chapitre sera consacré à la théorie générale de Brueckner, qui a principalement été créée pour remédier au comportement singulier de l'interaction N-N, qui possède à courte distance une répulsion assez forte. Nous citerons quelques essais qui ont été réalisés pour dériver cette interaction à partir de la théorie de l'échange de mésons. Cependant, dans les calculs actuels, les potentiels obtenus de façon plus empirique, à partir des expériences de la diffusion et des propriétés du deutéron, sont plus utilisés car ils donnent de meilleurs résultats. Nous montrerons sous quelles formes s'écrivent les potentiels les plus connus, qui peuvent être locaux ou non locaux.

Connaissant l'interaction N-N, nous pourrons alors établir la formule donnant l'énergie d'un système de  $A$  nucléons par la théorie des perturbations de Rayleigh-Schrödinger. Nous montrerons comment les différentes contributions à l'énergie pourront être représentées, de façon très parlante, au moyen de diagrammes. Le théorème de Goldstone qui, sous certaines hypothèses, démontre l'annulation des diagrammes non connectés, sera énoncé et formulé sous forme de diagrammes de Feynman-Goldstone. Cependant, lorsque nous voudrons calculer la série donnant l'énergie avec une interaction N-N à coeur dur, nous constaterons qu'elle diverge. Nous définirons alors une nouvelle série qui converge et qui sera obtenue en remplaçant l'interaction N-N par une matrice  $G$  appelée "matrice de réaction" ou "matrice de Brueckner", et en ordonnant les termes de cette série de façon bien définie. La théorie de Brueckner sera alors appliquée à la matière nucléaire infinie dans le chapitre II et aux noyaux finis dans le chapitre III.



## I.2. Interaction nucléon-nucléon

On espère pouvoir dériver un jour l'interaction N-N à partir de considérations plus fondamentales de la théorie des mésons ; mais ceci ne pourra être fait que dans des approximations de basse énergie. En fait, il n'est même pas certain que la description à l'aide d'un potentiel soit adéquate même pour des énergies en-dessous du seuil de production de mésons  $\pi$ . Cependant, la plupart des modèles actuels utilisent les résultats de la théorie des mésons.

Les premiers essais ont été réalisés par Brueckner et Watson [BRU 53] qui supposaient l'échange de deux pions. La principale difficulté est d'expliquer l'attraction assez forte des états S à des distances de 1 à 2 fermis.

Bryan, Scott et Green [BRY 69] l'expliquent par l'échange de mésons  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  et d'un méson scalaire  $\sigma$  dont l'existence n'a pas encore été vérifiée. Ueda et Green [UE 68] utilisent l'échange de trois de ces mésons scalaires et obtiennent des résultats presque aussi bons que ceux obtenus par le potentiel de Reid (voir plus loin).

Partovi et Lomon [PA 70] reprennent l'idée première de Brueckner et Watson de l'échange de deux pions. Ils donnent une explication plus physique et obtiennent aussi de bons résultats, mais leur potentiel a été mis en doute par Brown et Durso.

Dans les calculs, on utilise plus souvent des approximations empiriques de l'interaction N-N. Ces approximations sont locales ou non locales bien que la théorie des mésons indique que l'interaction à deux corps correcte doit être non locale à courte distance. L'utilisation d'un tel potentiel revient à extrapoler à partir des déphasages expérimentaux, qui fournissent les éléments sur la couche en énergie, les éléments en dehors de la couche en énergie.

Le choix de ces approximations, très étendu, est cependant limité par certaines restrictions que je ne ferai que citer. L'interaction n-n doit en effet satisfaire l'invariance de translation, l'invariance de rotation, la conservation de la parité, la symétrie d'échange, l'invariance vis-à-vis d'un renversement du temps, l'hermiticité (c'est-à-dire la conservation de l'énergie) et souvent l'indépendance vis-à-vis de la charge.

### Potentieux locaux

La saturation dans le noyau et le changement de signe du déphasage lors d'une diffusion à énergie assez élevée des nucléons  $^1S_0$  suggère que l'interaction N-N possède un coeur répulsif de courte portée. Les potentiels les plus anciens comme ceux de Yale [BRE 62] et de Hamada-Johnston [HA 62], de même qu'un des potentiels de Reid [REI 68] et un des potentiels de Tamagaki [TAM 68], possèdent un coeur dur infini  $V = \infty$  pour  $r < r_c$ . Si cette hypothèse simplifie mathématiquement la résolution de l'équation de Schrödinger, elle n'est cependant pas raisonnable physiquement. Un choix plus raisonnable et qui donne des énergies de liaison plus correctes, est celui du coeur doux de Reid ou du coeur en forme de gaussienne de Tamagaki. Il existe des potentiels à coeur considérablement plus doux que celui de Reid : les potentiels de Bressel, Kerman, Rouben [BRES 69], de Sprung, Srivastava [SP 69], de Gogny, Pires, Tourreil [GOG 70].

Reid [REI 68] donne à ses potentiels des formes simples, montrant explicitement la dépendance de l'interaction vis-à-vis de l'état

$$V = V(L, S, J, r)$$

où  $L$ ,  $S$ ,  $J$  sont les moments angulaires. Le coeur doux de Reid a un facteur de forme de Yukawa, c'est-à-dire qu'il s'écrit :

$$V = \sum_n a_n \frac{e^{-n\mu r}}{r}$$

où  $a_1 = -g_\pi^2$  ( $g_\pi$  est la constante de couplage pion-nucléon),  $\mu$  est la longueur d'onde de Compton réciproque du pion, et  $a_n$  ( $n > 1$ ) sont des constantes empiriques déterminées pour reproduire les déphasages. Les termes  $n > 1$  pourraient être interprétés comme des échanges de mésons plus lourds, mais Reid n'a pas essayé de les connecter avec des mésons réellement observés. Pour l'état  $S = 1$ , le potentiel doit être complété par un potentiel tensoriel  $V_T(S = 1, J, r)$  qui couple les états  $L = J + 1$  et  $L = J - 1$ . L'importance relative à donner à ces deux potentiels n'est cependant pas encore bien définie.

Le groupe de Breit et Yale [BRE 62] et le groupe de Hamada et Johnston [HA 62] écrivent le potentiel d'interaction sous la forme suivante :



$$V = V_c(r) + S_{12} V_T(r) + (\vec{L} \cdot \vec{S}) V_{LS}(r) + L_{12} V_{LL}(r)$$

où les différents termes sont respectivement les potentiels central, tensoriel, spin-orbite et spin-orbite quadratique, et où

$$S_{12} = \frac{3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

$$L_{12} = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (L)^2 - \frac{1}{2} \{ (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L}) + (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L}) \} .$$

### Potentiels non locaux

Rappelons tout d'abord qu'un potentiel non local est équivalent à un potentiel dépendant de la quantité de mouvement. En effet, écrivons l'équation de Schrödinger pour un potentiel non local :

$$\frac{-\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \int V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') dr' = E \psi(\vec{r}) .$$

Si la non localité se comporte raisonnablement bien, nous pouvons développer  $\psi(r')$  en série de Taylor :

$$\begin{aligned} \psi(r') &= 1 + \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \cdot (\vec{r}' - \vec{r}) + \dots = e^{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}} \psi(\vec{r}) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{P}} \psi(\vec{r}) . \end{aligned}$$

L'équation de Schrödinger devient alors :

$$\frac{-\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}, \vec{P}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

où

$$V(\vec{r}, \vec{P}) = \int V(\vec{r}, \vec{r}') e^{i/\hbar (\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{P}} dr' .$$

D'autre part, Tabakin et Davies [TAB 66] ont montré que la dépendance du potentiel en fonction de la quantité de mouvement peut simuler l'effet du coeur répulsif et reproduire de bons déphasages. Tabakin [TAB 68, 69] et Yamaguchi [YA 54] proposent un potentiel non local, séparable  $V(r, r') = f(r) f(r')$  qui simplifie les calculs. Comme il a été dit plus haut, un potentiel local est injustifié à courte distance, car les mésons échangés sont lourds et

provoquent un recul considérable du nucléon ou un changement d'état de baryon. C'est pour cette raison que Lomon et Feshbach [LOM 68] utilisent un potentiel local ordinaire pour  $r > r_2 \approx 0,7$  fm et pour  $r < r_2$  un potentiel non local qui possède des fonctions propres vérifiant la relation

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_2} = \lambda(L, S, J) = \text{constante} .$$

Le potentiel le plus utilisé est celui de Green [GRE 62] qui a la forme

$$V(\vec{r}, \vec{p}) = V(\vec{r}) + p^2 V(\vec{r}) + V(\vec{r}) p^2 .$$

### I.3. Calcul de l'énergie d'un système de A nucléons

Le hamiltonien d'un système de A nucléons comprend la somme des énergies cinétiques des particules et la somme des interactions à deux corps ; les interactions à plus de deux corps sont généralement négligées. Quang [QUA 65] a, en effet, montré que les forces à trois corps ne sont pas importantes pour la structure nucléaire de basse énergie. Elles donnent une contribution de 140 keV seulement à une énergie de liaison à trois corps de 8 MeV

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^A V_{ij} .$$

Généralement, l'hamiltonien est séparé en deux parties  $H_0$  et  $H_1$

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^A (T_i + U_i)$$

$$H_1 = \sum_{i < j=1}^A V_{ij} - \sum_i U_i .$$

$H_0$  constitue l'hamiltonien d'un système de A particules indépendantes plongées dans un champ moyen  $U_i$  et sera appelé potentiel du modèle en couches pour le noyau.  $H_1$  représente la perturbation qui doit être faible si  $H_0$  est bien choisi. Le potentiel à une particule  $U$  est quelconque en principe, mais il doit être choisi de façon telle que la série de perturbation en  $H_1$



converge le plus rapidement possible. Appelons  $\varphi_p$  les fonctions propres de  $T + U$  et  $\phi_0$  l'état fondamental de  $H_0$ . On a les relations suivantes :

$$(T_i + U_i) \varphi_p(r_i) = e_p \varphi_p(r_i)$$

$$\phi_0 = (A!)^{-1/2} \mathcal{a} [\varphi_1(r_1), \varphi_2(r_2), \dots, \varphi_A(r_A)]$$

où

$$\mathcal{a} = \sum_p (-)^P P$$

est l'opérateur d'antisymétrisation et où ont été utilisées les  $A$  premières fonctions  $\varphi_p$  qui constituent la "mer de Fermi"

$$H_0 \phi_0 = E_0 \phi_0 \quad \text{avec} \quad E_0 = \sum_{i=1}^A e_i .$$

La vraie fonction d'onde fondamentale  $\psi$  satisfait l'équation

$$H \psi = E \psi .$$

Le développement de perturbations de Rayleigh-Schrödinger donne l'énergie  $E$  du système sous la forme suivante (voir appendice A)

$$\begin{aligned} E = E_0 &+ \langle \phi_0 | H_1 | \phi_0 \rangle + \langle \phi_0 | H_1 (E_0 - H_0)^{-1} Q H_1 | \phi_0 \rangle \\ &+ \langle \phi_0 | H_1 (E_0 - H_0)^{-1} Q H_1 (E_0 - H_0)^{-1} Q H_1 | \phi_0 \rangle \\ &- \langle \phi_0 | H_1 | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | H_1 (E_0 - H_0)^{-2} Q H_1 | \phi_0 \rangle \dots \end{aligned}$$

où  $Q \equiv 1 - |\phi_0\rangle \langle \phi_0|$  est l'opérateur de projection sur tous les états autres que l'état fondamental, ce qui exclut l'état  $\phi_0$  dans la suite des états intermédiaires. Ce développement est valable pour un nombre quelconque de particules, pour autant que l'état fondamental ne soit pas dégénéré.

#### I.4. Diagrammes de Feynman-Goldstone

Nous utiliserons le formalisme de la seconde quantification où les nombres d'occupation jouent le rôle de variables indépendantes. L'état fondamental du système, dans lequel tous les états à une particule dans la mer de Fermi sont occupés et tous les autres

inoccupés, est pris comme état de référence dans les diagrammes. Toute fonction propre de l'opérateur  $H_0$  est alors définie par ses états trous qui sont les états vides dans la mer de Fermi et les états particules qui sont les états occupés en dehors de la mer de Fermi. Nous les représenterons respectivement par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ... et  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ..., les états quelconques (particules ou trous) étant désignés par  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ... Dans ce formalisme, la perturbation  $H_1$  s'écrit :

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{pqrs} \langle pq|V|rs\rangle a_p^+ a_q^+ a_s a_r - \sum_{pq} \langle p|U|q\rangle a_p^+ a_q$$

$$\langle pq|V|rs\rangle = \int \varphi_p^*(r_1) \varphi_q^*(r_2) V_{12} \varphi_r(r_1) \varphi_s(r_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$\langle p|U|q\rangle = \int \varphi_p^*(r_1) U \varphi_q(r_1) d\tau_1$$

où  $a_s$  est un opérateur d'annihilation qui satisfait les deux équations

$$a_s |p, q, r, s, t, \dots\rangle = (-)^v |p, q, r, s, t, \dots\rangle \quad (v = \text{nombre d'états occupés précédant l'état } s)$$

$$a_s |p, q, r, t, \dots\rangle = 0$$

et  $a_s^+$  est un opérateur de création qui satisfait les deux équations

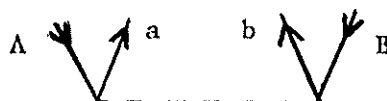
$$a_s^+ |p, q, r, s, t, \dots\rangle = 0$$

$$a_s^+ |p, q, r, t, \dots\rangle = (-)^v |p, q, r, s, t, \dots\rangle \quad (v = \text{nombre d'états occupés précédant l'état } s)$$

Ces opérateurs vérifient en outre les relations d'anticommutation :

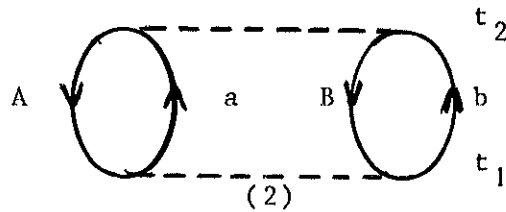
$$a_r a_s + a_s a_r = 0 \quad a_r^+ a_s^+ + a_s^+ a_r^+ = 0 \quad a_r^+ a_s + a_s a_r^+ = \delta_{rs}$$

L'effet de l'opérateur  $\langle ab|V|AB\rangle a_a^+ a_b^+ a_B a_A$  sur l'état  $\phi_0$ , est de détruire les particules dans les états  $A$  et  $B$  et d'en créer dans les états  $a$  et  $b$ ; la fonction d'onde ainsi obtenue est alors multipliée par l'élément de matrice  $\langle ab|V|AB\rangle$ . L'action de cet opérateur se représente conventionnellement par le diagramme (1)



(1)

représentant l'évolution du système dans le temps. Ainsi le diagramme (2) doit se lire de bas en haut.

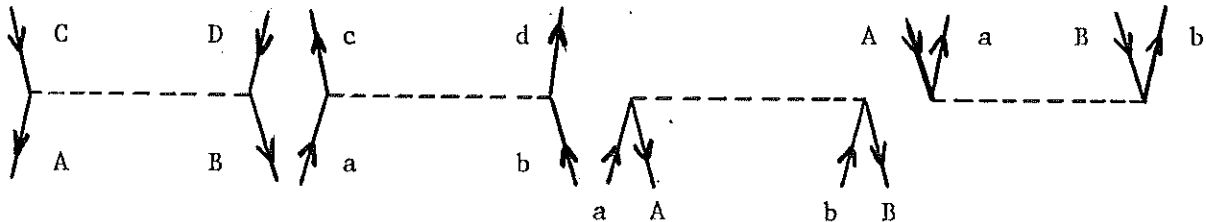


En-dessous de la ligne pointillée, l'espace blanc représente l'état fondamental  $\phi_0$ . La ligne pointillée au temps  $t_1$  représente l'interaction  $V$  entre les particules  $A$  et  $B$ , qui les fait passer dans les états intermédiaires  $a$  et  $b$ . Le système évolue dans cet état jusqu'à l'instant  $t_2$ , où une nouvelle interaction ramène le système dans son état fondamental  $\phi_0$ . De tels diagrammes représentent aussi les termes de la série de perturbations donnant l'énergie du système, et s'évaluent par les règles suivantes.

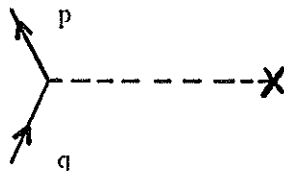
#### Règles pour les diagrammes de Feynman-Goldstone

1) Un état occupé ou un état particule se trouvant au-dessus de la mer de Fermi se représente par une ligne montante. Un état inoccupé ou état trou se trouvant dans la mer de Fermi se représente par une ligne descendante.

2) L'élément de matrice  $\langle pq|V|rs\rangle$  est représenté par une ligne horizontale pointillée. D'un côté de cette ligne entre la ligne  $r$  et sort la ligne  $p$ ; de l'autre côté entre la ligne  $s$  et sort la ligne  $q$ .



L'élément de matrice  $\langle p|U|q\rangle$  est représenté par une ligne horizontale pointillée. D'un côté de la ligne entre la ligne  $q$  et sort la ligne  $p$ ; de l'autre côté, il y a une croix.

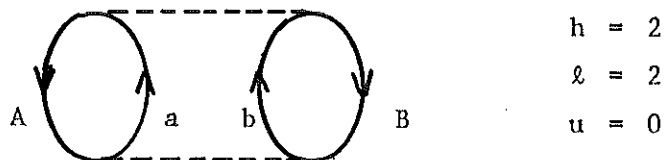




3) A chaque état intermédiaire est associé un dénominateur d'énergie qui vaut la somme des énergies des trous, moins la somme des énergies des particules. Si un diagramme possède  $n$  interactions, il y aura  $n - 1$  dénominateurs d'énergie.

4) Chaque diagramme est affecté du signe  $(-)^{\ell+h+u}$  où  $h$ ,  $\ell$  et  $u$  sont respectivement les nombres de lignes trou, de boucles fermées et d'interactions  $U$ . (La justification de ce signe est donnée en appendice B).

5) On somme chaque ligne montante indépendamment sur tous les états particules et chaque ligne descendante indépendamment sur tous les états trous. Il faut cependant inclure un facteur  $1/2$  chaque fois que le fait de permuter deux lignes trou et de permuter deux lignes particule conduit à un diagramme équivalent. (Cette règle est plus facilement applicable dans le cas des diagrammes de Hugenholtz, qui ne trace qu'un seul diagramme pour représenter tous les diagrammes obtenus lorsque les interactions directes sont remplacées par des interactions d'échanges et vice-versa. Les interactions sont représentées par des points et dans ce cas, il suffit d'inclure un facteur  $1/2$  pour chaque paire équivalente de lignes trous, qui est facile à reconnaître, car deux lignes équivalentes partent alors du même point, vont dans le même sens et aboutissent au même point). Appliquons par exemple ces règles au diagramme (3) :



(3)

Ce diagramme a une contribution à l'énergie égale à

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{a, b > k_F \\ A, B \leq k_F}} \langle AB | V | ab \rangle (E_A + E_B - E_a - E_b)^{-1} \langle ab | V | AB \rangle .$$

I.5. Théorème de Goldstone

Le développement de perturbation de Rayleigh-Schrödinger donnant l'énergie d'un système de A particules se complique dès le troisième ordre. Il existe deux termes du troisième ordre au lieu d'un seul. D'autre part, parmi les diagrammes qui contribuent aux éléments du terme

$$\langle \phi_0 | H_1 | (E_0 - H_0)^{-1} Q H_1 (E_0 - H_0)^{-1} Q H_1 | \phi_0 \rangle ,$$

certains sont non connectés (fig. I.5.1)

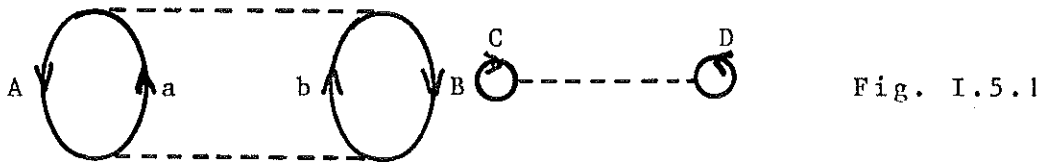


Fig. I.5.1

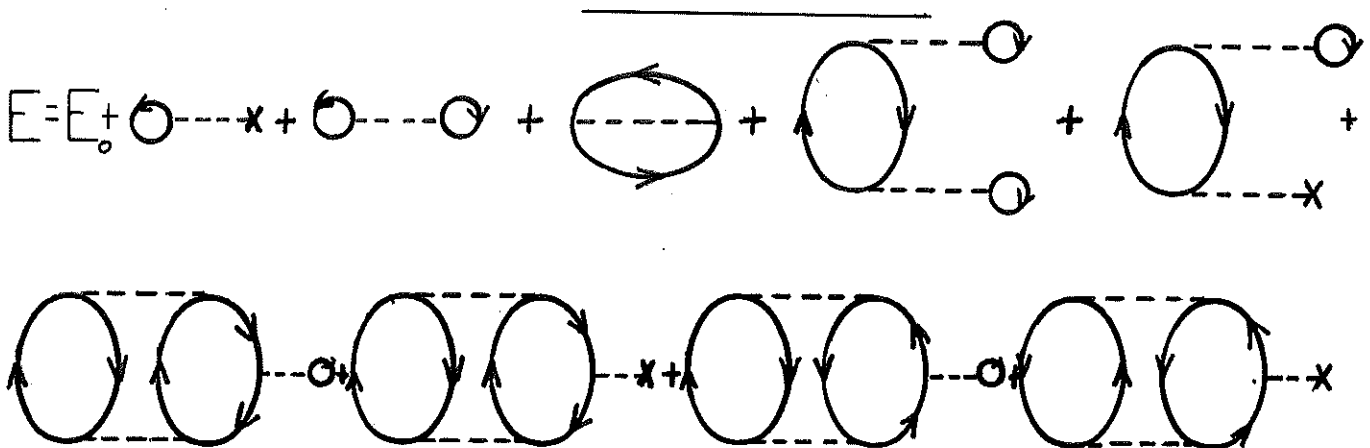


Fig. I.5.2

Un tel diagramme, composé de deux parties séparées, a une contribution proportionnelle à  $A^2$  ; or, l'énergie de la matière nucléaire infinie est proportionnelle à  $A$  . Goldstone [Proc. Roy.Soc. London A239 (1957) 267)] a montré que le second terme du troisième ordre

$$-\langle \phi_0 | H_1 | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | H_1 (E_0 - H_0)^2 Q H_1 | \phi_0 \rangle$$

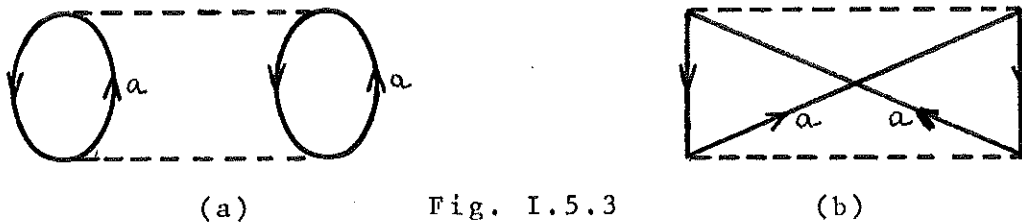
annule exactement tous les diagrammes non connectés et que cette annulation est exacte pour tous les ordres de la théorie de perturbation. Ainsi, à tous les ordres, la contribution à l'énergie est représentée par des diagrammes connectés seulement et est proportionnelle à  $A$  (voir fig. I.5.2) :

$$E = E_0 + \Sigma \text{ diagrammes connectés}$$

$$= E_0 + \langle \phi_0 | H_1 + H_1 \frac{Q}{E_0 - H_0} H_1 + H_1 \frac{Q}{E_0 - H_0} H_1 \frac{Q}{E_0 - H_0} H_1 + \dots | \phi_0 \rangle .$$

Le développement de Goldstone n'est valable que pour un état fondamental non dégénéré [FET 71, démonstration p. 111]. Il s'applique donc à la matière nucléaire et aux noyaux finis doublement magiques. Il existe cependant un formalisme analogue valable pour les noyaux à couches ouvertes (Bloch, Morowitz ; Morita).

Le théorème de Goldstone n'a été établi et n'est applicable que si le principe de Pauli est négligé dans les états intermédiaires (pour assurer l'indépendance des amas non connectés). La majorité des diagrammes qui violent le principe de Pauli, s'annulent cependant. Ainsi, considérons le diagramme suivant avec son diagramme d'échange. Ces deux diagrammes ont des contributions de signes opposés et s'annulent.



Par contre, le diagramme suivant qui viole le principe de Pauli et qui devrait être nul, vu que le déterminant de Slater des états intermédiaires est nul, a une contribution non nulle si on lui applique les règles des diagrammes. Son diagramme d'échange qui l'annulerait, est déconnecté et n'est pas repris dans le développement de Goldstone.

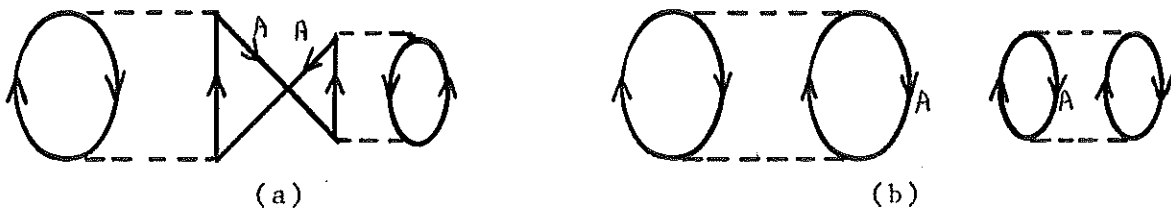


Fig. I.5.4



### I.6. Matrice de Brueckner

Lorsque nous essayons de calculer l'énergie d'un système de  $A$  nucléons au moyen de la série de Goldstone développée en fonction du potentiel  $N-N$ , nous constatons que la série ne converge pas pour certains choix du potentiel  $N-N$ . Cette divergence n'est cependant pas particulière à la physique nucléaire ; elle se rencontre aussi en physique de l'état solide, notamment lors de l'étude des électrons dans un cristal. Il faut alors trouver un moyen de sommer jusqu'à l'ordre infini les termes dominants de chaque ordre de la série de perturbations. Ce problème a été étudié par Brueckner, Sawada, Bohm et Pines vers les années 1954.

Dans le cas du calcul de l'énergie de liaison de la matière nucléaire et de l'hélium  ${}^3\text{He}$ , la divergence de la série est due au coeur trop répulsif du potentiel qui rend les éléments de la matrice  $V$  trop grands. Nous avons vu, en effet, que tout potentiel réaliste doit posséder un coeur répulsif à courte distance sinon le système n'aurait pas de densité d'équilibre et s'avanouirait. Le coeur répulsif du potentiel  $N-N$  provient de l'interaction forte des nuages de mésons entourant les nucléons, tandis que pour  ${}^3\text{He}$ , le coeur répulsif est dû à l'interaction des nuages électroniques entourant les noyaux. Bien que ces potentiels  $N-N$  puissent être forts ou même infinis, les propriétés physiques telles que l'énergie de liaison et l'amplitude de diffusion de deux nucléons restent finies et même parfois faibles.

Fetter et Walecka [FET 71] montrent que l'amplitude de diffusion satisfait une équation intégrale écrite dans l'espace des quantités de mouvement dont la solution est bien définie même pour un potentiel singulier ( $V \rightarrow \infty$ ), alors que chaque terme du développement en série de la solution diverge.

Pour le calcul de l'énergie de liaison, Brueckner propose d'écrire le développement en série d'éléments d'une matrice  $G$  qu'on appelle "matrice de réaction" ou "matrice de Brueckner", plutôt que de l'écrire en fonction de  $V$ . Si nous appelons  $\{\phi_k\}$  les fonctions d'onde à deux particules non perturbées, nous obtenons un élément de matrice

$$V_{kk} = \langle \phi_k | V | \phi_k \rangle \quad (\text{I.6.1})$$

très grand ou même infini. Cependant, l'énergie d'interaction est

finie et Brueckner montre qu'au lieu de  $V_{kk}$ , l'énergie d'interaction d'une paire de nucléons vaut

$$G_{kk} = \langle \phi_k | V | \psi_k \rangle \quad (\text{I.6.2})$$

où  $\psi_k$  est la vraie fonction d'onde à deux particules normalisée par la condition

$$\langle \phi_k | \psi_k \rangle = 1 \quad (\text{I.6.3})$$

Pour le démontrer, nous partons des relations (I.6.4), (I.6.5), (I.6.6) qui sont tout à fait générales :

$$H_0 \phi_n = E_n^0 \phi_n \quad (\text{I.6.4})$$

$$(H_0 + V)\psi_0 = E \psi_0 \quad (\text{I.6.5})$$

$$\psi_0 = \phi_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \phi_n \quad (\text{I.6.6})$$

avec

$$\langle \phi_0 | \psi_0 \rangle = 1 \quad (\text{I.6.7})$$

En multipliant la relation (I.6.5) scalairement par  $\langle \phi_0 |$  et  $\langle \phi_m |$ , nous obtenons respectivement les relations (I.6.8) et (I.6.9) :

$$\Delta E = (E - E_0^0) = \langle \phi_0 | V | \psi_0 \rangle \quad (\text{I.6.8})$$

$$a_m E_m^0 + \langle \phi_m | V | \psi_0 \rangle = a_m E \quad (\text{I.6.9})$$

En remplaçant dans (I.6.6),  $a_m$  par sa valeur tirée de (I.6.9), nous obtenons l'équation (I.6.10) :

$$\psi_0 = \phi_0 - \sum_{m \neq 0} \frac{\langle \phi_m | V | \psi_0 \rangle}{E_m^0 - E} \phi_m \quad (\text{I.6.10})$$

En utilisant (I.6.8), on peut montrer que l'énergie d'interaction de deux particules qui interagissent dans le vide par l'intermédiaire d'un potentiel ayant un coeur infini de rayon  $c$ , n'est pas infinie, mais vaut seulement

$$\frac{4\pi}{\Omega} \frac{c^3 M^2}{M}$$

(voir appendice C).

Nous appliquons alors ces équations au cas particulier d'un système de deux nucléons plongés dans de la matière nucléaire. Dans la formule (I.6.10), nous remplaçons la différence  $E_m^0 - E$

par  $e_m$  et limitons la somme aux états  $m$  pour lesquels les deux nucléons sont en dehors de la mer de Fermi. Brueckner définit alors la matrice  $G$  par la relation (I.6.11)

$$G \phi_0 = V \psi_0 \quad (I.6.11)$$

Cette matrice reste toujours finie, car lorsque  $V$  devient infini, la fonction  $\psi_0$  satisfaisant (I.6.10) s'annule. Par (I.6.8), nous obtenons alors :

$$\Delta E = \langle \phi_0 | G | \phi_0 \rangle = G_{00} \quad (I.6.12)$$

$$= V_{00} - \sum_m V_{0m} \frac{Q_m}{e_m} G_{m0} \quad (I.6.13)$$

ou 
$$G = V - V \frac{Q}{e} G \quad (I.6.14)$$

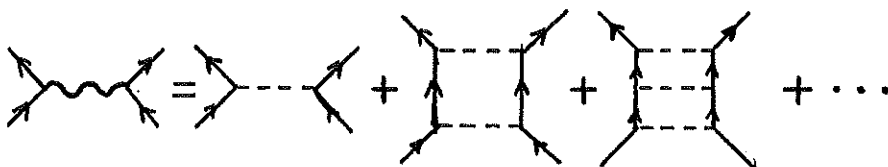
avec

$$Q = \begin{cases} 1 & \text{si les deux nucléons sont en dehors de la mer de Fermi} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (I.6.15)$$

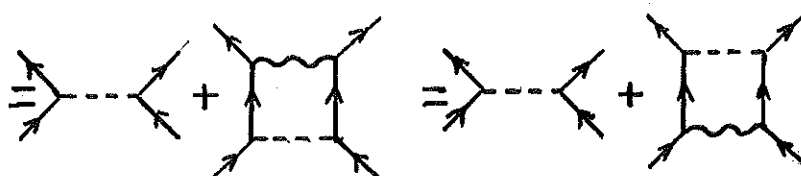
La fonction  $\psi_0$  est alors donnée par l'équation (I.6.16) :

$$\psi_0 = \phi_0 - \frac{Q}{e} V \psi_0 = (1 - \frac{Q}{e} G) \phi_0 = \Omega \phi_0 \quad (I.6.16)$$

Physiquement, l'idée de Brueckner est la suivante. Chaque fois que deux nucléons interagissent, ils le font une infinité de fois et passent par une infinité d'états intermédiaires qui, à cause du principe d'exclusion de Pauli, se trouvent au-dessus du niveau de Fermi. De façon schématique, l'interaction de deux nucléons se décrit de la façon suivante :



$$G(W) = V + V \frac{Q}{W-H_0+i\eta} V + V \frac{Q}{W-H_0+i\eta} V \frac{Q}{W-H_0+i\eta} V + \dots \quad (I.6.17)$$

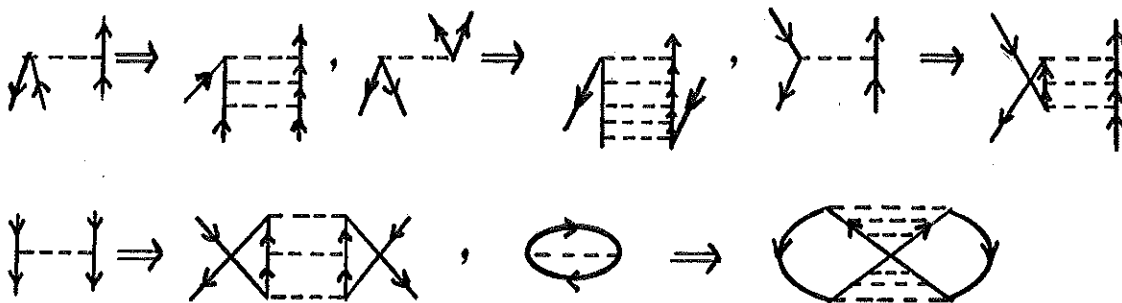


$$G(W) = V + V \frac{Q}{W-H_0+i\eta} G(W) \quad G(W) = V + G(W) \frac{Q}{W-H_0+i\eta} V \quad (I.6.18)$$

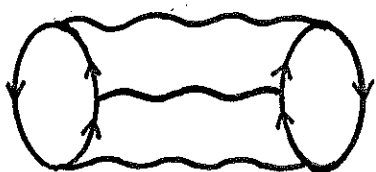


où  $\frac{Q}{W-H_0+i\eta}$  représente le propagateur d'énergie du système passant par des états intermédiaires,  $W$  représente l'énergie de départ, c'est-à-dire l'énergie du système, au moment où l'interaction  $G$  va se produire.  $G$  définie par la série infinie (I.6.17) satisfait donc aussi l'équation intégrale (I.6.18), appelée équation de Bethe-Goldstone. Bien que la série (I.6.17) définissant  $G$  diverge encore une fois, l'équation de Bethe-Goldstone donne une valeur finie à  $G$ .  $G(W)$  est un opérateur hermitien, car il est égal à une somme d'opérateurs hermitiens (voir Appendice D).

Mathématiquement, les états trous auraient pu être autorisés comme états intermédiaires ; on aurait alors défini une matrice  $T$  au lieu de  $G$ , mais le but de l'utilisation d'interactions multiples est de tenir compte au mieux du coeur répulsif, qui est de courte portée et conduit à des états intermédiaires de grande énergie, dont les quantités de mouvement typiques sont de 3 à 5  $k_F$ . Nous espérons ainsi avoir inclu les termes les plus importants. Si les états trous étaient admis, le développement de l'énergie en fonction de la matrice  $T$  convergerait peut-être, mais moins rapidement. Désormais, dans tous les diagrammes contribuant à l'énergie, les lignes pointillées représentant l'interaction  $V$  seront remplacées par des lignes ondulées représentant l'interaction  $G$ .



Deux matrices  $G$  successives n'apparaissent jamais entre la même paire de lignes particules. Ceci conduirait à un diagramme redondant qui est contenu dans un diagramme d'ordre inférieur en  $G$ .  
Exemple :



est interdit.

La matrice  $G$  est calculée sur la couche en énergie lorsque l'énergie de départ  $W$  est égale à l'énergie du système dans l'état fondamental. Autrement, nous dirons que  $G$  est calculée en dehors de la couche en énergie. On sait en effet qu'une interaction ne conserve pas nécessairement l'énergie si elle dure un temps fini. L'écart d'énergie  $\Delta E$  vérifie la relation

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \quad . \quad (I.6.20)$$

Généralement, les termes d'échange sont inclus dans la définition de la matrice  $G$  :

$$\langle pq | G | rs \rangle = \langle pq | G_D | rs \rangle - \langle pq | G_D | sr \rangle \quad . \quad (I.6.21)$$

Nous allons à présent estimer la contribution à l'énergie d'un diagramme  $(n, h)$  connecté, qui possède  $n$  interactions  $G$  et  $h$  lignes trous indépendantes. Pour simplifier, nous considérons un système de volume  $\Omega$  de  $A$  nucléons, pour lequel il y a conservation de la quantité de mouvement. Nous négligeons les spins et considérons une interaction  $N-N$  caractérisée par un coeur de dimension  $c$  .

Les fonctions propres sont alors :

$$\phi_j = \Omega^{-1/2} \exp(i\vec{k}_j \cdot \vec{r}) \quad .$$

On peut montrer les relations suivantes :

$$\langle ij | G | ij \rangle \approx p \frac{c^3}{\Omega} \quad (p = \text{constante})$$

$$\sum_{j < k_F} \approx A = \rho^3 \Omega$$

$$\sum_{j > k_F} \approx q \Omega c^{-3} \quad . \quad (q = \text{constante})$$

Un diagramme  $(n, h)$  contient en tout  $2n$  lignes nucléons. La conservation de la quantité de mouvement impose  $(n-1)$  conditions entre les différentes quantités de mouvement des  $2n$  lignes. Comme il y a  $h$  lignes trous indépendantes, il y a  $2n - h - (n-1) = (n+1-h)$  états particules qui peuvent être sommés de façon indépendante, ce qui conduit à une contribution proportionnelle à  $(\Omega c^{-3})^{n+1-h}$  . La sommation sur les  $h$  états trous indépendants donne une contribution proportionnelle à  $(\rho\Omega)^h$  . Les  $n$  interactions ont une contribution proportionnelle à  $(c^3/\Omega)^n$  . Les  $n-1$  dénominateurs d'énergie entraînent un facteur  $e^{-n+1}$  . La

contribution totale du diagramme est donc proportionnelle à

$$(c^3 \Omega^{-1})^n (e^{-1})^{n-1} (\rho \Omega)^h \left(\frac{\Omega}{c^3}\right)^{n+1-h} = A (e^{-1})^{n-1} (c^3 \rho)^{h-1} .$$

Nous pouvons conclure que la contribution d'un diagramme connecté est proportionnelle au nombre  $A$  de nucléons. D'autre part, si nous ordonnons les termes de la série donnant l'énergie suivant le nombre de lignes trous, nous constatons que la série converge comme la série de puissances de  $\rho c^3$ .

Signalons enfin une justification mathématique de l'introduction de la matrice  $G$ . Lorsqu'une série diverge, cela ne signifie pas que la série n'a aucun sens physique. Ainsi les développements asymptotiques ne convergent généralement pas. Des réarrangements dans la série peuvent alors être faits de façon à la rendre convergente. Cependant, des réarrangements différents peuvent donner des résultats différents et il existe des critères permettant de voir si un réarrangement a un sens. Baker [BAK 71] a montré que le développement en série en fonction de la matrice  $G$  suivant le nombre de lignes trous indépendantes définit la même énergie que la série en  $V$ , et est convergente. Baker montre cependant que la présence des forces attractives entraîne des singularités appelées singularités d'Emery [EM 59] qui sont dues à un mauvais choix de la méthode de sommation. Baker et Kahane [BAK 69] introduisent un autre développement en fonction d'une matrice  $R$  très voisine de la matrice  $G$ , mais pour laquelle il n'y a plus de singularité. Cette méthode a été appliquée au cas d'un potentiel carré, mais son application à un potentiel plus réaliste est très compliquée et pratiquement impossible.

## CHAPITRE II - LA MATIERE NUCLEAIRE INFINIE

### II.1. Introduction

L'étude de la matière nucléaire infinie, pour laquelle les calculs sont simplifiés, à cause de l'invariance de translation du système, a pour but principal de sélectionner les approximations du potentiel N-N . Ces potentiels N-N doivent donner des résultats en accord avec les propriétés de la matière nucléaire, estimées par extrapolations des propriétés des noyaux finis. Les meilleurs potentiels N-N pourront alors être utilisés pour le calcul plus compliqué des propriétés des noyaux finis (chapitre III).

Dans le chapitre II, nous définirons et déterminerons de façon empirique les propriétés principales qui caractérisent la matière nucléaire. Nous montrerons ensuite comment résoudre les équations permettant de calculer ces propriétés. Les deux méthodes principales de résolution sont la méthode du spectre de référence et la méthode de séparation du potentiel. Le problème important du choix d'un potentiel  $U$  à une particule, qui a une grande influence sur la convergence de la série donnant l'énergie, sera aussi étudié. Enfin, nous rassemblerons les principaux résultats obtenus pour la matière nucléaire, et tirerons certaines conclusions.

### II.2. Définition et propriétés de la matière nucléaire

La matière nucléaire infinie est un système hypothétique infini, qui possède un nombre égal de protons et de neutrons remplissant tout l'espace avec une densité uniforme, l'interaction de Coulomb y étant négligée.

Les trois caractéristiques principales de la matière nucléaire sont l'énergie de liaison par nucléon, la densité à l'équilibre et le module d'incompressibilité  $K$  . Les deux premières grandeurs s'obtiennent par extrapolations des valeurs expérimentales pour les noyaux finis et par élimination de la contribution des forces de Coulomb.

Considérons d'abord la formule empirique (II.2.1) de Myers et Swiatecki [MYE 66], donnant l'énergie de liaison  $B$  d'un noyau



possédant  $N$  neutrons et  $Z$  protons ( $N + Z = A$ ) .

$$\begin{aligned}
 E &= (M - ZM_p - NM_n)c^2 = -B \\
 &= -15,68 A + 18,56 A^{2/3} + 0,717 Z^2 A^{-1/3} (1-1,69 A^{-2/3}) \\
 &\quad + 28,1 (N-Z)^2 A^{-1} (1-1,18 A^{-1/3}) + \text{terme de parité} \\
 &\quad + \text{effets des couches} \tag{II.2.1}
 \end{aligned}$$

où les différents termes représentent respectivement les contributions de volume, de surface, de Coulomb et de symétrie. Lorsque  $A$  devient infini, avec  $N = Z$ , nous obtenons en annulant l'énergie de Coulomb, une énergie de liaison  $B \approx 15,68$  MeV par nucléon.

La diffusion des électrons de haute énergie par des noyaux lourds nous donne ensuite la distribution de la densité de la charge des noyaux. La densité centrale semble être presque indépendante de  $A$  et vaut  $\rho_0 = 0,17$  nucléons/fm<sup>3</sup>. A cette densité d'équilibre correspond une quantité de mouvement de Fermi

$$k_F \hbar = \hbar \left( \frac{3\pi^2}{2} \rho \right)^{1/3} = \hbar 1,36 \text{ fm}^{-1} \tag{II.2.2}$$

et une distance moyenne entre nucléons

$$r_0 = \left( \frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/3} = 1,12 \text{ fm} \quad (1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}) \tag{II.2.3}$$

La relation (II.2.2) peut s'établir en exprimant que le nombre  $A$  de nucléons se trouvant dans un volume  $\Omega$  est égal au nombre d'états occupés dans la mer de Fermi :

$$A = 4 \Omega \int_0^{k_F} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{2 \Omega k_F^3}{3\pi^2} \tag{II.2.4}$$

$$\rho = \frac{A}{\Omega} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \tag{II.2.5}$$

La relation (II.2.3) s'obtient en exprimant qu'un nucléon occupe un volume moyen

$$\frac{4\pi r_0^3}{3} = \frac{1}{\rho} .$$

A la valeur (II.2.2) correspondent une énergie cinétique de Fermi  $T_F$  et une énergie cinétique moyenne  $T_M$  par particule vérifiant les deux relations suivantes :

$$T_F = \frac{\hbar^2}{2M} k_F^2 = 20,7 k_F^2 = 38 \text{ MeV} \quad \left( \frac{\hbar^2}{M} = 41,47 \text{ MeV fm}^2 \right) \quad (\text{II.2.6})$$

$$T_M = \int_0^{k_F} \frac{k^2 \hbar^2}{2M} 4\pi k^2 dk \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk = \frac{3}{5} T_F = 23 \text{ MeV}. \quad (\text{II.2.7})$$

Au début, on a cru, avec Brueckner et Gammel, que la densité de la matière nucléaire était plus grande que la densité centrale des noyaux lourds à cause de la répulsion de Coulomb qui n'existe pas dans la matière nucléaire. On prenait alors

$$r_0 = 1 \text{ fm} \quad k_{F_0} = 1,52 \text{ fm}^{-1} \quad \rho = 0,24 \text{ fm}^{-3} \quad (\text{II.2.8})$$

Cependant, Brandow [BRA 63] a montré que la tension superficielle, même dans les noyaux lourds, contrebalance la pression de Coulomb et les premières valeurs (II.2.2) et (II.2.3) ont

été réutilisées. Des calculs récents de Negele [NEG 70] qui utilise une théorie de H-F dépendant de la densité, donnent une évaluation semi-empirique de

$$k_F = 1,31 \text{ fm}^{-1} \quad (\text{II.2.9})$$

qui est probablement un peu sous-estimée, car Negele a négligé quelques termes de saturation.

Le module d'incompressibilité défini par la relation (II.2.10) ne peut pas être déduit de l'expérience

$$K = \left( r^2 \frac{d^2 E}{dr^2} \right) \text{ à l'équilibre} \quad (\text{II.2.10})$$

Bohr et Mottelson [BO 69] l'estiment à 120 MeV par un raisonnement théorique simple.

### II.3. Résolution de l'équation de Bethe-Goldstone

Dans le but de déterminer de façon théorique les propriétés de la matière nucléaire, nous devons résoudre l'équation (I.5.14) définissant la matrice  $G$  :

$$\begin{aligned} G &= V + VQ(W - H_0)^{-1} G \\ &= V - VQ e^{-1} G \end{aligned} \quad (\text{II.3.1})$$

L'opérateur  $G$  agit sur les fonctions d'ondes non perturbées à deux particules, qui sont :

$$\phi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_A(\vec{r}_1) \phi_B(\vec{r}_2) \quad (\text{II.3.2})$$

La détermination de  $G$  se fait généralement par l'intermédiaire du calcul d'une fonction  $\Psi_{AB}$  corrélée à deux corps qui vérifie l'équation (I.6.16) :

$$\Psi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, W) = \phi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - Q e^{-1} G(W) \phi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (\text{II.3.3})$$

$$V \Psi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, W) = [V - V Q e^{-1} G(W)] \phi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G(W) \phi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (\text{II.3.4})$$

Pour la matière nucléaire qui est homogène et isotrope, les fonctions d'ondes  $\phi$  sont planes

$$\phi_A(\vec{r}_1) = \Omega^{-1/2} \exp(i\vec{k}_A \cdot \vec{r}_1) \quad (\text{II.3.5})$$

où  $\Omega$  est un volume très grand dans lequel se trouvent les nucléons

$$\begin{aligned} \phi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \Omega^{-1} \exp(i\vec{k}_A \cdot \vec{r}_1) \exp(i\vec{k}_B \cdot \vec{r}_2) \\ &= \Omega^{-1} \exp(i\vec{k}_{AB} \cdot \vec{R}) \exp(i\vec{k}_{AB} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{II.3.6})$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \quad (\text{II.3.7})$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \vec{k}_{AB} = \vec{k}_A + \vec{k}_B \\ \vec{k}_{AB} = \frac{\vec{k}_A - \vec{k}_B}{2} \end{cases} \quad (\text{II.3.8})$$

$$\begin{aligned} e \phi_{AB} &= [E(\frac{\vec{k}_{AB}}{2} + \vec{k}_{AB}) + E(\frac{\vec{k}_{AB}}{2} - \vec{k}_{AB}) - W] \phi_{AB} \\ &= e(\vec{k}_{AB}, \vec{k}_{AB}) \phi_{AB} \end{aligned} \quad (\text{II.3.9})$$

$$Q \phi_{AB} = \begin{cases} \phi_{AB} & \text{si} \begin{cases} |1/2 \vec{k}_{AB} + \vec{k}_{AB}| > k_F \\ |1/2 \vec{k}_{AB} - \vec{k}_{AB}| > k_F \end{cases} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{II.3.10})$$

Les opérateurs  $Q$  et  $e$  sont donc des fonctions numériques de  $(\vec{k}_{AB}, \vec{K}_{AB})$ . Ils conservent la quantité de mouvement totale, de même que  $V$ , car les fonctions propres de l'opérateur  $\vec{K}_{AB}$  sont fonctions propres de  $Q, e, V$ .  $\Psi_{AB}$  aura donc la même dépendance vis-à-vis de  $\vec{R}$  et de  $\Omega$  que  $\Phi_{AB}$

$$\Psi_{AB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Omega^{-1} \exp(i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}) \psi_{AB}(\vec{r}) \quad (\text{II.3.11})$$

$$\begin{aligned} \langle AB | G | CD \rangle &= \int \Phi_{AB}^* V \Psi_{CD}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3r_1 d^3r_2 \\ &= \Omega^{-2} \int \exp(-i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}) \exp(-i \vec{k}_{AB} \cdot \vec{r}) V(\vec{r}) \times \\ &\quad \times \exp(i \vec{K}_{CD} \cdot \vec{R}) \psi_{CD}(\vec{r}) d^3r d^3R \\ &= \Omega^{-1} \delta(\vec{K}_{AB}, \vec{K}_{CD}) \int \exp(-i \vec{k}_{AB} \cdot \vec{r}) V(\vec{r}) \psi_{CD}(\vec{r}) d^3r \\ &= \Omega^{-1} \delta(\vec{K}_{AB}, \vec{K}_{CD}) \langle \vec{k}_{AB} | G | \vec{k}_{CD} \rangle \quad . \quad (\text{II.3.12}) \end{aligned}$$

Nous pouvons déterminer  $\psi_{AB}(\vec{r})$  par la relation (II.3.13) :

$$\begin{aligned} \exp(i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}) \psi_{AB}(\vec{r}) &= \exp(i \vec{k}_{AB} \cdot \vec{r}) \exp(i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}) \\ &\quad - Q e^{-1} V \psi_{AB}(\vec{r}) \exp(i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}) \quad . \quad (\text{II.3.13}) \end{aligned}$$

Le dernier terme du second membre de (II.3.13) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3K}{(2\pi)^3} \frac{Q}{e} |\vec{k}\vec{K}\rangle \langle \vec{k}\vec{K}| V \psi_{AB}(\vec{r}) \exp(i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3K}{(2\pi)^3} Q(\vec{k}, \vec{K}) e^{-1}(\vec{k}, \vec{K}) \exp(i \vec{K} \cdot \vec{R}) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \times \Omega^{-1} \\ &\quad \times \int \exp(-i \vec{K} \cdot \vec{R}') \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{r}') \times V(\vec{r}') \exp(i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}') \\ &\quad \psi_{AB}(\vec{r}') d^3r' d^3R' \\ &= \frac{\Omega^{-1}}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3r' Q(\vec{k}, \vec{K}_{AB}) e^{-1}(\vec{k}, \vec{K}_{AB}) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{r}') \\ &\quad V(\vec{r}') \psi_{AB}(\vec{r}') \exp(i \vec{K}_{AB} \cdot \vec{R}) \quad (\text{II.3.14}) \end{aligned}$$



car

$$\int d^3r' \exp[i\vec{k}'(\vec{k}_{AB} - \vec{k})] = 2\pi^3 \delta(\vec{k}_{AB} - \vec{k}) .$$

Nous trouvons finalement :

$$\psi_{AB}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_{AB} \cdot \vec{r}) - \int d^3r' K(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_{AB}(\vec{r}')$$

avec

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Q(\vec{k}, \vec{k}_{AB}) e^{-1}(\vec{k}, \vec{k}_{AB}) \exp[i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')] . \quad (\text{II.3.15})$$

L'opérateur  $Q(\vec{k}, \vec{k}_{AB}) e^{-1}(\vec{k}, \vec{k}_{AB})$  est un opérateur assez compliqué et constitue une des principales difficultés du calcul de  $G$ . Si le spectre de l'énergie d'une particule est connu, or ce spectre est fixé par le choix arbitraire de  $U$ ,  $K(r, r')$  peut être évalué et l'équation (II.3.15) devient alors une équation intégrale bien définie pour  $\psi_{AB}(r)$ .

Si nous faisons les deux approximations suivantes : remplacer  $Q$  par 1 et  $E(k)$  par l'énergie cinétique uniquement, cette équation devient l'équation de diffusion de deux particules dans le vide :

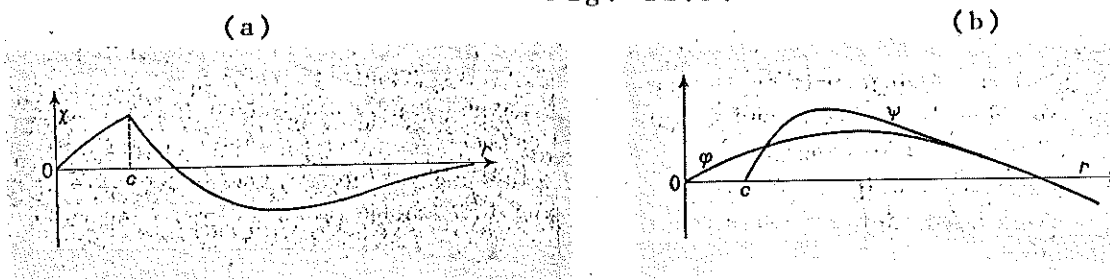
$$\begin{aligned} K(\vec{r}, \vec{r}') &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M}{k^2} \frac{\exp i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')}{k^2 - k_0^2 - i\eta} \\ &= \frac{M}{k^2} \frac{[\exp i k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|]}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (\text{II.3.16})$$

$$\psi(r) = \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(i k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) M V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'| k^2} \quad (\text{II.3.17})$$

Pour la matière nucléaire, la singularité en  $k = k_0$  dans (II.3.16) et (II.3.17) disparaît. En effet, si  $k_0 < k_F$ , l'opérateur de Pauli exclut les états  $k = k_0$ . Si  $k_0 > k_F$ , nous considérons alors l'interaction de deux particules au-dessus de la mer de Fermi et de telles interactions sont toujours en dehors de la couche en énergie. L'énergie de départ  $W$  ne vaut plus alors  $2E(k_0)$  mais prend une valeur qui garantit qu'aucune singularité n'apparaît. Le fait que les dénominateurs du développement de Brueckner-Goldstone ne s'annulent jamais a pour conséquence qu'il n'y a plus de choix arbitraire à faire (onde entrante ou sortante)

et qu'il n'y a plus d'onde de diffusion ni de déphasage à l'infini [BET 57]. Ce phénomène, appelé la guérison (healing) de la fonction d'onde à deux corps, a été expliqué pour la première fois par Gomes, Walecka et Weisskopf [GOM 58].

Fig. II.3.1



En résumé, la répulsion infinie oblige la fonction à s'annuler à courte distance, ce qui crée une "blessure" dans la fonction. Cette blessure se guérit rapidement à grande distance et le déphasage devient nul (voir fig.II.3.1). Cette propriété de guérison est en fait due au principe de Pauli : aucune transition réelle durant un temps assez long, et par conséquent conservant l'énergie totale, n'est possible parce que tous les autres états de même énergie sont déjà occupés.

#### II.4. Méthode du spectre de référence

Bethe, Brandow et Petschek [BET 63] ont proposé une méthode approchée pour traiter les opérateurs  $Q$  et  $e$  dans l'équation (II.3.5). Ils approximent le spectre des énergies des particules par un spectre de référence  $E^R$  (II.3.1) facile à manipuler et remplacent  $Q$  par 1.

$$E^R(k) = \frac{k^2 \hbar^2}{2m^* M} + C \quad (\text{II.4.1})$$

où  $m^*$  est la masse effective et  $C$  est une constante.

$$e^R = - (2m^* M)^{-1} (\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{V}_2^2) + 2C - w \quad (\text{II.4.2})$$

où  $w$  est calculé à partir de l'énergie réelle et non à partir de l'énergie de référence.

Nous pouvons nous demander si  $E(k)$  peut être approchée par une fonction quadratique de  $k$ . En fait, la réponse dépend

du choix (arbitraire) du potentiel  $U$ . Un choix de  $U(k)$  pour lequel le développement de Brueckner-Goldstone converge bien, conduit à un spectre d'énergie  $E(k)$  de la forme de la figure (II.4.1) [DAY 67].

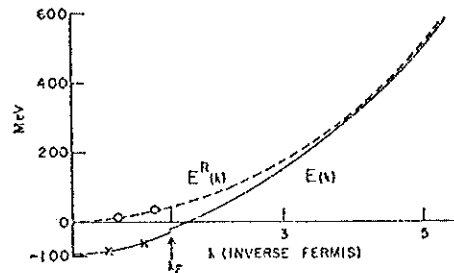


Fig. II.4.1

$E(k)$  possède une discontinuité en  $k = k_F$  appelée "gap d'énergie". Ce gap est expliqué par Brown [BROW 67] par le fait que les énergies des particules sont calculées en dehors de la couche en énergie et que les énergies des trous sont calculées sur la couche en énergie. Le spectre  $E(k)$  peut être approché assez bien par une fonction quadratique dont les paramètres sont les suivants :

$$\begin{aligned} \text{pour } 0 < k < k_F, \quad m^* \approx 0,6, \quad C \approx -100 \text{ MeV} \text{ et} \\ \text{pour } 3 \text{ fm}^{-1} < k < 5 \text{ fm}^{-1}, \quad m^* \approx 1,0, \quad C \approx 0. \end{aligned}$$

Un spectre de référence,

$$E^R(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2M},$$

sera une bonne approximation pour  $3 < k < 5 \text{ fm}^{-1}$  et une mauvaise approximation pour  $k < k_F$ , mais elle est compensée par l'approximation  $Q = 1$ . Le spectre de référence proposé par Bethe ne présente pas de gap. Davies et MacCarthy [DAV 71] ont montré que l'introduction d'un gap donne cependant de meilleurs résultats.

La fonction d'onde corrélée de référence et  $G^R$  satisfont alors respectivement les équations (II.4.3) et (II.4.4) :

$$\psi_{AB}^R = \phi_{AB} - (e^R)^{-1} V \psi_{AB}^R, \quad (\text{II.4.3})$$

$$G^R = V - V(e^R)^{-1} G^R. \quad (\text{II.4.4})$$

$$\langle \phi_{AB} | G^R | \phi_{CD} \rangle = \langle \phi_{AB} | V | \psi_{CD}^R \rangle \quad (\text{II.4.5})$$

L'équation (II.4.3) se transforme facilement en l'équation différentielle (II.4.6) que nous nous proposons de résoudre :

$$e^R (\phi_{AB} - \psi_{AB}^R) = e^R \chi_{AB}^R = V \psi_{AB}^R \quad (II.4.6)$$

Nous avons vu que dans le cas de la matière nucléaire les fonctions peuvent s'écrire sous la forme (II.4.7) à cause de la conservation de la quantité de mouvement totale ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{AB}(\vec{r}, \vec{R}) \\ \psi_{AB}^R(\vec{r}, \vec{R}) = \Omega^{-1} \exp(i\vec{k}_{AB} \cdot \vec{R}) \\ \chi_{AB}^R(\vec{r}, \vec{R}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \phi_{AB}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_{AB} \cdot \vec{r}} \quad (a) \\ \psi_{AB}^R(\vec{r}) \quad (b) \quad (II.4.7) \\ \chi_{AB}^R(\vec{r}) \quad (c) \end{array} \right.$$

L'équation (II.4.6) s'écrit alors sous la forme (II.4.8) ou (II.4.9) :

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{m^*M} (\nabla_r^2 + \frac{1}{4} \nabla_R^2) + 2C - W \right] \Omega^{-1} \exp(i\vec{k}_{AB} \cdot \vec{R}) \chi_{AB}^R(\vec{r}) = V \Omega^{-1} \exp(i\vec{k}_{AB} \cdot \vec{R}) \psi_{AB}^R(\vec{r}) \quad (II.4.8)$$

$$(\nabla_r^2 - \gamma_{AB}^2) \chi_{AB}^R(\vec{r}) = - \frac{Mm^*}{\hbar^2} V \psi_{AB}^R(\vec{r}) \quad (II.4.9)$$

$$\text{où } \gamma_{AB}^2 = \frac{1}{4} K_{AB}^2 + \frac{m^*M}{\hbar^2} (2C - W) \quad (II.4.10)$$

Les conditions aux limites de l'équation différentielle sont :

$$\begin{aligned} \chi_{AB}^R &= \phi_{AB} \quad \text{pour } r \leq C & (a) \\ &= 0 \quad \text{pour } r \rightarrow \infty & (b) \end{aligned} \quad (II.4.11)$$

Nous constatons que la solution de l'équation (II.4.9), (II.4.11) tend asymptotiquement vers zéro comme la moins décroissante des fonctions  $\exp(-\gamma r)$  ou  $V(r)$  (phénomène de "guérison").

Développons à présent les fonctions  $\phi_{AB}$ ,  $\psi_{AB}^R$  et  $\chi_{AB}^R$  en ondes partielles (II.4.12) et introduisons celles-ci dans l'équation (II.4.9) ; nous obtiendrons finalement l'équation (II.4.13) :



$$\begin{cases} \phi_{AB}(\vec{r}) \\ \psi_{AB}^R(\vec{r}) \\ x_{AB}^R(\vec{r}) \end{cases} = \sum_{\ell} i^{\ell} (2\ell+1) \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{k_{AB} r} \begin{cases} \mathcal{J}_{\ell}(r) \\ u_{\ell}(r) \\ x_{\ell}(r) \end{cases} \quad (\text{II.4.12})$$

où  $\mathcal{J}_{\ell}(r)$  et  $P_{\ell}(\cos \theta)$  sont respectivement une fonction de Bessel et un polynôme de Legendre ;

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \gamma_{AB}^2 \right] x_{\ell}(r) = - \frac{m^{*}M}{\hbar^2} V u_{\ell}(r) \quad (\text{II.4.13})$$

avec

$$x_{\ell}(r) = \begin{cases} \mathcal{J}_{\ell}(r) & r \leq c & \text{(a)} \\ 0 & r \rightarrow \infty & \text{(b)} \end{cases} \quad (\text{II.4.14})$$

Lorsque l'équation (II.4.13) est résolue, nous pouvons calculer  $G^R$  par la formule (II.4.5). Calculons par exemple l'élément diagonal (II.4.15) :

$$\langle k_0 | G^R | k_0 \rangle = 4\pi \sum_{\ell} \frac{(2\ell+1)}{k_0^2} \int_0^{\infty} \mathcal{J}_{\ell}(r) V u_{\ell}(r) dr \quad (\text{II.4.15})$$

L'intégrale du second membre de (II.4.15) n'est cependant pas bien définie à l'intérieur du coeur dur où  $V = \infty$  et  $u_{\ell} = 0$ . Pour obtenir la solution, il faut utiliser les équations (II.4.16), (II.4.17) et (II.4.18) :

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k_0^2 \right) \mathcal{J}_{\ell} = 0 \right], \quad (\text{II.4.16})$$

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \gamma^2 \right) x_{\ell} = - \frac{m^{*}M}{\hbar^2} V u_{\ell} \right], \quad (\text{II.4.17})$$

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \gamma^2 \right) \mathcal{J}_{\ell} = 0 \right]. \quad (\text{II.4.18})$$

[(II.4.16)  $\cdot x_{\ell}$  - (II.4.17)  $\cdot \mathcal{J}_{\ell}$ ] conduit à l'équation (II.4.19) :

$$\frac{d}{dr} \left[ x_{\ell} \frac{d \mathcal{J}_{\ell}}{dr} - \mathcal{J}_{\ell} \frac{dx_{\ell}}{dr} \right] + (\gamma^2 + k_0^2) \mathcal{J}_{\ell} x_{\ell} = \frac{m^{*}M}{\hbar^2} \mathcal{J}_{\ell} V u_{\ell} \quad (\text{II.4.19})$$

En intégrant (II.4.19) entre 0 et  $c_+$ , et en tenant compte de (II.4.14a), nous obtenons (II.4.20) :

$$\begin{aligned} \int_0^{c_+} \mathcal{J}_\ell V u_\ell dr &= \frac{\mathcal{H}^2(\gamma^2 + k_0^2)}{m^*M} \int_0^c \mathcal{J}_\ell^2 dr + \frac{\mathcal{J}_\ell(c)\mathcal{H}^2}{m^*M} \left[ \frac{d\mathcal{J}_\ell}{dr} - \frac{dx_\ell}{dr} \right]_{r=c_+} \\ &= \frac{\mathcal{H}^2(\gamma^2 + k_0^2)}{m^*M} \int_0^c \mathcal{J}_\ell^2 dr + \frac{\mathcal{J}_\ell(c)\mathcal{H}^2}{m^*M} \left[ \frac{d\mathcal{J}_\ell}{dr} - \frac{dx_\ell}{dr} \right]_{r=c_+}. \quad (\text{II.4.20}) \end{aligned}$$

De la même façon, l'intégration entre  $c_+$  et l'infini de [(II.4.18) $x_\ell$  - (II.4.17) $\mathcal{H}_\ell$ ] conduit à la formule (II.4.21) :

$$\frac{\mathcal{H}^2 \mathcal{J}_\ell(c)}{m^*M} \frac{dx_\ell}{dr} \Big|_{c_+} = \frac{\mathcal{H}^2 \mathcal{J}_\ell(c)}{m^*M} \frac{d\mathcal{H}_\ell}{dr} \Big|_{c_+} + \int_{c_+}^{\infty} \mathcal{H}_\ell V u_\ell dr \quad (\text{II.4.21})$$

Nous remplaçons alors l'expression (II.4.20) dans (II.4.15) et obtenons (II.4.22) :

$$\begin{aligned} \langle k_0 | G^R | k_0 \rangle &= \frac{4\pi}{k_0^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \left\{ \frac{(\gamma^2 + k_0^2)\mathcal{H}^2}{m^*M} \int_0^c \mathcal{J}_\ell^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathcal{J}_\ell(c)\mathcal{H}^2}{m^*M} \left( \frac{d\mathcal{J}_\ell}{dr} - \frac{dx_\ell}{dr} \right)_{r=c} + \int_c^{\infty} \mathcal{J}_\ell V u_\ell dr \right\} \quad (\text{II.4.22}) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (II.4.22),  $\left( \frac{d\mathcal{J}_\ell}{dr} - \frac{dx_\ell}{dr} \right)_{r=c}$  par son expression tirée de (II.4.21), l'élément de matrice s'écrit sous la forme (II.4.23) :

$$\begin{aligned} \langle k_0 | G^R | k_0 \rangle &= \frac{4\pi}{k_0^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \left\{ \frac{(\gamma^2 + k_0^2)\mathcal{H}^2}{m^*M} \int_0^c \mathcal{J}_\ell^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathcal{J}_\ell(c)\mathcal{H}^2}{m^*M} \left( \frac{d\mathcal{J}_\ell}{dr} - \frac{d\mathcal{H}_\ell}{dr} \right)_{r=c} + \int_{c_+}^{\infty} (\mathcal{J}_\ell - \mathcal{H}_\ell) V u_\ell dr \right\} \quad (\text{II.4.23}) \end{aligned}$$

Possédant tous les éléments de la matrice  $G^R$ , nous pouvons calculer une meilleure approximation de  $G$  par la formule (D.10) (Appendice D) et l'introduire dans la série de Brueckner-Goldstone donnant l'énergie. Ce calcul sera alors effectué pour différentes valeurs de la densité (donc de  $k_F$ ) et la densité au repos sera celle pour laquelle l'énergie de liaison est maximale.

### II.5. Méthode de séparation

L'équation de Bethe-Goldstone peut être résolue par une méthode créée avant la méthode du spectre de référence : la méthode de séparation du potentiel. Celle-ci a été inventée par Moszkowski et Scott [MOS 60] pour la matière nucléaire et est aussi utilisée pour traiter plus simplement l'opérateur de Pauli dans les noyaux finis.

Elle consiste à séparer le potentiel N-N en deux parties : une partie à courte portée  $V_s$  et une partie à longue portée  $V_\ell$

$$V = V_s + V_\ell \quad (II.5.1)$$

La partie à longue portée, qui est attractive, a un comportement suffisamment régulier pour que la série converge sans devoir introduire de matrice de Brueckner. La partie à courte portée est telle qu'elle n'est pas ressentie par des particules ayant une quantité de mouvement inférieure à  $k_F \hbar$  ou, ce qui est équivalent, par des particules se trouvant à des distances supérieures à la distance de séparation  $d$  où  $d \leq r_0$  (distance moyenne entre les nucléons). La distance  $d$  est choisie de façon à équilibrer la partie attractive et la partie répulsive de  $V_s$ . Elle est déterminée par la condition (II.5.2). Cette condition impose que la vraie fonction d'onde se raccorde parfaitement en  $r = d$  à la fonction d'onde d'une particule libre, et elle est indépendante des normes des deux fonctions d'ondes.

$$\frac{\psi'(d)}{\psi(d)} = \frac{\phi'(d)}{\phi(d)} \quad (II.5.2)$$

La fonction d'onde correspondant à  $V_s$  est donc  $\psi(r)$  pour  $r < d$  et  $\phi(r)$  pour  $r > d$ .

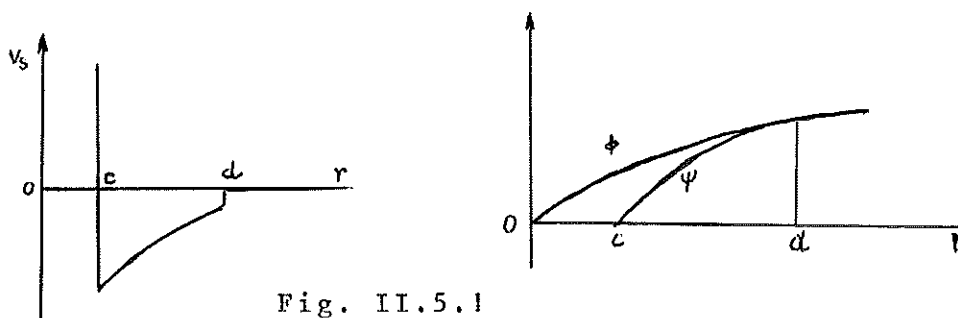


Fig. II.5.1

Pour un état S,  $d \approx 1$  fm et  $r_0 \approx 1,12$  fm. Qualitativement, pour  $r < d$ , la fonction d'onde est dominée par l'interaction N-N

tandis qu'à des distances supérieures à  $d \leq r_0$ , l'interaction N-N est masquée par les autres nucléons, de sorte que chaque nucléon sent essentiellement un potentiel nucléaire moyen.

Strictement parlé, la distance  $d$  définie par (II.5.2) est fonction de la quantité de mouvement relative  $k$  et du moment angulaire  $l$ . Ainsi, pour des valeurs de  $k$  croissantes, il faut de plus en plus d'attraction pour contrebalancer la répulsion. A 250 MeV, le déphasage change de signe et toute la partie attractive est nécessaire pour annuler la partie répulsive. Pour des énergies supérieures à 250 MeV, l'interaction nette est répulsive et il n'y a plus de distance de séparation. Il n'est cependant pas nécessaire de prendre la distance  $d$  variable avec  $k$ ; on peut prendre  $d$  correspondant à une quantité de mouvement relative moyenne dans le noyau, c'est-à-dire correspondant à  $k_m \approx \frac{1}{2} k_F \approx 0,7 \text{ fm}^{-1}$ .  $V_s$  donne alors un déphasage faible, supérieur à zéro, si  $k < k_m$  et inférieur à zéro si  $k > k_m$ . L'énergie d'interaction n'est pas nulle, mais elle reste faible pour des petits déphasages (Appendice C, formule C.10). A cause du comportement singulier de  $V_s$ , il faudra introduire une matrice  $G_s$ . Celle-ci pourra être calculée, avec une bonne approximation, en prenant  $Q = 1$ , car l'interaction  $V_s$  agit surtout pour les états de haute énergie.

La méthode de séparation constitue, en quelque sorte, un mélange de la théorie de Brueckner et de Hartree-Fock. L'approche de H.F. est utilisée pour traiter le potentiel  $V_\rho$ , tandis que une forme simplifiée de la théorie de Brueckner ( $Q = 1$ ) est appliquée à  $V_s$ .

La méthode de Moszkowski et Scott présente certains inconvénients :

a) Comme le potentiel N-N est séparé en deux parties, le nombre de termes intervenant dans les calculs augmente fortement.

b) Les potentiels N-N, pour des états singlet et triplet impairs, n'ont pas de coeur répulsif entouré d'une partie attractive. Il est, par conséquent, impossible de trouver une distance de séparation. On constate cependant que les résultats sont peu sensibles à  $Q$ . En d'autres termes, pour ces états,  $V_s$  peut être identifié à  $V$ .

c) La principale difficulté provient de la partie à longue portée du potentiel tensoriel dans les états triplet pairs. Celle-



ci ne semble pas être suffisamment lisse. Les termes d'ordres plus élevés, contenant ce potentiel doivent être calculés avec soin et les complications sont au moins aussi grandes que pour une méthode non séparée. De façon générale, on peut dire que s'il était vrai que le potentiel tensoriel produit des difficultés insurmontables, il n'y aurait aucun espoir pour le modèle en couches. Comme celui-ci semble posséder une certaine validité, cela signifie qu'un nucléon dans le noyau est libre la plupart du temps et qu'une image de H.F. comme celle prévue par la méthode de séparation doit être exacte, au moins approximativement.

La méthode de séparation peut tenir compte de termes d'ordres plus élevés en utilisant la formule (D.9) établie dans l'appendice D, avec  $V_A = V = V_\ell + V_s$ ,  $V_B = V_s$  et  $P_A = P_B = \frac{Q}{e}$

$$G = G_s + \Omega_s^+ V_\ell \Omega \quad (\text{II.5.3})$$

où

$$G = V - V Q e^{-1} G \quad (\text{II.5.4})$$

et

$$G_s = V_s - V_s Q e^{-1} G_s \quad (\text{II.5.5})$$

Comme  $\Omega = 1 - Q e^{-1} G$ , (II.5.3) peut s'écrire sous la forme (II.5.6) en ne conservant que les termes du premier ordre en  $G_s$  et du second ordre en  $V_\ell$  :

$$G = G_s + V_\ell - G_s \frac{Q}{e} V_\ell - V_\ell \frac{Q}{e} G_s - V_\ell \frac{Q}{e} V_\ell \quad (\text{II.5.6})$$

Les troisième et quatrième termes sont égaux, car ils sont hermitiens :

$$G_s \frac{Q}{e} V_\ell = [G_s \frac{Q}{e} V_\ell]^+ = V_\ell^+ (\frac{Q}{e})^+ G_s^+ = V_\ell \frac{Q}{e} G_s \quad .$$

$G_s$  est calculé par la formule (D.10), à partir de la matrice  $G_s^F$  correspondant à des particules libres, et définie par la relation (II.5.7)

$$G_s^F = V_s - V_s \frac{1}{e_0} G_s^F \quad (\text{II.5.7})$$

où  $e_0$  est le dénominateur d'énergie pour des particules libres.

$$G_s = G_s^F - G_s^F \left( \frac{Q}{e} - \frac{1}{e_0} \right) G_s \quad (\text{II.5.8})$$

En remplaçant  $G_s$  par l'expression (II.5.8) au premier ordre, dans (II.5.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 G &= G_s^F + V_\ell - G_s^F \left[ \frac{Q}{e} - \frac{1}{e_0} \right] G_s^F - 2 G_s^F \frac{Q}{e} V_\ell - V_\ell \frac{Q}{e} V_\ell \\
 &= G_s^F + V_\ell + G_s^F \left[ \frac{1}{e} - \frac{Q}{e} \right] G_s^F - G_s^F \left[ \frac{1}{e} - \frac{1}{e_0} \right] G_s^F \\
 &\quad - 2 G_s^F \frac{Q}{e} V_\ell - V_\ell \frac{Q}{e} V_\ell \quad , \quad (II.5.9)
 \end{aligned}$$

où les quatre derniers termes représentent respectivement la correction de Pauli, la correction de dispersion, un terme croisé et le terme du second ordre de la série de Born pour  $V_\ell$ . Les contributions des différents termes à l'énergie de liaison de la matière nucléaire pour  $k_F = 1,4 \text{ fm}^{-1}$  et un potentiel N-N à coeur dur standard sont les suivantes :

Pauli . . . . .	0,12 MeV/A
Dispersion . . . . .	4,02 MeV/A
Terme croisé . . . . .	-1,65 MeV/A
Terme de Born . . . . .	-0,84 MeV/A
<hr/>	
Total de la contribution du second ordre . . . . .	+1,65 MeV/A .

Le terme de Born peut cependant atteindre une contribution de 6 MeV/A lorsque l'interaction N-N contient une force tensorielle.

La méthode de Moszkowski et Scott peut être améliorée, du moins pour les ondes S, en la combinant avec la méthode du spectre de référence. L'opérateur  $G_s$  sera alors calculé à partir de  $G_s^R$ . Cette façon de procéder diminuera la correction de dispersion de la méthode de séparation, vu que  $1/e^R$  est une meilleure approximation de  $\frac{Q}{e}$  que  $1/e_0$ . Ainsi, alors que  $1/e_0$  peut avoir des singularités,  $1/e^R$  est toujours fini. D'autre part, la correction de Pauli, qui est généralement plus grande dans la méthode du spectre de référence, sera également réduite par cette méthode, souvent appelée méthode de séparation modifiée.

### II.6. Choix du potentiel $U$ à une particule

L'ensemble des interactions entre particules a pour effet principal de créer un champ moyen, dans lequel les particules se meuvent de façon presque indépendante. Ce potentiel moyen s'obtient généralement, en physique atomique, par la méthode de Hartree-Fock, qui conduit à l'expression (II.6.1) pour  $U$  :

$$\langle p|U|q\rangle = \sum_A (\langle pA|V|qA\rangle - \langle pA|V|Aq\rangle) \quad . \quad (\text{II.6.1})$$

Ce choix élimine une série de diagrammes qui contiennent les insertions suivantes :



Fig. II.6.1

En physique nucléaire, le choix de Hartree-Fock est valable pour des potentiels  $V$  qui se comportent bien et ne nécessitent pas l'introduction de la matrice  $G$  ; mais, pour des potentiels à coeurs trop répulsifs, la méthode de Hartree-Fock n'est plus applicable.

Par un raisonnement différent de celui de Hartree-Fock, Bethe, Brandow et Petschek [BET 63], remplaçant  $V$  par  $G(W)$  et précisant la valeur à donner à  $W$ , montrent que les éléments du potentiel  $U$  entre états trous peuvent être obtenus par une formule très semblable à la formule (II.6.1). Ce choix, qui est aussi valable pour les noyaux finis, se définit plus facilement dans le formalisme du propagateur à une particule. Dans ce formalisme, seule la succession dans le temps des interactions d'une même ligne nucléon a une importance, alors que dans le formalisme du propagateur global habituel, l'ordre de toutes les interactions dans le temps a une importance. Un diagramme du formalisme à une particule équivaut donc à une série infinie de diagrammes du formalisme global, qui correspondent à toutes les possibilités d'arrangement dans le temps. La différence entre les deux formalismes sera plus claire en donnant un exemple, où, pour distinguer les deux formalismes,  $G$  sera représenté par un rectangle hachuré dans le formalisme à une particule

et par une ligne ondulée dans le formalisme global (fig. II.6.2).



Fig. II.6.2



Fig. II.6.3

B.B.P. montrent que la somme des contributions de tous les diagrammes de la figure (II.6.2) est égale à la contribution du premier diagramme, où la matrice  $G$  intermédiaire est calculée sur la couche en énergie (fig. II.6.3). B.B.P. définissent leur potentiel  $U$  entre états trous de façon à annuler la somme des diagrammes de la figure (II.6.4)

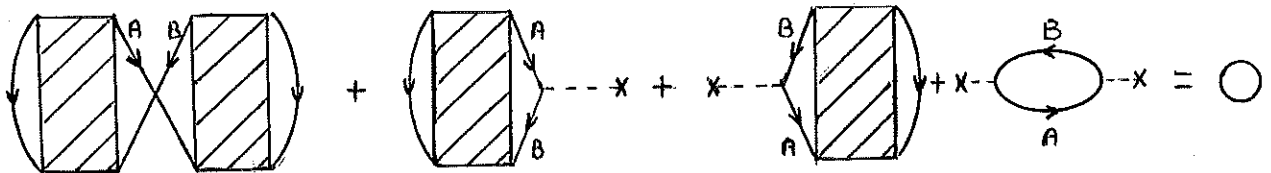


Fig. II.6.4

ce qui conduit à :

$$\langle A|U|B\rangle = \frac{1}{2} \sum_D (\langle AD|G(\epsilon_A + \epsilon_D)|BD\rangle + \langle AD|G(\epsilon_B + \epsilon_D)|BD\rangle) \quad (\text{II.6.2})$$

où  $\epsilon_A$  représente l'énergie du nucléon dans l'état  $A$ .

Baranger [BAR 67], généralisant la théorie de B.B.P. aux noyaux finis, définit les éléments de la matrice  $U$  entre un état trou et un état particule, par l'annulation de la somme de diagrammes de la figure (II.6.5). Cette définition n'intervient pas dans l'étude de la matière nucléaire infinie, car l'opérateur  $U$  doit alors conserver la quantité de mouvement.

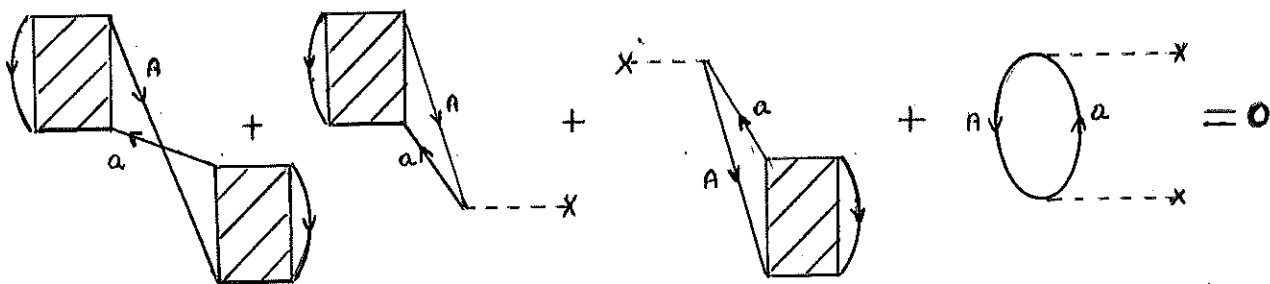


Fig. II.6.5

ce qui conduit à :

$$\langle A|U|a\rangle = \sum_D \langle AD|G(\epsilon_A + \epsilon_D)|aD\rangle \quad . \quad (\text{II.6.3})$$

Nous voyons apparaître ici un problème de self-consistance, car  $U$  défini par (II.6.2) et (II.6.3), dépend de  $G$ , et  $G$  dépend de  $U$  par l'intermédiaire de  $\frac{Q}{e}$ .

Etudions, à présent, la façon de définir les éléments de  $U$  entre deux états particules. Pour ceux-ci, le théorème de B.B.P. n'est plus applicable, car il n'y a pas de diagramme d'ordre 2 qui contient une insertion  $U$  dans une ligne particule. Il faut alors considérer les diagrammes d'ordre supérieur. Mais par le choix de  $U$ , nous cherchons à annuler des diagrammes de même importance ; or nous savons que les diagrammes qui ont même nombre de lignes trous indépendantes sont du même ordre de grandeur. Nous essayerons donc d'annuler, par le choix de  $U$  particule, les diagrammes qui ont trois lignes trous indépendantes. Evaluons d'abord ces diagrammes, qui peuvent appartenir aux trois classes suivantes. La première classe comprend les diagrammes de la figure (II.6.2); elle est déjà annulée par le choix (II.6.2) du potentiel  $U$  entre états trous.

La deuxième classe, qui comprend les diagrammes de la figure (II.6.7), et dont la contribution totale est représentée par la figure (II.6.8),

est souvent négligée, car elle vaut environ  $1/32$  de la classe précédente.

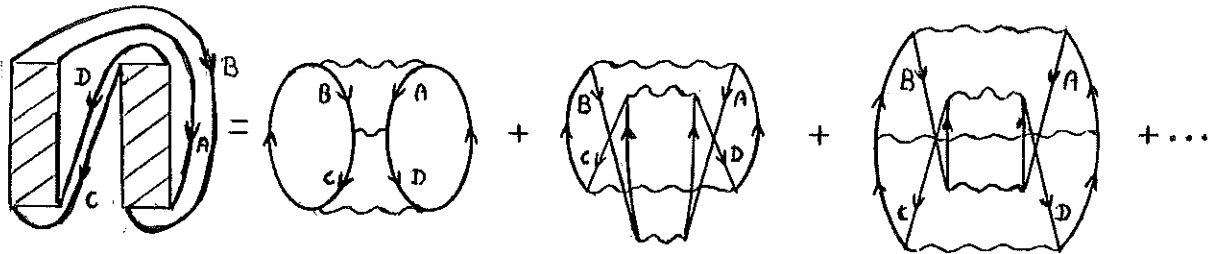


Fig. II.6.7

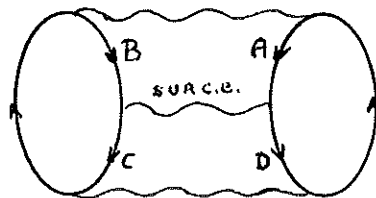


Fig. II.6.8

La troisième classe est la plus compliquée, car elle ne peut pas être sommée aussi facilement. Bethe, dans son travail sur la corrélation à trois corps, l'a étudiée spécialement. La série est en fait divergente, tout comme la série donnant  $G$  en fonction de  $V$ . La série de  $G$  a cependant été sommée de façon formelle pour aboutir à une équation intégrale en  $G$  (équation de Bethe-Goldstone) dont la solution est finie et bien définie. D'une façon similaire, Bethe écrit une équation intégrale pour la somme des diagrammes de la troisième classe, et obtient une solution finie. Cette équation, appelée équation de Bethe-Faddeev, est équivalente à une équation de Schrödinger à trois corps. Cette troisième classe comprend les diagrammes suivants :



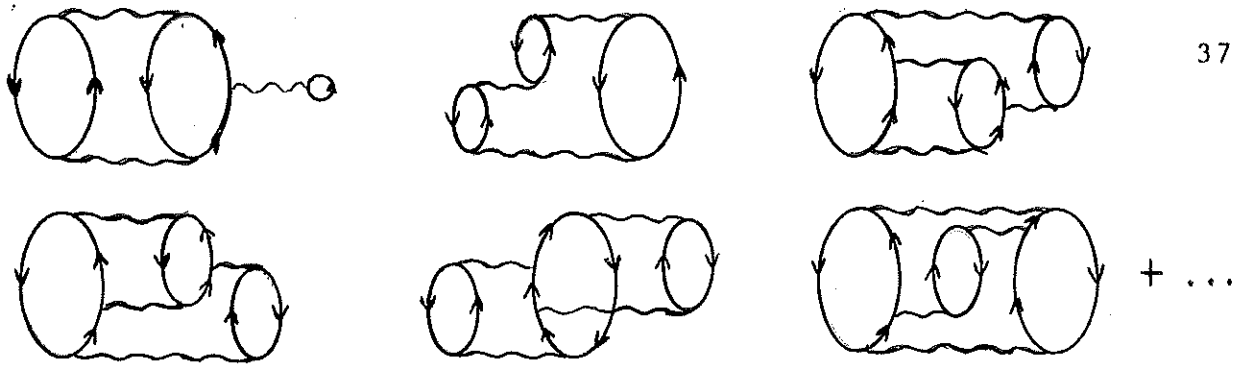


Fig. II.6.9

Ceux-ci peuvent aussi se dessiner de la façon suivante, qui montre mieux l'évolution des états dans le temps :

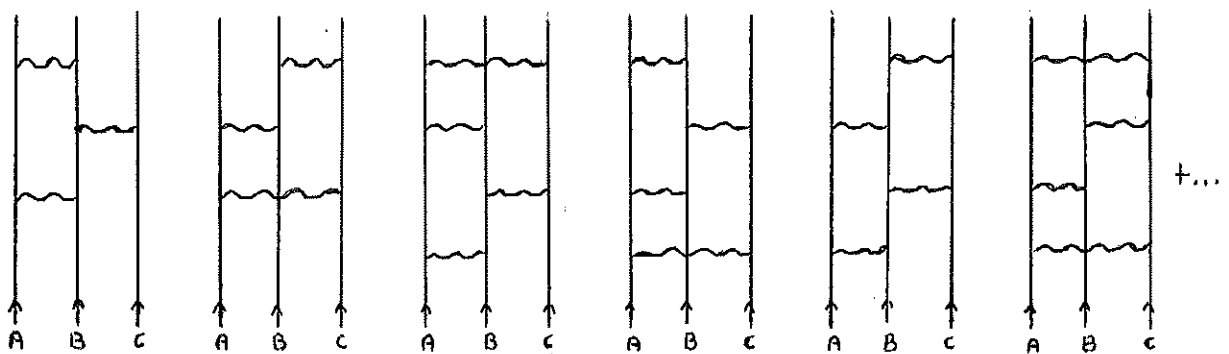


Fig. II.6.10

Les interactions  $G$  sont insérées entre les trois lignes, de toutes les façons telles que deux interactions successives ne se trouvent pas entre une même paire de lignes et que le système revienne dans son état fondamental après la dernière interaction. On peut voir facilement qu'il y a  $2^{n-2}$  diagrammes de ce type, qui contiennent  $n$  interactions  $G$ .

La contribution totale de ces corrélations à trois corps, pour  $k_F = 1,36$ , est de  $1,8$  MeV attractif.

Day [DAY 66] a aussi estimé les corrélations à quatre corps et obtenu une attraction supplémentaire de  $1,09 \pm 0,05$  MeV. Il peut paraître surprenant que cette correction soit du même ordre de grandeur que la contribution des diagrammes à trois corps, car, théoriquement, les contributions doivent varier proportionnellement aux puissances de  $\kappa$  ( $\kappa = \rho \int \chi^2 dr$ , est une meilleure estimation que la valeur  $\rho \kappa^3$  utilisée page 17, du rapport des contributions de deux diagrammes dont les nombres de lignes trous indépendantes diffèrent d'une unité;  $\kappa = 0,14$  pour la matière nucléaire). En fait, si nous considérons le tableau suivant comparant les contributions  $E^{(n)}$  des corrélations à  $n$  corps aux valeurs

estimées à partir de  $E^{(2)}$ , nous constatons que  $E^{(3)}$  est anormalement faible mais que  $E^{(4)}$  a un bon ordre de grandeur.

n	$E^{(n)}$	$E^{(2)} \kappa^{n-2}$
2	35 MeV	35 MeV
3	2 MeV	5 MeV
4	1,1 MeV	0,7 MeV

Etant donné la faible contribution des corrélations à trois corps, le potentiel  $U$  peut être défini de deux façons différentes. La première façon, suggérée par Brown, est de prendre simplement  $U_{\text{part}} = 0$ . Ce choix n'est peut-être pas très physique car on conçoit difficilement qu'une particule, à basse énergie, puisse interagir avec un noyau, sans sentir de potentiel moyen. L'énergie totale est alors calculée par la relation suivante :

$$E = \sum_A T_A + \frac{1}{2} \sum_{AB} \langle AB | G | AB \rangle + \text{termes à 3 corps} \quad . \quad (\text{II.6.4})$$

On peut aussi définir  $U_{\text{part}}$  de façon à annuler les diagrammes à trois corps. Ce potentiel, défini par Bethe et Rajaraman [BET 67, RAJ 67], réduit aussi fortement l'effet d'un grand nombre de diagrammes à quatre corps. Dahlblom [DAH 69] a calculé ce potentiel avec une interaction N-N de Reid : attractif ( $\approx 20$  MeV) pour les états particules juste au-dessus du niveau de Fermi, il devient ensuite répulsif pour  $k > 2 k_F$ , mais reste faible ( $< 30$  MeV) jusqu'à  $k = 4,5 k_F$ , puis il finit par être très répulsif (fig. II.6.11).

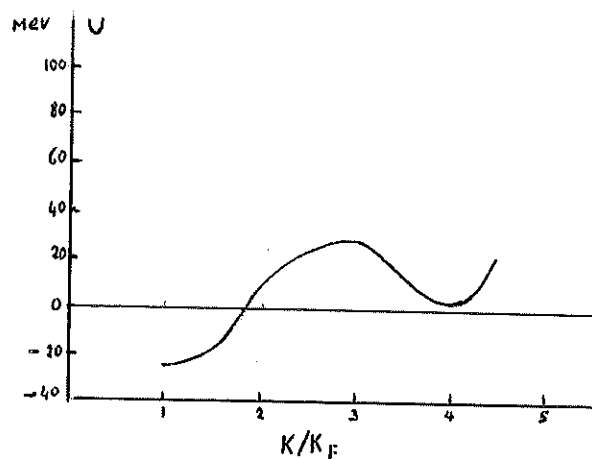


Fig. II.6.11

Dans ce cas, l'énergie se calcule par la relation :

$$E = \sum_A T_A + \frac{1}{2} \sum_{AB} \langle AB | G(W) | AB \rangle \quad , \quad (\text{II.6.5})$$

Nous constatons que dans les deux cas, il faut calculer les termes à trois corps ; mais dans le deuxième cas, le calcul doit être fait à chaque itération conduisant à la self-consistance, tandis que dans le premier cas, il n'est fait qu'une fois. C'est pour cette raison que le choix  $U_{\text{part}} = 0$  est souvent préféré.

Remarquons que les deux choix possibles de  $U$  que nous venons d'étudier, sont adaptés au calcul particulier de l'énergie de liaison. Pour la détermination d'autres propriétés, il faudra probablement faire un autre choix. Ainsi, si le choix  $U_{\text{part}} = 0$  est une bonne approximation pour le calcul de l'énergie, il n'est certainement plus valable pour le calcul du potentiel optique des nucléons dans la matière nucléaire ; il faut alors choisir un potentiel  $U$  qui optimise la convergence du développement du potentiel du modèle optique.

## II.7. Résultats pour la matière nucléaire

Au début, les résultats obtenus pour la matière nucléaire étaient assez décevants : ils devenaient de moins en moins bons au fur et à mesure que des corrections étaient apportées aux calculs.

En 1958, Brueckner et Gammel [BRU 58] obtenaient déjà des résultats très satisfaisants pour l'énergie de liaison. Ils avaient utilisé les potentiels N-N de Gammel et Thaler [GAM 57], et résolu de façon directe l'équation intégrale de Bethe-Goldstone dans l'espace des coordonnées, sans utiliser donc les méthodes de séparation ou du spectre de référence (méthode de Brueckner et Gammel). Par la suite, les calculs utilisèrent des potentiels N-N en meilleur accord avec les expériences de diffusion et les propriétés du deutéron, mais donnèrent des énergies moins bonnes. Ainsi, Brueckner et Masterson [BRU 62], avec le potentiel de Breit [BRE 62], et Razavy [RAZ 63], utilisant la méthode du spectre de référence, avec le potentiel de Hamada-Johnston [HAM 62], n'obtinrent que 8 MeV pour l'énergie de liaison d'une particule. Brown [BROW 64] trouva même des erreurs dans les calculs précédents, dont la cor-

rection réduisait l'énergie à 4 MeV . Les corrections relativistes qui, au départ, semblèrent pouvoir sauver la situation, s'avérèrent être trop faibles. (Ces corrections ne sont d'ailleurs pas bien définies, car les forces nucléaires, utilisées dans les calculs, sont phénoménologiques et on ne sait pas comment ces forces se transforment en relativité. Cette situation changera lorsque l'interaction N-N sera déduite de la théorie des mésons. Cependant, un certain effet relativiste minimal peut déjà être pris en compte : le fait que la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement change en relativité. Brown, Jackson et Kuo [BROW 69] ont évalué cette correction à environ 0,5 MeV ). Wong [WON 65] expliqua alors que l'énergie de liaison est très sensible au choix du potentiel N-N et que l'utilisation d'un potentiel à coeur plus doux donnerait de meilleurs résultats. Rajaraman [RAJ 63] et Bethe [BET 65, 67] mirent l'importance des corrélations à trois corps en évidence et montrèrent la façon d'en tenir compte en utilisant un potentiel  $U_{\text{part}}$  non nul. Sprung et Bhargawa [SPR 67] utilisèrent un potentiel  $U$  non nul pour tenir compte des corrections à trois corps et trouvèrent 12 MeV pour l'énergie de liaison ; mais ils avaient surestimé les corrélations à trois corps. On sait à présent que les corrélations à trois corps ne contribuent qu'à environ 1 MeV et qu'on peut poser  $U_{\text{part}} = 0$  . Dans ce cas, l'énergie de liaison diminue d'au moins 5 MeV .

Cependant, des résultats satisfaisants ont finalement été obtenus par Kallio et Day [KAL 69], par Siemens [SIE 70] et Sprung qui utilisent le potentiel de Reid à coeur doux. Ils trouvent que l'énergie varie avec la densité suivant la courbe supérieure de la figure (II.7.1) ; celle-ci peut être approchée par l'équation

$$E = - 15,07 k_F^3 + 7,85 k_F^4 \quad ;$$

elle présente un minimum  $E \approx 11,05$  MeV pour  $\rho_0 = 0,2$  fm<sup>3</sup> et  $k_F = 1,44$  fm<sup>-1</sup> . La courbe inférieure de la figure (II.7.1) est obtenue en augmentant arbitrairement l'énergie potentielle de 12 % dans le but de simuler les corrections d'ordre plus élevé ; ceci conduit à  $E = - 15,82$  MeV et  $k_F = 1,58$  fm<sup>-1</sup> pour l'état à l'équilibre. Pour estimer les corrections d'ordres plus élevés à partir de la contribution à deux corps, on peut aussi augmenter de 22 % l'énergie potentielle des états triplets, ce qui conduit à  $E = - 15,78$  MeV et  $k_F = 1,47$  fm<sup>-1</sup> .

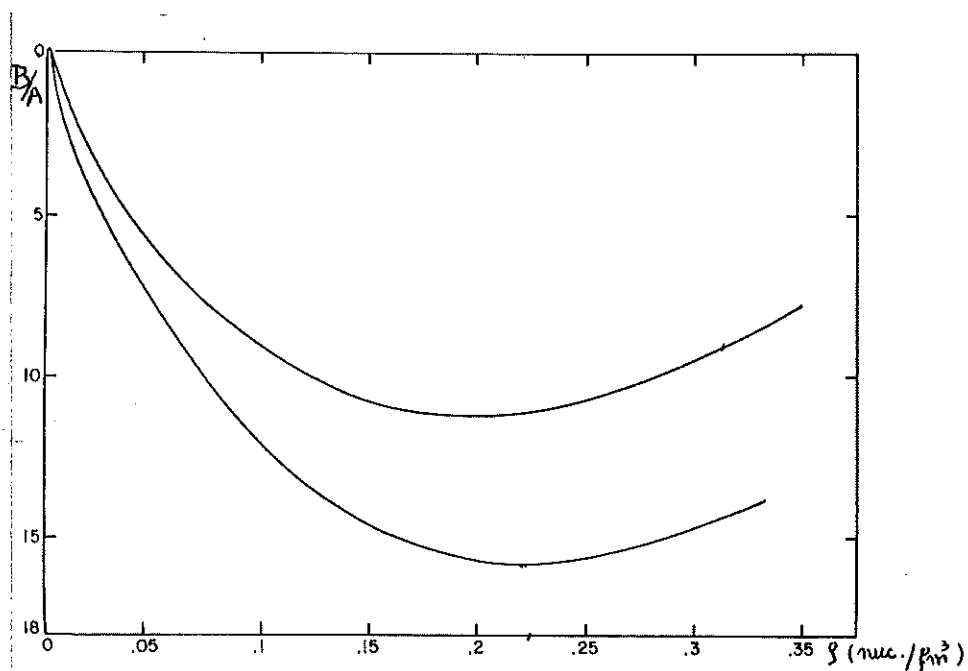


Fig. II.7.1

Brueckner, Buchler, Clarck et Lombard [BRU 69] proposent une variation autre de l'énergie avec la densité donnée par la formule suivante :

$$E(\rho) = 75,06 \rho^{2/3} - 741,28 \rho + 1179,89 \rho^{4/3} - 467,54 \rho^{5/3} .$$

Les contributions à l'énergie de la matière nucléaire, des différents facteurs ont aussi été calculées de façon plus rigoureuse avec un potentiel de Reid à coeur doux, et sont regroupées dans le tableau suivant :

	$k_F = 1,2$ (MeV)	$k_F = 1,36$ (MeV)	$k_F = 1,6$ (MeV)
Corrélations à 2 corps	- 9,79	- 11,05	- 10,20
Corrélations à 3 corps	- 1,6	- 1,76	- 2,6
Corrélations à 4 corps	- 0,9	- 1,09	- 1,5
Forces à 3 corps	- 0,8	- 1	- 1
Relativité	- 0,35	- 0,5	- 0,7
TOTAL	- 13,4	- 15,4	- 16

Une application plus intéressante de la théorie de Brueckner à la matière nucléaire est le calcul du potentiel du modèle optique. Celui-ci a été calculé pour des neutrons de basses énergies [BRU 55d, AZZ 70, SLA 70, DOV 72] ou avec des potentiels N-N simplifiés [DOV 72, REIN 64]. Jeukenne, Lejeune et Mahaux calculent pour le moment ce potentiel pour des neutrons d'énergie supérieure à 250 MeV avec un potentiel de Reid à coeur dur.

Tirons à présent quelques conclusions des résultats regroupés dans le tableau ci-dessous.

- 1°) Nous constatons qu'une augmentation de l'énergie de liaison entraîne généralement une augmentation de la densité d'équilibre.
- 2°) L'étude de la matière nucléaire nous permet d'estimer un peu mieux le rapport entre la force centrale et la force tensorielle, que les données à deux corps ne définissent pas avec précision. Les énergies obtenues avec des potentiels N-N qui contiennent une force tensorielle réduite et qui reproduisent les déphasages de la diffusion, sont trop grandes. Ainsi, Ingber [ING 68], avec un potentiel qui contient une interaction tensorielle s'annulant pour des courtes distances, obtient des énergies trop grandes.
- 3°) Le potentiel de Reid à coeur doux donne de bons résultats ; il n'est pas nécessaire de rechercher un potentiel à coeur plus doux. D'autre part, des calculs de noyaux légers [TRI 72], avec des potentiels à coeur dur comme les potentiels de Yale, de Hamada-Johnston et de Reid à coeur dur, ont montré que les parties à courte portée de ces potentiels sont trop répulsives. Le potentiel de Reid à coeur doux constitue donc une bonne base pour le calcul des noyaux finis.
- 4°) Nous pouvons dire enfin que les potentiels N-N, qui donnent de bons déphasages, ne fournissent pas la même énergie de liaison. Il serait très intéressant d'avoir un autre critère de choix. Le meilleur critère serait de dériver le potentiel N-N, de la théorie des hautes énergies. Nous avons déjà les potentiels de Bryan-Scott et de Ueda-Green qui sont obtenus de façon théorique. Nous pouvons aussi chercher un critère qui utilise les systèmes à deux ou trois nucléons. Les propriétés sur la couche en énergie du système à deux nucléons ont déjà été utilisées. Pour les propriétés en dehors de la couche en énergie, nous pouvons, par exemple, étudier plus en détail la fonction d'onde du deutéron.

S'il n'est pas possible de trouver un potentiel qui reproduise toutes ces propriétés, c'est que la description avec un potentiel

est inadéquate. Il faudra alors formuler la théorie de Brueckner sans hypothèse de potentiel, en tenant compte explicitement des échanges de mésons. Des calculs de ce genre sont plus compliqués et n'ont pas encore été faits.



AUTEURS	POTENTIEL UTILISE	K	B/A (MeV)	$k_F^{-1}$ ( $f_m^{-1}$ )
[BRU 58a] Brueckner et Gammel	[GAM 57] Gammel et Thaler		14 à 18,5	
[BRU 62] Brueckner et Masterson	[BRE 62] Breit		(8) → 4	
[RAZ 63] Razavy	[HAM 62] Hamada-Johnston		(8) → 4	
[SPR 67] Sprung et Bhargava	[REI 68] Reid coeur dur		(12) → 7	1,36
[SPR 67] Sprung et Bhargava	[HAM 62] Hamada-Johnston		(10,9) → 5	1,38
[SPR 67] Sprung et Bhargava	[BRE 62] Bressel, Kerman, Rouben Ingber I coeur très doux		(15,3) → 10	1,5
[ING 68] Ingber	Ingber I		14,8	1,31
[ING 68] Ingber	Ingber II		17,8	1,37
[AKA 68a] Akaiski-Nagata	[KIS 69] Kishi		16	1,55
[KAL 69] Kallio et Day	Reid à coeur doux		11,24	1,44
[KAL 69] Kallio et Day	Reid à coeur dur		7,5	-
Sprung	Reid à coeur doux	134	11,05	1,36
[SIE 70] Siemens	Reid à coeur doux		11,24	1,44
[HAF 70] Haftel	Reid à coeur doux		15,0	1,58
[HAF 70] Haftel	[BRY 69] Bryan-Scott		≥ 30	≥ 2,1
[HAF 70] Haftel	Haftel-Tabakin A		22,5	2,0
[GOG 70] Gogny, Pires et Tourreil	Haftel-Tabakin B		> 15	1,98
[COE 70] Coester, Cohen, Day, Vincent	Gogny		11	1,48
[COE 70] Coester, Cohen, Day, Vincent	coeur dur standard		19,5	1,8
Wong et Sawada	Coester		7,1	1,21
Wong et Sawada	Hamada-Johnston	70	12	1,46
Wong et Sawada	Reid à coeur doux	150	11,2	1,46
Wong et Sawada	Bressel, Kerman, Rouben	140	17,2	1,64
Wong et Sawada	Ueda-Green 1	190	22,9	1,69
Wong et Sawada	Ueda-Green 3	280	18,8	1,69
Wong et Sawada	Bryan-Scott	260		

## CHAPITRE III - LES NOYAUX FINIS

### III.1. Introduction

Le chapitre III étudiera les noyaux finis. Ceux-ci se différencient de la matière nucléaire par les quatre points suivants:

- 1°) Les fonctions d'état des nucléons dans le noyau ne sont pas connues a priori.
- 2°) L'état fondamental peut être dégénéré dans le cas des noyaux à couche ouverte.
- 3°) Les énergies à une particule peuvent être évaluées expérimentalement dans les réactions de stripping et de pick-up.
- 4°) Il faut tenir compte de l'interaction de Coulomb.

Les calculs de noyaux finis se font le plus souvent dans une base de fonctions d'oscillateur harmonique, qui sont très proches des vraies fonctions d'onde des nucléons dans le noyau. Nous verrons que dans une telle base, l'opérateur d'exclusion de Pauli ne peut être pris en compte que de façon approchée.

Une autre façon de résoudre les noyaux finis est la méthode de l'approximation de la densité locale introduite, en 1958, par Brueckner, Gammel et Weitzner [BRU 58b]. Cette méthode fait l'hypothèse que, localement, les nucléons du noyau se comportent comme s'ils étaient dans une matière nucléaire infinie de densité égale à la densité locale dans le noyau.

Nous donnerons aussi les différentes approximations utilisées pour représenter l'opérateur d'exclusion de Pauli. Nous évoquerons enfin, sans entrer dans les détails, le problème difficile du choix du potentiel  $U$  pour les noyaux finis. Ce choix a une grande importance si l'on veut obtenir des énergies à une particule et une distribution de la densité en meilleur accord avec l'expérience. Malheureusement, les auteurs ne se sont pas mis d'accord sur un choix unique.

### III.2. Principales différences entre les noyaux finis et la matière nucléaire

Les méthodes générales de résolution de l'équation de Bethe-Goldstone pour la matière nucléaire s'appliquent également aux noyaux finis. Il existe cependant quelques différences qui rendent les calculs des propriétés des noyaux finis plus compliqués.

Contrairement au cas de la matière nucléaire infinie, il n'y a plus d'invariance de translation dans les noyaux finis et nous devons déterminer les fonctions d'onde du modèle en couches par des calculs self-consistants de Hartree-Fock. En fait, dans les calculs de structure, il y a deux types de self-consistance à satisfaire :

1°) La self-consistance de Brueckner, qui demande que les énergies obtenues par sommations des éléments diagonaux de  $G$  soient consistantes avec les énergies de départ  $W$ , qui sont utilisées pour le calcul de  $G$ .

2°) La self-consistance de Hartree-Fock, qui exige que le potentiel du modèle en couches obtenu à partir des fonctions d'onde, soit identique à celui utilisé pour déterminer ces mêmes fonctions d'onde. Nous appellerons "calcul de Brueckner-Hartree-Fock" (B.H.F.), un calcul qui satisfait les deux self-consistances, et "calcul de Brueckner" (B.), un calcul où les fonctions d'onde sont remplacées directement par des fonctions d'oscillateur harmonique. Davies, Krieger et Baranger [DAV 66] ont, en effet, montré que les fonctions d'onde de  $H_0$  sont très proches des fonctions d'oscillateur harmonique, surtout pour les noyaux légers, et que l'énergie totale est peu sensible au nombre de fonctions d'oscillateur contenues dans le développement des fonctions de H.F. L'utilisation de fonctions d'oscillateur harmonique est plus simple, car Talmi [TAL 52] a montré que le potentiel d'oscillateur harmonique présente l'avantage, avec le potentiel de l'onde libre, d'être séparable en coordonnées relatives et coordonnées du centre de masse. Si  $n$  et  $\ell$  représentent respectivement le nombre quantique principal et le moment angulaire, les fonctions d'oscillateur harmonique de deux particules s'expriment comme une combinaison linéaire de produits de fonctions d'oscillateur de la coordonnée  $R$  du centre de masse et de la coordonnée relative  $r$ .

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | n_1 \ell_1 n_2 \ell_2 \Lambda \rangle = \sum_{NnL\ell} \langle NLn\ell \Lambda | n_1 \ell_1 n_2 \ell_2 \Lambda \rangle \langle \vec{R} | NnL \rangle \langle \vec{r} | n\ell \rangle \quad (\text{III.2.1})$$

avec 
$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 = \vec{L} + \vec{\ell} \quad . \quad (\text{III.2.2})$$

Les coefficients  $\langle N L n \lambda \mid n_1 \ell_1 n_2 \ell_2 \lambda \rangle$  sont les coefficients de Brody-Moshinsky [BRO 67] ; ils vérifient certaines relations d'orthogonalité et sont égaux à zéro si les relations (III.2.3), (III.2.4) et (III.2.5) ne sont pas vérifiées.

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq \lambda \leq \ell_1 + \ell_2 \quad (\text{III.2.3})$$

$$|L - \ell| \leq \lambda \leq L + \ell \quad (\text{III.2.4})$$

$$2N + L + 2n + \ell = 2n_1 + \ell_1 + 2n_2 + \ell_2 \quad . \quad (\text{III.2.5})$$

L'état fondamental de la matière nucléaire était non dégénéré. Pour les noyaux finis, à couche ouverte, il y a plusieurs états fondamentaux ; il faut alors utiliser une théorie plus générale que celle de Goldstone : la théorie de Bloch et Horowitz [BLO 58] ou la théorie de Morita [MOR 63].

Dans les noyaux finis, les valeurs propres de  $H_0$  doivent être proches (au signe près) des énergies expérimentales d'enlèvement d'un nucléon. Cela nécessite l'introduction d'un potentiel de saturation, qui représente la réduction de l'attraction due au fait qu'un nucléon donné peut quitter, pendant une partie du temps ( $\approx 14\%$ ) son orbite normale et être excitée dans un état non occupé [MAC 69, 70].

Il faudra finalement calculer la correction due à l'interaction de Coulomb.

### III.3. Base de fonctions d'oscillateur harmonique

Pour réaliser les deux self-consistances décrites dans le paragraphe précédent, on peut procéder de la façon suivante. On se donne un potentiel à une particule arbitraire, on détermine ses fonctions propres et ses valeurs propres. On évalue ensuite les éléments de la matrice  $G$  entre ces fonctions propres, avec un opérateur  $\frac{Q}{e}$  correspondant à ces fonctions propres et à ces énergies propres. Avec les éléments de  $G$ , on détermine alors une nouvelle valeur pour  $U$ . On fait varier le potentiel  $U$  de départ jusqu'à ce que le potentiel obtenu soit suffisamment peu dif-

férent du potentiel de départ. Cette procédure très compliquée a été suivie par Brueckner [BRU 61] et Köhler [KOH 65].

Généralement, ces calculs se simplifient si nous travaillons dans une base de fonctions d'oscillateur harmonique (ou d'ondes planes  $\omega = 0$ )  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ ,  $|c\rangle$ , ... qui sont fonctions propres de l'opérateur

$$T + U_0 \quad (\text{III.3.1})$$

avec

$$U_0 = -C + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \quad (C \approx -80 \text{ MeV}) \quad (\text{III.3.2})$$

$\omega$  est choisi pour obtenir le meilleur recouvrement possible entre les fonctions d'oscillateur et les vraies fonctions. Bohr et Mot-telson [BOH 69] proposent pour  $\hbar \omega$  :

$$\hbar \omega = 40 A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (\text{III.3.3})$$

En fait, le paramètre  $\omega$  ne joue pas le même rôle dans les calculs de B. et de B.H.F. Pour les calculs de B.H.F., le choix de  $\omega$  importe peu, car Davies, Baranger, Tarbuton et Kuo [DAV 69] ont démontré que les propriétés calculées tendent vers des limites indépendantes de  $\omega$ , lorsque le nombre de fonctions d'oscillateur du développement de la vraie fonction devient suffisamment élevé. Pour les calculs de B., le choix de  $\omega$  est plus important. Becker [Bec 68] propose de choisir  $\omega$  de façon à minimiser l'énergie totale, mais Baranger [BAR 67] trouve cette procédure douteuse. Les fonctions d'onde du modèle en couche  $|i\rangle$ ,  $|j\rangle$ ,  $|k\rangle$ , ... sont alors développées en séries des fonctions  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ , ... :

$$|i\rangle = \sum_a A_{ai} |a\rangle \quad (\text{III.3.4})$$

Les éléments de la matrice  $G$  sont obtenus par la relation (III.3.5) :

$$\langle k\ell | G(W_{ij}) | ij \rangle = \sum_{abcd} \langle ac | G(W_{ij}) | bd \rangle \Lambda_{ak}^* \Lambda_{c\ell}^* A_{bi} A_{dj} \quad (\text{III.3.5})$$

avec

$$W_{ij} = \epsilon_i + \epsilon_j \quad (\text{III.3.6})$$

où  $\epsilon_i$  est l'énergie d'un nucléon dans l'état  $i$ . La simplification provient alors du fait que l'élément  $\langle ac | G(W_{ij}) | bd \rangle$  sera déterminé, une fois pour toutes, en fonction du paramètre  $W_{ij}$  par

la relation (III.3.7) :

$$\langle ac | G(W_{ij}) | bd \rangle = \langle ac | V | bd \rangle - \sum_{e,f} \langle ac | V | ef \rangle \frac{Q(e) Q(f)}{E(e) + E(f) - W_{ij}} \times \langle ef | G | bd \rangle \quad (\text{III.3.7})$$

Le problème est de définir  $Q(e)$  et  $E(e)$ , étant donné que  $|e\rangle$  n'est pas une fonction d'état d'un nucléon dans le noyau. On prend généralement pour  $E(e)$ , énergie des états intermédiaires, l'énergie de l'oscillateur harmonique dans l'état  $e$ . Pour les noyaux légers ( $A < 60$ ), les fonctions  $|i\rangle$  et  $|a\rangle$  sont très semblables et  $Q(e)$  peut être défini par (III.3.8)

$$Q(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } |e\rangle \text{ est une des } A \text{ premières fonctions} \\ & \text{d'oscillateur harmonique} \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{III.3.8})$$

Pour les noyaux plus lourds, cette relation est moins valable, car à l'intérieur du noyau, la densité est presque constante, alors qu'un simple remplissage des états d'oscillateur les plus bas donne une densité

$$\rho = (A - Br^2)^{1/2} \quad (\text{III.3.9})$$

L'approximation des fonctions d'oscillateur surestime la densité centrale et aussi l'effet du principe de Pauli. Dans ce cas, il est vraisemblable que l'approximation de la densité locale, envisagée plus loin, donne de meilleurs résultats pour le traitement de l'opérateur de Pauli.

#### III.4. Approximation de la densité locale

Introduite par Brueckner, Gammel et Weitzner [BRU 58b], la méthode de l'approximation de la densité locale fait l'hypothèse que la matrice de réaction  $G$  est localement la même que celle de la matière nucléaire qui aurait même densité. Cette méthode utilise généralement une base d'ondes planes plutôt que des fonctions d'oscillateur harmonique, et consiste à prendre l'élément de matrice  $\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | G(W, \rho) | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle$  qui a été calculé dans la matière nucléaire, avec la valeur de l'énergie de départ qu'elle aurait dans

la matière nucléaire. Cet élément de matrice devient alors une fonction de la densité  $\rho$  et des quantités de mouvement relatives  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$ , vu la faible dépendance vis-à-vis de la quantité de mouvement totale  $\vec{K}$  qui se conserve. Avec ces éléments de matrice, par une transformation de Fourier qui fait passer de l'espace des quantités de mouvement à l'espace des coordonnées, nous obtenons un potentiel effectif à deux corps, non local, dépendant de la densité  $\langle r' | G(\rho) | r \rangle$ . En utilisant ce potentiel effectif à deux corps, pour lequel la méthode de Hartree-Fock est applicable, on obtient alors une énergie totale donnée par (III.4.1) et des énergies à une particule données par (III.4.2) :

$$E = \sum_i \int \phi_i^* \frac{p^2}{2m} \phi_i \, dr + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int \phi_i^*(r_1) \phi_j^*(r_2) \langle r_1 r_2 | G(\rho) | r_1' r_2' \rangle \times \phi_i(r_1') \phi_j(r_2') \, dr_1' \, dr_2' \, dr_1 \, dr_2 \quad (\text{III.4.1})$$

$$E_i \phi_i(r) = \frac{p^2}{2m} \phi_i(r) + \int U_{\text{H.F.}}(r, r') \phi_i(r') \, dr' + U_R(r) \phi_i(r) \quad , \quad (\text{III.4.2})$$

où  $U_{\text{H.F.}}$  est le potentiel à une particule obtenu par la méthode de H.F. et  $U_R$  est un potentiel de réarrangement (voir plus loin).

$$U_{\text{H.F.}}(r, r') = \sum_j \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_1' \phi_j^*(r_1) \langle r r_1 | G(\rho) | r' r_1' \rangle \phi_j(r_1') \quad (\text{III.4.3})$$

$$U_R(r) = \sum_{i,j} \int d\vec{r}_2 d\vec{r}_1' \phi_i^*(\vec{r}) \phi_j^*(\vec{r}_2) \frac{\partial}{\partial \rho} \langle r r_2 | G(\rho) | r_1' r_2' \rangle \times \phi_i(r_1') \phi_j(r_2') \quad . \quad (\text{III.4.4})$$

Brueckner et Goldman [BRU 60] ont donné une évaluation de  $U_R$

$$U_R(r) = 240 [\rho(r)]^2 \text{ MeV} \quad (10^{-13} \text{ cm})^6 \quad . \quad (\text{III.4.5})$$

La méthode est basée sur l'insensibilité relative du propagateur  $\frac{Q}{e}$  vis-à-vis de la représentation. Les différences d'énergies qui apparaissent au dénominateur sont de l'ordre de 50 à 100 MeV, et ne sont pas appréciablement différentes dans le système fini et la matière nucléaire. Cette approximation introduit une erreur qui disparaît lorsque la portée des corrélations dans  $G$  est petite vis-à-vis de la distance sur laquelle la densité change ap-



préciablement. Or, la portée des corrélations est un peu inférieure à un fermi, alors que la densité nucléaire tombe à la surface de 90 à 10 % de la valeur centrale sur une distance d'environ 2,4 fermi. L'approximation est donc qualitativement bonne, du moins pour la détermination des propriétés moyennes. L'erreur sera probablement plus grande pour les propriétés de surface et l'énergie de surface.

A présent, la justification de la méthode est considérée comme quantitativement fautive. Brandow et Wong [WO 67] ont donné une forme beaucoup meilleure à cette même idée. Ils utilisent pour calculer la matrice de réaction d'un noyau fini les données de la matière nucléaire infinie, qui sont considérées comme les mêmes dans la matière nucléaire et les noyaux finis. Brandow et Wong prétendent que la propagation par les états intermédiaires se fait comme dans la matière nucléaire dont la densité est égale à la densité réelle au centre de masse des deux nucléons considérés. Ils utilisent donc les résultats de la matière nucléaire pour le calcul de  $Q$  et  $H_0$ . (La vraie justification est qu'un traitement exact de ces deux opérateurs est d'une importance secondaire. Wong a montré que l'approximation locale de  $Q$  est aussi bonne que les autres approximations). La principale différence avec le choix de Brueckner est que les traitements actuels n'utilisent plus l'énergie de départ de la matière nucléaire.

La dépendance de  $W$  est conservée dans les calculs de  $G$  ( $W$  est donc la somme des énergies à une particule du noyau fini). Une autre différence est le traitement du centre de masse. Au lieu de calculer la matrice de réaction dans l'espace des quantités de mouvement et de faire la moyenne sur la quantité de mouvement totale, les éléments de la matrice sont calculés entre des états d'oscillateur harmonique, qui sont représentés par des produits d'une fonction du centre de masse et d'une fonction de la coordonnée relative.

#### Comparaison avec l'approximation de la base de fonctions d'oscillateur (A.B.F.O.)

L'approximation de la densité locale (A.D.L.) est plus facile à utiliser numériquement et les corrections dues aux corrélations à plusieurs corps peuvent directement être faites à partir des cal-

culs de la matière nucléaire. Au point de vue précision, l'A.D.L. est supérieure à l'A.B.F.O. pour le calcul du dénominateur  $e$  ; l'A.D.L. traite les fonctions d'onde comme si elles étaient localement planes et l'énergie vaut

$$E(n) = \frac{\hbar^2}{2M} k_n^2$$

où  $k_n^2$  est le nombre d'onde local correspondant à l'état  $n$ . Par contre, l'opérateur  $Q$  est mieux traité dans l'A.B.F.O., pour les noyaux légers, puisque les fonctions d'oscillateur harmonique simulent les vraies fonctions d'onde dans tout le noyau et qu'ainsi le principe de Pauli est pris globalement en compte. En résumé, l'A.D.L. sera surtout désirable dans les cas où les fonctions d'oscillateur diffèrent fortement des vraies fonctions d'onde, c'est-à-dire pour  $A > 60$ . L'A.D.L. reproduit l'énergie de l' $^{180}$  à 1 MeV près [WON 67]. Pour les noyaux légers, l'A.D.L. est moins bonne ; elle sous-estime leur énergie de 2 à 2,5 MeV [KOH 65].

### III.5. Traitement de l'opérateur de Pauli

L'opérateur  $Q$  de Pauli a été traité par des méthodes très variées, qui peuvent être classées dans quatre catégories.

- a) Méthodes qui résolvent l'équation de Bethe-Goldstone pour  $Q = 1$  et qui calculent ensuite les corrections par une méthode de perturbations.
- b) La méthode de séparation de Scott-Moszkowski.
- c) L'approximation de la densité locale.
- d) Les méthodes qui prennent directement  $Q$  en considération dans la résolution de l'équation B.G.

a) La première méthode est la plus utilisée. Elle présente l'avantage d'être indépendante du noyau considéré si ce n'est le choix du paramètre  $\omega$  des fonctions d'oscillateur qui varie légèrement avec  $A$ . L'approximation  $Q = 1$  n'est pas très bonne et les corrections doivent être calculées avec soin. Si

$$G(W) = V + V \frac{Q}{W - H_0} G(W) \quad , \quad (\text{III.5.1})$$

et si

$$G_r(W') = V + V \frac{1}{W' - H_0} G_r(W') \quad , \quad (\text{III.5.2})$$

on a alors, en utilisant la formule (D.10), la relation suivante :

$$G(W) = G_r(W') + G_r(W') \left( \frac{Q}{W - H_0} - \frac{1}{W' - H_0} \right) G(W) \quad . \quad (\text{III.5.3})$$

Cette équation peut être résolue approximativement par deux méthodes différentes.

La première méthode consiste à développer en série et à se limiter par exemple au premier ordre. On a alors :

$$G(W) = G_r(W') + G_r(W') \left( \frac{Q}{W - H_0} - \frac{1}{W' - H_0} \right) G_r(W') \quad . \quad (\text{III.5.4})$$

Une méthode plus correcte est d'inverser la matrice

$$\left[ 1 - G_r(W) \left( \frac{Q}{W - H_0} - \frac{1}{W - H_0} \right) \right] \quad .$$

Comme cette matrice a une infinité d'éléments, on supprime les éléments entre états de nombres quantiques élevés ; on a alors :

$$G(W) = \left[ 1 - G_r(W) \left( \frac{Q}{W - H_0} - \frac{1}{W - H_0} \right) \right]^{-1} G_r(W) \quad . \quad (\text{III.5.5})$$

b) La méthode de séparation de Moszkowski-Scott [MOS 60] est une des meilleures méthodes. Elle est indépendante du noyau et aussi très précise. Malheureusement, elle n'est pas applicable à certains types de forces ; elle ne marche pas pour les ondes P et ne marche pas bien pour les forces tensorielles des ondes S et D . Rappelons brièvement que cette méthode consiste à séparer le potentiel N-N en une partie à courte portée qui diffuse les nucléons de la mer de Fermi presque toujours dans des états non occupés, même si on n'impose pas le principe de Pauli, et en une partie à longue portée, qui peut être développée dans l'approximation de Born, dont le premier terme constitue déjà une bonne approximation.

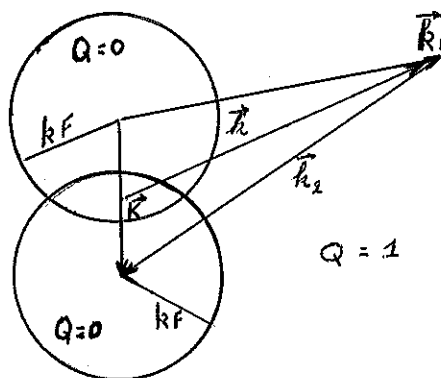
c) La méthode de l'A.D.L. a déjà été vue ; elle utilise souvent une des approximations suivantes pour Q . La définition de Q dans la matière nucléaire et dans l'approximation de la densité

locale est la suivante :

$$Q(\vec{k}_1, \vec{k}_2, k_F(\rho)) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\vec{k}_1| > k_F \text{ et } |\vec{k}_2| > k_F \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{III.5.6})$$

Généralement, on écrit  $Q$  comme une fonction de  $\vec{k}$  et de  $\vec{K}$  où

$$\begin{cases} \vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ \vec{k} = \frac{1}{2} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \end{cases} \quad (\text{III.5.7})$$



$Q = 0$  à l'intérieur des deux sphères  
 $Q = 1$  à l'extérieur.

Fig. III.5.1

$Q$  est donc fonction de  $k$ ,  $K$  et de  $\cos \theta = (\vec{k}, \vec{K})$

$$Q(k, K, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\pm \vec{k} + \frac{1}{2} \vec{K}| > k_F \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{III.5.8})$$

L'approximation habituelle est de faire la moyenne sur l'angle  $\theta$

$$Q_{M.A.}(k, K) \int d(\cos \theta) = \int Q(k, K, \theta) d \cos \theta \quad (\text{III.5.9})$$

$$Q_{M.A.}(k, K) = \begin{cases} 0 & \text{si } k^2 + \frac{K^2}{4} \leq k_F^2 \\ 1 & \text{si } (k - \frac{1}{2} K)^2 \geq k_F^2 \\ f = \frac{k^2 + \frac{K^2}{4} - k_F^2}{kK} & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{III.5.10})$$

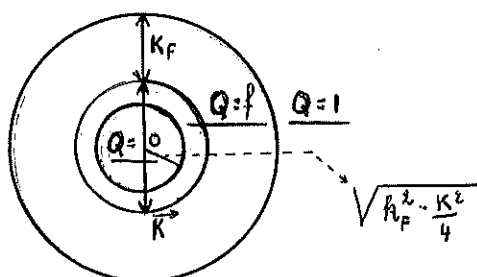


Fig. III.5.2

Une approximation supplémentaire est généralement faite pour éviter la dépendance vis-à-vis de  $K$ .  $K$  est remplacé par  $\sqrt{\bar{K}^2}$  défini par :

$$\int d^3 K K^2 Q(k, K, \theta) = \bar{K}^2(k) \int d^3 K Q(k, K, \theta) = \bar{K}^2(k) q(k), \quad (\text{III.5.11})$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\bar{K}^2(k)}{4k_F} = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{k}{k_F}\right) \left[1 + \frac{k^2/k_F^2}{3(2 + k/k_F)}\right] \quad (\text{III.5.12})$$

$$q(k) = \frac{32\pi}{5} k_F^3 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{k}{k_F} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_F}\right)^3\right] \quad (\text{III.5.13})$$

d) Les méthodes qui tiennent compte directement de l'opérateur de Pauli pour la résolution de l'équation de Bethe-Goldstone dans l'A.B.O.H. utilisent souvent l'approximation d'Eden-Emery, et corrigent par la formule (D.10). Rigoureusement, l'opérateur de Pauli s'écrit

$$Q = 1 - \sum_{A, B \leq k_F} |AB\rangle \langle AB| \quad , \quad (\text{III.5.14})$$

où  $|AB\rangle$  sont les vraies fonctions d'onde à deux particules. Cependant, les vraies fonctions d'onde sont assimilées à des fonctions d'oscillateurs harmoniques  $|ij\rangle$ . Pour un noyau à couche ouverte, la dernière couche n'est que partiellement occupée et chaque niveau  $i$  de la couche est occupé avec une probabilité  $f_i$ . Pour un noyau à couche fermée, toutes les couches sont com-

plètes et  $f_i = 1$ .

$$Q = 1 - \sum_{i,j} f_{ij} |ij\rangle \langle ij| \quad (\text{III.5.15})$$

où

$$f_{ij} = f_i + f_j - f_i f_j \quad (\text{III.5.16})$$

représente la probabilité d'avoir à la fois un nucléon dans l'état  $i$  et un nucléon dans l'état  $j$ . Les différentes valeurs de  $Q$  sont représentées sur la figure ci-dessous où  $\varepsilon_m$  représente l'énergie maximum d'un nucléon se trouvant dans une couche complète, et où  $\varepsilon_M$  représente l'énergie maximum d'un nucléon dans la couche incomplète.

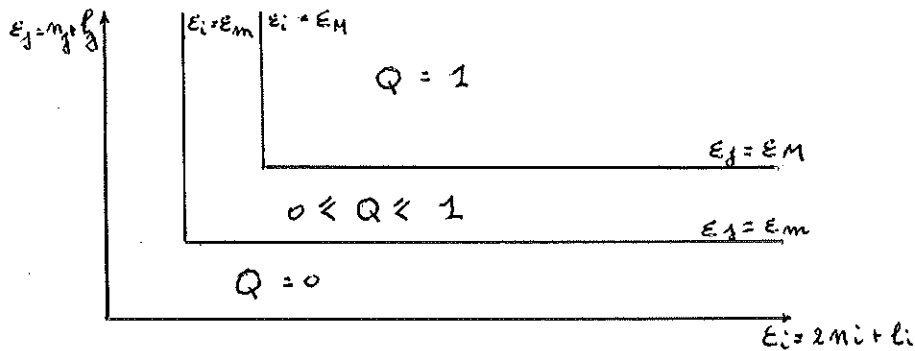


Fig. III.5.3

$$\begin{aligned} 1 - Q &= \sum_{i,j} f_{ij} |n_i \ell_i m_i n_j \ell_j m_j\rangle \langle n_i \ell_i m_i n_j \ell_j m_j| \\ &= \sum_{i,j} \sum_{\lambda, \mu} \sum_{\lambda'} f_{ij} \langle \lambda \mu | \ell_i m_i \ell_j m_j \rangle^* \langle \lambda' \mu | \ell_i m_i \ell_j m_j \rangle \\ &\quad \langle n \ell N L \lambda | n_i \ell_i n_j \ell_j \lambda \rangle \langle n' \ell' N' L' \lambda' | n_i \ell_i n_j \ell_j \lambda' \rangle \\ &\quad |n' \ell' N' L' \lambda' \rangle \langle n \ell N L \lambda | \end{aligned} \quad (\text{III.5.17})$$

où  $\vec{\lambda} = \vec{\ell}_i + \vec{\ell}_j = \vec{L} + \vec{\ell}$  et où les coefficients  $\langle \dots | \dots \rangle$  sont les coefficients de Brody-Moshinsky [BRO 67]. Si toutes les valeurs de  $m_i$  sont équiprobables, on obtiendra un opérateur  $Q$  diagonal en  $\lambda, \mu$  et indépendant de  $\mu$ , en faisant la moyenne sur les valeurs de  $m_i$  et  $m_j$

$$\begin{aligned} \langle n' \ell' N' L' \lambda' | 1 - Q | n \ell N L \lambda \rangle &= \sum_{i,j} f(n_i \ell_i, n_j \ell_j) \langle n_i \ell_i n_j \ell_j \lambda | n \ell N L \lambda \rangle \\ &\quad \langle n_i \ell_i n_j \ell_j \lambda | n' \ell' N' L' \lambda' \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.5.18})$$

L'approximation suivante est d'ignorer les éléments non diagonaux en  $\ell, L$  et de faire la moyenne sur  $\lambda$  :

$$\langle N'n' | 1-Q | Nn \rangle = (2L+1)^{-1} (2\ell+1)^{-1} \sum_{\lambda=|L-\ell|}^{L+\ell} (2\lambda+1) \times \\ \times \langle N'Ln'\ell | 1-Q_{\lambda} | NLn\ell \rangle \quad . \quad (\text{III.5.19})$$

Ensuite, on fait la moyenne sur tous les états de même énergie

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = 2n_j + \ell_j + 2n_i + \ell_i = 2n + \ell + 2N + L$$

et on trouve une matrice  $Q$  diagonale en  $n\ell NL$  qui est :

$$\langle n\ell NL | Q_{EE} | n\ell NL \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } 2n + \ell + 2N + L < \sigma^{\text{Max}} + \Delta\sigma \\ f & \text{si } 2n + \ell + 2N + L = \sigma^{\text{Max}} + \Delta\sigma \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{III.5.20})$$

où  $\sigma^{\text{Max}}$  est l'énergie maximale que peuvent avoir deux états occupés, et  $\Delta\sigma$  est choisi pour représenter l'effet moyen des configurations 1 particule - 1 trou interdites. Les différentes valeurs de  $Q_{EE}$  sont représentées sur la figure suivante :

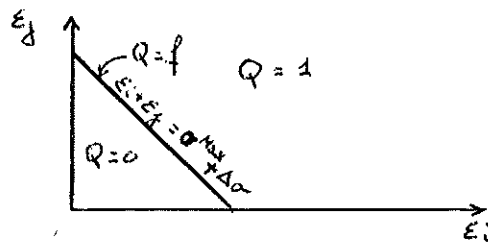


Fig. III.5.4

#### Comparaison entre $Q_{EE}$ et $Q_{MA}$

La matrice  $Q_{EE}$  d'Eden et Emery présente l'avantage d'être diagonale dans le système du centre de masse et dans la représentation de deux particules.

La matrice  $Q_{MA}$  (obtenue en faisant la moyenne sur les angles) est aussi diagonale dans la représentation du centre de masse, mais ne l'est pas dans la représentation de deux particules.

S'il est possible de traiter l'opérateur  $Q$  de façon rigou-



reuse pour les noyaux légers, cela devient impossible pour les noyaux plus lourds, pour lesquels il faut utiliser une forme approchée de  $Q$ . Barrett, Hewitt, McCarthy [BARR 72] ont essayé de justifier l'utilisation de  $Q_{EE}$  et  $Q_{MA}$ . Ils ont calculé l'énergie de liaison par particule, les énergies à une particule et les probabilités d'occupation pour  $^{16}O$  en utilisant une matrice  $G$  calculée avec un opérateur de Pauli exact, avec  $Q_{EE}$  et  $Q_{MA}$ . Les résultats obtenus sont assez similaires. Ils en ont conclu que pour le calcul des trois propriétés citées, mais pas nécessairement pour d'autres, les deux approches donnent des résultats raisonnables.

### III.6. Choix du potentiel $U$ pour les noyaux finis

Les énergies à une particule  $U$  peuvent être virtuelles ou vraies.

A. Les énergies virtuelles du modèle en couches sont les seules qui ont été considérées jusqu'à présent. Elles ont des valeurs réelles.

B. Les énergies vraies représentent l'interaction réelle d'un nucléon avec le reste du noyau. Ces énergies ont des valeurs complexes dont la partie imaginaire représente le temps de vie du nucléon dans cet état. Elles sont accessibles expérimentalement par les réactions de pick-up et de stripping.

La différence entre ces deux énergies est appelée l'énergie de réarrangement.

#### A. Définition des énergies virtuelles

Le potentiel du modèle en couches qui constitue plus un outil de travail qu'une grandeur vraiment physique, peut être défini à partir du développement de Brueckner-Goldstone donnant l'énergie totale, soit par une méthode de H.F. minimisant l'énergie, soit par une méthode d'annulation de diagrammes. Dans ce dernier cas, le potentiel  $U$  dépendra du choix des diagrammes à annuler.

Nous ne discuterons pas la méthode variationnelle de H.F., car certains auteurs considèrent qu'elle n'est pas valable pour définir le potentiel  $U$ ; Kirson [KIR 68] montre, en effet, que cette définition peut conduire à des équations incompatibles. Par

contre, nous considérerons deux méthodes d'annulation de diagrammes. La première méthode est celle vue lors de l'étude de la matière nucléaire (§ II.6). Les définitions des éléments de  $U$  entre états trous ou entre un état trou et un état particule restent valables pour les noyaux finis. Comme il est trop difficile de définir les éléments de  $U$  entre états particules de façon à annuler les termes à trois corps, on choisit généralement pour les particules, des états d'ondes planes ou des états d'oscillateur harmonique.

### Cas des états d'onde plane pour les particules

Ce choix est bien adapté à la méthode de la densité locale, mais crée des difficultés pour le traitement du principe de Pauli [WON 67], lorsqu'on utilise la méthode globale dans une base d'oscillateurs harmoniques.

A première vue, on pourrait penser que, comme l'opérateur  $Q$  exclut les états trous,  $G$  peut être calculé par la relation

$$G = V + V Q \frac{1}{W-T} Q G, \quad (\text{III.6.1})$$

mais cette façon de procéder pose des difficultés à cause de la non-commutativité des opérateurs  $Q$  et  $(W-T)$ , et à cause de la non-orthogonalité entre les états trous et les états particules. Sauer [SAU 70] résout le problème de la façon suivante. Ecrivons l'identité :

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} [1 + (B - A) \frac{1}{A}] \quad (\text{III.6.2})$$

avec

$$A = (W - Q H_0 Q) \quad (\text{III.6.3})$$

et

$$B = W - H_0 \quad ; \quad (\text{III.6.4})$$

$$\frac{1}{W - Q H_0 Q} = \frac{1}{W - H_0} [1 + (Q H_0 Q - H_0) \frac{1}{W - Q H_0 Q}] \quad (\text{III.6.5})$$

En multipliant à gauche et à droite de chaque membre de la relation (III.6.5) par  $Q$ , et en utilisant les relations

$$[Q, H_0] = 0 \quad \text{et} \quad Q^n = Q,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W - Q H_0 Q} &= \frac{Q}{W - H_0} [Q + (Q H_0 Q - H_0 Q) \frac{1}{W - Q H_0 Q}] \\ &= \frac{Q}{W - H_0} . \end{aligned} \quad (\text{III.6.6})$$

Sauer définit alors  $G$  par la relation :

$$\begin{aligned} G &= V + V \frac{Q}{W - H_0} G = V + V \frac{Q}{W - Q H_0 Q} G \\ &= V + V \frac{Q}{W - Q T Q} G , \end{aligned} \quad (\text{III.6.7})$$

car

$$Q U Q = 0 . \quad (\text{III.6.8})$$

En procédant ainsi,  $Q$  et  $(W - Q T Q)$  commutent et les états particules sont rendus orthogonaux aux états trous. Les états particules ne sont d'ailleurs plus des ondes planes, mais leur structure compliquée n'intervient pas dans les calculs (voir Stingl et Kirson [STI 69]).

Tripathi et Goldhammer [TRI 72], dans leurs calculs, utilisent un spectre d'ondes planes translaté

$$H_0 = T + \Delta . \quad (\text{III.6.9})$$

Comme ils ne calculent pas les termes à trois corps, le choix de  $\Delta$  a une grande influence sur les résultats, car il doit minimiser les corrections à trois corps : l'énergie de liaison par nucléon augmente d'environ 1 MeV chaque fois que  $\Delta$  est réduit de 10 MeV . (Dans le cas de  $^{16}\text{O}$ , ils trouvent  $B = 3$  ou 4 MeV/A pour  $\Delta = 0$  et 7 à 8 MeV/A pour  $\Delta = -50$  à  $-70$  MeV, ce qui est plus proche de la valeur expérimentale). En fait, pour obtenir la meilleure valeur de  $\Delta$  de façon théorique, il faudrait résoudre l'équation de Bethe-Faddeev pour  $^{16}\text{O}$ ; ceci n'a jamais été fait.

#### Cas des fonctions d'oscillateur harmonique

Becker, MacKellar, Morris [BEC 68] ont montré qu'il est souhaitable de traiter les états trous et les états particules de la même façon. Ce choix permet de traiter le principe de Pauli de

façon plus correcte et permet d'élargir la base de fonctions d'oscillateur.

En général, on utilise un potentiel harmonique plus réaliste en le translatant comme dans le cas précédent. En effet, un nucléon de basse énergie, interagissant avec la mer de Fermi, doit normalement sentir une énergie potentielle attractive. Dans le cas de  $^{16}\text{O}$  par exemple, l'énergie totale de ce nucléon est, elle-même, légèrement négative. Or, en utilisant un potentiel harmonique avec  $\hbar \Omega = 13,4 \text{ MeV}$ , l'énergie de l'état le plus bas serait de  $+ 47 \text{ MeV}$ . Cette erreur devra alors être corrigée par le calcul des termes à trois corps, qui est très compliqué. Il est donc préférable d'inclure directement cette contribution attractive dans les diagrammes à deux corps.

Davies et MacCarthy [DAV 71] utilisent un potentiel translaté et possédant une discontinuité au niveau de Fermi

$$U_{\text{D.M.}} = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - C - \sum_{AB} B_0 |AB\rangle \langle AB| \quad (\text{III.6.10})$$

où la somme comprend les termes tels que

$$2n_A + \ell_A + 2n_B + \ell_B \leq \bar{N} - 4, \quad (\text{III.6.11})$$

et où  $\bar{N}$ ,  $B_0$ ,  $C$  sont des paramètres libres.

Pour le  $^{40}\text{Ca}$ , Davies et MacCarthy obtiennent une énergie de liaison par particule qui augmente de 2,3 à 10,7 MeV/nucl. et un rayon quadratique moyen de charge qui décroît de 3,33 à 2,85 fm lorsque le saut entre les états trous et les états particules diminue de 45 MeV. Les meilleurs résultats sont obtenus lorsque l'énergie totale du premier état inoccupé est nulle, c'est-à-dire pour

$$B_0 + C = \hbar \omega \left( \bar{n}_{\text{min}} + \frac{3}{2} \right) \quad (\text{III.6.12})$$

( $\bar{n}_{\text{min}} = 2$  pour  $^{16}\text{O}$ , 3 pour  $^{40}\text{Ca}$ , 5 pour les protons du  $^{208}\text{Pb}$  et 6 pour les neutrons du  $^{208}\text{Pb}$ ).

Le saut de potentiel est tout à fait contraire au résultat obtenu par Dahlbom, qui a calculé un potentiel qui annule les diagrammes à trois corps pour la matière nucléaire (Fig. III.6.1). Bethe considère qu'il est préférable de prendre  $B_0 = 0$  et  $C = \hbar \omega \left( \bar{n}_{\text{min}} + \frac{3}{2} \right)$ . Davies et MacCarthy ont cependant montré que si les résultats obtenus pour l'énergie avec  $B_0 = 0$  et  $C \neq 0$

et ceux avec  $B_0 \neq 0$  et  $C = 0$  sont les mêmes, le choix de Bethe est moins bon pour le calcul du rayon qui est trop petit. D'autre part, ce saut facilite le traitement de l'opérateur de Pauli.

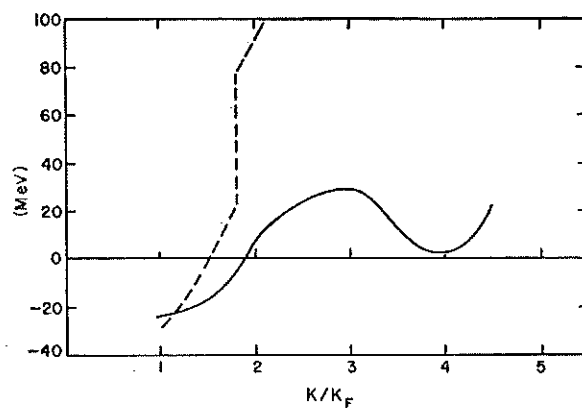


Fig. III.6.1

Baranger et Brown, contrairement à Bethe, pensent que les spectres des trous et des particules ne sont pas exactement contigus, spécialement dans un noyau fini à couche fermée où l'on doit s'attendre à ce que les effets des couches produisent un saut d'énergie à la surface de Fermi.

La définition du potentiel des états trous de la méthode précédente donne cependant des énergies à une particule très différentes des énergies seuils d'enlèvement d'un nucléon expérimentales. L'espacement des valeurs propres est en général deux à trois fois plus grand que celui des énergies expérimentales d'enlèvement. Or, il est essentiel que les valeurs propres du modèle en couches soient égales aux énergies d'enlèvement expérimentales.

Une compression partielle des niveaux à une particule a été proposée par Brandow [BRA 66,67] et Baranger [BAR 70], et a été calculée par Becker [BEC 70] et d'autres.

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que le développement de l'énergie totale, mais il existe d'autres développements de perturbations pour d'autres grandeurs physiques intéressantes. Comme

l'énergie possède une certaine propriété de stationnarité qui rend le choix du potentiel  $U$  non bien défini, il serait peut-être préférable de baser nos critères de choix de  $U$  sur un autre développement de perturbations.

Brandow [BRA 66] définit le potentiel  $U$  de façon à maximiser le taux de convergence du développement en série de la vraie fonction d'onde en annulant un grand nombre de diagrammes dans ce développement. La théorie de Brandow se limite à la matière nucléaire ; elle a été généralisée plus tard par Kirson [KIR 68] pour les noyaux finis. Davies et MacCarthy [DAV 71], notamment, utilisent dans leurs calculs le potentiel défini par Brandow, pour lequel l'énergie totale vaut :

$$E = \sum_A \langle A | T | A \rangle + \frac{1}{2} \sum_{A,B} \langle AB | G(\epsilon_A + \epsilon_B) | AB \rangle P_A P_B + \sum_A (1 - P_A) \langle A | U | A \rangle \quad (\text{III.6.13})$$

où

$$\langle A | U | A \rangle = \sum_B \langle AB | G(\epsilon_A + \epsilon_B) | AB \rangle P_B \quad (\text{III.6.14})$$

et

$$P_A = [1 - \sum_B \langle AB | \frac{\partial G(W)}{\partial W} | AB \rangle P_B]^{-1} \quad (\text{III.6.15})$$

$$W = \epsilon_A + \epsilon_B \quad . \quad (\text{III.6.16})$$

Les calculs qui utilisent un tel potentiel sont appelés calculs de Brueckner-Hartree-Fock renormalisés. Comme  $\frac{\partial G}{\partial W} < 0$ ,  $P_A$  est  $< 1$  et représente la probabilité d'occupation de l'état  $A$ , tandis que le potentiel  $U$  ainsi défini est le potentiel de saturation. Il représente la réduction de l'attraction due au fait qu'un nucléon  $n$  donné est déplacé une partie du temps ( $\approx 14\%$ ) de son orbite normale et est excité dans un état la plupart du temps inoccupé. Si  $G$  était indépendant de  $W$  (par exemple, si on utilisait  $V$  au lieu de  $G$ ),  $P$  serait égal à l'unité et les calculs de B.H.F. renormalisés se réduiraient à ceux de B.H.F. Signalons enfin que l'énergie totale est peu affectée par l'introduction de ce potentiel de saturation.

### B. Définition des vraies énergies à une particule

Pour définir l'énergie réelle, nous choisissons une base de fonctions à une particule pour lesquelles le développement de Brueckner-Goldstone de l'énergie converge. Nous exprimons alors l'énergie totale du système en termes de probabilité d'occupation des états formant la base ( $n_x = 1$  si  $|x\rangle \in$  mer de Fermi et  $n_x = 0$  si  $|x\rangle \notin$  mer de Fermi)

$$E = \sum_x n_x \langle x|T|x\rangle + \frac{1}{2} \sum_{x,y} n_x n_y \langle xy|G|xy\rangle + \dots \quad (\text{III.6.17})$$

A partir de cette fonctionnelle de  $n$ , nous définissons l'énergie réelle à une particule, comme l'a proposé Landau, par la relation

$$e_x = \frac{\partial E}{\partial n_x}, \quad (\text{III.6.18})$$

c'est-à-dire par la variation de l'énergie totale du système lorsqu'on crée un trou dans un état normalement occupé ou une particule dans un état normalement inoccupé.

Calculons cette énergie vraie, à partir de l'approximation

$$E^{(2)} = \sum_x n_x T_x + \sum_{x,y} \frac{1}{2} n_x n_y \langle xy|G|xy\rangle, \quad (\text{III.6.19})$$

$$e_z^{(2)} = \frac{\partial E^{(2)}}{\partial n_z} = T_z + \sum_x n_x \langle xz|G|xz\rangle + \sum_{x,y} n_x n_y \frac{\partial}{\partial n_z} \langle xy|G|xy\rangle \quad (\text{III.6.20})$$

Les deux premiers termes représentent l'énergie nécessaire pour enlever la particule  $z$  du système en maintenant fixée la configuration des autres particules. Le dernier terme représente l'énergie provenant du réarrangement des autres particules pour amener le système dans son état le plus bas. Considérons la relation

$$\begin{aligned} \langle xy|G|x'y'\rangle &= \langle xy|V|x'y'\rangle - \sum_{x'',y''} \frac{\langle xy|V|x''y''\rangle \langle x''y''|G|x'y'\rangle}{\epsilon_{x''} + \epsilon_{y''} - W} \times \\ &\times (1 - n_{x''})(1 - n_{y''}). \end{aligned} \quad (\text{III.6.21})$$

On obtient la dérivée de (III.6.21) en développant  $G$  en série de  $V$ , en effectuant la différentiation terme à terme et en resommant :

$$\frac{\partial}{\partial n_z} \langle xy | G | x' y' \rangle = - \sum_{x'', y''} \frac{\langle xy | G | x'' y'' \rangle \langle x'' y'' | G | x' y' \rangle}{\epsilon_{x''} + \epsilon_{y''} - W}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_z} [(1 - n_{x''})(1 - n_{y''})] \quad . \quad (\text{III.6.22})$$

Nous trouvons finalement (au second ordre) :

$$e_z^{(2)} = \frac{\partial E^{(2)}}{\partial n_z} = T_z + \sum_x n_x \langle xz | G | xz \rangle$$

$$+ \sum_{x, y, x'} \frac{n_x n_y (1 - n_{x'})}{\epsilon_{x'} + \epsilon_z - W} \langle xy | G | x' z \rangle \langle x' z | G | xy \rangle$$

(III.6.23)

$$\epsilon_z = T_z + U_z \quad . \quad (\text{III.6.24})$$

Dans (III.6.23),  $x'$  représente aussi bien un état trou qu'un état particule, de sorte que le dénominateur peut s'annuler, ce qui correspond à l'existence de transitions réelles, conservant l'énergie, vers des états intermédiaires, et conduit à des énergies  $e_z$  complexes.

On peut aussi, de façon plus simple, effectuer cette différentiation directement à partir des diagrammes contribuant à l'énergie totale  $E$ . On montre, en effet, que le fait de dériver un diagramme par rapport à  $n_z$  revient à briser une ligne nucléon dans ce diagramme et à en faire une paire de lignes externes notées  $z$ . Un tel diagramme s'évalue comme un diagramme habituel, excepté qu'on ne somme pas sur les lignes brisées. Pour dériver une matrice  $G$ , on la fait d'abord apparaître au second ordre, puis on brise la ligne particule qui relie les deux interactions  $G$  (fig. III.6.2).

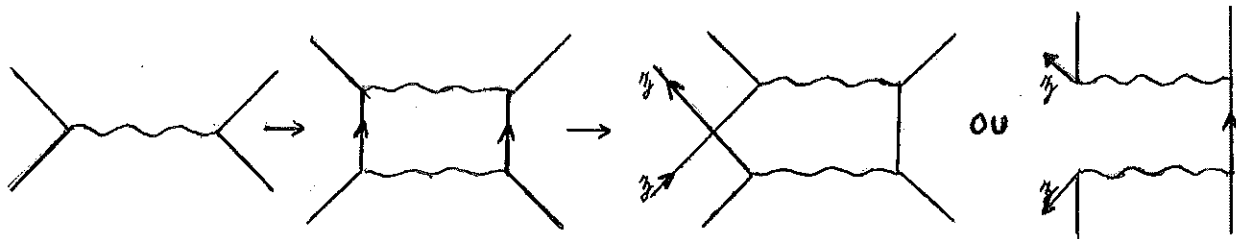


Fig. III.6.2





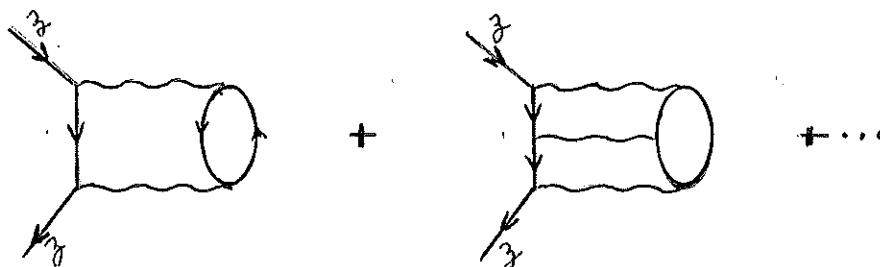


Fig. III.6.5

Müther, Faessler et Goeke [MUT 73] donnent une explication qualitative de ces deux termes de réarrangement.

Le diagramme de la figure (III.6.4) représente le terme de réarrangement des probabilités d'occupation. On peut montrer que le potentiel de saturation de Brandow tient compte de ce terme.

Les diagrammes de la figure (III.6.5) constituent le terme de réarrangement de Pauli. Celui-ci tient compte du fait que lorsqu'un nucléon quitte son orbite, il laisse un état inoccupé et l'opérateur de Pauli doit changer. Nous verrons au chapitre IV que Faessler [FAE 73] obtient ces termes de réarrangement par une méthode un peu différente.

## CHAPITRE IV - RESULTATS ET CONCLUSIONS

### IV.1. Historique

Il nous semble utile de rappeler les contributions principales qui ont conduit au développement de la théorie.

Il y a environ une vingtaine d'années que Brueckner et ses collaborateurs ont jeté les bases de la théorie dite de Brueckner. Auparavant, en 1952, Landau [LAN 52] avait fait une étude phénoménologique de l'hélium liquide, à partir de laquelle Migdal [MIG 67] développera, en 1967, une théorie phénoménologique du noyau.

En 1953, Brueckner et Watson [BRU 53] introduisent l'idée d'échange de deux pions pour expliquer l'interaction N-N .

En 1954, Brueckner et ses collaborateurs [BRU 54] étudient la saturation nucléaire et les forces à deux corps centrales. En vue de calculer l'énergie de liaison d'un nucléon dans la matière nucléaire, ils utilisent un développement de perturbations et constatent que la série diverge et qu'une renormalisation du potentiel est nécessaire. Brueckner et ses collaborateurs [BRU 55] proposent alors un développement en fonction de la matrice de réaction  $G$  . Cette nouvelle série sera convergente si on classe les termes suivant le nombre de particules interagissant.

En 1957, Goldstone [GOL 57] et Hugenholtz [HUG 57], indépendamment, démontrent de façon directe la théorie de Brueckner. Hugenholtz montre que le terme du premier ordre en la matrice  $G$  de la série constitue le terme dominant du développement. Les termes à trois corps plus compliqués seront calculés plus tard par Bethe [BET 65] qui utilise la méthode de Faddeev [FAD 60]. Day [DAY 66] obtient une solution meilleure que Bethe, en tenant compte de remarques faites par Moszkowski [MOS 66] ; il calcule en outre les corrélations à quatre corps.

En 1958, les premiers calculs de la matière nucléaire sont faits par Brueckner et Gammel [BRU 58a]. Ils utilisent une série de potentiels N-N obtenus par Gammel et Thaler [GAM 57] et obtiennent une énergie de liaison de 15,2 à 18,5 MeV par particule. Gomes, Walecka et Weisskopf [GOM 58] expliquent, pour la première fois, le phénomène de "guérison", selon lequel la fonction d'onde

de deux nucléons tend, à grande distance, vers la fonction d'onde de deux nucléons libres et sans déphasage. Brueckner, Gammel et Weitzner [BRU 58b] proposent d'étudier les noyaux finis par l'approximation de la densité locale. Eden et Emery [EDE 58] proposent un traitement approximatif aisé de l'opérateur de Pauli. Bloch et Horowitz [BLO 58] généralisent la théorie de Brueckner-Goldstone aux noyaux à couche ouverte.

La même année, Hofstader, Bumiller, Yearian [HOF 58] publient les distributions de densité de charge des noyaux obtenues expérimentalement par diffusion d'électrons de haute énergie sur des noyaux lourds. La densité centrale se révèle être presque indépendante du nombre de nucléons. Brueckner et Gammel [BRU 58a] pensaient que la densité des noyaux lourds devait être plus faible que celle de la matière nucléaire infinie, où la répulsion de Coulomb est négligée, mais Brandow [BRA 63] expliquera plus tard que la tension superficielle contrebalance les forces de Coulomb.

En 1959, Moshinsky [MOS 59] établit la transformation des fonctions d'onde d'oscillateur harmonique à deux particules en une fonction d'onde du centre de masse et une fonction de la coordonnée relative.

En 1960, Faddéev [FAD 60] écrit l'amplitude de diffusion pour trois corps en termes de diffusion à deux corps, ce qui est possible si on ne considère que des forces à deux corps. Brueckner et Goldman [BRU 60] mettent en évidence une propriété remarquable de sommation d'une série de diagrammes en l'interaction  $V$  dont la contribution totale est égale à un des diagrammes calculé sur la couche en énergie. Cette propriété sera généralisée à la matrice  $G$  par Bethe, Brandow et Petschek. Moskowski et Scott [MOS 60] proposent la méthode de séparation.

En 1961, Brueckner [BRU 61] fait un calcul de noyaux finis dans l'espace des coordonnées.

En 1962, Hamada et Johnston [HAM 62] proposent leur potentiel  $N-N$ . Brueckner et Masterson [BRU 62] étudient la dépendance des résultats vis-à-vis du potentiel à un corps.

En 1963, Bethe, Brandow et Petschek [BET 63] présentent une méthode pour calculer la matrice de réaction, qui est la méthode du spectre de référence. Cette méthode sera très utilisée par la suite, car elle présente deux avantages sur la méthode de Brueckner et Gammel :

1°) Elle donne une première approximation pour  $G$  et une méthode systématique pour améliorer cette approximation jusqu'à ce que la précision désirée soit atteinte. Par contre, la méthode de Brueckner et Gammel, bien qu'elle ait une précision numérique inférieure à 1 MeV par particule, ne peut être améliorée de façon systématique.

2°) La méthode de Bethe, Brandow et Petschek est plus simple à utiliser que la méthode de Brueckner.

Cette facilité permet de faire une étude quantitative des termes d'ordres plus élevés du développement de l'énergie. Une telle étude a été faite notamment par Rajaraman [RAJ 63] qui montre, pour la première fois, que toutes les corrélations à trois corps ont le même ordre de grandeur, quel que soit le nombre d'interactions  $G$ . Vers les années 1963, des calculs d'énergies de liaison de la matière nucléaire sont faits, notamment par Brueckner et Masterson [BRU 62] qui utilisent le potentiel de Yale et par Razavy [RAZ 63] qui utilise le potentiel de Hamada-Johnston et la méthode du spectre de référence. Ils obtiennent des énergies de liaison trop faibles ( $-8$  MeV/A). Des erreurs sont décelées plus tard par Brown, Schappert et Wong [BROW 64], ce qui réduit l'énergie à ( $-4$  MeV/A).

En 1965, Wong [WON 65] montre que l'énergie de liaison est sensible à la forme du coeur répulsif. Un coeur doux de la forme de Yakawa donne moins de répulsion dans la matière nucléaire qu'un coeur dur et augmente d'énergie de liaison par particule d'environ 2 MeV. Bethe [BET 65] calcule la somme de tous les diagrammes à trois corps en utilisant la méthode de Faddeev.

En 1966, Day obtient une solution meilleure que Bethe pour le calcul des termes à trois corps, en tenant compte de remarques de Moszkowski [MOS 66]. Il calcule aussi les corrélations à quatre corps.

Brandow [BRA 66] montre qu'il est possible de définir un potentiel  $U$  de façon à optimiser la convergence du développement de la vraie fonction d'onde. En effet, le succès de la théorie de Brueckner dépend fortement de l'inclusion de la partie appropriée de l'effet des diagrammes d'ordre plus élevé. Il introduit le potentiel de saturation et les probabilités d'occupation qui sont nécessaires pour obtenir des énergies à une particule correctes. Le travail de Brandow, qui se limite à la matière nucléaire, sera généralisé plus tard aux noyaux finis par Kirson [KIR 68].

Köhler [KOH 66] fait les premières estimations du terme de réarrangement dans la théorie de Brueckner.

Les premiers essais pour résoudre l'équation de Bethe-Goldstone dans les noyaux finis utilisaient pour le potentiel  $U$  des états intermédiaires, un potentiel d'oscillateur harmonique. Après la suggestion faite par Brandow de prendre  $U = 0$  pour les états de particules, de nombreux travaux ont été faits en utilisant un hamiltonien  $H_0$  de particules libres ([KUO 66,67], [WON 67] et [KOH 67] notamment).

En 1970, Sauer [SAU 70] résout le problème de la non-orthogonalité des états trous et des états particules en choisissant  $U = 0$  pour les états particules seulement, et en remplaçant  $H_0$  par  $Q H_0 Q = Q T Q$  dans l'équation de Bethe-Goldstone. Dans tous ces travaux, l'effet du principe d'exclusion est traité par une méthode perturbative ou par inversion de matrice. Becker, MacKellar et Morris [BEC 66,68] tentent de prendre le principe de Pauli plus directement en compte, mais ils utilisent un potentiel d'oscillateur harmonique pour le potentiel des états particules. L'avantage d'incorporer l'effet du principe de Pauli directement est d'obtenir des fonctions d'onde corrélées, qui contiennent l'effet du principe d'exclusion de Pauli et peuvent ainsi être utilisées directement pour les calculs d'autres propriétés que l'énergie, sans devoir calculer la correction de Pauli dans chaque cas.

En 1967, Sprung et Bhargava [SPR 67], utilisant une extension de la méthode du spectre de référence, font les premiers calculs avec le potentiel de Reid et quelques autres potentiels. Ils utilisent un potentiel négatif pour les états particules au lieu d'un potentiel nul et trouvent des énergies de liaison trop grandes. Migdal [MIG 67] développe une théorie phénoménologique du noyau. Bethe [BET 67] définit le potentiel à une particule qui annule les diagrammes à trois corps dans la matière nucléaire. Ce potentiel sera calculé plus tard par Dahlblom [DAH 69]. Shakin et ses collaborateurs [SHA 67] développent une méthode qui n'est pas basée sur la théorie de Brueckner et qui avait été suggérée par Villars [VIL 61]. Ils obtiennent la fonction d'onde réelle contenant les corrélations à partir de la fonction d'onde du modèle en couches par une transformation unitaire, et arrivent à des équations semblables à celles de la théorie de Brueckner.

Wong [WON 67] fait des calculs avec des fonctions d'onde d'oscillateur pur et des états de particules libres. Il obtient des énergies trop faibles. Il montre l'importance des termes correctifs et notamment du potentiel de réarrangement qui peut introduire des contributions de 25 % dans les énergies à une particule. Il conclut que, si les forces à deux corps utilisées jusqu'à présent n'ont pas donné des résultats tout à fait satisfaisants, la théorie de Brueckner semble cependant marcher et il pense qu'on obtiendra finalement un bon accord avec l'expérience.

Kallio et Day [KAL 67] font un des meilleurs exposés de l'approximation du spectre de référence d'oscillateur harmonique. Ils traitent l'opérateur de Pauli par la méthode d'Eden-Emery. Ils n'utilisent dans leurs calculs qu'une force centrale, et obtiennent une très grande convergence des résultats.

Kuo et Brown [KUO 67] développent une méthode simple pour calculer très facilement des éléments de la matrice  $G$  utilisables dans des calculs de structures nucléaires. De nombreux calculs de modèle en couches sont réalisés avec l'interaction effective ainsi construite. Ils montrent aussi comment calculer l'interaction des nucléons dans une couche à partir de la théorie de la matière nucléaire. Ils appliquent leur méthode au noyau  $^{18}\text{O}$  et trouvent un bon accord avec la matrice empirique de Federman et Talmi [FED 65]. La théorie de Kuo et Brown a aussi été utilisée pour estimer la masse effective des nucléons près de la surface de Fermi [BER 68]. La polarisation du coeur, c'est-à-dire la formation d'une paire particule-trou, entraîne un accroissement appréciable de cette masse effective à environ la masse totale du nucléon, ce qui est en accord avec les observations.

En 1968, Strutinsky [STR 68] propose une méthode rapide pour calculer avec précision les énergies des noyaux sans devoir résoudre les équations de Hartree-Fock.

Reid [REI 68] propose ses potentiels  $N-N$ , tandis que Ueda et Green [UED 68] supposent l'échange de trois mésons scalaires pour expliquer l'interaction  $N-N$ .

En 1969, des calculs complets et précis de la matière nucléaire sont faits par Kallio et Day [KAL 69] et Siemens [SIE 70]. Brown, Jackson et Kuo [BRO 69] étudient la possibilité d'inclure l'effet minimal de la relativité. Ils montrent que le potentiel non relativiste devrait être multiplié par  $m/\sqrt{m^2 + k^2}$  (dans

l'hypothèse où  $V = C = 1$  ). Avec ce potentiel modifié, ils trouvent que l'énergie de liaison augmente de 0,5 MeV/A et expliquent pourquoi cet effet est si faible.

En 1970, Negele [NEG 70] obtient, par une théorie de Hartree-Fock dépendant de la densité, des résultats pour la distribution de la charge dans  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  et  $^{208}\text{Pb}$ , qui sont très proches des données expérimentales.

Vautherin et Brink utilisent une méthode très aisée avec un potentiel proposé par Skyrme, déjà en 1956 et en 1959 [SKY 59].

En 1971, Davies et MacCarthy [DAV 71] font des calculs de Brueckner-Hartree-Fock renormalisés dans une base de fonctions d'oscillateur harmonique avec le potentiel de Reid à coeur mou.

En 1973, Faessler, MacKellar et Tripathi [FAE 73] utilisent un opérateur de Pauli self-consistant qui dépend de la densité, et obtiennent les mêmes effets que si des forces dépendant de la densité étaient utilisées.

Nous décrirons plus en détail quatre méthodes de types différents dans le paragraphe suivant.

#### IV.2. Calculs et résultats

Les travaux qui appliquent la théorie de Brueckner aux noyaux finis sont très nombreux, et ont tous leurs particularités. Certains, comme ceux de Wong [WON 67], Köhler et McCarthy [KOH 67], Kallio et Day [KAL 67], Becker, MacKellar et Morris [BEC 66] utilisent une méthode non séparée ; d'autres, comme ceux de Kuo et Brown [KUO 66,67], de Shakin, Wahgmare, Tomaselli et Hull [SHA 67], utilisent une méthode séparée. Le travail de Shakin et collaborateurs [SHA 67] n'est pas basé sur la théorie de Brueckner, mais sur une approche de l'opérateur du modèle unitaire proposée par Villars [VIL 61] ; cette méthode conduit à des formules semblables à celles obtenues par un traitement de Brueckner. L'idée est d'appliquer une transformation unitaire à la fonction d'onde non perturbée pour obtenir la fonction d'onde corrélée ; un autre aspect intéressant de cette théorie est l'utilisation d'un "pseudo-potentiel" de courte portée ( $\approx 1$  fm), qui est ajouté à  $V_\ell$  et soustrait de  $V_s$ , et qui rend la méthode de séparation applicable aux ondes P et à l'onde S.



Nous ne décrirons, parmi tous ces calculs très intéressants, que quatre méthodes de types différents et comparerons leurs résultats :

- A. Un calcul de Brueckner-Hartree-Fock renormalisé par Davies et MacCarthy [DAV 71].
- B. Un calcul de Hartree-Fock dépendant de la densité par Negele [NEG 70].
- C. Un calcul très simple, utilisant le potentiel de Skyrme par Vautherin et Brink [VAU 70].
- D. Un calcul de Pauli-Brueckner-Hartree-Fock avec les termes de réarrangement par Faessler, Tripathi et MacKellar [FAE 73a,b].

#### A. Calculs de Davies et MacCarthy

Davies et MacCarthy [DAV 71] ont fait un travail auquel il est souvent fait référence. Il consiste en un calcul de la théorie de Brueckner-Hartree-Fock (B.H.F.) renormalisée pour une série de noyaux sphériques, dans une base d'oscillateur harmonique, en utilisant le potentiel de Reid à coeur mou [REI 68]. Ils mettent en évidence que l'utilisation du potentiel de saturation défini par (III.6.13), (III.6.14) et (III.6.15) est cruciale pour le calcul du spectre des énergies à une particule.

#### Description de la méthode

Les éléments de la matrice  $G$  sont d'abord évalués dans la représentation d'oscillateur harmonique (O.H.) relatif au centre de masse. Ces éléments sont alors transformés dans la représentation des fonctions d'oscillateur à une particule ; les éléments de  $G$ , dans la représentation des fonctions de B.H.F., sont enfin exprimés comme des combinaisons linéaires des éléments de  $G$  entre fonctions d'O.H. Puisque  $G$  est évalué, une fois pour toutes, dans la représentation d'oscillateur du centre de masse, l'opérateur  $Q$  ne peut pas être traité exactement (voir III.5), mais est approché par  $Q_{MA}$  [WON 67].

Pour les noyaux où  $N \neq Z$ , il y a trois séries de valeurs des éléments de  $G$  entre les états  $n-n$ ,  $n-p$ ,  $p-p$ , car l'opérateur de Pauli varie dans ces trois cas. Ainsi, pour le  $^{48}\text{Ca}$ , l'opérateur de Pauli doit tenir compte du fait que l'état  $0f_{7/2}$

est occupé pour les neutrons et inoccupé pour les protons.

La plus grande source d'incertitude dans ces calculs est le choix du potentiel des états intermédiaires. Davies et MacCarthy (D.M.) utilisent un potentiel harmonique décalé (III.6.10) où les paramètres  $B_0$  et  $\bar{N}$  peuvent être différents pour les protons et les neutrons.

D.M. considèrent que le choix le plus physique ( $\bar{N} = 18$  pour 160 par exemple) est celui qui correspond à un argument de la matière nucléaire, qui dit que les énergies des états intermédiaires entre  $k_F$  et  $2k_F$  doivent être abaissées (voir [KAO 69]).

Ils calculent  $G$  par la méthode perturbative à partir d'une matrice de référence,  $G_r$ , définie par (IV.2.1) et (IV.2.2) :

$$G_r(W) = V + V \frac{1}{W - H_r} G_r(W) \quad , \quad (IV.2.1)$$

$$H_r = H_{osc} - 2 C \quad . \quad (IV.2.2)$$

On a alors :

$$G(W) = G_r(W) + G_r(W) \left[ \frac{Q}{W - H_{ab}} - \frac{1}{W - H_r} \right] G(W) \quad , \quad (IV.2.3)$$

$$\text{où} \quad H_{ab} = H_{osc} - 2 C - \sum_{A,B}^1 2 B_0 |AB\rangle \langle AB| \quad . \quad (IV.2.4)$$

$G_r$  est calculé pour une série de valeurs de  $W$ , et  $G(W)$  est obtenu par inversion de matrice.

Par une méthode d'extrapolation, ils déterminent les paramètres de (IV.2.5) :

$$G(W) = G_0 + W G_1 + W^2 G_2 + W^3 G_3 \quad , \quad (IV.2.5)$$

d'où

$$\frac{\partial G}{\partial W} = G_1 + 2 W G_2 + 3 W^2 G_3 < 0 \quad (\text{en général}) \quad . \quad (IV.2.6)$$

A partir de (IV.2.6) et de (III.6.15), ils obtiennent les probabilités d'occupation des orbites.

Dans les calculs de Hartree-Fock (H.F.) purs, il y a un principe variationnel pour l'énergie, de sorte que les énergies à une particule convergent de façon monotone à chaque itération.

Dans les calculs de Brueckner (B.) purs, les énergies oscillent à chaque itération. En effet,  $G(W)$  est généralement décrois-

sante avec  $W$ . D'autre part, si, par exemple, d'une itération à l'autre, la valeur moyenne des matrices  $G$  augmente, les énergies à une particule, et, par conséquent, la valeur moyenne des  $W$ , calculées à partir de la nouvelle matrice  $G$ , augmentent aussi. Si nous appelons  $W_0$  la vraie valeur et  $W_I$  la valeur de  $W$  à la  $I^{\text{ème}}$  itération, la fonction

$$W_{I+1} = F [G(W_I)]$$

sera une fonction croissante de  $G(W_I)$ . En considérant le graphique ci-dessous, nous constatons que  $W_I$  oscillera d'une itération à l'autre autour de  $W_0$ .

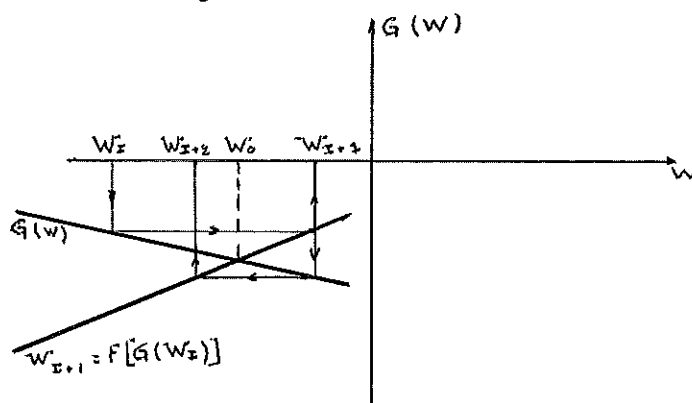


Fig. IV.2.1

La convergence est fortement améliorée si, à chaque itération, on fait la moyenne des  $W$  des deux itérations précédentes :

$$W_{I+1} = F \left[ G \left( \frac{W_I + W_{I+1}}{2} \right) \right] .$$

### Résultats

D.M. ont calculé l'énergie de liaison, les énergies à une particule, les rayons quadratiques moyens de  $^{160}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  et  $^{208}\text{Pb}$ . Ils ont étudié :

- la variation des résultats vis-à-vis du paramètre  $\Omega$  des oscillateurs harmoniques,
- l'effet d'une variation des paramètres  $B_0$ ,  $C$ ,  $\bar{N}$ ,
- la différence entre les calculs avec les probabilités d'occupation self-consistantes et les probabilités unitaires,
- la convergence des résultats avec la dimension  $D$  de la repré-

sentation à une particule.

a) Ils constatent une variation des résultats avec  $\sqrt{\Omega}$ . Cette variation est due, partiellement, au fait que les calculs ne sont pas complètement self-consistants (car  $G$  est obtenu à partir d'un  $Q_{\text{osc.harm.}}$ ), mais est surtout due aux diagrammes d'ordres plus élevés qui n'ont pas été pris en considération. Le choix du spectre des états intermédiaires devrait annuler ces diagrammes. Donc, un critère du choix de  $U$ , nécessaire, mais non suffisant, est que le spectre doit donner des résultats indépendants de  $\Omega$ . Il est encourageant de constater que les résultats sont presque indépendants de  $\sqrt{\Omega}$  lorsque le spectre est celui qui est le plus physique (suivant [KAO 69]).

b) D.M. constatent qu'un abaissement du spectre entraîne une augmentation de  $E$ , une diminution de  $r$ , un abaissement des probabilités d'occupation et des états à une particule légèrement plus liés en général. La faible dépendance des énergies à une particule vis-à-vis d'un abaissement du spectre, s'explique de la façon suivante : l'abaissement du spectre provoque une diminution de  $G$  et des probabilités d'occupation. Ces deux variations donnent des effets contraires sur les énergies à une particule. La diminution de  $G$  entraîne une diminution des énergies à une particule, tandis qu'une diminution des probabilités augmente les énergies à une particule (voir équation (III.6.14)).

c) L'effet de l'introduction des probabilités d'occupation self-consistantes est de relever les niveaux à une particule, d'augmenter les rayons quadratiques moyens et l'énergie de liaison, ce qui conduit, d'ailleurs, à un meilleur accord avec l'expérience, qui n'est pas encore parfait.

La table I, donnant les résultats pour le  $^{40}\text{Ca}$ , montre que si l'on tente d'améliorer la valeur de l'énergie pour arriver à 8,55 MeV, le rayon s'écarte de sa valeur expérimentale qui est 3,50 fm.

d) La figure IV.2.2, donnant les résultats pour le rayon quadratique moyen de la charge en fonction de la dimension  $D$  de la représentation et de  $\Omega$ , montre que, pour  $D = 4$ , on a une bonne convergence pour tout  $\Omega$  et que, pour  $D = 3$ , la convergence est satisfaisante pour  $\sqrt{\Omega} = 11.0$ , 12.5 et 14. On peut en conclure que, pour les noyaux lourds où  $D$  doit être limité trop sévèrement, le choix d'une bonne valeur de  $\Omega$  est très important.

TABLE IV. BHF calculations of  $^{40}\text{Ca}$  for  $\hbar\Omega = 12.5$   
 and  $D = P + 2$ .

$C/\hbar\Omega$	0.0	0.0	0.0	0.0	4.5
$B_0/\hbar\Omega$	0.0	4.0	4.5	4.5	0.0
$\bar{N}$	0	20	20	26	0
<u>Neutrons</u>					
$E_{0s_{1/2}}$	-50.2	-55.0	-54.7	-58.2	-70.7
$E_{0p_{3/2}}$	-31.7	-35.2	-34.9	-37.5	-46.6
$E_{0p_{1/2}}$	-29.0	-32.4	-32.2	-34.5	-42.6
$E_{0d_{5/2}}$	-14.4	-17.5	-18.0	-19.7	-25.6
$E_{1s_{1/2}}$	-12.8	-15.9	-16.4	-17.9	-23.0
$E_{0d_{3/2}}$	-10.3	-13.4	-14.1	-15.5	-20.1
$P_{0s_{1/2}}$	0.88	0.83	0.82	0.81	0.80
$P_{0p_{3/2}}$	0.90	0.84	0.81	0.80	0.80
$P_{0p_{1/2}}$	0.90	0.83	0.81	0.79	0.79
$P_{0d_{5/2}}$	0.92	0.84	0.79	0.77	0.73
$P_{1s_{1/2}}$	0.92	0.84	0.79	0.77	0.72
$P_{0d_{3/2}}$	0.92	0.83	0.78	0.76	0.71
<u>Protons</u>					
$E_{0s_{1/2}}$	-43.2	-48.4	-48.4	-51.9	-64.2
$E_{0p_{3/2}}$	-24.9	-28.9	-28.9	-31.5	-40.5
$E_{0p_{1/2}}$	-22.4	-26.2	-26.3	-28.6	-36.6
$E_{0d_{5/2}}$	-7.9	-11.5	-12.4	-14.1	-20.0
$E_{1s_{1/2}}$	-6.4	-9.9	-10.9	-12.4	-17.5
$E_{0d_{3/2}}$	-4.1	-7.5	-8.6	-10.0	-14.7
$P_{0s_{1/2}}$	0.88	0.82	0.81	0.80	0.80
$P_{0p_{3/2}}$	0.90	0.83	0.81	0.80	0.79
$P_{0p_{1/2}}$	0.89	0.83	0.80	0.79	0.78
$P_{0d_{5/2}}$	0.92	0.84	0.78	0.77	0.72
$P_{1s_{1/2}}$	0.92	0.84	0.78	0.76	0.71
$P_{0d_{3/2}}$	0.92	0.83	0.77	0.75	0.70
$-E/A$	2.32	4.98	5.83	6.98	10.7
$r_c$ (fm)	3.33	3.18	3.14	3.06	2.85

$-E/A$  exp. 8.55 MeV

$r_c$  exp. 3.50 fm

TABLE I.

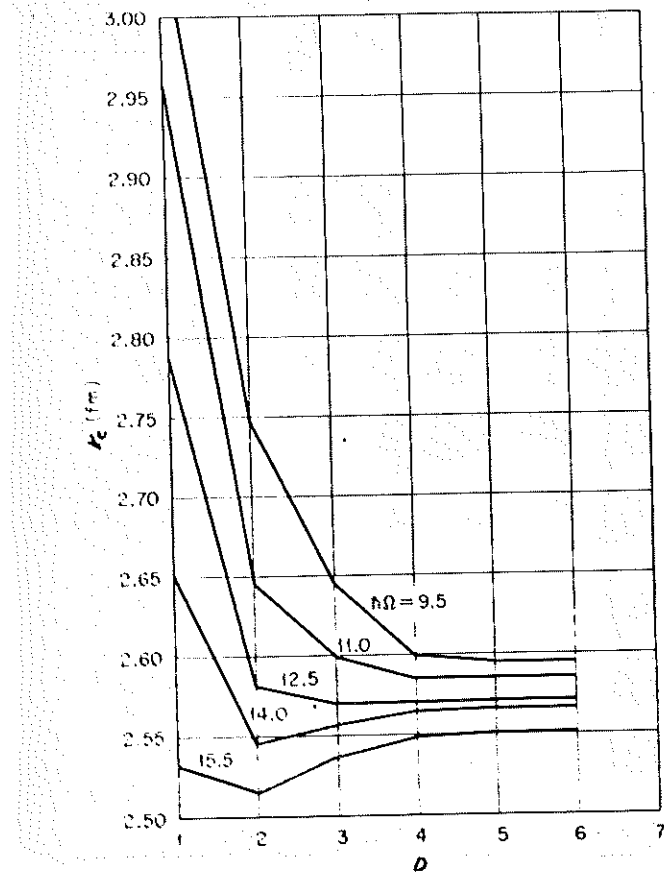


Fig. IV.2.2

### B. Calculs de Negele

Negele [NEG 70] a fait des calculs de H.F. dépendant de la densité (H.F.D.D.). Il introduit une interaction effective dépendant de la densité, qui comprend un terme direct et un terme d'échange :

$$g(k_F, \vec{r}) = g_D(k_F, \vec{r}) + g_E(k_F, \vec{r}) \quad . \quad (\text{IV.2.7})$$

Pour  $r < r_1 = 0,75 \text{ fm}$  ,

$$g(k_F, \vec{r}) = g_{s,D}(k_F, \vec{r}) + g_{s,E}(k_F, \vec{r}) \quad ,$$

où  $g_{s,D}$  est répulsif et  $g_{s,E} = 0$  (une force d'échange répulsive créerait des difficultés dans les calculs numériques de H.F.).

Pour  $r > r_1$ ,

$$g(k_F, \vec{r}) = g_{\ell, D}(k_F, \vec{r}) + g_{\ell, E}(k_F, \vec{r}),$$

où  $g_{\ell, D}$  et  $g_{\ell, E}$  sont attractifs.

Ces interactions sont mises sous la forme :

$$g(k_F, \vec{r}) = v_0(\vec{r}) + k_F^\alpha v_1(\vec{r}), \quad (\text{IV.2.8})$$

où  $\alpha = 1$  si  $r > r_1$  et  $\alpha = 3$  si  $r < r_1$ .

$v_0$  et  $v_1$  sont choisis de façon à obtenir un potentiel en accord, pour  $k_F = 1$  et  $k_F = 1,4$ , avec le potentiel défini par Siemens, qui est :

$$g_{\text{Siemens}}(k_F, L, r) = \frac{\int_0^{k_F} d^3k_1 \int_0^{k_F} d^3k_2 \phi_L(kr) V_L(r) \psi_L(\vec{k}, \vec{K}, W, k_F; r)}{\int d^3k_1 d^3k_2 \phi_L^2(kr)}, \quad (\text{IV.2.9})$$

où  $W = E(k_1) + E(k_2)$ ,  $\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2}$ ,  $\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ ,

et où  $\phi_L$ ,  $\psi_L$  et  $V_L$  représentent respectivement la fonction d'onde non perturbée, la fonction d'onde corrélée, et le potentiel N-N correspondant à l'état L.

L'énergie totale s'exprime alors par la relation (IV.2.10) :

$$E = -\left(\frac{\hbar^2}{2M}\right) \sum_{i \leq A} \int \phi_i^* \nabla^2 \phi_i d\tau + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) g_D(k_F, \vec{r}_{12}) + \int d\tau_1 d\tau_2 \rho^2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) g_E(k_F, \vec{r}_{12}), \quad (\text{IV.2.10})$$

où

$$k_F = \frac{1}{2} [k_F(\vec{r}_1) + k_F(\vec{r}_2)], \quad \rho(\vec{r}_1) = \sum_{i \leq A} \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_i(\vec{r}_1)$$

et

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i \leq A} \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_i(\vec{r}_2).$$

Les énergies à une particule sont obtenues par différentiation de E vis-à-vis des  $\phi_i^*$  :

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\hbar^2}{2M}\right) \nabla^2 \phi_i(\vec{r}_1) + \phi_i(\vec{r}_1) \int d\tau_2 \rho(\vec{r}_2) \{g_{s,D}(\vec{r}_{12}) + v_{\ell,D,0}(\vec{r}_{12}) \\
& + \frac{1}{2} v_{\ell,D,1}(\vec{r}_{12}) [\frac{4}{3} k_F(\vec{r}_1) + k_F(\vec{r}_2)]\} + \\
& + \int d\tau_2 \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) g_E(\vec{r}_{12}) \phi_i(\vec{r}_2) = \epsilon_i \phi_i(\vec{r}_1) \quad . \quad (\text{IV.2.11})
\end{aligned}$$

Le terme  $\frac{4}{3} k_F(\vec{r}_1)$  provient de la différentiation de  $\rho^{4/3}$ . De façon générale, les calculs de H.F.D.D. contiennent un terme de la forme  $\frac{\partial g}{\partial \rho}$  qui provient de la dépendance de l'interaction effective vis-à-vis de la densité. Dans les calculs de Negele, ce terme a la même importance que le potentiel de saturation et le potentiel de réarrangement utilisés par Faessler (voir plus loin).

### Résultats

Negele a calculé l'énergie de liaison, le rayon quadratique moyen des neutrons et des protons, et les énergies à une particule pour  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{208}\text{Pb}$ ; ces résultats sont regroupés dans les tableaux comparatifs II et III, p. 92 et 93. Les résultats les plus intéressants sont ceux obtenus pour la distribution de la densité (voir figures IV.2.3, IV.2.4 et IV.2.5).

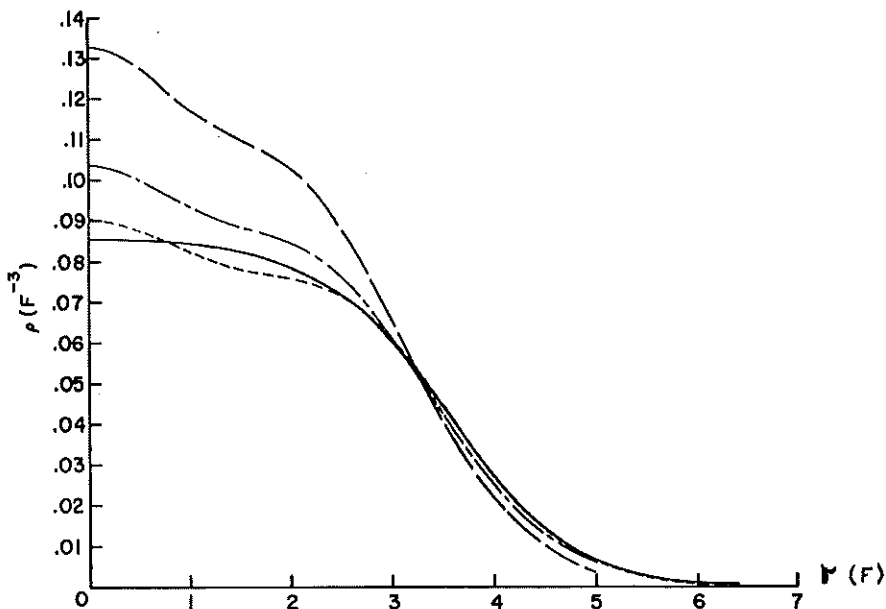


Fig. IV.2.3

La figure IV.2.3 représente les distributions de la densité de charge dans  $^{40}\text{Ca}$  obtenues en supprimant le terme  $\frac{\partial g}{\partial \rho}$  (courbe — —)



en introduisant le terme  $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ , avec une force obtenue directement de la théorie de la matière nucléaire (courbe  $\text{---}\cdot\text{---}\cdot\text{---}$ ) et avec une force ajustée par Negele (courbe  $\text{-----}$ ). La ligne continue représente la distribution expérimentale.

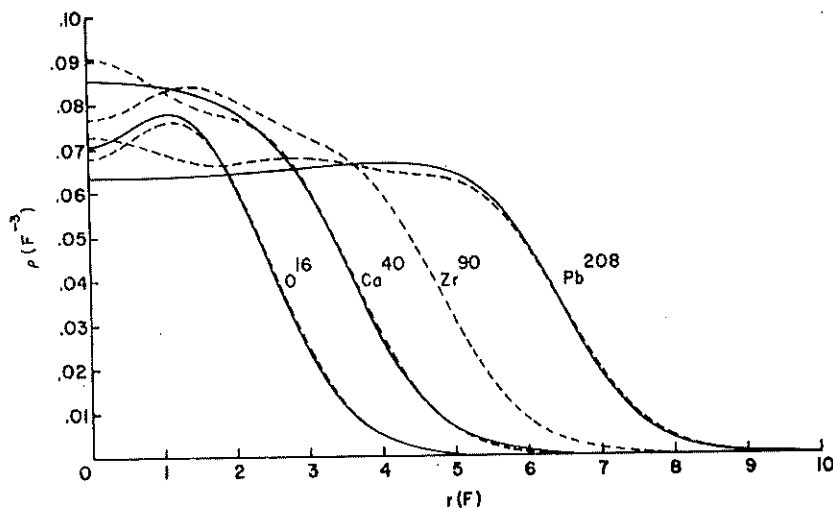


Fig. IV.2.4

La figure IV.2.4 compare les distributions théoriques de la charge dans quelques noyaux à couches fermées ( $\text{-----}$ ) avec les distributions expérimentales ( $\text{---}$ )..

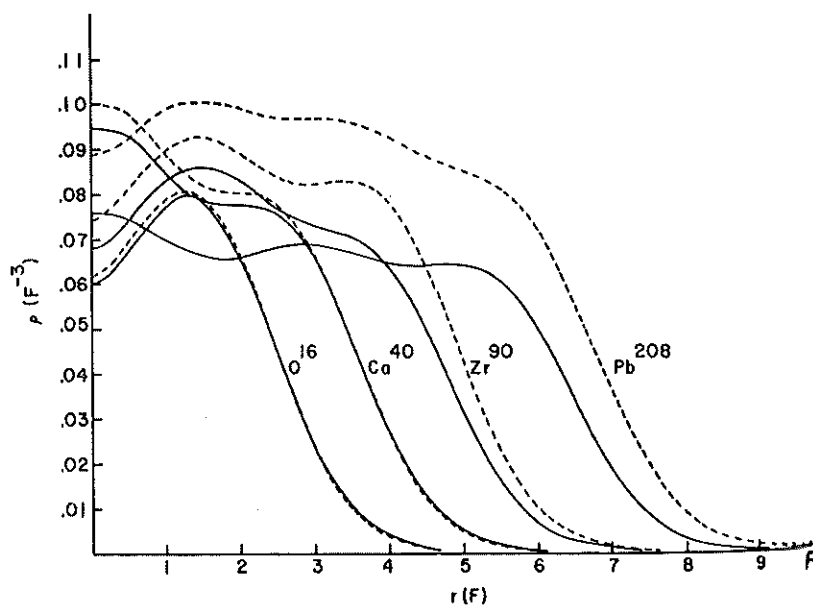


Fig. IV.2.5

La figure IV.2.5 montre pour les mêmes noyaux les différences entre les distributions des centres de masse des protons ( $\text{---}$ ) et des neutrons ( $\text{-----}$ ).

### C. Calculs de Vautherin et Brink

Vautherin et Brink [VAU 70] ont utilisé une méthode très aisée à manipuler, et qui donne de très bons résultats. Ils utilisent un potentiel N-N que Skyrme avait déjà proposé en 1956 et 1959 [SKY 59]. Cette interaction très simple, dépendant de l'impulsion, comprend un terme à deux corps que Vautherin et Brink simplifient sous la forme (IV.2.12) et un terme à trois corps (IV.2.13) :

$$\langle k | V | k' \rangle = t_0 (1 + x_0 P_\sigma) + \frac{1}{2} t_1 (k^2 + k'^2) + t_2 \vec{k} \cdot \vec{k}' + i W_0 (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot (\vec{k} \wedge \vec{k}') \quad , \quad (\text{IV.2.12})$$

$$V_{1,2,3} = t_3 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \quad , \quad (\text{IV.2.13})$$

où  $t_0$  ,  $t_1$  ,  $t_2$  ,  $t_3$  ,  $W_0$  ,  $x_0$  sont des paramètres ajustés par Vautherin et Brink pour donner une énergie de liaison correcte pour la matière nucléaire, et pour donner des rayons corrects pour les noyaux finis.

Les énergies à une particule sont alors définies par l'équation (IV.2.14) dans le cas où  $N = Z$  et où le potentiel de Coulomb est négligé. Cette équation contient une masse effective qui dépend de la distance  $r$  et qui décroît avec la densité suivant la relation (IV.2.15) :

$$\left[ -\nabla \left( \frac{\hbar^2}{2M(r)} \nabla \right) + U(r) \right] \phi_i = \epsilon_i \phi_i \quad , \quad (\text{IV.2.14})$$

où

$$\frac{\hbar^2}{2M(r)} = \frac{\hbar^2}{2M} + \frac{1}{16} (3 t_1 + 5 t_2) \rho \quad (\text{IV.2.15})$$

avec

$$3 t_1 + 5 t_2 > 0$$

et

$$U(r) = \frac{3}{4} t_0 \rho + \frac{3}{16} t_3 \rho^2 + \frac{1}{16} (3 t_1 + 5 t_2) \tau + \frac{1}{32} (5 t_2 - 9 t_1) \nabla^2 \rho + \frac{3}{2r} W_0 \frac{d\rho}{dr} \vec{k} \cdot \vec{s} \quad , \quad (\text{IV.2.16})$$

$$\tau = \sum_i |\nabla \phi_i(r)|^2 \quad (\text{densité d'énergie cinétique}). \quad (\text{IV.2.17})$$

## Résultats

(voir tableaux comparatifs II et III, pages 92 et 93).

Ils obtiennent de meilleures énergies de liaison que Negelé, et des rayons aussi bons. La distribution de la densité est très plate ; ceci doit être dû au fait que l'interaction de Skyrme donne une trop grande compressibilité à la matière nucléaire (370 MeV au lieu de 134 MeV). La masse effective utilisée est probablement trop grande.

### D. Calculs de Faessler, MacKellar et Tripathi

Les calculs de H.F. et B.H.F. utilisant des forces dérivées d'interactions nucléon-nucléon, n'ont pas donné de bons résultats pour la distribution de la charge du noyau. La densité est trop grande au centre, et n'est pas constante à l'intérieur, comme le montrent les expériences de diffusion. Negelé, notamment, est cependant parvenu à reproduire la distribution de la charge, en utilisant des forces effectives dépendant de la densité, mais le calcul phénoménologique s'écarte un peu du but principal de la théorie de Brueckner, qui veut déterminer les propriétés de la matière nucléaire et des noyaux à partir de l'interaction N-N fondamentale.

Faessler, MacKellar et Tripathi [FAE 73a,b] traitent cette dépendance de l'interaction de façon microscopique. Ils utilisent un opérateur de Pauli self-consistant, qui dépend de la densité, et obtiennent les mêmes effets que si l'on utilise les forces dépendant de la densité. Leur méthode, appelée méthode de Pauli-Brueckner-Hartree-Fock, est plus complète que la méthode de B.H.F. renormalisée, utilisée par Davies et MacCarthy.

### Description de la méthode

Ecrivons les vraies fonctions d'onde d'état à une particule  $|i\rangle$ ,  $|j\rangle$ ,  $|k\rangle$ ,  $|\ell\rangle$ , ... comme une superposition de fonctions d'oscillateur harmonique ou de fonctions propres du modèle en couches  $|a\rangle = |n_a \ell_a j_a m_a\rangle$ ,  $|b\rangle$ ,  $|c\rangle$  ...

$$|i\rangle = \sum_a A_{ai} |a\rangle \quad (\text{IV.2.18})$$

La fonction d'onde de H.F. est définie par le principe variationnel (IV.2.19), qui fournit au premier ordre l'énergie totale (IV.2.21) :

$$\frac{\delta \langle \text{HF} | \text{H} | \text{HF} \rangle}{\langle \text{HF} | \text{HF} \rangle} = 0 \quad , \quad (\text{IV.2.19})$$

avec

$$\langle i | k \rangle = \delta_{ik} \quad . \quad (\text{IV.2.20})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{HF} | \text{H} | \text{HF} \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle i | \text{T} | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{ik \leq A} \langle ik | G(W_{ik}) | ik \rangle \\ &= \sum_{ab} \langle a | \text{T} | b \rangle \sum_{i \leq A} \Lambda_{ai}^* \Lambda_{bi} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{abcd} \sum_{ik \leq A} \langle ac | G(W_{ik}) | bd \rangle \Lambda_{ai}^* \Lambda_{bi} \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \quad . \quad (\text{IV.2.21}) \end{aligned}$$

Les grandeurs dans (IV.2.21) qui dépendent directement de la densité, sont l'opérateur de Pauli et l'énergie de départ  $W_{ik}$ . Si l'on veut traiter avec plus de précision la dépendance vis-à-vis de la densité dans un noyau fini, l'opérateur de Pauli et l'énergie de départ doivent être calculés avec soin.

Dans leurs calculs, Faessler, MacKellar et Tripathi approchent la matrice  $G$  par la relation (IV.2.22) :

$$G = G_o + G_o \left( \frac{Q}{e} - \frac{Q_o}{e_o} \right) G \quad , \quad (\text{IV.2.22})$$

où

$$e = W - H_{osc} (2p) + 2 C \quad (\text{IV.2.23})$$

et

$$e_o = W_o - H_{osc} (2p) + 2 C \quad . \quad (\text{IV.2.24})$$

$G_o(W_{oik})$  est la matrice de réaction calculée à partir d'un opérateur de Pauli  $Q_o$  d'oscillateur harmonique. (IV.2.23) suppose que les états intermédiaires sont des oscillateurs harmoniques avec un décalage du spectre.

En remplaçant  $G$  par son expression (IV.2.22) dans (IV.2.21), nous obtenons (IV.2.25) :

$$\langle \text{HF} | \text{H} | \text{HF} \rangle = \sum_{ab} (\langle a | \text{T} | b \rangle \sum_{i \leq A} \Lambda_{ai}^* \Lambda_{bi}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{abcd} \left( \sum_{ik \leq \Lambda} \sum_{efgh} \langle ac | G_o(W_{oik}) | bd \rangle \Lambda_{ai}^* \Lambda_{bi} \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{abcd} \left( \sum_{ik \leq \Lambda} \sum_{efgh} \langle ac | G_o(W_{oik}) | ef \rangle \frac{1}{W_{oik} - \epsilon_e - \epsilon_f} \right. \\
& \left. (\delta_{eg} - \sum_{r \leq \Lambda} A_{er} A_{gr}^*) (\delta_{f,h} - \sum_{s \leq \Lambda} A_{fs} A_{hs}^*) \right. \\
& \left. \langle gh | G_o(W_{oik}) | bd \rangle \Lambda_{ai}^* \Lambda_{bi} \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{abcd} \left( \sum_{ik \leq \Lambda} \sum_{ef > \Lambda} \langle ac | G_o(W_{oik}) | ef \rangle \frac{1}{W_{oik} - \epsilon_e - \epsilon_f} \right. \\
& \left. \langle ef | G_o(W_{oik}) | bd \rangle \Lambda_{ai}^* \Lambda_{bi} \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \right) \quad . \quad (IV.2.25)
\end{aligned}$$

Le principe variationnel (IV.2.19) ne peut être justifié que par le fait qu'il donne de bons résultats et conduit à des termes connus ; il entraîne la condition (IV.2.26) pour les états à une particule, qui peut aussi s'écrire sous la forme (IV.2.27) :

$$\delta \{ \langle HF | H | HF \rangle - \sum_i \epsilon_i \langle i | i \rangle \} = 0 \quad (IV.2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda_{ai}^*} \{ \langle HF | H | HF \rangle - \sum_i \epsilon_i \langle i | i \rangle \} = 0 \quad . \quad (IV.2.27)$$

En dérivant (IV.2.25) par rapport à  $\Lambda_{ai}^*$ , et en remplaçant dans (IV.2.27), nous obtenons les équations de P.B.H.F. (IV.2.28) et (IV.2.29) :

$$\sum_b h_{ab} \Lambda_{bi} = \epsilon_i \Lambda_{ai} \quad (IV.2.28)$$

où

$$\begin{aligned}
h_{ab} = & \langle a | T | b \rangle + \sum_{cd} \sum_{k \leq \Lambda} \langle ac | G_o(W_{oik}) | bd \rangle \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \\
& + \sum_{cd} \sum_{efgh} \sum_{k < \Lambda} \langle ac | G_o(W_{oik}) | ef \rangle \frac{1}{W_{oik} - \epsilon_e - \epsilon_f} \\
& (\delta_{\bar{e},g} - \sum_{r < \Lambda} A_{er} A_{gr}^*) (\delta_{f,h} - \sum_{s < \Lambda} A_{fs} A_{hs}^*) \langle gh | G_o(W_{oik}) | bd \rangle \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \\
& - \sum_{cd} \sum_{ef > \Lambda} \sum_{k \leq \Lambda} \langle ac | G_o(W_{oik}) | ef \rangle \frac{1}{W_{oik} - \epsilon_e - \epsilon_f} \\
& \langle ef | G_o(W_{oik}) | bd \rangle \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \\
& - \sum_{cd} \sum_{efgh} \sum_{kr \leq \Lambda} \langle ah | G_o(W_{ork}) | ed \rangle \frac{1}{W_{rk} - \epsilon_e - \epsilon_f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_{f,h} - \sum_{s < F} \Lambda_{fs} \Lambda_{hs}^*) \langle gc | G_o(W_{ork}) | bf \rangle \Lambda_{gr}^* \Lambda_{er} \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \\
& + \sum_{cd} \sum_{efgh} \sum_{kr < A} \langle ac | G_o(W_{ork}) | bd \rangle \langle ge | \frac{\partial G_o}{\partial W_{ork}} | hf \rangle \\
& \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \Lambda_{gk}^* \Lambda_{hk} \Lambda_{fr} \Lambda_{er}^* .
\end{aligned} \tag{IV.2.29}$$

Les deux premiers termes du membre de droite de (IV.2.29) représentent le hamiltonien de B.H.F. ; les troisième et quatrième termes donnent les corrections pour l'opérateur de Pauli self-consistant. Les deux derniers termes sont respectivement la correction de réarrangement de Pauli et la correction de réarrangement des probabilités d'occupation ; ils sont nécessaires pour obtenir de bonnes énergies à une particule. Les deux premiers termes et le dernier terme constituent le potentiel de B.H.F. renormalisé, qui tient compte du fait, démontré par Brandow, que les états à une particule ne sont pas continuellement occupés.

L'effet de la correction de l'opérateur de Pauli est de réduire l'énergie de liaison et les énergies des états à une particule. Le terme de réarrangement de Pauli, et le terme de réarrangement des probabilités d'occupation ont un effet opposé au précédent : ils augmentent les énergies.

Remarquons que, dans leurs calculs, Faessler, MacKellar et Tripathi font quelques approximations :

$$W = \langle W_{ik} \rangle \approx \langle W_{oik} \rangle \tag{IV.2.30}$$

$$\Delta = \langle W_{ik} - \epsilon_e - \epsilon_f \rangle \approx \langle W_{oik} - \epsilon_e - \epsilon_f \rangle \tag{IV.2.31}$$

$$h_{ab} = \langle a | T | b \rangle + \sum_{cd} \langle ac | G_o(W) | bd \rangle \rho_{dc} + \frac{1}{\Delta} \sum_{cd} \sum_{efgh} \langle ac | G_o(W) | ef \rangle$$

$$(\delta_{fh} - \rho_{fh})(\delta_{eg} - \rho_{eg}) \langle gh | G_o(W) | bd \rangle \rho_{dc}$$

$$- \frac{1}{\Delta} \sum_{cd} \sum_{efgh} \langle gc | G_o(W) | bf \rangle (\delta_{fh} - \rho_{fh}) \langle ah | G_o(W) | ed \rangle \rho_{dc} \rho_{eg}$$

$$- \frac{1}{\Delta} \sum_{cd} \sum_{ef > A} \langle ac | G_o(W) | ef \rangle \langle ef | G_o(W) | bd \rangle \rho_{dc}$$

$$+ \sum_{k < A} \sum_{cd} \sum_{efgh} \langle ac | G_o(W_o) | bd \rangle \langle ge | \frac{\partial G_o}{\partial W_o} | hf \rangle \rho_{fe} \Lambda_{ck}^* \Lambda_{dk} \Lambda_{gk}^* \Lambda_{hk}$$

$$\tag{IV.2.32}$$

où la matrice de densité  $\rho_{dc}$  est définie de la façon suivante :

$$\rho_{dc} = \sum_{s \leq A} A_{cs}^* A_{ds} \quad (\text{IV.2.33})$$

Dans ses calculs, Faessler néglige le dernier terme dans (IV.2.32). Il y a trois prescriptions de self-consistance à satisfaire : celles de H.F., de B.H.F. et de P.B.H.F. pour l'opérateur de Pauli.

### Procédé numérique

1°) Faessler calcule d'abord les éléments  $\langle ac | G_{EE}(W) | bd \rangle$  correspondant à l'opérateur  $Q_{EE}$  d'Eden-Emery en utilisant le potentiel de Yale :

$$G_{EE}(W) = V + V \frac{Q_{EE}}{e_o} G_{EE}(W) \quad (\text{IV.2.34})$$

2°) Il calcule alors  $G_o(W)$  par la relation :

$$G_o(W) = G_{EE}(W) + G_{EE}(W) \left( \frac{Q_o}{e_o} - \frac{Q_{EE}}{e_o} \right) G_o(W). \quad (\text{IV.2.35})$$

Pour rendre l'équation finie, il limite les états d'oscillateurs à  $N_1 + N_2 \leq \sigma_2$  ( $\sigma_2 = 12$  pour  $^{16}\text{O}$  et  $14$  pour  $^{40}\text{Ca}$ ).

L'opérateur  $Q_o - Q_{EE}$  contenu dans (IV.2.35) prend donc les valeurs représentées sur la figure suivante :

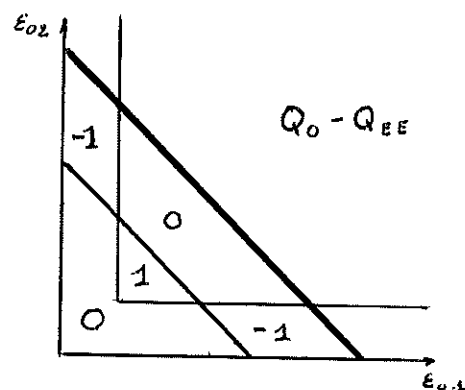


Fig. IV.2.6

Un test d'évaluation des effets de cette coupure a été effectué en calculant aussi avec  $N_1 + N_2 \leq 8$  ; ils constatent que ces effets sont faibles. Cette coupure est plus sévère dans les calculs de P.B.H.F. que dans les calculs de B.H.F., car le nombre d'éléments de matrice nécessaires pour les calculs de P.B.H.F. augmente à peu près comme la huitième puissance de la dimension de la base, compara-

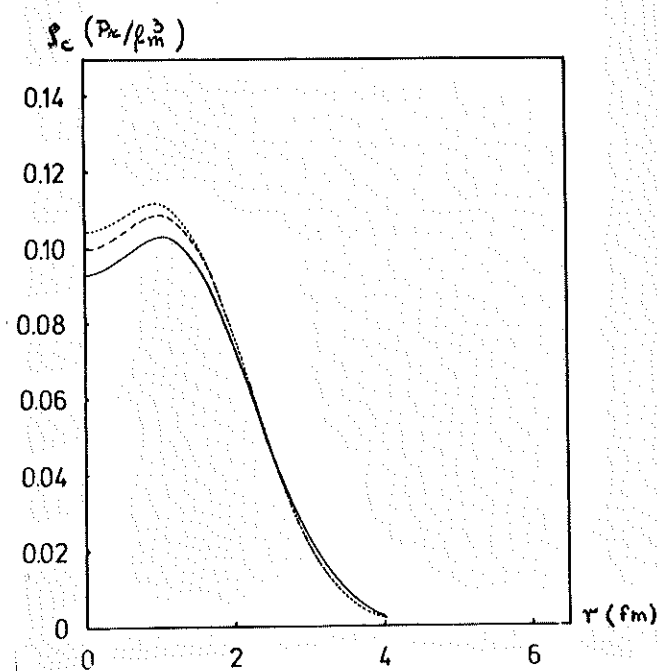


Fig. IV.2.7

La figure (IV.2.7) représente les distributions de densité de charge obtenues pour  $^{16}\text{O}$ , par un calcul de B.H.F. (...), par un calcul de P.B.H.F. sans terme de réarrangement de Pauli (----) et par un calcul de P.B.H.F. avec le terme de réarrangement de Pauli (—).

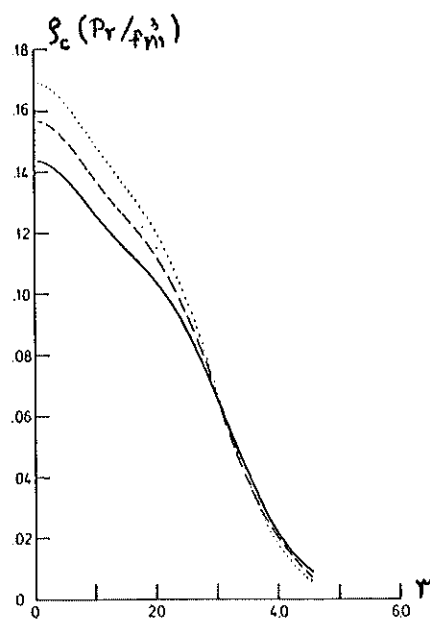
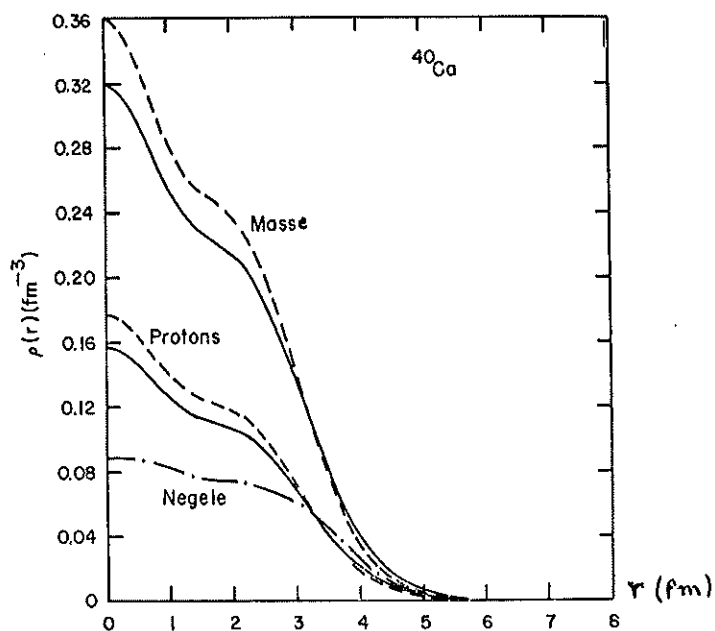


Fig. IV.2.8



La figure (IV.2.8) représente les distributions de la densité de charge pour  $^{40}\text{Ca}$  par un calcul de B.H.F. (.....), de P.B.H.F. sans terme de réarrangement de Pauli (----), et de P.B.H.F. avec le terme de réarrangement de Pauli (—).



La figure (IV.2.9) compare la distribution des protons et de la masse dans  $^{40}\text{Ca}$  obtenues par Davies et MacCarthy par un calcul de B.H.F. (----) et un calcul de B.H.F. renormalisé (—). La courbe (— · — · — · — · —) représente la distribution des protons obtenue par Negele.

Theory	F.T.M.	DM	Negele	VB	Exp.
$^{40}\text{Ca}$ B.E./A	5.75	4.99	7.99	8.64	8.55
Proton rms radius <sup>a</sup>	3.18	3.09	3.41	3.31	3.43
Neutron levels:					
0 s	68.57	54.8	50	41.0	57 <sup>c</sup>
0 p (av) <sup>b</sup>	44.75	-40.08	34.2	30.9	41 <sup>c</sup>
0 d <sub>5/2</sub>	22.98	17.5	21.1	22.2	22.3
0 d <sub>3/2</sub>	15.24	13.4	15.1	14.9	16.0
1 s	19.36	15.8	15.3	15.4	18.2
$^{208}\text{Pb}$ B.E./A		2.49	7.83	7.89	7.87
Proton rms radius <sup>a</sup>		4.80	5.44	5.38	5.44
Neutron levels:					
0 s		71.1	62.5	44.6	—
0 p (av) <sup>b</sup>		59.0	55.0	40.7	—
0 d (av)		46.9	45.4	35.7	—
0 f (av)		34.7	36.1	29.6	—
0 h <sub>11/2</sub>		10.5		17.7	18 <sup>d</sup>
0 h <sub>9/2</sub>		9.6	16.0	11.5	10.8
2 p <sub>3/2</sub>		7.7	8.8	7.5	8.0
1 i <sub>13/2</sub>		-0.8	8.8	10.5	9.0

<sup>a</sup> Radius of proton mass centers, in fermis.

<sup>b</sup> Weighted average of states  $j=l+\frac{1}{2}$  and  $l-\frac{1}{2}$ .

<sup>c</sup> Estimated from the proton removal energies.

<sup>d</sup> Estimated from other levels in the same major shell, such as 2 s.

TABLEAU II.

Comparaison des énergies à une particule des neutrons du  $^{40}\text{Ca}$  et du  $^{208}\text{Pb}$ , obtenues par Davies et MacCarthy [DAV 71], Negele [NEG 70], Vautherin et Brink [VAU 70], et Faessler, MacKellar et Tripathi [FAE 73].

TABLEAU II

Comparaison entre les résultats obtenus par Davies et MacCarthy, Negele, Vautherin et Brink, et Faessler pour d'autres propriétés.

Noyau	Davies et MacCarthy	Negele	Vautherin et Brink	Faessler	V. Expérimentale
<u>Energie de liaison (MeV)</u>					
$^{16}\text{O}$	6.49	7.59	8.22	7.67	7.98
$^{40}\text{Ca}$	4.99	7.99	8.64	8.78	8.55
$^{48}\text{Ca}$	4.00	7.96	8.93	-	8.67
$^{90}\text{Zr}$	-	8.33	8.81	-	8.71
$^{208}\text{Pb}$	2.49	7.83	7.89	-	7.87
<u>Rayon quadratique moyen des protons (fm)</u>					
$^{16}\text{O}$	2.57	2.71	2.56	2.49	2.64
$^{40}\text{Ca}$	3.05	3.41	3.31	3.05	3.43
$^{48}\text{Ca}$	3.11	3.45	3.36	-	3.42
$^{90}\text{Zr}$	-	4.18	4.14	-	4.22
$^{208}\text{Pb}$	4.87	5.44	5.38	-	5.44
<u>Rayon quadratique moyen des neutrons (fm)</u>					
$^{16}\text{O}$	2.42	2.69	2.53	-	-
$^{40}\text{Ca}$	3.048	3.37	3.27	-	-
$^{48}\text{Ca}$	3.41	3.68	3.48	-	-
$^{90}\text{Zr}$	-	4.30	4.19	-	-
$^{208}\text{Pb}$	5.06	5.67	5.49	-	-

### IV.3. Conclusions

Les applications de la théorie à N corps à l'étude de la matière nucléaire et des noyaux finis sont actuellement déjà très nombreuses et encourageantes. En ce qui concerne la matière nucléaire, les propriétés étudiées sont l'énergie de volume, l'énergie de symétrie, la densité à l'équilibre, la compressibilité, la masse effective et le potentiel optique. Quant aux noyaux finis, les propriétés examinées sont l'énergie de liaison, les énergies de séparation, le splitting spin-orbite, la distribution de la densité, la relation entre la densité des neutrons et la densité des protons, la profondeur de la surface, les relations reliant le potentiel et la densité, la dépendance du potentiel vis-à-vis de l'état, le non-localité du potentiel à une particule, et le moment multipolaire. L'espoir de certains est même que la théorie soit aussi en mesure de préciser si des éléments super-lourds, tels ceux contenant 114 et 126 protons respectivement, sont stables. Cependant, la chose la plus importante que les calculs de Brueckner-Hartree-Fock nous aient apprise, est le fait que la théorie de Brueckner semble valable, même si elle ne converge pas toujours de manière très satisfaisante. Elle constitue la seule vraie justification du modèle en couches. Nous ne devons pas nous contenter de continuer à utiliser le modèle en couches, défini à l'aide de paramètres phénoménologiques choisis pour reproduire les faits expérimentaux. Il faut à présent se demander jusqu'à quel point la théorie de Brueckner est valable, voir si elle est la meilleure façon de justifier le modèle en couches, et rechercher quels sont, dans cette hypothèse, les paramètres du modèle en couches que cette théorie peut prévoir.

Ce programme est cependant loin de son but ; il faudra, avant cela, résoudre le problème des diagrammes à trois corps, et dévoiler le mystère des forces nucléaires. Aussi longtemps que le choix du potentiel des états intermédiaires ne sera pas mieux connu, il y aura une incertitude d'environ 5 MeV pour les diagrammes à deux corps. La seule façon de réduire cette incertitude est d'étudier les diagrammes à trois corps. Cette étude conduira, peut-être, à un choix unique pour le potentiel  $U$ , réduisant la contribution des diagrammes à trois corps à moins de 1 MeV. Dans le cas contraire, nous devrions abandonner tout espoir d'utiliser la théorie de Brueckner pour déterminer les paramètres du modèle en couches.

Il y aura lieu, cependant, en même temps, de trouver une interaction N-N qui reproduise à la fois les propriétés du système à deux nucléons de la matière nucléaire et celles des noyaux lourds. Tant que ce potentiel N-N ne sera pas mieux connu, nous pourrons toujours nous demander si la théorie ne semble pas satisfaisante à cause d'un mauvais choix du potentiel N-N. L'utilisation même d'un potentiel peut être mise en doute. Ne faudrait-il pas utiliser une théorie de Brueckner qui ne contienne pas cette hypothèse, mais qui tienne directement compte des échanges des mésons ? On pense généralement que ce programme est réalisable, mais il n'a pas encore été entrepris.

Les physiciens espèrent aussi pouvoir abandonner l'hypothèse de symétrie sphérique, étudier les déformations des noyaux, calculer les énergies des seuils de fission, expliquer de nombreuses réactions et, en particulier, être capables d'appliquer le point de vue microscopique au mouvement collectif nucléaire. Les données expérimentales relatives à ces problèmes sont très riches en informations, et il serait très intéressant de les relier à la force fondamentale entre les nucléons. De tels calculs se heurtent cependant à un problème de temps de calcul en ordinateur : un calcul des caractéristiques du noyau de  $^{208}\text{Pb}$  demande déjà deux à trois heures ; Baranger estime que le moindre calcul d'un effet collectif réaliste prendra environ 200.000 heures, avec les méthodes habituelles. Des méthodes de calcul plus rapides sont donc indispensables.

Parmi les chercheurs qui s'intéressent à ce problème, citons Köhler, Moszkowski, Meldner, Nemeth, Ripka. Le groupe d'Orsay a déjà obtenu de bons résultats avec l'interaction de Skyrme. Negele et Vautherin ont utilisé une méthode du développement de la matrice de densité qui permet de gagner deux ordres de grandeur en temps de calculs. Strutinsky est aussi parvenu à réaliser un gain comparable. Grâce aux progrès rapides des méthodes de calcul et des ordinateurs, ce problème de temps sera probablement surmonté.

Nous pouvons conclure en disant que la théorie de Brueckner n'en est qu'à ses premiers débuts, bien qu'elle existe déjà depuis vingt ans. Elle ouvrira certainement la voie à de nombreux travaux de recherche.

APPENDICE A - DEVELOPPEMENT DE RAYLEIGH-SCHRÖDINGER

---

Le développement de Rayleigh-Schrödinger sera établi dans le cas non dégénéré.

Considérons l'ensemble complet de fonctions propres  $\{|E_n^0\rangle\}$  de l'opérateur  $H_0$  et  $|E_n\rangle$  la fonction propre de  $H$ , qui tend vers  $|E_n^0\rangle$  lorsque  $H_1$  tend vers zéro.

$$(H_0 - E_n^0) |E_n^0\rangle = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$(H - E_n) |E_n\rangle = (H_0 + H_1 - E_n) |E_n\rangle = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\lim_{H_1 \rightarrow 0} |E_n\rangle = |E_n^0\rangle \quad (\text{A.3})$$

$$\lim_{H_1 \rightarrow 0} E_n = E_n^0 \quad (\text{A.4})$$

Puisque  $\langle E_n^0 | H - E_n | E_n \rangle = 0 = (E_n^0 - E_n) \langle E_n^0 | E_n \rangle + \langle E_n^0 | H_1 | E_n \rangle$ , la variation de l'énergie

$$\Delta_n = E_n - E_n^0 \quad (\text{A.5})$$

satisfait

$$\Delta_n = \frac{\langle E_n^0 | H_1 | E_n \rangle}{\langle E_n^0 | E_n \rangle} \quad (\text{A.6})$$

$$(H_0 - E_n^0) |E_n\rangle = (H - H_1 - E_n^0) |E_n\rangle = (\Delta_n - H_1) |E_n\rangle \quad (\text{A.7})$$

Posons  $P_n = |E_n^0\rangle \langle E_n^0|$ , opérateur qui projette sur l'état  $|\phi_0\rangle$

$$\text{et } Q_n = 1 - P_n = \sum_{m \neq n} |E_m^0\rangle \langle E_m^0|.$$

Nous allons montrer que l'expression (A.8) de  $|E_n\rangle$  vérifie l'équation (A.7) et satisfait les conditions (A.3) et (A.4) :

$$|E_n\rangle = |E_n^0\rangle + \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} (\Delta_n - H_1) |E_n\rangle \quad (\text{A.8})$$

Remarquons qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans l'écriture de  $Q_n / H_0 - E_n^0$ , car le numérateur et le dénominateur sont simultanément diagonaux et commutent donc.

$$\begin{aligned}
|E_n\rangle &= |E_n^0\rangle + \sum_m \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} |E_m^0\rangle \langle E_m^0| (\Delta_n - H_1) |E_n\rangle \\
&= |E_n^0\rangle + \sum_m \frac{(1 - |E_n^0\rangle \langle E_n^0|)}{H_0 - E_m^0} |E_m^0\rangle \langle E_m^0| (\Delta_n - H_1) |E_n\rangle .
\end{aligned}$$

L'équation (A.6) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\langle E_n^0 | \Delta_n - H_1 | E_n \rangle = 0 , \quad (\text{A.9})$$

donc le terme de la somme correspondant à  $m = n$  tombe :

$$|E_n\rangle = |E_n^0\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle E_m^0 | \Delta_n - H_1 | E_n \rangle}{E_m^0 - E_n^0} |E_m^0\rangle . \quad (\text{A.10})$$

Le vecteur  $|E_n\rangle$  ainsi défini est normé par la condition  $\langle E_n^0 | E_n \rangle = 1$ .

Montrons que l'expression (A.10), qui est équivalente à l'expression (A.8), vérifie l'équation (A.7) :

$$\begin{aligned}
(H_0 - E_n^0) |E_n\rangle &= \sum_{m \neq n} (H_0 - E_n^0) |E_m^0\rangle \frac{\langle E_m^0 | \Delta_n - H_1 | E_n \rangle}{E_m^0 - E_n^0} \\
&= \sum_{m \neq n} |E_m^0\rangle \langle E_m^0 | \Delta_n - H_1 | E_n \rangle \\
&= \sum_m |E_m^0\rangle \langle E_m^0 | \Delta_n - H_1 | E_n \rangle \quad (\text{par A.9}) \\
&= (\Delta_n - H_1) |E_n\rangle .
\end{aligned}$$

$$(A.6) \text{ s'écrit aussi : } \quad \Delta_n = \langle E_n^0 | H_1 | E_n \rangle . \quad (\text{A.11})$$

On constate que (A.10) et (A.11) vérifient bien les conditions (A.3) et (A.4), respectivement.

(A.11) et (A.8) entraînent :

$$\Delta_n = \langle E_n^0 | H_1 | E_n^0 \rangle + \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} (\Delta_n - H_1) | E_n \rangle . \quad (\text{A.12})$$

Remarquons que les relations écrites jusqu'ici ne contiennent aucune approximation. La solution peut être obtenue si  $H_1$  est per-

tit, si  $\langle E_n^0 | H_1 | E_m^0 \rangle$  existe et si (A.12) et (A.8) peuvent être résolus par itérations. Une condition nécessaire de bonne convergence est :

$$|\langle E_n^0 | H_1 | E_m^0 \rangle| \ll |E_n^0 - E_m^0| .$$

Notons que ce critère est violé, notamment dans le cas dégénéré. Calculons l'énergie jusqu'à l'ordre trois, et la fonction d'onde :

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + \langle E_n^0 | H_1 | E_n^0 \rangle + \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} (\cancel{A}_n - H_1) | E_n^0 \rangle \\ &+ \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} (\Delta_n - H_1) \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} (\cancel{A}_n - H_1) | E_n^0 \rangle + \dots \\ & \text{(les } \cancel{A}_n \text{ tombent, car } \Delta_n \text{ est un nombre et } Q_n | E_n^0 \rangle = 0 \text{ )} \\ &= E_n^0 + \langle E_n^0 | H_1 | E_n^0 \rangle - \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} H_1 | E_n^0 \rangle - \Delta_n \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{(H_0 - E_n^0)^2} H_1 | E_n^0 \rangle \\ &+ \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} H_1 | E_n^0 \rangle + \dots \\ &= E_n^0 + \langle E_n^0 | H_1 | E_n^0 \rangle - \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} H_1 | E_n^0 \rangle - (\langle E_n^0 | H_1 | E_n^0 \rangle + \dots) \\ &\langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{(H_0 - E_n^0)^2} H_1 | E_n^0 \rangle + \langle E_n^0 | H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} H_1 \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} H_1 | E_n^0 \rangle + \dots \\ |E_n\rangle &= |E_n^0\rangle + \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} (\cancel{A}_n - H_1) |E_n^0\rangle + \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} (\Delta_n - H_1) \frac{Q_n}{H_0 - E_n^0} \\ &(\cancel{A}_n - H_1) |E_n^0\rangle + \dots \end{aligned}$$

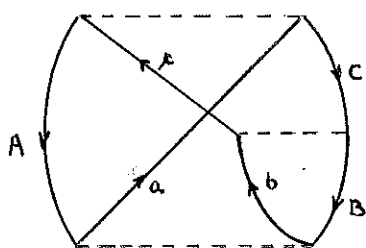
A tous les ordres, la fonction est normée par la condition :

$$\langle E_n^0 | E_n^K \rangle = 1 .$$

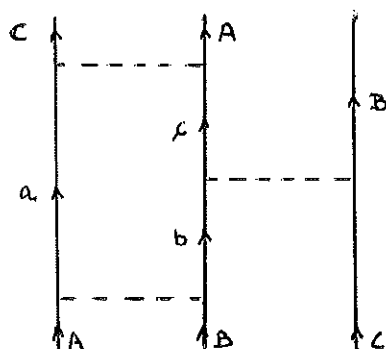


APPENDICE B - SIGNE DES DIAGRAMMES DE FEYNMAN-GOLDSTONE

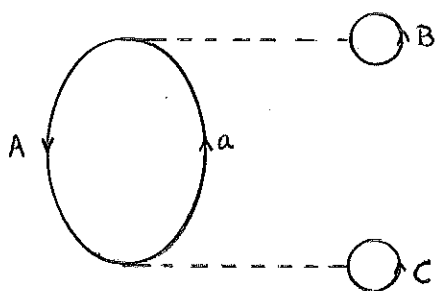
Pour un système de fermions, l'ordre des états à une particule a une importance, car la fonction d'onde change de signe lors d'une permutation impaire des états. Pour déterminer le signe d'un diagramme de Feynman-Goldstone, il suffit de repasser au diagramme de Feynman correspondant et d'attribuer un signe suivant la parité de la permutation qui est nécessaire pour passer des états initiaux aux états finaux. Ainsi, par exemple,



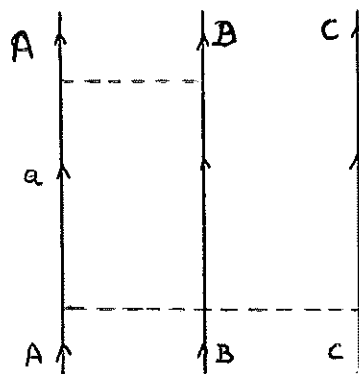
$h = 3 \quad \ell = 1 \quad u = 0$   
 $(-)^{h+\ell+u} = 1$



Permutation paire des trois lignes  
 → signe +



$h = 3 \quad \ell = 3 \quad u = 0$   
 $(-)^{h+\ell+u} = 1$



Permutation paire → signe +

Le signe d'un diagramme de Feynman-Goldstone peut cependant s'évaluer directement en appliquant la règle 4 des diagrammes.

Le facteur  $(-)^u$  est évident, car, dans les diagrammes considérés, ce n'est pas l'interaction  $U$  qu'il faut introduire, mais  $-U$ . Le facteur  $(-)^{h+\ell}$  mesure la parité de la permutation exigée pour passer du déterminant de Slater final au déterminant initial.

Fixons notre attention sur une boucle fermée d'un diagramme et partons de l'extrémité la plus basse (s'il y en a deux, nous en choisirons une quelconque). L'effet d'une ligne montante est de remplacer un état dans la mer de Fermi par un état en dehors de la mer de Fermi. Si nous continuons le long de la boucle, nous passons éventuellement par une ligne trou, il y a alors une permutation dans le déterminant de Slater entre le premier trou et le second trou, à moins que, bien sûr, la ligne trou soit la même que la ligne trou précédente, auquel cas il n'y a pas de permutation. Si nous continuons toute la boucle, nous aurons effectué, dans le déterminant de Slater, une permutation cyclique d'une longueur égale au nombre de lignes trous rencontrées. Le nombre de permutations est inférieur d'une unité à la longueur de la permutation cyclique, par exemple,  $(1,2,3) = (32)(13)$ . Le signe de la permutation dans une boucle est  $(-)^{h_b-1}$  et pour le diagramme tout entier, qui contient  $\ell$  boucles, le signe de la permutation doit être  $(-)^{h-\ell}$ .

APPENDICE C - CALCUL DE L'ENERGIE D'INTERACTION  
 DE DEUX PARTICULES DANS LE VIDE

Nous considérons deux particules interagissant dans le vide, par l'intermédiaire d'un potentiel  $V$ . Ces particules sont considérées dans un état relatif  $S$ , donc leurs fonctions d'onde ne dépendent que de la coordonnée  $r$ . En posant

$$S_k = r \phi_k \quad (C.1)$$

et

$$R_k = r \psi_k, \quad (C.2)$$

nous obtenons les équations différentielles de Schrödinger suivantes :

$$- S_k'' = k^2 S_k \quad (C.3)$$

$$- R_k'' + \frac{MV}{\hbar^2} R_k = k^2 R_k \quad (C.4)$$

$$\text{En } r = 0, \quad R_k \text{ et } S_k = 0 \quad (C.5)$$

$$\text{Pour } r \rightarrow \infty, \quad S_k \rightarrow \frac{1}{\Omega^{1/2}} \frac{\sin kr}{k}, \quad (C.6)$$

$$R_k \rightarrow \frac{1}{\Omega^{1/2}} \sin(kr + \delta) = \frac{1}{\Omega^{1/2}} \left[ \frac{\sin kr}{k} + \text{tg } \delta(k) \frac{\cos kr}{k} \right] \quad (C.7)$$

L'énergie d'interaction vaut alors :

$$\Delta E(k) = 4\pi \int S_k(r) V(r) R_k(r) dr \quad (C.8)$$

Elle s'obtient en intégrant [(C.3)  $\times$   $R_k$  - (C.4)  $\times$   $S_k$ ] et en tenant compte des conditions aux limites (C.6) et (C.7)

$$\begin{aligned} \Delta E(k) &= -4\pi [R_k S_k' - S_k R_k']_0^\infty \frac{\hbar^2}{M} \\ &= -\frac{4\pi}{\Omega} \frac{\hbar^2}{M} \frac{\text{tg } \delta(k)}{k} \end{aligned} \quad (C.9)$$

Un traitement plus correct, tenant compte de la condition de normalisation  $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle$  conduit à :

$$\Delta E(k) = - \frac{4\pi}{\Omega} \frac{\delta(k)}{k} \quad (C.10)$$

Dans le cas d'un coeur dur de rayon  $c$  , on a :

$$R_k = q \frac{\sin k (r - c)}{k} \quad (C.11)$$

ou

$$\delta(k) = - kc \quad (C.12)$$

L'énergie d'interaction vaut alors :

$$\Delta E(k) = \frac{4\pi c}{\Omega} \frac{M^2}{M} \quad (C.13)$$

APPENDICE D - RELATION ENTRE  $G_A$  et  $G_B$

Considérons les opérateurs  $G_A$  et  $G_B$  définis par les relations (D.1) et (D.2) :

$$G_A = V_A - V_A Q_A e^{-1} G_A = V_A - V_A P_A G_A = V_A \Omega_A \quad (D.1)$$

$$G_B = V_B - V_B Q_B e^{-1} G_B = V_B - V_B P_B G_B = V_B \Omega_B \quad , \quad (D.2)$$

avec

$$\Omega = 1 - P G \quad (D.3)$$

et

$$\Omega^+ = 1 - G^+ P^+ \quad . \quad (D.4)$$

En tenant compte de (D.3) et (D.4), nous pouvons écrire l'identité (D.5) :

$$G_A = G_A - G_B^+ (\Omega_A + P_A G_A - 1) + (\Omega_B^+ + G_B^+ P_B^+ - 1) G_A \quad . \quad (D.5)$$

$$G_A = G_B^+ - G_B^+ \Omega_A + \Omega_B^+ G_A + G_B^+ (P_B^+ - P_A) G_A \quad . \quad (D.6)$$

En utilisant (D.1) et (D.2), (D.6) s'écrit :

$$G_A = G_B^+ + \Omega_B^+ [V_A - V_B^+] \Omega_A + G_B^+ [P_B^+ - P_A] G_A \quad . \quad (D.7)$$

Comme  $P$  et  $V$  sont hermitiens, (D.7) s'écrit sous la forme (D.8) pour  $A = B$  :

$$G_A = G_A^+ \quad . \quad (D.8)$$

Sachant que  $G$ ,  $P$  et  $V$  sont hermitiens, nous obtenons finalement la relation (D.9) entre  $G_A$  et  $G_B$  :

$$G_A = G_B + \Omega_B^+ [V_A - V_B] \Omega_A + G_B [P_B - P_A] G_A \quad . \quad (D.9)$$

En considérant (D.3) et (D.4), nous remarquons que  $\Omega$  n'est un opérateur hermitien que si  $P$  et  $G$  commutent, ce qui est rarement le cas.

Pour  $V_A = V_B$ , nous avons la formule (D.10) :

$$G_A = G_B + G_B(P_B - P_A)G_A$$

$$= G_B + G_B(P_B - P_A)G_B + G_B(P_B - P_A)G_B(P_B - P_A)G_B + \dots \quad (D.10)$$

REFERENCES

- [AKA 68a] Akaishi, Bando, Kuriyama et Nagata : Progr. Theor. Phys. 40 (1968) 353
- [AKA 68b] Akaishi et Nagata : Progr. Theor. Phys., Suppl. 476
- [AZZ 70] Azziz : Nucl. Phys. A147 (1970) 401
- [BAK 69] Baker et Kahane : J. Math. Phys. 10 (1969) 1647
- [BAK 71] Baker : Revs. Mod. Phys. 43 (1971) 498
- [BAR 67] Baranger : "Nuclear Structure and Nuclear Reactions" Enrico Fermi School 1967, 40 (Academic Press, N.Y. 1969)
- [BAR 70] Baranger : Nucl. Phys. A149 (1970) 225
- [BARR72] Barrett, Hewitt et MacCarthy : Nucl. Phys. A184 (1972) 13
- [BEC 66] Becker et MacKellar : Phys. Letters 21 (1966) 201
- [BEC 68] Becker, MacKellar et Morris : Phys. Rev. 174 (1968) 1264
- [BEC 70a] Becker : Phys. Rev. Letters 24 (1970) 400
- [BEC 70b] Becker : Phys. Rev. Letters 32B (1970) 263
- [BER 68] Bertsch et Kuo : Nucl. Phys. A112 (1968) 204
- [BET 57] Bethe et Goldstone : Proc. Roy. Soc.(London) A238 (1957) 551
- [BET 63] Bethe, Brandow et Petschek : Phys. Rev. 129 (1963) 225
- [BET 65] Bethe : Phys. Rev. B138 (1965) 804
- [BET 67] Bethe : Phys. Rev. 158 (1967) 941
- [BLO 58] Bloch et Horowitz : Nucl. Phys. 8 (1958) 91
- [BOH 69] Bohr et Mottelson : "Nuclear Structure" (Benjamin, New-York, 1969)
- [BRA 66] Brandow : Rendiconti SIF, Course XXXVI, 496
- [BRA 63] Brandow : Ph.D. Thesis, Cornell University (1963)
- [BRA 66] Brandow : Phys. Rev. 152 (1966) 863
- [BRA 67] Brandow : Revs. Mod. Phys. 39 (1967) 771
- [BRE 62] Breit : Revs. Mod. Phys. 34 (1962) 766
- [BRES 69] Bressel, Kerman et Rouben : Nucl. Phys. A124 (1969) 624
- [BRO 67] Brody et Moshinsky : "Tables of Transformation Brackets" (Gordon and Breach, New York 1967)
- [BROW 64] Brown, Schappert et Wong : Nucl. Phys. 56 (1964) 191
- [BROW 67] Brown, "Unified Theory of Nuclear Models and Forces" (North-Holland, Amsterdam 1967)
- [BROW 69] Brown, Jackson et Kuo : Nucl. Phys. A133 (1969) 481
- [BRU 53] Brueckner et Watson : Phys. Rev. 92 (1953) 1023

- [BRU 54] Brueckner, Levinson et Mahmoud : Phys. Rev. 95 (1954) 217
- [BRU 55a] Brueckner et Levinson : Phys. Rev. 97 (1955) 1344
- [BRU 55b] Brueckner : Phys. Rev. 97 (1955) 1353
- [BRU 55c] Brueckner, Eden et Francis : Phys. Rev. 98 (1955) 1445
- [BRU 55d] Brueckner, Eden et Francis : Phys. Rev. 100 (1955) 891
- [BRU 58a] Brueckner et Gammel : Phys. Rev. 109 (1958) 1023
- [BRU 58b] Brueckner, Gammel et Weitzner : Phys. Rev. 110 (1958) 431
- [BRU 60] Brueckner et Goldman : Phys. Rev. 117 (1960) 207
- [BRU 61] Brueckner : Phys. Rev. 121 (1961) 255
- [BRU 62] Brueckner et Masterson : Phys. Rev. 128 (1962) 2267
- [BRU 69] Brueckner, Buchler, Clarck et Lombard : Phys. Rev. 181  
(1969) 1543
- [BRY 69] Bryan et Scott : Phys. Rev. 177 (1969) 1435
- [CLA 66] Clark et Westhaus : Phys. Rev. 141 (1966) 833
- [COE 70] Coester, Cohen, Day et Vincent : Phys. Rev. C1 (1970) 769
- [DAH 69] Dahlblom : Acta Aboensis B29 (1969) 16
- [DAV 66] Davies, Krieger et Baranger : Nucl. Phys. 84 (1966) 545
- [DAV 67] Davies, Baranger, Tarbutton et Kuo : Phys. Rev. 177 (1967)  
1519
- [DAV 71] Davies et MacCarthy : Phys. Rev. C4 (1971) 1981
- [DAY 66] Day : Phys. Rev. 151 (1966) 826
- [DAY 67] Day : Revs. Mod. Phys. 39 (1967) 719
- [DOV 72] Dover et Nguyen Van Giai : Nucl. Phys. A140 (1972) 373
- [EDE 58] Eden et Emery : Proc. Roy. Soc. (London) A248 (1958) 266
- [EME 59] Emery : Nucl. Phys. 12 (1959) 69
- [ENG 72] Engelbrecht et Weidenmüller : Nucl. Phys. A184 (1972) 385
- [FAD 60] Faddéev : Soviet Physics JETP 15 (1960) 39, 1014
- [FAE 73a] Faessler, MacKellar et Tripathi : Phys. Rev. C8 (1973) 29
- [FAE 73b] Faessler, MacKellar et Tripathi : Nucl. Phys. A215 (1973)  
525, 531
- [FED 65] Federman et Talmi : Phys. Letters 19 (1965) 480
- [FET 71] Fetter et Walecka : "Quantum Theory of Many-Particle Sys-  
tems" (McGraw-Hill, New York 1971)
- [GAM 57a] Gammel, Christian et Thaler : Phys. Rev. 105 (1957) 311
- [GAM 57b] Gammel et Thaler : Phys. Rev. 107 (1957) 201, 1337
- [GOG 70] Gogny, Pires et Turreil : Phys. Letters B32 (1970) 591
- [GOL 57] Goldstone : Proc. Roy. Soc. (London) A239 (1957) 267
- [GOM 58] Gomes, Walecka et Weisskopf : Ann. Phys. (N.Y.) 3 (1958)  
241



- [GRE 62] Green : Nucl. Phys. 33 (1962) 218
- [HAF 70] Haftel et Tabakin : Nucl. Phys. A158 (1970) 1
- [HAM 62] Hamada et Johnston : Nucl. Phys. 34 (1962) 382
- [HOF 58] Hofstader, Bumiller et Yearian : Revs. Mod. Phys. 30 (1958) 482
- [HUG 57] Hugenholtz : Physica 23 (1957) 481, 533
- [HUG 58] Hugenholtz et Van Hove : Physics 24 (1958) 363
- [ING 68] Ingber : Phys. Rev. 174 (1968) 1250
- [KAL 67] Kallio et Day : Phys. Letters 25B (1967) 72
- [KAL 69] Kallio et Day : Nucl. Phys. A124 (1969) 77
- [KAO 69] Kao, Depp, MacCarthy et Baranger : Proceedings of the International Conference on Properties of Nuclear States, Montréal, Canada, 1964
- [KER 66] Kerman, Svenne et Villars : Phys. Rev. 147 (1966) 70
- [KIR 67] Kirson : Nucl. Phys. A99 (1967) 353
- [KIR 68] Kirson : Nucl. Phys. A115 (1968) 49
- [KOH 65] Köhler : Phys. Rev. 138 (1965) 831, 1383
- [KOH 66] Köhler : Nucl. Phys. 88 (1966) 529
- [KOH 67a] Köhler : Nucl. Phys. 98 (1967) 569
- [KOH 67b] Köhler et MacCarthy : Nucl. Phys. A106 (1968) 313
- [KUO 66] Kuo et Brown : Nucl. Phys. 85 (1966) 40
- [KUO 67] Kuo : Nucl. Phys. A103 (1967) 71
- [LAN 52] Landau : Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30 (1952) 1058
- [LOM 68] Lomon et Feshbach : Ann. Phys. (N.Y.) 48 (1968) 94
- [MAC 69] MacCarthy : Nucl. Phys. A130 (1969) 305
- [MAC 70] MacCarthy et Davies : Phys. Rev. C1 (1970) 1640
- [MIG 67] Migdal : "Theory of Finite Fermi Systems and Applications to Atomic Nuclei" (Interscience, New York, 1967)
- [MOH 61] Mohling : Phys. Rev. 124 (1961) 583 ; 128 (1962) 365
- [MOR 63] Morita : Progr. Theor. Phys. 29 (1963) 351
- [MOS 59] Moshinski : Nucl. Phys. 13 (1959) 104
- [MOS 60] Moszkowski et Scott : Ann. Phys. (N.Y.) 11 (1960) 65
- [MOS 66] Moszkowski : Phys. Rev. B140 (1966) 293
- [MUT 65] Muthukrishnan et Baranger : Phys. Letters 18 (1965) 160
- [MUT 73] Müther, Faessler et Goeke : Nucl. Phys. A216 (1973) 213
- [MYE 66] Myers et Swiatecki : Nucl. Phys. 81 (1966) 1
- [NEG 70] Negele : Phys. Rev. C1 (1970) 1260
- [PAR 70] Partovi et Lomon : Phys. Rev. D2 (1970) 1999
- [PUF 61] Puff : Ann. Phys. (N.Y.) 13 (1961) 317

- [QUA 65] Quang : Ph.D. Thesis, M.I.T. (1965)
- [RAJ 63] Rajaraman : Phys. Rev. 129 (1963) 265 ; 131 (1963) 1244
- [RAJ 67] Rajaraman et Bethe : Revs. Mod. Phys. 39 (1967) 745
- [RAZ 63] Razavy : Phys. Rev. 130 (1963) 1091
- [REI 68] Reid : Ann. Phys. (N.Y.) 50 (1968) 411
- [REIN 64] Reiner : Phys. Rev. B133 (1964) 1105
- [SAU 70] Sauer : Nucl. Phys. A150 (1970) 407, page 464
- [SHA 67] Shakin , : Wagnare et Hull : Phys. Rev. 161 (1967) 1006,  
1015
- [SIE 70] Siemens : Nucl. Phys. A141 (1970) 225
- [SKY 59] Skyrme : Nucl. Phys. 9 (1959) 615
- [SLA 68] Slanina et McManus : Nucl. Phys. A116 (1968) 271
- [SPR 67] Sprung et Bhargava : Ann. Phys. (N.Y.) 42 (1967) 226
- [SPR 69] Sprung et Srivastava : Nucl. Phys. A139 (1969) 605
- [STI 69] Stingl et Kirson : Nucl. Phys. A137 (1969) 1378
- [STR 68] Strutinsky : Nucl. Phys. A122 (1968) 1
- [TAB 66] Tabakin et Davies : Phys. Rev. 150 (1966) 793
- [TAB 68] Tabakin : Phys. Rev. 174 (1968) 1208
- [TAB 69] Tabakin : Phys. Rev. 177 (1969) 1443
- [TAL 52] Talmi : Helv. Phys. Acta 25 (1952) 185
- [TAM 68] Tamagaki : Progr. Theor. Phys. 39 (1968) 91
- [TRI 72] Tripathi et Goldhammer : Phys. Rev. C6 (1972) 101
- [UED 68] Ueda et Green : Phys. Rev. 174 (1968) 1304
- [VAU 70] Vautherin et Brink : Phys. Letters B32 (1970) 149
- [VIL 61] Villars : Rendiconti SIF, course XXIII (New York, 1961)  
p. 1
- [WON 65] Wong : Nucl. Phys. 71 (1965) 385
- [WON 67a] Wong : Nucl. Phys. A91 (1967) 399
- [WON 67b] Wong : Nucl. Phys. A104 (1967) 417
- [YAM 54] Yamaguchi : Phys. Rev. 95 (1954) 1628.