

U N I V E R S I T E D E L I E G E

FACULTE DES SCIENCES

EXTENSION DU PROBLEME INVERSE DE LA DIFFUSION
A MOMENT ANGULAIRE FIXE
EN VUE D'APPLICATIONS AUX COLLISIONS NUCLEAIRES

Dissertation présentée par

PIERRE ROCHUS

pour l'obtention du grade de
Docteur en Sciences Physiques

-1979-

Messieurs les Professeurs L. WINAND, J. SERPE, J. PIRENNE, J. HUMBLET, C. MAHAUX, J. BECKERS et Monsieur le Docteur M. BAWIN, ont bien voulu accepter de présider et de faire partie du jury de ma thèse : je les en remercie vivement.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. HUMBLET pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce travail et pour les conditions propices à sa réalisation qu'il m'a assurées.

Le sujet du présent travail m'a été proposé par Monsieur le Professeur M. COZ. Je tiens à lui exprimer ici mes sentiments de profonde gratitude pour l'aide efficace qu'il m'a apportée et pour ses encouragements répétés.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur le Docteur M. BAWIN pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à cette étude et les nombreux conseils qu'il m'a prodigués.

J'ai bénéficié de discussions très fructueuses avec Monsieur le Professeur C. MAHAUX et Monsieur le Docteur T. MIZUTANI : je tiens à les remercier vivement.

Je remercie également Madame M.-P. BIEMONT-GERARD et Mademoiselle M.-L. JOIRIS qui ont assuré avec beaucoup de soin et de célérité la réalisation matérielle de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES
+++++

INTRODUCTION	-i
CHAPITRE I : PROBLEME DIRECT DE LA DIFFUSION A UNE VOIE -----	-I.1-
§ 1. Introduction -----	I.1
§ 2. Notations et rappel de quelques propriétés utiles de la théorie de la diffusion à une voie -----	I.2
§ 3. Fonction de Jost, fonction d'onde physique, relation de complétude et données de la diffusion -----	I.13
§ 4. Opérateur différentiel du second ordre non self-adjoint -----	I.18
CHAPITRE II : THEORIE GENERALE DES OPERATEURS DE TRANS- FORMATION UTILES POUR LE PROBLEME INVERSE DE LA DIFFUSION -----	II.1
§ 1. Introduction -----	II.1
§ 2. Définition des opérateurs de transformation généralisés -----	II.2
§ 3. Opérateurs de Möller -----	II.4
§ 4. Propriétés générales des opérateurs de transformation -----	II.5
§ 5. Opérateurs de transformation du type de Volterra -----	II.7
§ 6. Opérateurs de transformation du type de Gel'fand et de Marchenko -----	II.9
§ 7. Equations aux dérivées partielles pour les opérateurs de transformation généralisés -----	II.17
Appendice A : Formule de composition et notion de chemin -----	II.29
Appendice B : Principes variationnels équivalents aux équations fondamentales -----	II.32
CHAPITRE III : SUR LA METHODE DE RIEMANN -----	III.1
§ 1. Introduction -----	III.1

§ 2. Formules simplifiées correspondant à la méthode de Riemann habituelle -----	II.2
§ 3. Formule d'addition des fonctions de Riemann pour une équation aux dérivées partielles séparable en les variables indépendantes -----	II.3
§ 4. Méthodes d'obtention de la fonction de Riemann -----	II.5
§ 5. Recherche de certaines fonctions de Riemann utiles pour le problème inverse -----	II.6
Appendice A -----	II.16

CHAPITRE IV : GENERALISATION DES PROBLEMES DIRECT ET INVERSE POUR L'EQUATION DE SCHRÖDINGER REDUITE A MOMENT ANGULAIRE NUL ----- IV.1

§ 1. Introduction -----	IV.1
§ 2. Problème direct et fonction spectrale -----	IV.3
§ 3. Problème inverse et équation de Gel'fand-Levitan généralisée -----	IV.12
§ 4. Equation non linéaire de Korteweg-de Vries -----	IV.29
§ 5. Conclusions -----	IV.33

CHAPITRE V : ETUDE COMPARATIVE DES APPROCHES DE MARCHENKO ET DE GEL'FAND POUR LA DIFFUSION A UNE VOIE (& FIXE) ----- V.1

§ 1. Introduction -----	V.1
§ 2. Notations et théorèmes -----	V.2
§ 3. Equations intégrales pour les opérateurs de transformation -----	V.5
§ 4. Potentiel de référence V_0 nul -----	V.12
§ 5. Le potentiel de référence est le potentiel centrifuge -----	V.28
§ 6. Introduction d'une interaction de Coulomb dans le potentiel de référence -----	V.34
§ 7. Conclusions -----	V.47

CHAPITRE VI : ETUDE DE L'OPERATEUR DE TRANSFORMATION CORRESPONDANT A DES VOIES COUPLEES ----- VI.1

§ 1. Introduction -----	VI.2
-------------------------	------

§ 2. Problème de la diffusion à voies couplées -----	VI.3
§ 3. Equations aux dérivées partielles pour les éléments de $K_M(x,y)$ -----	VI.14
§ 4. Borne supérieure pour la fonction de Riemann -----	VI.15
§ 5. Borne pour l'opérateur de transformation du type de Marchenko et ses dérivées -----	VI.20
§ 6. Borne pour la solution de Jost -----	VI.32
§ 7. Analyticité de la solution de Jost -----	VI.35
§ 8. Conclusions -----	VI.36

CHAPITRE VII : ETUDE DES OPERATEURS DE TRANSFORMATION DANS
UN ESPACE A $d \neq 1$ DIMENSIONS ----- VII.1

§ 1. Introduction -----	VII.1
§ 2. Equation radiale -----	VII.2
§ 3. Etude des opérateurs de transformation (cas non couplé) -----	VII.7
§ 4. Opérateurs de transformation pour un potentiel à symétrie axiale -----	VII.11
§ 5. Opérateurs de transformation pour des équations couplées dans un espace à d dimensions -----	VII.14
§ 6. Conclusions -----	VII.17

CHAPITRE VIII : OPERATEURS DE TRANSFORMATION POUR DES
INTERACTIONS DEPENDANT DES VITESSES ----- VIII.1

§ 1. Introduction -----	VIII.1
§ 2. Notations -----	VIII.1
§ 3. Première méthode -----	VIII.2
§ 4. Deuxième méthode (transformation de Liouville) -----	VIII.6
§ 5. Méthode directe -----	VIII.10
§ 6. Opérateur de transformation pour un potentiel dépendant linéairement de k -----	VIII.14
§ 7. Conclusions -----	VIII.17

CHAPITRE IX : EXTENSION DE L'EQUATION DE MARCHENKO POUR DES SYSTEMES DIFFERENTIELS NON HERMITIENS -----	IX.1
§ 1. Introduction -----	IX.1
§ 2. Notations -----	IX.3
§ 3. Zéros de la fonction $\Delta(\lambda) = \det F_+(\lambda)$ -----	IX.16
§ 4. Equation fondamentale du problème inverse -----	IX.19
§ 5. Le noyau de l'équation fondamentale -----	IX.29
§ 6. Les données de la diffusion -----	IX.38
§ 7. Conclusions -----	IX.42
Appendice A -----	IX.45
Appendice B -----	IX.47
CHAPITRE X : CONCLUSIONS -----	X.1

INTRODUCTION

+++++

Depuis qu'il a été posé voici quelque trente ans, le problème inverse de la diffusion n'a cessé de connaître de nouveaux développements, le plus souvent posés par des applications de plus en plus variées [CHA 78]. Celles-ci sont parfois inattendues et loin d'être épuisées [FAD 76]. Ainsi, en 1967, Gardner, Green, Kruskal et Miura [GAR 67] ont montré pour la première fois que le problème inverse a une dimension fournit une méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles, non linéaire de Korteweg-de Vries. A côté de ses applications directes en théorie des réseaux électriques [LAD 77], en biophysique et en géophysique [CHA 77], il existe à présent une littérature très abondante sur l'utilisation des techniques du problème inverse pour résoudre un très grand nombre d'équations non linéaires, importantes en physique (théorie des circuits, mécanique des fluides, élasticité, théorie des plasmas, optique quantique,...). Ces équations sont toutes en relation avec le concept de soliton. Notre but principal dans ce mémoire n'est pas d'élargir la classe des équations non linéaires solubles par les techniques du problème inverse mais plutôt d'adapter et d'étudier le problème inverse en vue de son application aux collisions nucléaires.

La physique nucléaire à basse et à moyenne énergies peut être décrite à l'aide de l'équation (ou un système d'équations) de Schrödinger non relativiste. Comme le physicien théoricien désire obtenir le meilleur accord possible entre les solutions de son équation et les données expérimentales, la connaissance de la forme exacte de l'opérateur de Schrödinger constitue donc un élément essentiel pour la compréhension complète des propriétés nucléaires. Malheureusement, l'interaction fondamentale entre deux nucléons est encore mal connue bien que déjà dans les années 1950, Bethe [BET 53] estimait que jamais aucune autre question scientifique n'avait demandé autant d'heures de travaux à la fois théoriques et expérimentaux. Comme la seule connaissance de l'amplitude à deux corps sur la couche en énergie ne suffit pas pour étudier les systèmes à $N \geq 3$ corps, la connaissance de l'amplitude hors couche ou de façon équivalente, celle du potentiel, est nécessaire.

Même si nous avons à présent à notre disposition des théories microscopiques [JEU 76] permettant d'obtenir le potentiel optique à partir de l'interaction nucléaire fondamentale, le potentiel optique possèdera les ambiguïtés correspondant à celles du potentiel nucléon-nucléon. Le but principal des expériences de diffusion est de déterminer les forces d'interaction entre les particules ou systèmes de particules qui entrent en collision. Cependant, l'analyse des observables (sections efficaces et polarisations) en vue d'obtenir des informations sur le potentiel n'est pas simple. Les données de la diffusion pour un problème à symétrie sphérique peuvent être analysées par la méthode de décomposition en ondes partielles. Nous effectuons la même décomposition pour l'équation de Schrödinger et développons la fonction d'onde sur une base d'harmoniques sphériques. Dans chaque onde partielle, l'équation de Schrödinger peut contenir un potentiel local ou non local. Même si la description à l'aide d'un potentiel non local est la plus complète, il est généralement admis que les potentiels locaux reproduisent les effets les plus importants du problème et sont souvent justifiés par certains modèles théoriques. Pour résoudre des problèmes physiques spécifiques, la méthode de loin la plus utilisée consiste à supposer que l'interaction locale possède une forme analytique bien précise, avec un certain nombre de paramètres. On calcule les déphasages et la section efficace, puis on ajuste les paramètres du potentiel de façon à obtenir le meilleur accord avec l'expérience. Cette procédure est bien entendu légitime, car la forme donnée au potentiel a généralement des justifications théoriques. Ainsi, pour l'interaction nucléon-nucléon, la théorie mésique nous suggère de prendre une somme (ou plutôt une intégrale) de potentiels du type de Yukawa tandis que pour le potentiel nucléon-noyau il est justifié de prendre une forme (de Woods-Saxon) similaire à la distribution de la matière nucléaire dans le noyau.

Un autre point de vue peut être adopté. Partant des propriétés mathématiques (complétude et analyticité) des solutions de l'équation de Schrödinger, nous nous proposons de reconstruire le potentiel à partir des seules données expérimentales. Cette méthode constitue l'objet du problème inverse. Deux approches sont à distinguer : la première (problème inverse à énergie fixée) permet la construction du potentiel à partir des données expérimentales à une énergie donnée et pour tous les moments angulaires, tan-

dis que la seconde méthode (problème inverse à moment angulaire fixé) nécessite la connaissance des données expérimentales pour un moment angulaire donné à toutes les énergies. Si l'obtention de l'équation fondamentale et l'étude de l'existence de sa solution demandent certains développements mathématiques un peu longs, son application numérique à des problèmes concrets est par contre très simple et en général plus rapide que la méthode habituelle. Cependant, nous devons reconnaître qu'il existe peu d'exemples d'applications vraiment physiques autres que les cas triviaux où la matrice S est supposée avoir une forme rationnelle de sorte que le potentiel correspondant est du type de Bargmann. Les seuls exemples d'applications physiques sont, à notre connaissance : la détermination des potentiels α - α et N - N par Benn et Scharf [BEN 67],[BEN 69,72] par le problème inverse à moment angulaire fixé et du "potentiel" π - N par Pelosi, Cirelli et Marconi [PEL 78] par la méthode à énergie fixe. Nous pensons qu'il y a essentiellement deux raisons pour lesquelles la méthode inverse est peu utilisée :

- la première est que la méthode inverse nécessite la connaissance de plus d'informations que celles qui sont effectivement données par l'expérience. Ceci n'est cependant pas un défaut de la méthode mais au contraire, la théorie met ainsi en évidence l'ambiguïté dans la définition du potentiel et évite de tirer des conclusions généralement fausses concernant le potentiel et qui ne sont pas nécessairement contenues dans l'information expérimentale disponible. Nous devons donc avoir à notre disposition un modèle (modèle de Regge par exemple) pour préciser les données manquantes (c'est-à-dire les données à hautes énergies pour le problème à moment angulaire fixé. Le théorème de Levinson nous donne sa limite) ;

- la seconde raison est que le problème inverse n'a pas été adapté à toutes les circonstances rencontrées en physique nucléaire. Nous nous proposons dans ce travail de généraliser le problème inverse à une plus large classe de situations rencontrées en physique nucléaire, c'est-à-dire aux systèmes d'équations différentielles couplées, contenant des énergies de seuils et de moments angulaires différents, des interactions de Coulomb et un potentiel perturbatif non nécessairement hermitien. Nous considérerons aussi la diffusion dans un espace à d dimensions et la présence d'une masse effective ou d'un potentiel dépendant des vitesses.

Les théories du problème inverse fournissent aussi des méthodes qui permettent le calcul direct de la matrice T hors de la couche en énergie, directement à partir des données expérimentales, sans passer par l'intermédiaire d'un potentiel [KAR 74], [PIC 72]. Cette méthode a été utilisée pour la diffusion N-N par Hodgson [HOD 78]. Nous n'avons pas considéré ce problème ici mais il est évident que notre extension de l'équation fondamentale permettrait une généralisation correspondante de cette méthode.

Dans ce travail, nous ne considérons que le problème inverse à moment angulaire fixé, bien que la méthode utilisée puisse s'appliquer au problème inverse à énergie fixe. La théorie est essentiellement basée sur l'existence d'un opérateur de transformation qui permet d'exprimer certaines solutions du problème perturbé à partir des solutions de même type du problème non perturbé. L'opérateur de transformation semble donc jouer un rôle similaire à celui d'une fonction de Green mais il est en fait assez différent : l'opérateur de transformation présente l'avantage sur la fonction de Green d'être indépendant de l'énergie mais contrairement à la fonction de Green, il ne peut s'appliquer qu'à des solutions vérifiant certaines conditions aux limites bien précises. Nous appellerons "opérateurs de transformation du type de Gel'fand", ceux qui permettent la représentation des solutions régulières à l'origine et "opérateurs de transformation du type de Marchenko", ceux qui correspondent aux solutions définies par leur comportement asymptotique à l'infini (solutions de Jost). Le rôle essentiel joué par l'opérateur de transformation dans l'étude du problème inverse de la diffusion quantique, est souligné par les faits suivants :

- Newton [NEW 66] a montré que l'équation fondamentale de Gel'fand-Levitan [GEL 55] peut être étendue à tout système d'équations différentielles du second ordre, contenant un certain potentiel matriciel de référence, si l'existence d'un opérateur de transformation borné et intégrable a été démontrée et si les équations non perturbées et perturbées possèdent chacune un système complet de solutions ;

- l'existence d'un opérateur de transformation du type de Marchenko et la connaissance de bornes pour le noyau de l'opérateur et ses dérivées premières ont des conséquences très importantes dans la théorie d'Agranovich et Marchenko [AGR 63] que nous voulons

généraliser. Tout d'abord, l'existence d'un opérateur de transformation est essentielle pour établir une équation fondamentale du problème inverse reliant l'opérateur de transformation, donc aussi le potentiel, aux données expérimentales. La connaissance de bornes pour le noyau de l'opérateur de transformation et ses dérivées permet l'étude des propriétés du noyau de l'équation fondamentale et de l'existence d'une solution. Enfin, ces bornes sont aussi nécessaires pour établir la stabilité de la solution du problème inverse vis-à-vis de faibles perturbations dans les déphasages aux hautes énergies.

L'étude des conditions d'existence et des propriétés de l'opérateur de transformation constituant l'étape principale du problème inverse, ceci explique pourquoi la plus grande partie du travail est consacrée à la recherche des conditions qui assurent l'existence d'un opérateur de transformation borné et intégrable, pour un très grand nombre de situations qui sont rencontrées en physique nucléaire et que nous avons déjà citées. L'étude complète, ainsi que l'obtention de l'équation fondamentale du problème inverse, sera faite dans le cas d'un système non hermitien d'équations différentielles couplées contenant des moments angulaires différents et des énergies de seuils. L'extension aux autres cas (espace à d dimensions et masse effective) pourrait être obtenue par une méthode analogue à celle qui est utilisée au chapitre IX.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la diffusion à une voie. Après avoir introduit les notations et rappelé quelques résultats connus, nous étudions le problème de la diffusion en présence d'un potentiel local complexe. Ce problème non auto-adjoint, a été très peu considéré, sauf pour l'onde partielle à moment angulaire nul ; nous généralisons la théorie à des moments angulaires non nuls. Le spectre est étudié et la possibilité de valeurs propres multiples et de singularités spectrales est mise en évidence ainsi que le fait que les fonctions propres ne forment plus nécessairement un ensemble complet. Afin d'établir la généralisation de la relation de complétude, nous devons ajouter aux fonctions propres certaines dérivées, appelées fonctions adjointes. Le chapitre II considère l'étude générale des opérateurs de transformation et de leurs propriétés. Nous y définissons différents types d'opérateurs de transformation utiles pour la résolution du problème inverse et nous déduisons les équations aux dérivées par-

tielles avec leurs conditions aux limites vérifiées par les noyaux des opérateurs de transformation. Ces équations seront utilisées dans la suite pour déterminer les conditions à imposer aux potentiels perturbatifs, afin d'assurer l'existence d'opérateurs de transformation bornés. Au chapitre III, nous étudions les solutions de Riemann utiles pour le problème inverse et permettant de transformer les équations aux dérivées partielles avec leurs conditions aux limites en équations intégrales équivalentes; ceci facilite l'étude des propriétés de l'opérateur de transformation. Au chapitre IX, nous considérons plus particulièrement l'équation de Schrödinger pour l'onde partielle $l=0$ en imposant à la fonction d'onde une condition à l'origine différente de la condition habituelle. Nous généralisons les problèmes direct et inverse correspondants. Des solutions particulières à l'équation fondamentale sont recherchées et nous montrons que parmi celles-ci, certaines peuvent vérifier l'équation non linéaire de Korteweg-de Vries à condition d'avoir convenablement choisi la dépendance temporelle de certains paramètres. Ce résultat nous permet d'espérer que le problème inverse généralisé pour l'équation radiale à moment angulaire nul, avec des conditions aux limites différentes, peut être utile pour résoudre d'autres équations non linéaires. Dans le chapitre V, nous recherchons et comparons les conditions à imposer au potentiel scalaire perturbatif pour assurer l'existence des opérateurs de transformation du type de Marchenko et du type de Gel'fand lorsque le potentiel de référence contient les parties singulières, habituelles en physique nucléaire, telles que le potentiel centrifuge et l'interaction de Coulomb. Nous constaterons que les conditions à imposer au potentiel perturbatif dépendent plus du potentiel de référence et sont en général plus fortes dans le cas de Marchenko que dans le cas de Gel'fand, sauf à l'origine où la méthode de Marchenko admet des potentiels perturbatifs plus singuliers que la méthode de Gel'fand. Comme les potentiels physiques (le potentiel de Yukawa par exemple) sont souvent singuliers à l'origine, ceci constitue un argument supplémentaire, s'ajoutant à ceux que nous trouverons au cours du travail, pour justifier notre choix de généraliser la méthode de Marchenko dans les chapitres VI et IX. Une raison est déjà mise en évidence au chapitre II où il apparaît que la théorie de Marchenko est mieux adaptée au problème de la diffusion que la méthode de Gel'fand, celle-ci nécessite une étape

supplémentaire : la construction de la fonction de Jost à partir des déphasages. Nous considérons au chapitre VI, le problème à n voies couplées, décrivant par exemple l'interaction entre deux systèmes de particules où nous supposons que tous les degrés de liberté internes ont été éliminés de façon à ramener le problème à un ensemble d'équations couplées ne contenant que la coordonnée radiale relative. En fait, il existe de nombreuses applications possibles : processus de diffusion d'une particule avec spin, réactions d'échange de charges, diffusion par une cible déformée inerte ou par une cible possédant plusieurs états excités discrets. Pour ces systèmes, l'approximation à n voies couplées est souvent très valable, lorsque l'énergie est largement inférieure au seuil de fragmentation de la cible (dans le cas d'une cible composée) ; cette approximation à voies couplées est à la base de nombreux modèles tant en physique atomique qu'en physique nucléaire et est un modèle actuellement utilisé pour décrire le système $N\bar{N}$. Dans le cas le plus général, ces équations contiennent des énergies de seuils et des moments angulaires différents ainsi que des interactions de Coulomb. Nous recherchons les conditions à imposer au potentiel matriciel perturbatif pour assurer l'existence d'un opérateur de transformation du type de Marchenko. Dans le chapitre VII, nous étudions l'existence d'opérateurs de transformation dans le cas de la diffusion dans un espace à d dimensions. Des différences fondamentales apparaissent à nouveau entre les opérateurs du type de Marchenko et du type de Gel'fand. Nous montrons au chapitre VIII que la méthode utilisée dans les chapitres V, VI et VII peut aussi s'appliquer à l'étude d'un opérateur de transformation du type de Marchenko lorsque l'équation contient une masse effective ou un potentiel dépendant des vitesses. Le chapitre IX est consacré à l'étude complète du problème inverse et en particulier à l'obtention de l'équation fondamentale pour le cas considéré au chapitre VI. Nous tirons les conclusions au chapitre X.

CHAPITRE I : PROBLEME DIRECT DE LA DIFFUSION A UNE VOIE
+++++

§ 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations et définitions utilisées dans les autres chapitres. Nous énonçons les principales propriétés du problème de la diffusion à deux corps et nous généralisons à des moments angulaires ℓ non nuls, une étude de Naimark [NAI 60] et Lyantze [LYA 67] sur le problème de la diffusion à $\ell = 0$ en présence de potentiels complexes.

Dans le deuxième paragraphe, nous considérons l'équation de Schrödinger après sa décomposition en ondes partielles, pour un potentiel central. Nous précisons les conditions imposées au potentiel pour la plus grande partie de cette étude ; ces conditions permettent de définir un opérateur de Schrödinger auto-adjoint. Nous énonçons les principales propriétés des différents types de solutions qui sont complètement caractérisées, soit par leur comportement à l'origine, soit par leur comportement à l'infini et dont l'étude des propriétés analytiques est facilitée par l'existence d'une équation intégrale du type de Volterra, équivalente à l'équation différentielle et ses deux conditions aux limites. La fonction de Jost appelée aussi quotient et les fonctions d'onde physiques sont définies au paragraphe 3. Nous rappelons également la relation de complétude, un des éléments essentiels pour l'étude du problème inverse. Nous précisons la signification physique des différents éléments des données de la diffusion (scattering data) que sont les déphasages, les états liés et les constantes de normalisation pour un moment angulaire ℓ donné et qui sont les informations nécessaires pour la construction d'un potentiel local unique.

Au paragraphe 4, nous étudions les propriétés spectrales et la relation de complétude dans un cas moins bien connu où le potentiel est complexe et où par conséquent l'opérateur de Schrödinger n'est plus auto-adjoint. Après cette étude du problème direct, les chapitres ultérieurs seront consacrés à l'étude des opérateurs de transformation et au problème inverse de la diffusion.

§ 2. NOTATIONS ET RAPPEL DE QUELQUES PROPRIETES UTILES DE LA THEORIE DE LA DIFFUSION A UNE VOIE

Le domaine $D(H)$ de l'hamiltonien H de départ considéré :

$$H = \frac{-\Delta \mathcal{H}^2}{2M} + V(\vec{r}) \quad (I.2.1)$$

est l'ensemble $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ des fonctions indéfiniment différentiables qui ont un support compact. Cet ensemble est dense dans $L^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}$.

Nous considérons le problème de la diffusion de deux particules scalaires, interagissant par l'intermédiaire d'un potentiel local à symétrie sphérique. Après décomposition en ondes partielles, le problème se ramène à un ensemble d'équations différentielles radiales :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right] g(r) = 0 \quad (I.2.2)$$

où nous avons posé $\mathcal{H} = 2M = 1$ et où $k = \sqrt{E}$, $0 < \arg k < \pi$ ("plan physique"). La diagonalisation du moment angulaire (L^2 et L_z) conduit à la décomposition de l'espace de Hilbert $\mathcal{L} = L^2(\mathbb{R}^3)$ en la somme directe $\mathcal{L} = \bigoplus \mathcal{L}_{\ell m}$ ($\ell = 0, 1, \dots$, $m = -\ell, \dots, \ell$) où chaque $\mathcal{L}_{\ell m}$ est isomorphe à $L^2(\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Nous identifions $\mathcal{L}_{\ell m}$ à $L^2(\mathbb{R}^+)$ et considérons un opérateur L dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ qui agit sur les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^+)$ comme

$$\ell g = \left[\frac{-d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r) \right] g. \quad (I.2.3)$$

Nous dirons qu'un potentiel central est un "potentiel régulier" si il vérifie les conditions suivantes : le potentiel est localement intégrable au sens de Lebesgue, sauf peut-être à l'origine, où nous imposons la condition

$$\int_0^a r |V(r)| dr < \infty, \quad a \text{ fini.} \quad (I.2.4)$$

A l'infini, nous imposons que

$$\int_b^\infty |V(r)| dr < \infty, \quad b \text{ fini.} \quad (I.2.5)$$

Pour éviter l'existence d'une infinité d'états liés, nous imposons

aussi à l'infini

$$\int_b^{\infty} r|V(r)|dr < \infty \quad (\text{I.2.6})$$

(un potentiel régulier peut posséder des discontinuités).

Dans la suite, nous séparerons le potentiel en deux parties, une partie régulière qui sera appelée potentiel perturbatif et une partie singulière appelée potentiel de référence et qui contiendra les singularités habituelles en physique nucléaire que sont généralement le potentiel centrifuge et le potentiel de Coulomb. Dans la littérature [NEW 60], nous trouvons également la condition :

$$\int_b^{\infty} r^2|V(r)|dr < \infty. \quad (\text{I.2.7})$$

Cette condition (I.2.7) entraîne la condition (I.2.6) qui à son tour, implique la condition (I.2.5). En fait, la condition (I.2.5) est nécessaire pour pouvoir définir des déphasages $\delta_{\ell}(k)$ pour tout ℓ et tout k réel $\neq 0$ et une fonction de Jost non nulle pour tout k réel $\neq 0$. La condition (I.2.6) assure l'existence du théorème de Levinson, d'un déphasage fini en $k = 0$ et d'une section efficace totale finie. La condition (I.2.7) est une condition suffisante mais non nécessaire pour obtenir une longueur de diffusion finie et une section efficace différentielle finie vers l'avant. L'étude du problème inverse n'a de sens que si le potentiel est tel que les déphasages sont définis de façon univoque, c'est pour cette raison que nous ne considérons que des potentiels vérifiant la condition (I.2.6). Si seule la condition (I.2.5) est vérifiée et si le potentiel est singulier et répulsif à l'origine, les déphasages sont aussi bien définis et on peut également considérer un problème inverse (le théorème de Levinson n'est cependant pas vérifié dans ce cas).

La recherche des conditions à imposer au potentiel V réel et localement intégrable dans l'intérieur de $]0, \infty[$, pour définir un opérateur L auto-adjoint est simplifiée par le fait que l'équation (I.2.2) est une équation différentielle (et non pas une équation aux dérivées partielles comme l'équation (I.2.1) dont l'étude détaillée se trouve par exemple dans [REE 78], [AMR 77], [FAR 72]). Si nous appelons n_0 et n_{∞} , le nombre de solutions

linéairement indépendantes de l'équation (I.2.2) qui appartiennent à $L_2(0,a)$ et $L_2(a,\infty)$, respectivement pour $a > 0$, arbitraire et $\text{Im } k^2 > 0$, le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation (I.2.2), appartenant à $L_2(0,\infty)$ est donné par la relation [MEE 64]

$$n = n_0 + n_\infty - 2 = (0,1,2) \quad (\text{I.2.8})$$

où n est appelé l'"indice de défaut" (deficiency index) de l'équation différentielle. On peut montrer [COD 55, TIT 62] que n_0 , n_∞ et n sont indépendants de k^2 pour $\text{Im } k^2 > 0$. D'autre part, von Neumann a montré [AKH 63, STO 32] que

$$D^{**} = D \oplus_{k^2} D \oplus_{k^{**2}} D \quad (\text{I.2.9})$$

où D et D sont les sous-ensembles linéaires de $L_2(0,\infty)$ correspondant aux valeurs propres k^2 et k^{**2} . Comme $\text{dimension}(D_{k^2}) = \text{dimension}(D_{k^{**2}}) = n$, l'opérateur L sera essentiellement self-adjoint si $n = k_0^{2**}$, tandis que pour $n = 1, 2$, il faudra définir une extension auto-adjointe "distinguée". Lorsque l'équation contient le potentiel centrifuge plus un potentiel vérifiant l'équation (I.2.6) il existe deux solutions de Jost linéairement indépendantes, dont une seule $\in L_2(0,\infty)$ pour $\text{Im } k^2 > 0$, par conséquent $n_\infty = 1$. La condition (I.2.4) conduit au résultat

$$n_0 = 1 \quad \text{si } \ell \geq 1 \quad (\text{I.2.10})$$

et

$$n_0 = 2 \quad \text{si } \ell = 0. \quad (\text{I.2.11})$$

Par conséquent pour $\ell \geq 1$, $n = 1+1-2 = 0$ et l'opérateur L où V est "régulier", est essentiellement auto-adjoint. Pour $\ell = 0$, $n = 2+1-2 = 1$, l'opérateur L admet plusieurs extensions auto-adjointes; l'extension considérée est obtenue en définissant L comme l'expression (I.2.3), lorsqu'il s'applique à des fonctions g s'annulant à l'origine. Remarquons que comme $H_0 = -\Delta$ est un opérateur positif, il est logique que les conditions à imposer au potentiel pour définir un hamiltonien H auto-adjoint soient plus fortes pour la partie négative que pour la partie positive du potentiel V . Ainsi, si le potentiel est singulier répulsif, l'ha-

miltonien est auto-adjoint et il est possible de développer une théorie rigoureuse de la diffusion [GEO 74], similaire au cas régulier. Si, par contre, le potentiel est singulier mais attractif à l'origine, l'hamiltonien (I.2.1) n'est plus essentiellement auto-adjoint : une infinité d'extensions auto-adjointes non semi-bornées est possible. Le choix de l'extension auto-adjointe mathématiquement ou physiquement "distinguée" n'est pas encore bien défini. Si, par contre, le potentiel est singulier et attractif à l'infini, il n'est pas possible de développer une théorie de diffusion (une étude détaillée montrant qu'un comportement en $1/r^2$ est le comportement limite, se trouve dans [AMR 77]). Si par exemple, nous introduisons dans le potentiel de référence, le potentiel de Coulomb, en vertu du théorème de Kato-Rellich [AMR 77], l'hamiltonien H reste auto-adjoint (la condition asymptotique n'est cependant plus vérifiée). Si le potentiel de Coulomb est attractif, nous aurons une infinité d'états liés.

Dans la suite, nous utilisons pour les fonctions spéciales, les notations d'Abramowitz et Stegun [ABR 68]. Les solutions de l'équation (I.2.2) pour $V = 0$, sont notées d'un indice zéro et sont proportionnelles aux fonctions de Riccati-Bessel, $u_\ell(z)$, $v_\ell(z)$ et $h_\ell^\pm(z)$ définies par les relations habituelles :

$$u_\ell(z) = z j_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{\ell+1/2}(z) \quad (\text{I.2.12})$$

$$\underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!} \quad (\text{I.2.13})$$

$$\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sin\left(z - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad (\text{I.2.14})$$

$$v_\ell(z) = z y_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} Y_{\ell+1/2}(z) \quad (\text{I.2.15})$$

$$\underset{z \rightarrow 0}{\sim} -\frac{(2\ell-1)!!}{z^\ell} \quad (\text{I.2.16})$$

$$\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} -\cos\left(z - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad (\text{I.2.17})$$

$$h_\ell^\pm(z) = (\pm i)^{\ell+1} z h_\ell^{(1)}(z) = (\pm i)^\ell (-v_\ell \pm i u_\ell) = (\pm i)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\pi z}{2}} H_{\ell+1/2}^{(1)}(z) \quad (\text{I.2.18})$$

$$\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{\pm iz} \quad (\text{I.2.19})$$

$$\underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{(\pm i)^{\ell} (2\ell - 1)!!}{z^{\ell}}. \quad (\text{I.2.20})$$

Des bornes supérieures pour ces fonctions peuvent être trouvées dans [NEW 66]. Notre choix pour les normalisations de la solution régulière et des solutions de Jost correspond au choix de [FAD 63] et diffère du choix de [NEW 66] par des facteurs constants indépendants de k :

$$\phi_0(k, r) = \frac{u_{\ell}(k, r)}{k^{\ell+1}} \quad (\text{I.2.21})$$

$$f_0^{\pm}(k, r) = h_{\ell}^{\pm}(k, r). \quad (\text{I.2.22})$$

Les solutions régulières ϕ et irrégulières f_{\pm} de l'équation (I.2.2) possèdent respectivement les mêmes comportements asymptotiques que ϕ_0 à l'origine et f_0^{\pm} à l'infini. Ces conditions aux limites sont compatibles avec le fait que V est un potentiel régulier, c'est-à-dire, de façon plus précise : la condition

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(2\ell+1)!!}{r^{\ell+1}} \phi(k, r) = 1 \quad (\text{I.2.23})$$

est permise si la condition (I.2.4) est vérifiée et la condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\mp ikr} f_{\pm}(k, r) = 1, \quad \pm |mk| \geq 0 \quad (\text{I.2.24})$$

est autorisée si la condition (I.2.6) est satisfaite. Si nous introduisons le potentiel de Coulomb, f^{\pm} sera défini par d'autres conditions aux limites (voir chapitre V) ; les conditions pour ϕ restent dans ce cas les mêmes. (Si $\lim_{r \rightarrow 0} r^m V(r) = c > 0$, $m > 2$; alors $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} \phi(k, r) = 0 \forall n$). Les $\underset{r \rightarrow 0}{\sim}$ solutions $\phi(k, r)$ et $f^{\pm}(k, r)$ peuvent être définies comme des solutions de deux équations intégrales équivalentes à l'équation différentielle et ses conditions aux limites ; ces équations intégrales étant du type de Volterra, facilitent l'étude des propriétés analytiques en k de ces fonctions [NEW 66, CHA 78]. La fonction $\phi(k, r)$ est holomorphe en k^2 pour toute valeur finie de k , pour r fixé dans $[0, \infty)$

(théorème de Poincaré [POI 84]). La fonction $f_{\pm}(k,r)$ [$f_{\pm}(k,r)$] est continue en les variables k , r pour $r \geq 0$, $\text{Im } k \geq 0$ [$\text{Im } k \leq 0$], $k \neq 0$. Pour chaque valeur de r fixée dans $[0, \infty)$, $f_{\pm}(k,r)$ [$f_{\pm}(k,r)$] est analytique en k dans $\text{Im } k > 0$ [$\text{Im } k < 0$]. Si V est réel, $f_{\pm}(k,r)$ [$f_{\pm}(k,r)$] est réel sur le demi-axe imaginaire $\text{Im } k > 0$ [$\text{Im } k < 0$] et par conséquent, nous avons la relation

$$f_{\pm}^*(-k^*, r) = f_{\pm}(k, r) \quad (\text{I.2.25})$$

dans le domaine d'analyticité connecté au demi-axe imaginaire correspondant. Les solutions $f_{\pm}(k,r)$ forment un ensemble de deux solutions linéairement indépendantes pour $\text{Im } k = 0$, $k \neq 0$. ($\text{Wr}(f_{+}, f_{-})z - 2ik$). Nous aimerions avoir à notre disposition un ensemble de deux solutions linéairement indépendantes pour $\text{Im } k > 0$. Cependant, la condition (I.2.24) ne suffit généralement pas pour définir $f_{-}(k,r)$ comme solution de l'Eq. (I.2.2). Pour cette raison nous allons introduire une nouvelle solution $f_1(k,r)$ linéairement indépendante de $f_{+}(k,r)$ dans $\text{Im } k > 0$, telle que

$$\text{Wr}[f_{+}(k,r), f_1(k,r)] = -2ik \quad (\text{I.2.26})$$

En fait, la méthode des variations des constantes de Lagrange [COD 55] nous permet de définir la solution la plus générale de l'Eq. (I.2.2), comme la solution de l'équation intégrale :

$$g(k,r) = C_1 h_{\ell}^{+}(kr) + C_2 h_{\ell}^{-}(kr) + \frac{i}{2k} h_{\ell}^{-}(kr) \int_{r_1}^r h_{\ell}^{+}(kt) V(t) g(k,t) dt - \frac{i}{2k} h_{\ell}^{+}(kr) \int_{r_1}^r h_{\ell}^{-}(kt) V(t) g(k,t) dt \quad (\text{I.2.27})$$

où C_1 , C_2 , r_1 , r_2 sont des constantes à préciser.

Les fonctions f_{+} , f_{-} , f_1 correspondent aux choix suivants :

$$f_{+}(k,r) : C_1 = 1, C_2 = 0, r_1 = r_2 = \infty \quad (\text{I.2.28})$$

$$f_{-}(k,r) : C_1 = 0, C_2 = 1, r_1 = r_2 = \infty \quad (\text{I.2.29})$$

$$f_1(k,r) : C_1 = 0, C_2 = 1, r_1 = \infty, r_2 = a, r > a \quad (\text{I.2.30})$$

où a est une constante à préciser.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant (qui est une généralisation d'un théorème démontré par Naimark [NAI 60] pour $\ell = 0$ et qui est valable pour V complexe) :

Pour $k_0 > 0$ fixé, $|k| \geq k_0$, $\text{Im } k \geq 0$, la fonction $f_1(k, r)$ définie par les Eqs. (I.2.27) et (I.2.30) est solution de l'Eq. (I.2.2) si la constante a est choisie suffisamment grande pour que

$$\frac{1}{2k_0} \left[1 + \frac{1}{k_0 a} \right]^{2\ell} \int_a^\infty |V(t)| dt < 1 \quad (\text{I.2.31})$$

La fonction $f_1(k, r)$ peut s'écrire

$$f_1(k, r) = e^{-ikr} \frac{(1 + kr)^\ell}{(kr)^\ell} u(k, r) \quad (\text{I.2.32})$$

où $u(k, r)$ est une fonction bornée pour $a \leq r < \infty$, $|k| \geq k_0 > 0$, $\text{Im } k \geq 0$. La fonction $f_1(k, r)$ est continue en les variables r et k , pour $r \geq a$, $\text{Im } k \geq 0$, $|k| \geq k_0$ et est analytique en k dans le domaine $\text{Im } k > 0$, $|k| > k_0$, pour $r \in [0, \infty)$. Pour $|k| \geq k_0 > 0$, $\text{Im } k \geq \varepsilon > 0$, nous avons le comportement asymptotique :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_1(k, r) \sim e^{-ikr} \quad (\text{I.2.33})$$

Démonstration

La démonstration est basée sur le théorème suivant, démontré par Naimark [NAI 60].

Nous considérons l'Eq. intégrale :

$$u(k; r) = F(k, r) + \int_a^\infty K(r, t, k) u(k, t) dt$$

où $u(k, r)$ est la fonction inconnue et où $F(k, r)$ et le noyau $K(r, t, k)$ vérifient les conditions suivantes :

$$A. \quad K(r, t, k) = \begin{cases} \phi_1(r, t, k) V(t) & \text{pour } a \leq t < r \\ \phi_2(r, t, k) V(t) & \text{pour } t > r \geq a \end{cases}$$

où $V(t) \in L_1 [a, \infty)$ et où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions bornées, continues en les trois variables r, t, k , $a \leq r, t < \infty$, $k \in E$. La constante c est telle que

$$c \int_a^\infty |V(t)| dt < 1$$

où

$$c = \max \{ \text{Sup } |\phi_1(r, t, k)|, \text{Sup } |\phi_2(r, t, k)| \}$$

La fonction $F(k, r)$ est continue et bornée pour $a \leq r < \infty$ et $k \in E$.

B. E est un espace ouvert du plan complexe k . Pour r, t fixés dans $[a, \infty)$, $F(k, r)$, $\phi_1(r, t, k)$, $\phi_2(r, t, k)$ sont holomorphes en k dans E .

Naimark a démontré que les conditions A) entraînent l'existence d'une solution $u(k, r)$ continue et bornée pour $a \leq r < \infty$, $k \in E$ et que les conditions B) assurent que la fonction $u(k, r)$ est holomorphe en k dans E pour tout x fixé dans l'intervalle $[a, \infty)$.

Comme la fonction de Ricatti-Hankel h_ℓ^\pm vérifie l'inégalité

$$|h_\ell^\pm(k, r)| \leq D e^{\mp \nu r} \frac{[1 + kr]^\ell}{(kr)^\ell} \quad \text{où } \nu = \text{Im } k \quad (\text{I.2.34})$$

et si nous posons

$$f_1(k, r) = e^{-ikr} \frac{(1 + kr)^\ell}{(kr)^\ell} u(k, r),$$

l'équation intégrale (I.2.27) peut s'écrire :

$$u(k, r) = h_\ell^-(kr) e^{ikr} (kr)^\ell / (1 + kr)^\ell - \frac{i}{2k} \int_a^r dt \frac{h_\ell^+(kr) e^{ikr} (kr)^\ell}{[1 + kr]^\ell} \frac{h_\ell^-(kt) e^{-ikt} (1+kt)^\ell}{(kt)^\ell} V(t) u(k, t) - \frac{i}{2k} \int_r^\infty dt \frac{h_\ell^-(kr) e^{ikr} (kr)^\ell}{[1 + kr]^\ell} \frac{h_\ell^+(kt) e^{-ikt} [1+kt]^\ell}{(kt)^\ell} V(t) u(k, t) \quad (\text{I.2.35})$$

Les fonctions F , ϕ_1 , ϕ_2 correspondantes possèdent les bornes suivantes :

$$|F(k,t)| \leq D \frac{(|k|r)^\ell e^{-vr}}{[1 + |k|r]^\ell} \frac{e^{vr} [1 + |k|r]^\ell}{(|k|r)^\ell} \leq D \quad (\text{I.2.36})$$

$$\begin{aligned} |\phi_1(r,t,k)| &\leq \frac{D^2}{2|k_0|} e^{2v(t-r)} \left[1 + \frac{1}{|k|t}\right]^{2\ell} \\ &\leq \frac{D^2}{2|k_0|} \left[1 + \frac{1}{|k_0|a}\right]^{2\ell} \end{aligned} \quad (\text{I.2.37})$$

$$|\phi_2(r,t,k)| \leq \frac{D^2}{2|k_0|} \left[1 + \frac{1}{|k_0|a}\right]^{2\ell} \quad (\text{I.2.38})$$

Par conséquent, conformément au théorème de Naimark, la constante a doit être choisie de façon telle que

$$\frac{1}{2k_0} \left[1 + \frac{1}{k_0 a}\right]^{2\ell} \int_a^\infty V(t) dt < 1 \quad (\text{I.2.39})$$

On vérifie aisément que les conditions du théorème sont vérifiées. Il nous reste à vérifier le comportement asymptotique de $f_1(k,r)$ pour $r \rightarrow \infty$. Nous devons démontrer que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(k,r) = 1 \quad (\text{I.2.40})$$

pour $|k| > k_0$, $\text{Im } k \geq \varepsilon > 0$.

Nous avons démontré que $u(k,r)$ est borné :

$$u(k,r) < C \quad ; \quad (\text{I.2.41})$$

par conséquent, l'équation intégrale (I.2.35) conduit à l'Eq. (I.2.40), car

$$\begin{aligned}
 & \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2k} \int_a^r dt \frac{h_{\ell}^+(kr) e^{ikr} (kr)^{\ell}}{[1+kr]^{\ell}} \frac{h_{\ell}^-(k,t) e^{-ikt} [1+kt]^{\ell}}{[kt]^{\ell}} V(t) u(k,t) \right. \\
 & \leq \frac{CD^2}{2|k_0|} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r [1 + \frac{1}{|k|t}]^{2\ell} e^{-2\nu(r-t)} |V(t)| dt \\
 & \leq \frac{CD^2}{2k_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^{r/2} e^{-2\varepsilon(r-t)} [1 + \frac{1}{k_0 t}]^{2\ell} |V(t)| dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{r/2}^r e^{-2\varepsilon(r-t)} [1 + \frac{1}{k_0 t}]^{2\ell} |V(t)| dt \right\} \\
 & \leq \frac{CD^2}{2k_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\varepsilon r} \int_a^{\infty} [1 + \frac{1}{k_0 t}]^{2\ell} |V(t)| dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{r/2}^r [1 + \frac{1}{k_0 t}]^{2\ell} |V(t)| dt \right\} = 0 \tag{I.2.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2k} \int_r^{\infty} dt \frac{h_{\ell}^-(kr) e^{ikr} (kr)^{\ell}}{(1+kr)^{\ell}} \frac{h_{\ell}^+(kt) e^{-ikt} (1+kt)^{\ell}}{(kt)^{\ell}} V(t) u(k,t) \right. \\
 & \leq \frac{CD^2}{2k_0} \lim_{r \rightarrow \infty} [1 + \frac{1}{k_0 a}]^{2\ell} \int_r^{\infty} |V(t)| dt = 0 \tag{I.2.43}
 \end{aligned}$$

La fonction $f_1(k,r)$ n'est définie que pour $r \geq a$, cependant nous pouvons considérer qu'elle est connue dans $[0, \infty)$; il suffit pour cela de la prolonger dans l'intervalle $[0, a]$ en imposant qu'elle est solution de l'équation différentielle (I.2.2). Pour $k = 0$, les fonctions $f_+(k,r)$ et $f_-(k,r)$ sont identiques. Il faut définir une seconde solution $\tilde{f}(r)$ linéairement indépendante qui est définie comme la solution de l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r) &= r^{\ell+1} - \frac{r^{\ell+1}}{(2\ell+1)} \int_r^\infty t^{-\ell} v(t) \tilde{f}_1(t) dt \\ &\quad - \frac{r^{-\ell}}{(2\ell+1)} \int_a^r t^{\ell+1} v(t) \tilde{f}_1(t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.2.44})$$

Si nous posons $\tilde{f}_1(r) = r^{\ell+1} u(r)$, nous allons montrer que la solution existe et que $u(r)$ est bornée et continue si a est choisi de façon telle que

$$\frac{1}{2\ell+1} \int_a^\infty t |v(t)| dt < 1 \quad (\text{I.2.45})$$

Démonstration

En effet, il suffit d'appliquer le théorème de Naimark à l'équation intégrale pour u :

$$\begin{aligned} u(r) &= 1 - \frac{1}{(2\ell+1)} \int_r^\infty t v(t) u(t) dt \\ &\quad - \frac{r^{-2\ell-1}}{(2\ell+1)} \int_a^r t^{2\ell+1} v(t) u(t) dt \end{aligned}$$

Comme $t v(t) \in L_1(a, \infty)$,

$$\begin{aligned} c &= \max \left\{ \sup \frac{1}{2\ell+1}, \sup \frac{t^{2\ell+1}}{r^{2\ell+1}} \frac{1}{2\ell+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2\ell+1} \end{aligned}$$

et par conséquent le théorème est démontré.

La condition (I.2.6) assure l'existence des déphasages $\delta_\ell(k)$ définis par le comportement asymptotique de la solution régulière :

$$\phi(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|f(k)|}{k^{\ell+1}} \sin \left[kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell}(k) \right]$$

où k est réel et où $f(k)$ est la fonction de Jost définie au paragraphe suivant.

§ 3. FONCTION DE JOST, FONCTION D'ONDE PHYSIQUE, RELATION DE COMPLETUDE ET DONNEES DE LA DIFFUSION

Si le potentiel V décroît suffisamment rapidement vers zéro à l'infini (comme un potentiel régulier, par exemple), il n'y a pas d'états liés dans le continu et les deux solutions de Jost $f_{\pm}(k, r)$ sont linéairement indépendantes pour tout k réel $\neq 0$. La solution régulière peut alors s'écrire pour $\text{Im } k = 0$ et $f(k, r) = f_{+}(k, r)$:

$$\phi(k, r) = \frac{1}{2ik} [f(k, r) W(-k) - f(-k, r) W(k)] \quad (\text{I.3.1})$$

$$= \frac{1}{2ik} \left(\frac{1}{ik}\right)^{\ell} [f(k, r) f(-k) - (-)^{\ell} f(-k, r) f(k)] \quad (\text{I.3.2})$$

où $f(k)$ est la fonction de Jost définie par la relation :

$$f(k) = \frac{W(k)}{W_0(k)} = \left(\frac{k}{i}\right)^{\ell} \text{Wr} [f(k, r), \phi(k, r)] \quad (\text{I.3.3})$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(kr)^{\ell}}{i^{\ell} (2\ell-1)!!} f(k, r) \quad (\text{I.3.4})$$

$$(W(k) = \text{Wr} [f(k, r), \phi(k, r)])$$

Des relations équivalentes aux Eqs. (I.3.1), (I.3.2), (I.3.3), peuvent également être écrites pour $\text{Im } k > 0$, si nous remplaçons $f(-k, r)$ et $f(-k)$ par $f_1(k, r)$ et

$$f_1(k) = \text{Wr} [f_1(k, r), \phi(k, r)] (ik)^{\ell} \quad (\text{I.3.5})$$

Dans $\text{Im } k \geq 0$,

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} f(k) = 1 \quad (\text{I.3.6})$$

La fonction de Jost $f(k)$ est analytique dans le demi-plan supérieur ; la fonction $\dot{f}(k)$ est continue dans le demi-plan supérieur $\text{Im } k \geq 0$ sauf peut être en $k = 0$, tandis que $k f(k)$ est continue partout dans $\text{Im } k \geq 0$. Les zéros de $f(k)$ dans $\text{Im } k \geq 0$ correspondent aux états liés ; si le potentiel est réel, ces zéros sont simples et se trouvent sur l'axe imaginaire positif. Dans le demi-plan inférieur $\text{Im } k < 0$, la fonction de Jost peut posséder des singularités (points de branchement ou pôles) ; lorsque le potentiel est réel ces singularités se trouvent sur le demi-axe imaginaire négatif [TAY 72]. Nous pensons que nous ne pouvons pas attacher une signification physique à ces singularités, car celles-ci disparaissent si nous annulons le potentiel à une distance suffisamment grande pour ne pas entraîner d'effet physique.

Les fonctions régulières forment un ensemble complet :

$$\sum_{i=1}^n C_i \phi_i(x) \phi_i(y) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(k,x) \frac{1}{f(k)} \frac{1}{f(-k)} \phi(k,y) k^{2(\ell+1)} dk = \delta(x-y) \quad (\text{I.3.7})$$

où

$$\phi_i(x) = \phi(k_i, x) \quad (\text{I.3.8})$$

$$k_i = i \kappa_i \quad (\kappa_i \geq 0) \quad \text{est un zéro de } f(k) \quad (\text{I.3.9})$$

$$\begin{aligned} C_i^{-1} &= \int_0^{\infty} [\phi(k_i, x)]^2 dx \\ &= - \frac{\dot{f}(k_i) i^{\ell}}{2 k_i^{\ell+1} (2\ell+1)!!} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(k_i, x)^{-1}}{x^{\ell+1}} \right] \\ &= - \frac{\dot{f}(k_i) \cdot f_1(k_i)}{4i k_i^{2\ell+2}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.10})$$

car

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(k_i, x)}{x^{\ell+1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(k_i, x)}{(\ell+1)x^\ell} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi'(k_i, x) 2(ik)^{\ell+1}}{(\ell+1)x^\ell f_1(k_i)} \\ &= \frac{2(ik)^{\ell+1}}{(2\ell+1)!! f_1(k_i)} \end{aligned} \quad (\text{I.3.11})$$

Si $-k_i = -i\kappa_i$ appartient au domaine d'analyticité de $f(k)$ connecté à l'axe réel (si par exemple $V(r)$ est de portée finie ou à décroissance exponentielle $e^{-\alpha x}$ avec $\alpha > 2\kappa_i$), alors nous obtenons

$$C_i^{-1} = - \frac{\dot{f}(k_i) f(\dot{k}_i)}{4 i k_i^{(2\ell+2)}} \quad (\text{I.3.12})$$

L'équation (I.3.7) peut se mettre sous la forme d'une intégrale de Stieltjes :

$$\int d\rho(E) \phi(k, x) \phi(k, y) = \delta(x-y) \quad (\text{I.3.13})$$

où la fonction spectrale $\rho(E)$ est définie par les relations :

$$\rho(-\infty) = 0 \quad (\text{I.3.14})$$

$$\frac{d\rho(E)}{dE} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{k^{2\ell+1}}{|f(k)|^2} & E > 0 \\ \sum_{j=1}^n C_j \delta(E - E_j) & E \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I.3.15})$$

$$(\text{I.3.16})$$

Les fonctions d'onde physiques $\psi(k, x)$ et $\psi_i(x)$ sont définies de façon à pouvoir écrire la relation de complétude :

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(x) \psi_i(y) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(k,x) \psi^*(k,y) k^2 dk = \delta(x-y) \quad (\text{I.3.17})$$

où

$$\psi(k,x) = \frac{\phi(k,x)}{f(k)} (ik)^\ell \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2ik} [(-)^{\ell+1} e^{-ikx} + S(k) e^{ikx}] \quad (\text{I.3.18})$$

$$S(k) = \frac{f(-k)}{f(k)} = (-)^{\ell} \frac{W(-k)}{W(k)} \quad (\text{I.3.19})$$

$$= e^{2i\delta} \quad (\text{I.3.20})$$

$$\psi_i(x) = \phi(k_i,x) \sqrt{C_i} = \frac{1}{i^{\ell+1}} \sqrt{\frac{f_1(k_i)}{i f(k_i)}} f(k_i,x) \quad (\text{I.3.21})$$

$$= N_i f(k_i,x) \quad (\text{I.3.22})$$

$$\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} N_i e^{-K_i x} \quad (k_i = iK_i) \quad (\text{I.3.23})$$

La signification exacte de la relation (I.3.13) est précisée par le théorème suivant :

A toute fonction $g(x) \in L^2(0,\infty)$, s'annulant à l'origine, nous pouvons associer une transformée de "Fourier-Schrödinger" définie par les relations :

$$G(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(x) \psi(k,x) dx \quad (\text{I.3.24})$$

$$G_i = \int_0^{\infty} f(x) \psi_i(x) dx \quad (\text{I.3.25})$$

Il existe une transformée inverse qui donne

$$f(y) = \sum_i \psi_i^*(y) G_i + \int_0^{\infty} \psi^*(k,y) G(k) k^2 dk \quad (\text{I.3.26})$$

Lorsque $V = 0$, la transformée se ramène à la transformée de Fourier-sinus ($\ell = 0$) ou à la transformée de Hankel ($\ell \neq 0$).

La théorie des fonctions généralisées (distributions) a permis d'étendre la notion de transformée de Fourier à des fonctions $\in L_2^{loc}[0, \infty)$ ($\notin L_2[0, \infty)$). Une extension, cependant moins large est aussi possible pour la transformée de "Fourier-Schrödinger" pour des fonctions $L_2^{loc}[0, \infty)$ de type exponentiel bien défini à l'infini.

Si $-k_i = -i|k_i|$ appartient au domaine d'analyticité connexe à l'axe réel de la fonction de Jost, la seule connaissance des propriétés analytiques des fonctions $\psi(k, x)$ du continu permet de déterminer la fonction propre $\psi_i(x)$ correspondant à l'état lié k_i . En effet, les états liés sont des pôles simples de la fonction $\psi(k, x)$ et le résidu est proportionnel à la fonction d'onde de l'état lié :

$$i \left[\text{Rés}_{k=k_i} \psi(k, x) \right] = i \phi(k_i, x) \frac{(ik_i)^\ell}{f(k_i)} \quad (\text{I.3.26})$$

$$= \frac{\text{Rés}_{k=k_i} [S(k)] f(k_i, r)}{2 ik_i} \quad (\text{I.3.27})$$

Nous obtenons aussi la relation :

$$N_i^2 = (-)^\ell i \text{Res}_{k=k_i} [S(k)] = C_i \frac{(-)^{\ell+1} [f_r^{(1)}(k_i)]^2}{4 k_i^{2\ell+2}} \quad (\text{I.3.28})$$

Les constantes de normalisation C_i ou N_i forment avec les déphasages et les états liés ce que nous appelons les données de la diffusion ("Scattering data") ; celles-ci permettent de retrouver le potentiel par une généralisation de la méthode de Gel'fand (C_i) ou de la méthode de Marchenko (N_i).

Dans la suite, nous ne ferons aucune hypothèse concernant l'analyticité de la fonction de Jost $f(k)$ dans le demi-plan inférieur ; dans ces conditions, les états liés correspondent uniquement aux zéros de la fonction $f(k)$ dans $\text{Im } k > 0$, mais il n'y a pas nécessairement une correspondance biunivoque entre les états liés et les pôles de la fonction $S(k)$ comme on le suppose parfois.

Les pôles de $S(k)$ peuvent être dus à des pôles de $f(-k)$ et l'effet d'un zéro de $f(k)$ sur la matrice $S(k)$ pourrait être effacé si $f(-k)$ s'annule pour la même valeur de k .

§ 4. OPERATEUR DIFFERENTIEL DU SECOND ORDRE NON SELF-ADJOINT

Dans de nombreuses descriptions phénoménologiques de processus de collision, des potentiels complexes sont introduits dans l'équation de Schrödinger pour simuler la disparition (ou la création) de particules dans la voie initiale. Cette description est utilisée en physique nucléaire dans le modèle optique par exemple ; elle apparaît aussi en physique des particules élémentaires pour décrire les processus d'absorption vraie ou d'annihilation ($\pi-N$; $N-\bar{N}$). Lorsque le potentiel est complexe, l'opérateur associé à l'expression différentielle (I.2.1) n'est plus auto-adjoint. Nous sortons du cadre des opérateurs auto-adjoints généralement étudiés et la recherche dans ce domaine n'est que fragmentaire. Il n'est d'ailleurs pas du tout certain que nous puissions développer en terme de fonctions propres de façon aussi systématique que l'a fait Titchmarsh [TIT 62] dans le cas d'un potentiel réel. Peierls [PEI 48] a le premier considéré un problème de Sturm-Liouville non self-adjoint et a montré que l'ensemble des fonctions propres ne forment pas nécessairement un ensemble complet. Dans le cas de Sturm-Liouville (ou cas régulier) le problème est à présent résolu. Dans le cas singulier c'est-à-dire lorsque l'intervalle devient infini ou lorsque le potentiel est discontinu à une des extrémités, le problème est plus compliqué. Nous considérons le cas singulier suivant :

$$\ell[y] = -y'' + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + V(x) \right] y \quad (\text{I.4.1})$$

dans l'intervalle $[0, \infty)$.

Une étude détaillée a été faite par Naimark [NAI 60] et Lyantze [LYA 67] dans le cas $\ell = 0$. Nous généralisons leurs principaux résultats au cas $\ell \neq 0$. Nous supposons que le module du potentiel

satisfait les mêmes conditions que celles introduites au paragraphe 2. Les propriétés analytiques et les comportements asymptotiques obtenus pour les fonctions $\phi(k,x)$, $f_{\pm}(k,x)$, $f_1(k,x)$ et $f(x)$ sont indépendantes du fait que le potentiel est complexe.

Nous étudions à présent le spectre de l'opérateur L associé à l'expression différentielle \mathfrak{L} et défini sur le domaine D_L

$$D_L = \{f : f \in L_2(0,\infty), f \in C_1^{loc}(]0,\infty[), \mathfrak{L}(f) \in L^2(0,\infty) \text{ et}$$

$$f(0) = 0 \text{ si } \mathfrak{L} = 0 \text{ (Pour } \mathfrak{L} \neq 0 \text{, cette dernière condition est vérifiée d'office)}\}$$

A. L'opérateur L ne possède pas de valeur propre positive. Grâce aux hypothèses faites sur le potentiel, les fonctions $f_{\pm}(k,x)$ existent et sont linéairement indépendantes pour tout k réel $\neq 0$. Dans ce cas, toute solution s'écrit :

$$f(k,x) = C_1 f_+(k,x) + C_2 f_-(k,x) \quad ,$$

et il n'existe pas de valeurs C_1 , C_2 telles que $f(k,x) \in L_2(0,\infty)$ pour $k^2 > 0$. Comme dans le cas V réel, $k^2 = 0$, peut être un état lié pour $\mathfrak{L} \neq 0$, mais pas pour $\mathfrak{L} = 0$.

B. La condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda = k^2 \neq 0$ soit une valeur propre est que : $\text{Im } k > 0$, $f_+(k) = 0$. La démonstration est basée sur le fait que f_+ et f_1 sont linéairement indépendantes dans $\text{Im } k > 0$, $k \neq 0$. La solution régulière qui est la seule solution linéairement indépendante s'annulant à l'origine, s'écrit pour $\text{Im } k > 0$, $k \geq k_0 > 0$:

$$\phi(k,r) = \frac{1}{2ik} \frac{1}{(ik)^{\mathfrak{L}}} [(-)^{\mathfrak{L}+1} f_+(k) f_1(k,r) + f_1(k) f_+(k,r)] \quad (\text{I.4.2})$$

Comme seul $f_+(k,r)$ est de carré sommable dans $\text{Im } k > 0$, il faut et il suffit que $f_+(k) = 0$.

C. L'ensemble des valeurs propres est borné et dénombrable. Ses seuls points d'accumulation doivent se trouver sur l'axe réel $\text{Im } k = 0$.

La fonction de Jost $f_+(k)$ étant analytique dans le domaine ouvert $\text{Im } k > 0$, ses zéros sont dénombrables et ne peuvent avoir des points d'accumulation que sur la frontière du domaine. Pour $\text{Im } k \geq 0$ et $|k| \rightarrow \infty$ $f_+(k) \rightarrow 1$, les points d'accumulation ne peuvent donc se trouver que sur l'axe réel. Comme $f_+(k)$ est continue sur l'axe réel, les points d'accumulation sont des zéros de $f_+(k)$ sur $\text{Im } k = 0$.

D. Toutes les valeurs de k^2 sont telles que $\text{Im } k > 0$ et $f_+(k) \neq 0$ appartiennent à l'ensemble résolvant de L .
La résolvante R_{k^2} s'écrit :

$$R_{k^2} f = \int_0^\infty G(k^2, x, y) f(y) dy \quad (\text{I.4.3})$$

où

$$G(k^2, x, y) = \frac{\phi(k, r_<) f_+(k, r_>)}{W(k)} \quad (\text{I.4.4})$$

L'opérateur R_{k^2} est tel que

$$\mathcal{L}(R_{k^2} f) = f \quad (\text{I.4.5})$$

$$(R_{k^2} f)(0) = 0 \quad (\text{I.4.6})$$

D'autre part, à partir des bornes habituelles de ϕ et f_+ on montre comme dans le cas réel que $\|R_{k^2}\|$ est borné si $\text{Im } k > 0$. Pour $\text{Im } k = 0$, l'opérateur n'est plus borné. Par conséquent nous avons la proposition E.

E. Le demi-axe réel $k^2 \geq 0$ appartient au spectre de L . D'autre part, nous avons montré que $k^2 > 0$ ne peut être une valeur propre de L . On peut montrer de façon similaire que $k^2 > 0$ ne peut être une valeur propre de L^* , par conséquent, tout $k^2 > 0$ ne peut pas appartenir au spectre résiduel, d'où la proposition F.

F. Le demi-axe $k^2 > 0$ appartient au spectre continu de L . Il n'y a d'ailleurs pas de spectre résiduel, même pour $\text{Im } k^2 \neq 0$, car si

$$L^* y = \lambda^* y$$

on a aussi

$$L y^* = \lambda y^*$$

avec $y^* \in L_2(0, \infty)$ si $y \in L_2(0, \infty)$

et λ appartient alors au spectre ponctuel.

Dans le cas d'un potentiel complexe, les valeurs propres sont distribuées de façon quelconque dans $\text{Im } k > 0$, elles ne sont plus nécessairement en nombre fini; leur multiplicité est finie, mais pas nécessairement simple. D'autre part, la fonction de Jost $f_+(k)$ peut avoir des zéros réels. Cependant si $f(k_s) = 0$ pour $\text{Im } k_s = 0$, $k_s \neq 0$, $f(-k_s) \neq 0$ car les fonctions $f(\pm k_s, x)$ sont deux fonctions linéairement indépendantes pour $\text{Im } k = 0$, $k \neq 0$. Ces zéros qui ne peuvent exister dans le cas V réel à cause de la relation $f^*(-k) = f(k)$ pour k réel, s'appellent "singularités spectrales". Elles correspondent au fait que pour certaines valeurs positives de l'énergie, k_s^2 , l'équation intégrale homogène de la diffusion peut avoir des solutions non triviales, qui d'ailleurs ne sont pas de carré sommable. Si $k_s < 0$, la solution régulière à l'origine se comporte à l'infini comme $e^{-i|k_s|r}$ c'est-à-dire comme une onde purement entrante. Par conséquent, pour cette valeur précise de l'énergie et pour le moment angulaire considéré, le potentiel complexe se comporte comme une sphère noire. (Nous obtenons la situation opposée si $k_s > 0$). Pour ces valeurs de l'énergie qui correspondent à $k_s < 0$ [$k_s > 0$] le paramètre d'inélasticité η_ℓ a un minimum [maximum] qui est nul [infini] et la partie réelle du déphasage a une discontinuité de $\frac{\pi}{2}$. Nous essayons à présent de donner une signification physique aux valeurs propres. A partir de l'équation de Schrödinger, il est aisé d'obtenir la probabilité de courant radial j_r sous la forme

$$\lim_{R \rightarrow \infty} j_r = \frac{i}{2} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{r=R \rightarrow \infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Re } k_0}{2} \exp [-2 \text{Im } k_0 R] \quad (\text{I.4.7})$$

Le courant est nul à l'infini (c'est donc bien un état lié), mais à distance finie il dépend du signe de $\text{Re } k_0$. La densité de probabilité est donnée par l'expression

$$\rho(t) = |\psi(t)|^2 \sim \exp [-\Gamma t] \quad (\text{I.4.8})$$

$$\text{où} \quad \Gamma = -2 \text{Re } k_0 \text{Im } k_0 \quad (\text{I.4.9})$$

et nous avons également l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = \text{Im } V \rho(t) \quad (\text{I.4.10})$$

Dans le second quadrant ($\text{Re } k_0 < 0$, $\text{Im } k_0 > 0$) la probabilité de courant radial à distance finie est négative et la densité décroît avec le temps : ce sont des états métastables du système lorsqu'il y a processus stationnaire d'absorption. Le système reste à distance finie, mais il y a disparition de particules. Par contre, les états correspondant à $\text{Re } k_0 > 0$, $\text{Im } k_0 > 0$ sont des états métastables du système lorsqu'il y a un processus de création stationnaire de particules, qui restent confinées à distance finie. Si le signe de $\text{Im } V$ est bien défini, à partir de la relation

$$2i \int_0^\infty \text{Im } V |y|^2 = 2i \text{Im } k^2 \int_0^\infty |y|^2 dx \quad (\text{I.4.11})$$

nous constatons que $\text{Im } k^2 \geq 0$ [≤ 0] si $\text{Im } V(x) \geq 0$ [≤ 0] pour $\forall x$. D'autre part, l'existence d'une seule valeur propre k^2 réelle < 0 entraîne

$$2i \int_0^\infty \text{Im } V |y|^2 = 0 \quad .$$

Si nous supposons que $\text{Im } V$ a un signe constant pour $\forall x$, comme $|y|^2$ est non nul presque partout, $\text{Im } V$ est nul presque partout, l'opérateur L est alors auto-adjoint et toutes les valeurs propres sont alors réelles. Par conséquent, si $\text{Im } V > 0$ [$\text{Im } V < 0$],

toutes les valeurs propres sont dans $\text{Im } k^2 > 0$ $\text{Im } k^2 < 0$.
 Par ailleurs, de la relation

$$\text{Wr} \left[f_+^*(k_s, r), f_+(k_s, r) \right]_{r=R} = 2i \int_0^R \text{Im } V |f_+|^2 \quad (\text{I.4.12})$$

nous obtenons pour R assez grand que les singularités spectrales sont telles que :

$$k_s = \int_0^\infty \text{Im } V |f_+(k_s, t)|^2 dt \quad (\text{I.4.13})$$

$$\geq 0 \quad [\leq 0] \quad \text{si} \quad \text{Im } V \geq 0 \quad [\leq 0]$$

Par conséquent un potentiel complexe pour lequel il existe une valeur propre réelle doit être "absorptif" à certains endroits et "créatif" en d'autres endroits. Le potentiel local équivalent à un potentiel du modèle optique, pour des énergies négatives est de ce type ; celui-ci correspond à la réduction à une voie d'un hamiltonien hermitien à voies couplées et doit reproduire toutes les valeurs propres de l'hamiltonien de départ. Le potentiel local équivalent au potentiel du modèle optique, pour des énergies positives, est plutôt absorptif ; ceci correspond au fait que le système peut se trouver dans des états qui ne sont pas décrits par l'équation à une voie.

Nous considérons à présent le problème du développement en fonctions propres de l'opérateur L . Nous utiliserons une méthode semblable à celle utilisée par R.G. Newton [NEW 66] dans le cas d'un opérateur self-adjoint. Nous faisons cependant l'hypothèse que les valeurs propres sont en nombre fini. Elle est justifiée si

$$\int_{\mathcal{X}}^\infty e^{-\epsilon x} V(x) dx < \infty$$

dans ce cas la fonction de Jost est analytique dans $\text{Im } k > \frac{-\epsilon}{2}$ et possède un nombre fini de zéros dans $\text{Im } k \geq 0$. Une autre possibilité est de supposer que le potentiel est analytique dans la région $|\arg x| < \sigma$ et est tel que le potentiel $V_\phi(x) = e^{2i\phi} V(xe^{i\phi})$ possède des moments d'ordre un et deux, alors la fonction de Jost est analytique dans $-\sigma < \arg k < \sigma + \pi$. Les zéros de $f(k)$ dans $\text{Im } k \geq 0$, sont à nouveau en nombre fini. Il peut paraître étrange

qu'il faille imposer des conditions aussi fortes sur un potentiel complexe pour assurer un spectre discret fini, alors que pour un potentiel réel il suffit qu'il ait un moment d'ordre un à l'infini. La condition la moins forte trouvée jusqu'à présent a été obtenue par Pavlov [PAV 67]. Il a montré que si $|V(x)| < C e^{-\varepsilon\sqrt{x}}$ ($\varepsilon > 0$) le spectre discret est fini ; par contre il existe des contre-exemples V qui vérifient la condition moins forte :

$$|V(x)| < C e^{-\varepsilon x^\alpha} \quad \text{où} \quad \alpha < \frac{1}{2},$$

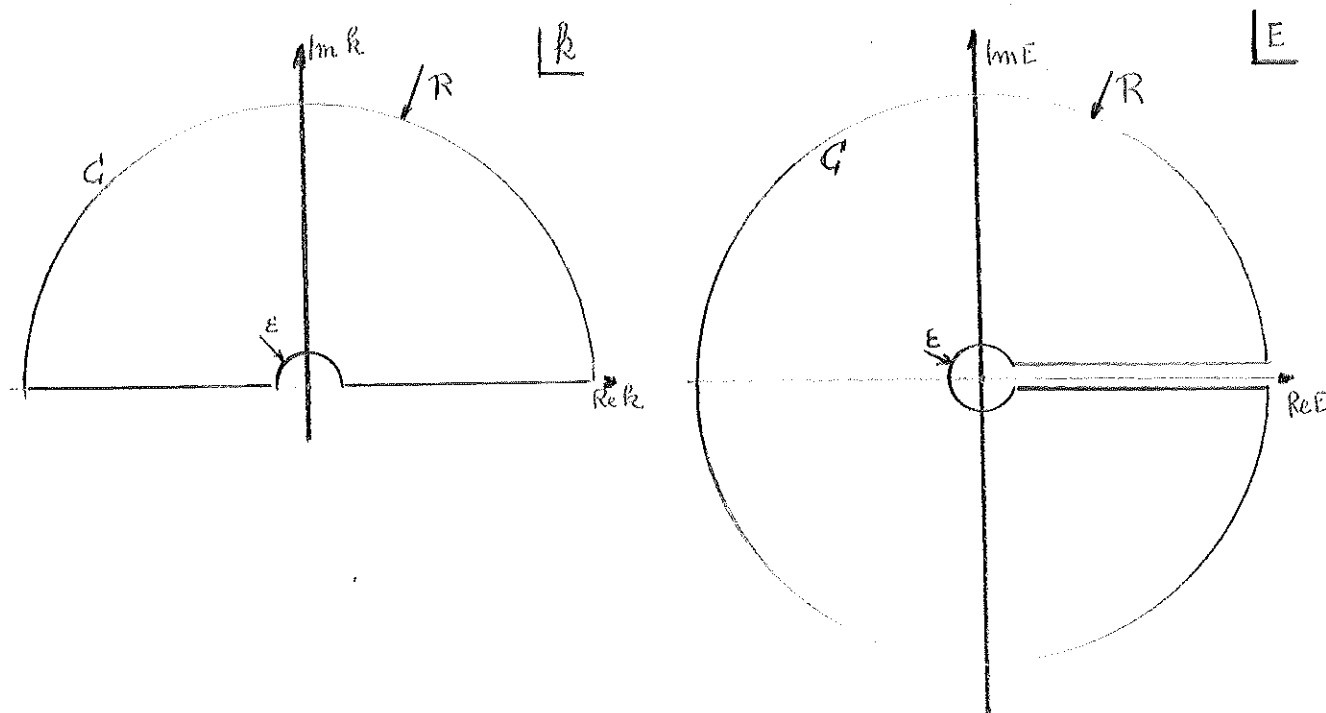
et pour lesquels le spectre discret est infini. (Ce résultat est démontré à la fois pour l'espace à une dimension et l'espace de dimension 3).

Dans une première étape, nous supposons qu'il n'y a pas de singularités spectrales. La méthode habituelle consiste à effectuer l'intégrale suivante

$$I(r) = \int_C k dk \int_0^\infty dr' h(r') G(k,r,r') \quad (I.4.14)$$

$$= \int_C dk \phi(k,r) \quad (I.4.15)$$

où $h(r) \in L_2(0,\infty)$ et où C est le contour représenté sur les figures ci-dessous :



L'intégrale se décompose en deux parties :

$$I(r) = I_1(r) + I_2(r) \quad (I.4.16)$$

$$I_1(r) = \int_C dk k \int_0^r dr' h(r') \frac{\phi(k, r') f(k, r)}{W(k)} \quad (I.4.17)$$

$$I_2(r) = \int_C dk k \int_r^\infty dr' h(r') \frac{f(k, r') \phi(k, r)}{W(k)} \quad (I.4.18)$$

Comme $\phi(k, r)$ et $f(k, r)$ sont des fonctions analytiques dans $\text{Im } k > 0$ et comme $\phi \in L_2(0, a)$ et $f_+(k, r) \in L_2(a, \infty)$ pour $\text{Im } k > 0$, l'intégrant $\Phi(k, r)$ est une fonction méromorphe dans $\text{Im } k > 0$, dont les pôles correspondent aux zéros de $f(k)$. Nous supposons que R est suffisamment grand de façon à ce que toutes les valeurs propres se trouvent à l'intérieur du demi-cercle de rayon R .

$$\int_C dk \Phi(k, r) = \sum_{i=1}^{n_b} \text{Résidus } \Phi(k, r) \Big|_{k=k_i}$$

(n_b est le nombre d'états liés).

Le zéro k_i est supposé d'ordre m_i

$$\text{Résidu } \Phi(k, r) \Big|_{k=k_i} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i - 1}}{dk^{m_i - 1}} [(k - k_i)^{m_i} \Phi(k, r)] \Big|_{k=k_i} \quad (I.4.19)$$

$$= \sum_{s=0}^{m_i - 1} A_s(k_i) \left\{ \left(\frac{d}{dk} \right)^s [f_+(k, r) \int_0^r h(r') \phi(k, r') dr' + \phi(k, r) \int_r^\infty h(r') f_+(k, r') dr'] \right\} \Big|_{k=k_i} \quad (I.4.20)$$

où

$$A_s(k_i) = \frac{1}{s! (m_i - 1 - s)!} \left(\frac{d}{dk} \right)^{m_i - 1 - s} \left[\frac{(k - k_i)^{m_i}}{W(k)} \right] \Big|_{k=k_i} \quad (I.4.21)$$

Comme

$$\phi(k, r) = \frac{1}{2ik} [f_+(k, r) W_1(+k) - f_-(k, r) W_+(k)] \quad (\text{I.4.22})$$

et que

$$\left[\left(\frac{d}{dk} \right)^s W_+(k) \right]_{k=k_i} = 0 \quad \text{pour } s = 0, \dots, m_i - 1 \quad (\text{I.4.23})$$

nous déduisons que

$$\left[\left(\frac{d}{dk} \right)^s \phi(k, r) \right]_{k=k_i} = \left(\frac{d}{dk} \right)^s \left[\frac{W_1(k)}{2ik} f_+(k, r) \right]_{k=k_i} \quad (\text{I.4.24})$$

et

$$\left[\left(\frac{d}{dk} \right)^s f_+(k, r) \right]_{k=k_i} = \left(\frac{d}{dk} \right)^s \left[\frac{2ik}{W_1(k)} \phi(k, r) \right]_{k=k_i} \quad (\text{I.4.25})$$

(s = 0, \dots, m_i - 1)

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Résidu } \phi(k, r) \Big|_{k=k_i} &= \frac{1}{(m_i - 1)!} \left(\frac{d}{dk} \right)^{m_i - 1} \left[\frac{(k - k_i)^{m_i} 2ik}{W(k) W_1(k)} \right. \\ &\quad \left. \phi(k, r) \int_0^\infty h(r') \phi(k, r') dr' \right]_{k=k_i} \quad (\text{I.4.26}) \end{aligned}$$

Nous voyons que non seulement les fonctions propres interviendront dans la relation de complétude mais aussi certaines dérivées par rapport à k de ces fonctions propres ; ces fonctions sont appelées fonctions adjointes.

Nous évaluons quelques dérivées de la fonction de Jost en vue d'obtenir une expression analytique pour certains résidus. Nous considérons un point k_0 tel que $W(k_0) = 0$. Posant

$$R(k) = \frac{W_1(k)}{2ik} \quad (\text{I.4.27})$$

et

$$R_-(k) = \frac{-W_+(k)}{2ik} \quad (\text{I.4.28})$$

nous obtenons

$$\phi(k_0, r) = R(k_0) f_+(k_0, r) \quad (\text{I.4.29})$$

et

$$\dot{\phi}(k_0, r) = R(k_0) \dot{f}_+(k_0, r) + \dot{R}(k_0) f_+(k_0, r) + R_-(k_0) f_1(k_0, r) \quad (\text{I.4.30})$$

Partant de l'équation de Schrödinger, nous déduisons facilement la relation :

$$\text{Wr}[\phi(k, r), \phi(k', r)] \Big|_0^r = \int_0^r (k^2 - k'^2) \phi(k, t) \phi(k', t) dt \quad (\text{I.4.31})$$

Dérivant par rapport à k ou à k' puis posant $k = k'$, nous obtenons les équations :

$$\text{Wr}[\dot{\phi}(k, r), \phi(k, r)] = 2k \int_0^r \phi^2(k, t) dt \quad (\text{I.4.32})$$

$$\text{Wr}[\ddot{\phi}(k, r), \phi(k, r)] = 2 \int_0^r \phi^2(k, t) + 4k \int_0^r \dot{\phi}(k, t) \phi(k, t) dt \quad (\text{I.4.33})$$

$$\text{Wr}[\dot{\phi}(k, r), \dot{\phi}(k, r)] = 0 \quad (\text{I.4.34})$$

$$\begin{aligned} \text{Wr}[\phi'''(k, r), \phi(k, r)] &= 6 \int_0^r \dot{\phi}(k, t) \phi(k, t) dt \\ &+ 6k \int_0^r \ddot{\phi}(k, t) \phi(k, t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.4.35})$$

$$\text{Wr}[\ddot{\phi}(k, r), \dot{\phi}(k, r)] = \int_0^r [2 \dot{\phi} \dot{\phi} + 4k \dot{\phi} \dot{\phi} - 2k \ddot{\phi} \phi] dt \quad (\text{I.4.36})$$

Des relations semblables peuvent être obtenues pour les solutions de Jost à condition de prendre comme domaine d'intégration l'intervalle $[r, \infty[$ et de changer le signe du membre de droite ; ainsi, l'équation correspondant à l'équation (I.4.32) s'écrit :

$$\text{Wr} [\dot{f}(k,r), f(k,r)] = -2k \int_r^\infty f^2(k,t) dt \quad (\text{I.4.37})$$

Nous calculons à présent $\dot{W}(k_0)$ sachant que $W(k_0) = 0$ et en simplifiant les notations : $\phi(k_0, t), \dots$ est remplacé par ϕ, \dots

$$\begin{aligned} \dot{W}(k_0) &= \text{Wr} [\dot{f}, \phi] + \text{Wr} [f, \dot{\phi}] \\ &= R \text{Wr} [\dot{f}, f] + R^{-1} \text{Wr} [\phi, \dot{\phi}] \\ &= -2 k_0 R^{-1} \int_0^\infty \phi^2(k_0, t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.4.38})$$

Pour que $\dot{W}(k_0)$ soit nul il faut donc que ϕ et par conséquent V soient complexes. Evaluons à présent $\ddot{W}(k_0)$, $\ddot{W}(k_0)$ en supposant que $\dot{W}(k_0) = W(k_0) = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{W}(k_0) &= W[\ddot{f}, \phi] + 2 \text{Wr} [\dot{f}, \dot{\phi}] + W[f, \ddot{\phi}] \\ &= -\frac{2}{R} \int_0^\infty \phi^2 dt - 4 k_0 \int_r^\infty \dot{f} \phi dt - 4 k_0 \int_0^r \dot{\phi} f dt + 2 \dot{R} \text{Wr}[\dot{f}, f] \\ &= -4 k_0 \int_0^\infty \dot{f} \phi dt - 4 k_0 \dot{R} \int_0^r f^2 dt - 4 \dot{R} k_0 \int_r^\infty f^2(k, t) dt \\ &= -4 k_0 \int_0^\infty \dot{f} \phi dt \\ &= \frac{-4 k_0}{R} \int_0^\infty \dot{\phi} \phi dt \end{aligned} \quad (\text{I.4.39})$$

Posant $P = R^{-1}$, nous obtenons aussi

$$\begin{aligned} \ddot{W}(k_0) &= \text{Wr}[\ddot{f}, \phi] + 3 \text{Wr}[\dot{f}, \dot{\phi}] + 3 \text{Wr}[\dot{f}, \ddot{\phi}] + \text{Wr}[f, \ddot{\phi}] \\ &= R \text{Wr}[\ddot{f}, f] + 3 \dot{R} \text{Wr}[\dot{f}, f] + 3 R \text{Wr}[\dot{f}, \dot{f}] \\ &\quad + 3 P \text{Wr}[\dot{\phi}, \ddot{\phi}] - 3 P^2 \dot{R}[\phi, \dot{\phi}] + P \text{Wr}[\phi, \ddot{\phi}] \\ &= -12 [P + k_0 \dot{P}] \int_0^\infty \dot{\phi} \phi dt - 12 k_0 P \int_0^\infty \dot{\phi}^2 dt \end{aligned} \quad (\text{I.4.40})$$

Grâce aux équations (26,38,39,40), le résidu en k_i peut aussi s'écrire :

$$\text{Résidu } \Phi(k,r) \Big|_{k=k_i} = \int_0^\infty dr' h(r') \sum_{p=0}^{m_i-1} B_p(k_i) \left(\frac{d}{dk}\right)^p [\phi(k_i, r') \phi(k_i, r)] \quad (\text{I.4.41})$$

$$B_p(k_i) = \frac{C_{m_i-1}^p}{(m_i-1)!} \left(\frac{d}{dk}\right)^{m_i-1-p} \left[\frac{(k-k_i)^{m_i} k^P(k)}{W(k)} \right]_{k=k_i} \quad (\text{I.4.42})$$

Si $m_i = 1$, nous retrouvons bien la relation habituelle :

$$2i\pi \text{ Résidu } \Phi(k,r) \Big|_{k=k_i} = -i\pi \int_0^\infty dr' h(r') \phi(k_i, r) \phi(k_i, r') C_i \quad (\text{I.4.43})$$

où

$$C_i^{-1} = - \frac{W_1(k_i)}{4 i k_i^2} \dot{W}(k_i) = + \int_0^\infty \phi^2(k_i, t) dt \quad (\text{I.4.44})$$

Si $m_i = 2$, nous obtenons :

$$2i\pi \text{ Résidu } \Phi(k,r) \Big|_{k=k_i} = 2i\pi \int_0^\infty dr' h(r') \left\{ \frac{d}{dk} \left[\frac{k P(k)}{\ddot{W}(k)} \right]_{k=k_i} \phi(k_i, r') \phi(k_i, r) + \frac{k_i P(k_i)}{\ddot{W}(k_i)} \frac{d}{dk} [\phi(k, r') \phi(k, r)]_{k=k_i} \right\} \quad (\text{I.4.45})$$

$$= 2i\pi \int_0^\infty dr' h(r') \left\{ N_i \phi(k_i, r') \phi(k_i, r) + M_i \frac{d}{dk} [\phi(k, r') \phi(k, r)]_{k=k_i} \right\} \quad (\text{I.4.46})$$

où

$$M_i^{-1} = -4 \int_0^\infty \dot{\phi}(k_i, t) \phi(k_i, t) dt \quad (\text{I.4.47})$$

$$N_i = \frac{P}{\ddot{W}(k_i)} + \frac{\dot{P} k}{\ddot{W}(k)} - \frac{k P \ddot{W}}{[\ddot{W}]^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + \dot{P} k_i R}{-4k_i \int_0^\infty \dot{\phi} \phi dt} + \frac{12 R [k_i P \int_0^\infty \dot{\phi}^2 + [P + k_i \dot{P}] \int_0^\infty \dot{\phi} \phi dt]}{16 k_i [\int_0^\infty \dot{\phi} \phi dt]^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{[\dot{P} k_i R + 1]}{k_i \int_0^\infty \dot{\phi} \phi dt} + \frac{3}{4} \frac{\int_0^\infty \dot{\phi}^2 dt}{[\int_0^\infty \dot{\phi} \phi dt]^2} \tag{I.4.48}
 \end{aligned}$$

L'intégrale sur le grand cercle de rayon $R \rightarrow \infty$ donne la contribution $i\pi h(r)$, l'intégrale sur le petit cercle de rayon ϵ donne une contribution nulle sauf si $f(k)$ possède un zéro d'ordre supérieur à un en $k = 0$, auquel cas elle donne une contribution du même type que les contributions venant des valeurs propres. Nous obtenons finalement la relation de fermeture :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^{2\ell+2} \frac{\phi(k, r') \phi(k, r)}{f(k) f(-k)} - 2 \sum_i^{m_i-1} \sum_{p=0} B_p(k_i) \tag{I.4.49}$$

$$\left(\frac{d}{dk}\right)^p [\phi(k_i, r') \phi(k_i, r)] = \delta(r - r')$$

ou encore

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk^2 k^{2\ell+1} \frac{\phi(k, r') \phi(k, r)}{f(k) f(-k)} + \sum_i^{m_i-1} \left(\frac{d}{dk}\right) \tag{I.4.50}$$

$$[C(k^2) \phi(k, r) \phi(k, r')] = \delta(r - r')$$

où

$$C(k^2) = \frac{-2k}{(m_i-1)!} \frac{(k - k_i)^{m_i}}{W(k)} P(k) \tag{I.4.51}$$

En vertu de la relation

$$\left(\frac{d}{dk^2}\right)^m \frac{(k + k_i)^{m+1}}{2k} F(k^2) \Big|_{k=k_i} = \left(\frac{d}{dk}\right)^m F(k^2) \Big|_{k=k_i} \quad (\text{I.4.52})$$

qui peut se démontrer par récurrence ou par le théorème de Cauchy, nous pouvons également écrire la relation de complétude sous la forme :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dE k^{2\ell+1} \frac{\phi(k, r') \phi(k, r)}{f(k) f(-k)} + \sum_i \left(\frac{d}{dE_i}\right)^{m_i-1} [D(E) \phi(E, r) \phi(E, r')] = \delta(r - r') \quad (\text{I.4.53})$$

où

$$D_i(E) = \frac{-(k^2 - k_i)^{m_i} P(k)}{(m_i - 1)! W(k)} \quad (\text{I.4.54})$$

La mesure $\delta(r - r')$ peut aussi être définie à l'aide d'une intégrale de Stieltjes :

$$\int_{-\infty}^\infty dE \frac{d\rho(E)}{dE} \phi(k^2, r) \phi(k^2, r') = \delta(r - r') \quad (\text{I.4.55})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dE} = \frac{1}{\pi} \frac{k^{2\ell+1}}{f(k) f(-k)} \quad E > 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.4.56})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dE} = \sum_i D_i(E) \delta^{(m_i-1)}(E - E_i) \quad E \leq 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.4.57})$$

$$\rho(-\infty) = 0 \quad (\text{I.4.58})$$

La représentation spectrale de la fonction de Green s'obtient par la même méthode que dans le cas V réel :

$$G(k^2, r, r') = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\rho(E') \phi(k'^2, r) \phi(k'^2, r')}{k'^2 - k^2} \quad (\text{I.4.59})$$

Nous précisons à présent les données de la diffusion qui permettent de construire le potentiel par une méthode inverse. La méthode de Gel'fand-Levitan est basée sur la connaissance de la fonction spectrale ; pour résoudre le problème inverse par la méthode de Gel'fand, nous devons donc connaître :

- 1) les déphasages à toute énergie pour le moment angulaire considéré
- 2) les états liés k_i^2 (nombres complexes)
- 3) les m_i constantes $B_p(k_i)$ associées à chaque état lié k_i^2 d'ordre m_i .

Pour résoudre le problème inverse par une méthode à la Marchenko, les données de la diffusion sont les mêmes, excepté les constantes B_p . Les constantes $N_p(k_i)$ nécessaires dans ce cas sont des constantes qui définissent les comportements asymptotiques à l'infini des fonctions propres et adjointes. Nous verrons plus tard qu'elles sont définies par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=0}^{m_i-1} N_p^2(k_i) \left(\frac{d}{dk}\right)^p h_\ell(k_i, x) &= (-)^{\ell} i \text{ Résidu } [S_1(k) h_\ell(k, x)]_{k=k_i} \\
 &= i \frac{(-)^{\ell}}{(m_i - 1)!} \left(\frac{d}{dk}\right)^{m_i-1} [(k - k_i)^{m_i} S_1(k) h_\ell(k, x)] \\
 &= i \frac{(-)^{\ell}}{(m_i - 1)!} \sum_{p=0}^{m_i-1} \left(\frac{d}{dk}\right)^{m_i-1-p} [(k - k_i)^{m_i} S_1(k)] \frac{d^p}{dk} h_\ell(k_i, x)
 \end{aligned}
 \tag{I.4.60}$$

où

$$N_p^2(k_i) = \frac{i(-)^{\ell}}{(m_i - 1)!} \left\{ \left(\frac{d}{dk}\right)^{m_i-1-p} [(k - k_i)^{m_i} S_1(k)] \right\}_{k=k_i}
 \tag{I.4.61}$$

Nous montrerons plus tard l'existence d'un opérateur de transformation $K(x, y)$ qui permet d'écrire la relation

$$f_+(k, x) = h_\ell(k, x) + \int_x^\infty K(x, y) h_\ell(k, y) dy
 \tag{I.4.62}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\Psi(k, x) = \frac{1}{2i} k [S_1(k) f_+(k, x) - (-)^{\ell} f_1(k, x)] \quad (I.4.63)$$

$$\begin{aligned} i \text{ Résidu } [2i k \psi(k, x)]_{k=k_i} &= i \text{ Résidu } [S_1(k) f_+(k, x)] \\ &= i \text{ Résidu } [2i k \frac{(ik)^{\ell}}{f_+(k)} \phi(k, x)]_{k=k_i} \end{aligned} \quad (I.4.64)$$

Si nous définissons

$$\left[\frac{d^{m_i}}{dk^{m_i}} f_+(k) \right]_{k=k_i} = f_+^{(m_i)}(k_i) \quad , \quad (I.4.65)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{i}{(m_i-1)!} \sum_{p=0}^{m_i-1} \left(\frac{d}{dk} \right)^{m_i-1-p} \left[\frac{(ik)^{\ell} 2ik}{f_+(k)} \right]_{k=k_i} \left(\frac{d}{dk} \right)^p \phi(k_i, x) \\ = i \text{ Résidu } [S_1(k) h_{\ell}(k, x)]_{k=k_i} + \int_x^{\infty} K(x, y) i \text{ Résidu } [S_1(k) h_{\ell}(k, x)]_{k=k_i} \end{aligned} \quad (I.4.66)$$

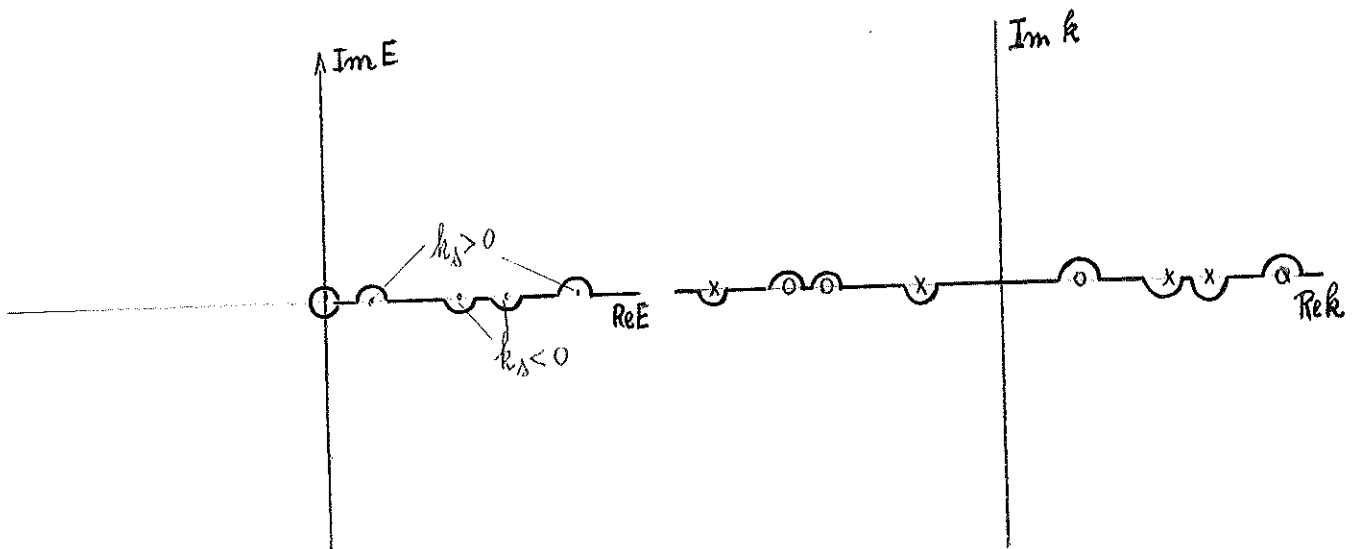
Par conséquent, les comportements asymptotiques pour $x \rightarrow \infty$ des fonctions propres et associées sont connus si les N_p sont donnés :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (-)^{\ell} i \text{ Résidu } \left[\frac{(ik)^{\ell} 2ik}{f_+(k)} \phi(k, x) \right]_{k=k_i} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{m_i-1} N_p^2(k_i) \left(\frac{d}{dk} \right)^p h_{\ell}(k_i, x) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{m_i-1} N_p^2(k_i) (ix)^p e^{ik_i x} \end{aligned} \quad (I.4.67)$$

Jusqu'à présent, nous avons supposé qu'il n'y a pas de singularités spectrales. Si celles-ci sont présentes et en nombre fini n_s , il faut modifier la relation de fermeture et la représentation spectrale

de la fonction de Green. La première étape consisterait à modifier le contour d'intégration de façon à éviter les singularités spectrales. Dans le plan complexe E , la coupure était jusqu'à présent le demi-axe réel positif ; la branche de \sqrt{E} que nous avons choisie était celle où $k = \sqrt{E} > 0$ [$k = -\sqrt{E} < 0$] sur la lèvre supérieure [inférieure] de la coupure. Par conséquent les singularités spectrales $k_s > 0$ [$k_s < 0$] se trouvent sur la lèvre supérieure [inférieure respectivement]. Nous rappelons que si $f(k_s) = 0$, nous avons automatiquement pour $k_s \neq 0$, $f(-k_s) \neq 0$. Nous définissons à présent une nouvelle coupure Γ qui comprend le demi-axe réel positif sauf au voisinage des singularités spectrales, où Γ se compose de demi-axes de cercle de rayon ϵ entourant les singularités dans $\text{Im } E > 0$ si $k_s > 0$ [$\text{Im } E < 0$, si $k_s < 0$]. Sur la lèvre supérieure de la coupure Γ , nous définissons $k = \sqrt{E} > 0$ si $E > 0$ et $\text{Re } k$ continu sur Γ ; par conséquent $\text{Re } k > 0$ sur la lèvre supérieure de Γ (sur la lèvre inférieure de Γ nous avons, $\text{Re } k < 0$).

La courbe correspondant à Γ dans le plan k se construit de façon évidente ; c'est une courbe qui est symétrique par rapport à l'origine



o = zéro de $f(k)$
 x = zéro de $f(-k)$

On pourrait exprimer la fonction de Green de la façon suivante :

$$G(k^2, r, r') = \int_{-\infty}^0 d\rho(E') \frac{\phi(k'^2, r) \phi(k'^2, r')}{k'^2 - k^2} + \int_{\Gamma} d\rho(E') \frac{\phi(k'^2, r) \phi(k'^2, r')}{k'^2 - k^2} \quad (I.4.68)$$

Cette expression de la fonction de Green n'est cependant valable que pour r et r' finis car l'intégrant $\phi(k'^2, r) \phi(k'^2, r')$ croît exponentiellement pour $r \rightarrow \infty$ ou $r' \rightarrow \infty$ lorsque $\text{Im } k' \neq 0$. Le taux de croissance exponentielle peut toujours être arbitrairement réduit en diminuant le rayon ε , des demi-arcs de cercle ; cette modification du contour ne change évidemment pas la valeur de l'intégrale. Pour obtenir une expression de $G(k^2, r, r')$ pour tout r, r' et pour pouvoir définir une transformée de Fourier-Schrödinger, il faudrait faire tendre Γ vers le demi-axe réel positif et régulariser l'intégrale divergente au voisinage des singularités spectrales. Nous pourrions par exemple définir une intégrale au sens habituel de Cauchy. Nous utiliserons ici une méthode de régularisation plus générale proposée par Lyantze [LYA 67]. Nous introduisons des fonctions $B_s^r(E)$ définies sur $E \geq 0$ ($s = 1, n_s$; $r = 0, m_s - 1$) qui au voisinage des singularités spectrales vérifient les conditions suivantes :

(i) $B_s^r(E)$ est mesurable et $\sup_{E \geq 0} |1+E|^2 |B_s^r(E)| < \infty$

(ii) $B_s^r(E)$ est analytique au voisinage des singularités spectrales et

$$\left(\frac{d}{dE}\right)^p B_s^r(E) \Big|_{E=E_t} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = r \text{ et } s = t \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (I.4.69)$$

$$p \in [0, \dots, m_t - 1], r = [0, \dots, m_s - 1]$$

Exemple :

$$B_s^r(E) = \begin{cases} \frac{(E - E_s)^r}{r!} & \text{si } |E - E_s| < \delta \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous définissons un opérateur B agissant sur une fonction suffisamment différentiable, de la façon suivante :

$$[B \phi(E)] = \phi(E) - \sum_s \sum_{r=0}^{m_s-1} B_s^r(E) \left(\frac{d}{dE}\right)^r \phi(E) \quad (\text{I.4.70})$$

Nous pouvons écrire à présent

$$\int_{\Gamma} d\rho(E') \frac{\phi(k'^2, r) \phi(k'^2, r')}{k'^2 - k^2} = \int_0^{\infty} d\rho(E') \left[B \frac{\phi(E', r) \phi(E', r')}{E' - E} \right] + \sum_s \sum_{r=0}^{m_s-1} \int_{\Gamma} d\rho(E') B_s^r(E') \left\{ \left(\frac{d}{dE}\right)^r \frac{\phi(E', r) \phi(E', r')}{E' - E} \right\}_{E=E_s} \quad (\text{I.4.71})$$

Il est aisé de vérifier que toutes les intégrales convergent à présent. Nous considérons une fonction $D_s(E)$ différentielle en E_s et telle que

$$\left[\left(\frac{d}{dE}\right)^{m_s-1-j} D_s(E) \right]_{E=E_s} = \frac{1}{\pi C_{m_s-1}^j} \int_{\Gamma} B_s^j(E') d\rho(E') \quad (\text{I.4.72})$$

Les relations obtenues précédemment restent valables en faisant jouer aux singularités spectrales un rôle "similaire" aux états liés, les fonctions $D(E)$ qui correspondent aux singularités spectrales sont celles qui viennent d'être définies.

La nouvelle fonction spectrale $\tilde{\rho}$ s'écrira :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\rho}}{dE} = \frac{1}{\pi} \frac{k^{2\ell+1}}{f(k) f(-k)} + \sum_s D_s(E) \delta^{(m_s-1)}(E - E_s) & E > 0 \\ \frac{d\tilde{\rho}}{dE} = \sum_i D_i(E) \delta^{(m_i-1)}(E - E_i) & E \leq 0 \\ \tilde{\rho}(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.4.73})$$

Remarque : dans la définition de $D_s(E)$ c'est bien entendu l'ancienne fonction spectrale qui intervient.

$$G(E, r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\rho}(E') \left[B \frac{\phi(E', r) \phi(E', r')}{E' - E} \right] \quad (I.4.74)$$

La relation de complétude ne peut s'appliquer qu'à des fonctions $h(r)$ telles que :

$$\phi(E, h) = \int_0^{\infty} \phi(E, r) h(r) dr$$

soit différentiable $(m+1)$ fois par rapport à E , où $m = \max(m_s)$ ($s = 1, n_s$). Dans ce cas $[B \phi(E, h), \phi(E, r)]$ est bien défini. A partir des transformées de Fourier-Schrödinger

$$\phi(E, h) \quad \text{et} \quad \phi^j(E_i, h) = \int_0^{\infty} h(x) \phi^j(E_i, x) dx$$

nous pouvons reconstruire la fonction $h(r)$:

$$h(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B \phi(E, h) \phi(E, r)] \frac{k^{2\ell+1}}{f(k) f(-k)} dE + \sum_{k=1}^{n_s + n_b} \left\{ \left(\frac{d}{dE} \right)^{m_k} D_k(E) \phi(E, h) \phi(E, r) \right\}_{E=E_k} \quad (I.4.75)$$

Si on se limite à l'ensemble \mathcal{M}_0 des fonctions $h(r) \in L^2(0, \infty)$ telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k \phi(k, h)}{f(k)} \right|^2 dk < \infty,$$

alors il n'y a pas de termes venant des singularités spectrales dans la relation de complétude. \mathcal{M}_0 étant dense dans $L_2(0, \infty)$, les $\phi(k^2, h)$, $\phi^j(k_i^2, h)$ ($k^2 > 0$, $i = 1, n_b$, $j = 0, m_i - 1$) devraient suffire pour déterminer $h(r)$. En fait, on peut montrer [LYA 67] que le fait d'imposer que $h(r) \in L_2(0, \infty)$ et la connaissance des $\phi(k, h)$, $\phi^j(k_i, h)$ ($i = 1, n_b, j = 0, m_i - 1$) définit de façon unique les $\phi^t(k_s, r)$ ($t = 1, n_s, r = 0, m_t - 1$) si le potentiel possède une décroissance exponentielle. C'est pour cette raison que la recherche

d'une équation fondamentale pour un système d'équations couplées du problème inverse non hermitien ne sera faite au chapitre IX que pour des potentiels non hermitiens à décroissance exponentielle. Nous ne connaissons pas de théorème d'unicité de la transformée de Fourier-Schrödinger dans le cas plus général où V n'est pas à décroissance exponentielle et où L possède des singularités spectrales.

Une relation de Parseval peut aussi être obtenue si au moins une des deux fonctions h, g appartient à \mathcal{A} et si les deux fonctions appartiennent à $L_2(0, \infty)$:

$$\int_0^{\infty} h(x) g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(k, h) \phi(k, g) \frac{k \frac{d}{dk}}{f(k) f(-k)} + \sum_{i=1}^{n_b} \left\{ \left(\frac{d}{dE} \right)^{m_i-1} D_i(E) \phi(k, g) \phi(k, h) \right\}_{E=E_i} \quad (\text{I.4.76})$$

Dans le cas de la transformée de Fourier, la théorie des fonctions généralisées a permis d'étendre la transformée à des fonctions qui ne sont plus $L_2(0, \infty)$. La transformée de Fourier-Schrödinger peut aussi être étendue à des fonctions qui sont localement de carré sommable. Pour avoir une correspondance biunivoque entre la fonction et sa transformée généralisée, il faut cependant que L ne possède pas de singularités spectrales.

Pour compléter l'étude du développement en fonctions propres et adjointes, nous allons à présent montrer que les fonctions adjointes sont linéairement indépendantes des fonctions propres et ne peuvent par conséquent pas être éliminées de la relation de complétude. Comme les $\phi_i^{(s)}(r) = \left(\frac{d}{dk} \right)^s \phi(k_i, r)$ ($s = 1, \dots, m_i-1$) sont des combinaisons linéairement indépendantes des fonctions $\psi_i^{(s)} = \left(\frac{d}{dk^2} \right)^s \phi(k_i, r)$ ($s = 1, \dots, m_i-1$), il suffit de montrer que les fonctions $\psi_i^{(s)}(r)$ ($s = 1, m_i-1$) sont orthogonales aux fonctions propres de L .

Les fonctions $\psi_i^{(s)}(r)$ vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right] \psi_i^{(s)}(r) + s \psi_i^{(s-1)} = 0 \quad (\text{I.4.77})$$

et aussi

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right]^{s+1} \psi_i^{(s)}(r) = 0 \quad (\text{I.4.78})$$

Puisque

$$\left[\left(\frac{d}{dk} \right)^s W(k) \right]_{k=k_i} = 0 \quad \text{pour } s = [0, m_i - 1] \quad (\text{I.4.79})$$

et que

$$\left[\left(\frac{d}{dk} \right)^{m_i} W(k) \right]_{k=k_i} \neq 0, \quad (\text{I.4.80})$$

nous obtenons aisément les conditions aux limites suivantes :

$$\psi_i^{(s)}(0) = 0 \quad \text{pour } s = 0, \dots, m_i - 1 \quad (\text{I.4.81})$$

$$\left[\frac{d}{dr} \psi_i^{(s)}(r) \right]_{r=0} = 0 \quad \text{pour } s = 1, \dots, m_i - 1 \quad (\text{I.4.82})$$

$$= \text{Cte} \quad \text{pour } s = 0 \quad (\text{I.4.83})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_i^{(s)}(r) = 0 \quad \text{pour } s = 0, \dots, m_i - 1 \quad (\text{I.4.84})$$

Nous considérons tout d'abord des fonctions ψ_i^s et ψ_j^r associées à deux valeurs propres différentes, k_i et k_j d'ordre m_i et m_j respectivement.

Partant de l'équation différentielle et des conditions aux limites, nous obtenons aisément :

$$\begin{aligned} & (k_i^2 - k_j^2) \int_0^\infty \psi_i^{(s)} \psi_j^{(r)} dt + s \int_0^\infty \psi_j^{(r)} \psi_i^{(s-1)} dt \\ & - r \int_0^\infty \psi_i^{(s)} \psi_j^{(r-1)} dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.4.85})$$

pour $0 \leq s \leq m_i - 1$ et $0 \leq r \leq m_j - 1$.

$$(\psi_i^{(s)} \psi_j^{(r)} \in L_1(0, \infty) \text{ car } \psi_i^{(s)} \text{ et } \psi_j^{(r)} \in L_2(0, \infty))$$

Montrons que les fonctions $\psi_i^{(s)}$ associées à des valeurs propres différentes sont "orthogonales". (Les fonctions $\psi_i^{(s)}$, $\psi_j^{(r)}$ sont dites "orthogonales" en ce sens qu'elles vérifient la relation (I.4.86) mais ces fonctions sont complexes).

Thèse :
$$\int_0^\infty \psi_i^{(s)} \psi_j^{(r)} dt = 0 \quad (\text{I.4.86})$$

pour $i \neq j$, $s \in [0, m_i - 1]$ et $r \in [0, m_j - 1]$.

Nous allons démontrer le théorème par récurrence.

Pour $r = 0$ et $s = 0$, l'équation de départ (I.4.85) nous donne la thèse (I.4.86). Supposons à présent le théorème démontré pour $r + s = p$ et montrons que la thèse est vraie pour $r + s = p + 1$. La démonstration découle directement de l'équation (I.4.85). Une démonstration du même type permet de vérifier que les fonctions associées sont "orthogonales" aux fonctions "propres" du continu.

Nous considérons à présent deux fonctions $\psi_i^{(s)}$ et $\psi_i^{(r)}$ associées à la même valeur propre k_i d'ordre m_i et nous montrons qu'elles sont "orthogonales" pour $s + r \leq m_i - 2$:
L'équation (I.4.85) devient dans ce cas, pour $r, s \in [0, m_i - 1]$:

$$s \int_0^\infty \psi_i^{(r)} \psi_i^{(s-1)} dt = r \int_0^\infty \psi_i^{(s)} \psi_i^{(r-1)} dt \quad (\text{I.4.87})$$

Pour $s = 0$, nous obtenons

$$\int_0^\infty \psi_i^{(0)} \psi_i^{(t)} dr = 0 \quad \text{pour } t \in [0, m_i - 2] \quad (\text{I.4.88})$$

La démonstration complète se fait de nouveau par récurrence. Nous supposons que

$$\int_0^\infty dr \psi_i^{(s)} \psi_i^{(t)} = 0$$

pour une valeur de s fixée et pour tout t tel que $0 \leq s+t \leq m-2$ et nous voulons montrer que

$$\int_0^\infty \psi_i^{(s+1)} \psi_i^{(t)} dr = 0$$

pour tout t tel que $0 \leq s+1+t \leq m-2$.

La démonstration est évidente à partir de la relation (I.4.87).

Nous avons partout utilisé l'expression incorrecte : "orthogonale", pour alléger les notations, car en fait les fonctions adjointes sont des fonctions complexes. Nous avons plutôt les relations d'orthogonalités suivantes, qui s'obtiennent directement des relations précédentes :

$$\int_0^{\infty} \left[\left(\frac{d}{dk^2} \right)^s \overline{\phi}(k_i^*, t) \right]^* \left[\left(\frac{d}{dk^2} \right)^r \phi(k_j, t) \right] dt = 0 \quad (\text{I.4.88})$$

pour $s \in [0, m_i - 1]$, $r \in [0, m_i - 1]$

$$\int_0^{\infty} \left[\left(\frac{d}{dk^2} \right)^s \overline{\phi}(k_i^*, t) \right] \left[\left(\frac{d}{dk^2} \right)^r \phi(k_i, t) \right] dt = 0 \quad (\text{I.4.89})$$

pour $0 \leq r+s \leq m_i - 2$

$$\int_0^{\infty} \left[\left(\frac{d}{dk^2} \right)^s \overline{\phi}(k_i^*, t) \right]^* \phi(k^2, t) dt = 0 \quad (\text{I.4.90})$$

où $k^2 \in [0, \infty)$, $s \in [0, m_i - 1]$

et où les fonctions $\overline{\phi}$ sont les fonctions propres de l'opérateur adjoint

$$\overline{\ell} = \frac{d^2}{dr^2} - v^* - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \quad (\text{I.4.91})$$

Montrons à présent que

$$\int_0^{\infty} \psi_i^{(r)} \psi_i^{(s)} dt \neq 0 \quad (\text{I.4.92})$$

pour $r + s = m_i - 1$.

Comme nous avons la relation

$$s \int_0^{\infty} \psi_i^{(r)} \psi_i^{(s-1)} dt = r \int_0^{\infty} \psi_i^{(s)} \psi_i^{(r-1)} dt \quad (\text{I.4.93})$$

pour $r, s \in [0, m_i - 1]$

il suffit de démontrer que

$$\int_0^{\infty} \psi_i^{(0)} \psi_i^{(m_i-1)} dt \neq 0 \quad (\text{I.4.94})$$

A partir des comportements asymptotiques :

$$\psi_i^{(0)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} C(k_i) e^{ik_i x} \quad (I.4.95)$$

$$\psi_i^{(m_i)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} A(k_i, x) e^{ik_i x} + B(k_i) e^{-ik_i x} \quad (B \neq 0, C \neq 0) \quad (I.4.96)$$

nous constatons que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Wr}[\psi_i^{(0)}, \psi_i^{(m_i)}] = -CB \, 2i \, k_i \neq 0 \quad (I.4.97)$$

A partir de l'équation différentielle, il est aisé d'obtenir la relation

$$\{\text{Wr}[\psi_i^{(0)}, \psi_i^{(m_i)}]\}_0^\infty + m_i \int_0^\infty \psi_i^{(m_i-1)} \psi_i^{(0)} = 0 \quad (I.4.98)$$

par conséquent, nous obtenons le résultat (I.4.94) recherché.

Il nous reste à démontrer que les m_i fonctions $\psi_i^{(r)}$ ($r=0, m_i-1$) associées à une même valeur propre k_i , forment un ensemble de m_i fonctions linéairement indépendantes. Soit \vec{V} un vecteur dont les m_i composantes sont

$$V_j = \psi_i^{(j)}(k_i, x) \quad (I.4.99)$$

nous voulons montrer l'existence d'une matrice M telle que $\vec{\Phi} = M \vec{V}$ soit un vecteur dont les composantes sont des fonctions biorthonormales, c'est-à-dire telles que

$$\int_0^\infty \vec{\Phi}(k, r) \otimes \vec{\Phi}^+(k^*, r) dr = I \quad (I.4.100)$$

où

$$\vec{\Phi} \underset{\sim}{=} M \vec{V} \quad (I.4.101)$$

et où

$$\vec{V}_j \underset{\sim}{=} \psi_i^{(j)}(k_i, x) \quad (I.4.102)$$

est solution de l'équation adjointe.

Si N est la matrice hermitienne dont les éléments sont définis par la relation

$$N_{r s} = \int_0^{\infty} \psi_i^{(r-1)}(k_i, r) [\tilde{\psi}_i^{(s-1)}(k_i^*, r)]^* dr \quad (\text{I.4.103})$$

L'équation (I.4.100) est équivalente à l'équation :

$$M N M^+ = I \quad (\text{I.4.104})$$

La matrice N possède la structure suivante :

- tous les éléments au-dessus et à gauche de la seconde diagonale sont nuls ($N_{rs} = 0$ pour $2 \leq r+s \leq m_i$) ;
- tous les éléments sur la seconde diagonale sont non nuls [$N_{rs} \neq 0$ si $r+s = m_i+1$]
- et les autres éléments sont quelconques.

Nous en déduisons facilement que N est une matrice hermitienne, non singulière ; elle est par conséquent diagonalisable par une matrice unitaire U et ses valeurs propres sont non nulles (car de module unitaire) :

$$U N U^+ = \text{diag} (n_j) \quad (\text{I.4.105})$$

où $n_j \neq 0$, $j = 1, m_i$.

Par conséquent, il existe une matrice M telle que la relation (I.4.104) soit vérifiée et par conséquent les m_i fonctions $\psi_i^{(r)}$ sont linéairement indépendantes.

CHAPITRE II : THEORIE GENERALE DES OPERATEURS DE TRANSFORMATION

UTILES POUR LE PROBLEME INVERSE DE LA DIFFUSION

§ 1. INTRODUCTION

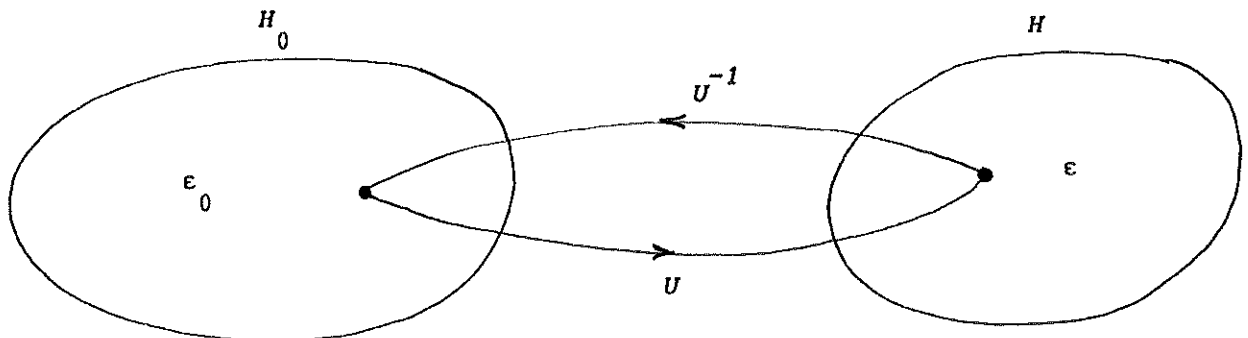
Ce chapitre est consacré à l'étude générale des opérateurs de transformation. Certains opérateurs de transformation permettent de construire les solutions d'un type donné, d'un hamiltonien perturbé $H = T + V = T + V_0 + V_1$, à partir des solutions du même type, de l'hamiltonien de référence $H_0 = T + V_0$. Comme dans la suite, nous ne considérons que le problème à moment angulaire l fixe, nous n'étudierons que les opérateurs de transformation correspondants, c'est-à-dire l'opérateur du "type de Gel'fand-Levitan" qui permet la représentation des solutions régulières et l'opérateur du "type de Marchenko", qui permet la représentation des solutions de Jost. Ces opérateurs de transformation présentent l'avantage sur la fonction de Green, d'être indépendants de l'énergie et jouent un rôle essentiel dans la théorie du problème inverse. Ainsi, Newton [NEW 60] a montré qu'une équation généralisée du type de Gel'fand, peut toujours être obtenue si l'existence d'un opérateur de transformation de Gel'fand est démontrée et si l'équation possède un système complet de solutions. D'autre part, le point de départ de la méthode développée par Agranovich et Marchenko [AGR 63], dans le cas $V_0 = 0$ et que nous voulons généraliser pour certains $V_0 \neq 0$, est de spécifier la classe des potentiels perturbatifs V_1 , pour lesquels il existe des opérateurs de transformation bornés, intégrables et différentiables, pour un potentiel de référence V_0 donné. Ce n'est que pour cette classe de potentiels que nous pouvons espérer réaliser une étude complète du problème inverse, c'est-à-dire : i) établir une équation fondamentale du problème inverse ; ii) trouver des conditions nécessaires et suffisantes à imposer aux données de la diffusion pour que l'équation fondamentale possède une solution unique et "convenable" ; iii) éventuellement établir la stabilité du potentiel obtenu dans la classe spécifiée, vis-à-vis de variations des données de la diffusion.

Une définition très générale des opérateurs de transformation, est donnée au paragraphe 2. Nous montrons au paragraphe 3 que l'opérateur d'onde (ou l'opérateur de Möller) qui joue un rôle principal en théorie spectrale [KAT 66, REE 78] est un opérateur de transformation particulier. Certaines propriétés générales des opérateurs de transformation sont étudiées au paragraphe 4. Les opérateurs de transformation utilisés dans le problème inverse, sont des opérateurs intégraux du type de Volterra ; nous montrons au paragraphe 5 que

dans ce cas la relation de complétude conduit à une équation intégrale linéaire pour K . Au paragraphe 6, nous établissons les équations fondamentales de Marchenko et de Gel'fand pour un potentiel de référence V_0 quelconque, en supposant qu'il existe des opérateurs de transformation bornés et que les fonctions perturbées forment un ensemble complet. Nous définissons au paragraphe 7, de nouveaux types d'opérateurs de transformation et nous obtenons les équations aux dérivées partielles et les conditions aux limites que les noyaux des opérateurs de transformation doivent satisfaire. Ces équations seront utilisées par la suite pour définir la classe des potentiels réguliers pour lesquels il existe des opérateurs de transformation bornés, continuellement dérivables et intégrables, pour certains potentiels de référence donnés, habituellement rencontrés en physique nucléaire (interaction coulombienne et potentiel centrifuge). Ce chapitre contient aussi deux appendices. Dans l'appendice A, nous démontrons une formule de composition pour les opérateurs de transformation tandis que l'appendice B contient des principes variationnels équivalents à l'équation fondamentale du problème inverse. Ces principes variationnels fournissent des nouvelles méthodes de résolution numérique du problème inverse.

§ 2. DEFINITION DES OPERATEURS DE TRANSFORMATION GENERALISES

Nous donnons dans ce paragraphe la définition la plus générale d'opérateurs de transformation qui sont aussi appelés opérateurs de translation par Levitan [LEV 64], Coudray et Coz [COU 70] ou encore opérateurs de transmutation par Delsarte et Lions [DEL 57]. Nous considérons deux opérateurs différents linéaires (ou deux systèmes d'opérateurs différentiels) d'ordre n quelconque H_0 et H agissant sur deux espaces fonctionnels linéaires ϵ_0 et ϵ respectivement (généralement ϵ_0 et ϵ sont des sous-ensembles de l'ensemble \mathcal{B} des fonctions physiques qui sont $L_2^{loc}(0, \infty)$ et bornées à l'infini)



Si U est un opérateur linéaire et continu, réalisant une bijection de ϵ_0 sur ϵ , nous dirons que U est un opérateur de transformation si il vérifie en plus la relation :

$$HU = UH_0 \quad (II.2.1)$$

et possède un inverse U^{-1} qui permette d'écrire la relation de similitude :

$$H_0 = U^{-1}HU. \quad (II.2.2)$$

Si $|\psi_0\rangle$ est un élément de ϵ_0 tel que

$$H_0|\psi_0\rangle = E|\psi_0\rangle, \quad (II.2.3)$$

nous pouvons écrire :

$$|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle \in \epsilon \quad (II.2.4)$$

$$H|\psi\rangle = HU|\psi_0\rangle = UH_0|\psi_0\rangle = E|\psi\rangle, \quad (II.2.5)$$

et de même pour $|\psi\rangle \in \epsilon$, tel que $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, nous obtenons :

$$|\psi_0\rangle = U^{-1}|\psi\rangle \in \epsilon_0 \quad (II.2.6)$$

$$H_0|\psi_0\rangle = E|\psi_0\rangle. \quad (II.2.7)$$

Le spectre de H_0 défini sur ϵ_0 est identique au spectre de H défini sur ϵ . L'opérateur de transformation dépend non seulement des opérateurs H_0 et H mais aussi des espaces linéaires ϵ_0 et ϵ considérés. Les opérateurs H_0 et H généralement considérés en théorie de la diffusion, sont définis sur ϵ_0 et ϵ respectivement par les expressions différentielles :

$$H_0 = -\frac{d^n}{dr^n} - \alpha h(r) + V_0, \quad (II.2.8)$$

$$H = -\frac{d^n}{dr^n} - \alpha h(r) + V. \quad (II.2.9)$$

Lorsque $n = 2$, la théorie peut s'appliquer à l'équation de Schrödinger. Le problème à ℓ fixé correspond au choix $\alpha = k^2$, $h(r) = 1$ et au cas où V et V_0 contiennent le potentiel centrifuge tandis que le problème à énergie

fixe correspond au choix $\alpha = \ell(\ell+1)$, $h(r) = \frac{-1}{r^2}$ et où k^2 est inclu dans V_0 et V . Le cas $n = 1$, $\alpha = k^2$ où $\alpha = \pm r^2(j \pm 1/2)$, correspond à l'équation de Dirac. Pour $n = 2$ et $V \rightarrow [E-V(r)]^2$, la théorie peut décrire l'équation de Klein-Gordon. On pourrait aussi étudier le cas où V et V_0 dépendent d'un paramètre α qui pourrait être soit l'énergie lorsque ℓ est fixé, soit le moment angulaire lorsque l'énergie est fixée. L'étude des opérateurs de transformation pourrait aussi être considérée pour des équations relativistes à quasi-potentiel qui sont des réductions à trois dimensions de l'équation de Bethe et Salpeter. Le problème de trouver des opérateurs de transformation du type de Volterra peut être généralisé au cas d'opérateurs différentiels d'ordre n plus élevé que l'hamiltonien de Schrödinger. Une telle généralisation a été introduite par la méthode de Zakharov et Shabat [ZAK 74]. Notre étude se limitera à des équations couplées de Schrödinger et au problème inverse à ℓ fixé.

§ 3. OPERATEURS DE MÖLLER

Les deux opérateurs de Möller sont des opérateurs de transformation pour les spectres continus des opérateurs H et H_0 :

$$\eta(H)H\Omega^\pm = \Omega^\pm H_0 \eta(H_0) \quad (II.3.1)$$

qui vérifient en plus l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \exp[iH_0 t] \exp[-iHt] \Omega^\pm \eta(H_0) = I \eta(H_0) \quad (II.3.2)$$

et permettent d'écrire

$$|\psi^\pm(t)\rangle = \exp[-iHt] \Omega^\pm \eta(H_0) |\psi_0\rangle. \quad (II.3.3)$$

L'opérateur de Möller est isométrique [NEW 66]

$$\Omega^\pm (\Omega^\pm)^\dagger = \eta(H) \quad (II.3.4)$$

$$(\Omega^\pm)^\dagger \Omega^\pm = \eta(H_0). \quad (II.3.5)$$

Il existe une décomposition invariante, relative à H de l'espace de Hilbert \mathcal{L} en une somme directe orthogonale

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_d + \mathcal{H}_{a.c.}$$

(II.3.6)

des sous-espaces correspondant aux spectres absolument continu et discret. La relation (II.3.1) exprime le fait que la restriction de H à $\mathcal{H}_{a.c.}$ est unitairement équivalente à H_0 . Ces opérateurs Ω^\pm jouent un rôle important dans l'étude du spectre d'un hamiltonien H , self-adjoint. Les propriétés spectrales de H sont en fait souvent étudiées en montrant que H est unitairement équivalent à un opérateur H_0 dont le spectre est connu explicitement. Par un hasard heureux, en mécanique quantique, pour la partie spectrale absolument continue, ces opérateurs isométriques peuvent s'exprimer au moyen des opérateurs d'onde qui décrivent le processus de la diffusion dans le temps [KAT 66, AM 73]. (La structure de la partie absolument continue du spectre de H et la théorie de la diffusion sont intimement liées; le fait que H possède le même spectre absolument continu que H_0 , constitue le théorème fondamental de la théorie de la diffusion).

§ 4. PROPRIETES GENERALES DES OPERATEURS DE TRANSFORMATION

Tout opérateur de transformation U qui réalise la relation de similitude

$$HU = UH_0 \tag{II.4.1}$$

peut s'obtenir en multipliant l'opérateur d'onde Ω^\pm par la droite, par un opérateur "facteur de normalisation" M^\pm , qui commute avec H_0 [FRI 48]:

$$U = \Omega^{(\pm)} M^{(\pm)} \tag{II.4.2}$$

$$M^\pm H_0 = H_0 M^\pm. \tag{II.4.3}$$

En particulier le facteur de normalisation de Ω^+ vis-à-vis de $\Omega^{(-)}$ est la matrice S :

$$S^{\pm 1} = [\Omega^{(\mp)}]^\dagger \Omega^{(\pm)} \quad ; \tag{II.4.4}$$

cette relation montre que S est unitaire si les images R_\pm des opérateurs $\Omega^{(\pm)}$ coïncident. (Il existe des exemples [PEA 75] où $e^{-iH_0 t}$ et e^{-iHt} sont unitaires et où Ω_\pm existent mais pour lesquels R_\pm ne coïncident pas, de sorte que S n'est pas unitaire).

Par comparaison des équations (II.4.2) et (II.4.4), nous obtenons la factorisation de la matrice S

$$S = M^{(+)} [M^{(-)}]^{-1}. \quad (\text{II.4.5})$$

Si H et H_0 ne possèdent qu'un spectre continu, nous pouvons écrire la relation de complétude sous la forme :

$$UWU^\dagger = I \quad (\text{II.4.6})$$

où

$$W = M^{(\pm)-1} M^{(\pm)-1\dagger}. \quad (\text{II.4.7})$$

Les équations (II.4.5) et (II.4.6) constituent les équations de base du problème inverse ; elles sont aussi le point de départ de la théorie du problème inverse dans un espace à N dimensions, développée par Faddeev [FAD 76].

Si H_0 ne possède pas d'états liés alors que H possède des états liés ψ_i comme l'opérateur de transformation U doit posséder un inverse, il doit exister un vecteur χ_i n'appartenant pas à l'espace de Hilbert et associé à ψ_i de façon telle que :

$$\psi_i = U\chi_i. \quad (\text{II.4.8})$$

Dans ce cas, l'opérateur poids devient :

$$W = M^{(\pm)-1} M^{(\pm)-1\dagger} + \sum_i \chi_i \otimes \chi_i. \quad (\text{II.4.9})$$

La relation de similitude (II.4.1) n'est valable dans l'espace de Hilbert que si H et H_0 possèdent le même spectre ; lorsque H et H_0 ont des spectres différents, Kay et Moses [KAY 56] ont été amenés à considérer l'équation (II.4.1) ainsi que la définition de U et U^{-1} sur un espace $\tilde{\mathcal{H}}$ plus grand que l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Cet espace $\tilde{\mathcal{H}}$ est élargi de façon telle que les spectres de H_0 et H coïncident. Dans le cas où H_0 ne possède que le spectre continu et où H possède en plus des valeurs propres E_i , il faut définir de nouvelles fonctions propres χ_i de H_0 qui correspondent aux mêmes valeurs propres E_i que H ; ces fonctions χ_i sous-tendent l'espace vectoriel qui doit être adjoint à $\tilde{\mathcal{H}}$ pour former $\tilde{\mathcal{H}}$. Tout opérateur A défini sur $\tilde{\mathcal{H}}$, sera étendu à l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$ de façon telle que sa représentation dans l'espace de configuration soit la même fonction :

$$A(x, y) = \langle x | A | y \rangle = \langle x | A_n(H_0) | y \rangle = \langle x | A_n(-H_0) | y \rangle$$

(on peut montrer que \mathcal{L} est dense dans $\tilde{\mathcal{L}}$ [KAY 56]). Kay et Moses [KAY 56] proposent une méthode pour définir les fonctions χ_i que nous ne rappelons pas car nous ne l'utiliserons pas. Les expressions de χ_i particulières aux cas que nous étudierons, seront données plus précisément dans la suite.

La méthode développée par Kay et Moses pour traiter le problème inverse utilise la théorie des opérateurs. Cette approche du problème inverse de la diffusion ne constitue pas une branche isolée mais apparaît de façon naturelle dans le cadre de la théorie générale de la diffusion. Nous avons préféré utiliser dans la suite une méthode un peu plus self-consistante semblable à l'approche de Marchenko. Cette méthode qui sera utilisée au chapitre IX, est principalement basée sur l'étude des propriétés de certaines solutions d'équations différentielles et intégrales au moyen de méthodes classiques de l'analyse. Notre choix se justifie par le fait que la théorie de Marchenko est la plus complète et la mieux adaptée aux types de problèmes que nous allons considérer.

§ 5. OPERATEURS DE TRANSFORMATION DU TYPE DE VOLTERRA

De façon générale, le problème inverse comprend les étapes suivantes :

- a) définir à partir des données expérimentales l'opérateur poids W ;
- b) construire l'opérateur de transformation U qui vérifie la relation

$$WU^{\dagger} = U^{-1} ; \quad (\text{II.5.1})$$

- c) construire l'opérateur H perturbé à partir de l'équation :

$$H = UH_0 U^{-1} = UH_0 WU^{\dagger}. \quad (\text{II.5.2})$$

Cet opérateur H sera hermitien simultanément avec H_0 et W si

$$[W, H_0] = 0. \quad (\text{II.5.3})$$

La seconde étape doit être précisée car l'équation (II.5.1) ne définit pas de façon unique l'opérateur U ; il faut ajouter des conditions aux limites ou de façon équivalente préciser le choix des fonctions $|\psi_0(E)\rangle$ et $|\psi(E)\rangle$ qui vérifient les équations :

$$H_0 |\psi_0(E)\rangle = E |\psi_0(E)\rangle \quad (\text{II.5.4})$$

$$H |\psi(E)\rangle = E |\psi(E)\rangle \quad (\text{II.5.5})$$

$$|\psi(E)\rangle = U |\psi_0(E)\rangle. \quad (\text{II.5.6})$$

Pour préciser le choix des vecteurs $|\psi(E)\rangle$ et $|\psi_0(E)\rangle$, nous travaillons dans l'espace de configuration (cet espace est celui qui a toujours été pris jusqu'à présent et que nous choisirons dans la suite ; on pourrait cependant développer la théorie dans un autre espace comme par exemple l'espace des moments ; dans ce cas, la classe des potentiels obtenus par la méthode inverse, ne sera pas nécessairement la classe des potentiels locaux dans l'espace de configuration). Les valeurs de x appartiennent à l'intervalle $[x_0, x_1]$ ($[0, \infty)$ dans le cas de l'équation radiale réduite), et nous imposons dans l'espace de configuration que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \langle x | \psi(E) \rangle = \lim_{x \rightarrow x_0} \langle x | \psi_0(E) \rangle. \quad (\text{II.5.7})$$

Les ensembles ϵ_0 et ϵ sont ceux des fonctions qui vérifient deux conditions en un même point x_0 (pour la méthode de Gel'fand, ce sont les solutions régulières en $x_0 = 0$ et pour la méthode de Marchenko ce sont les solutions de Jost, définies par leur comportement asymptotique en $x_0 = \infty$). L'équation de Schrödinger et les conditions imposées en x_0 sont alors équivalentes à une équation intégrale du type de Volterra :

$$\langle x | \psi(E) \rangle = \langle x | \psi_0(E) \rangle + \int_{x_0}^x dy \langle x | G_0(E) | y \rangle \langle y | \psi(E) \rangle \quad (\text{II.5.8})$$

où $G_0(E)$ représente la fonction de Green correspondant à deux conditions imposées en un même point. Les opérateurs du type de Volterra possèdent les propriétés remarquables suivantes :

- i) le produit de deux opérateurs de Volterra et l'inverse d'un opérateur de Volterra sont des opérateurs du type de Volterra ;
- ii) une équation intégrale de Volterra de seconde espèce admet toujours une solution unique et la série de Neumann correspondante converge. La résolvente est une fonction transcendente entière en la constante de couplage et est aussi un opérateur de Volterra.

L'opérateur de transformation U sera donc un opérateur du type de Volterra ; grâce aux propriétés de ces opérateurs, nous pouvons écrire :

$$U = I + K \quad (II.5.9)$$

$$U^{-1} = U_0 = I + K_0 \quad (II.5.10)$$

$$\langle x | \psi(E) \rangle = \langle x | \psi_0(E) \rangle + \int_{x_0}^x \langle x | K | x' \rangle dx' \langle x' | \psi_0(E) \rangle \quad (II.5.11)$$

$$\langle x | K | x' \rangle = K(x, x') = 0 \quad \text{si } x' \notin [x_0, x] \quad (II.5.12)$$

$$\langle x | \psi_0 \rangle = \langle x | \psi \rangle + \int_{x_0}^x \langle x | K_0 | x' \rangle dx' \langle x' | \psi \rangle. \quad (II.5.13)$$

Le fait d'imposer que les opérateurs de transformation soient du type de Volterra, permet de réduire la relation de complétude à une équation linéaire pour le noyau K . En effet, si nous posons $W = I + \Omega$ et si nous prenons le conjugué hermitien de l'équation (II.5.1), nous obtenons :

$$(I+K)(I+\Omega) = (I+K_0^\dagger) \quad (II.5.14)$$

$$K(x, y) + \Omega(x, y) + \int_{x_0}^x K(x, z)\Omega(z, y)dz = K_0^\dagger(y, x). \quad (II.5.15)$$

Pour $y \in [x_0, x]$, nous obtenons l'équation fondamentale linéaire du problème inverse :

$$K(x, y) + \Omega(x, y) + \int_{x_0}^x K(x, z)\Omega(z, y)dz = 0. \quad (II.5.16)$$

Cette équation intégrale est du type de Fredholm pour x fixé, elle permet de calculer K pour Ω donné. Le problème consiste à définir Ω et à trouver pour quelle classe de potentiel, il existe un opérateur de transformation borné.

§ 6. OPERATEURS DE TRANSFORMATION DU TYPE DE GEL'FAND ET DE MARCHENKO

Les premiers théorèmes d'existence d'opérateurs de transformation correspondent au cas où le potentiel de référence V_0 est nul. Leur démonstra-

tion est basée sur des théorèmes très généraux concernant les transformées de Fourier [CHA 77]. L'opérateur de transformation de Gel'fand [GEL 55] qui permet la représentation des solutions régulières, est obtenu à partir du théorème de Paley-Wiener [voir CHA 77], tandis que l'existence d'un opérateur de transformation du type de Marchenko [AGR 63], qui permet la représentation des solutions de Jost, peut être démontrée à partir d'un théorème de Titchmarsh [TIT 37] (p. 128, th. 95). Une excellente étude comparative de ces deux théories a été faite par Faddeev [FAD 63].

Si nous voulons généraliser la théorie des opérateurs de transformation à des problèmes rencontrés en physique nucléaire, où l'interaction centrifuge et l'interaction de Coulomb interviennent et doivent être introduites dans le potentiel de référence V , nous ne disposons plus de théorèmes puissants de la théorie des transformées de Fourier qui nous permettent d'obtenir directement la forme des opérateurs de transformation. Pour généraliser les théorèmes d'existence, nous considérons un opérateur de transformation du type de Volterra et nous imposons qu'il vérifie l'équation $LU = UL_0$ où L et L_0 sont les opérateurs de Schrödinger pour l'onde λ des hamiltoniens H et H_0 . Nous obtenons alors une équation aux dérivées partielles pour l'opérateur de transformation avec des conditions aux limites qui varient suivant le type d'opérateur considéré. Nous devons alors rechercher les conditions à imposer au potentiel perturbatif pour assurer l'existence d'un opérateur de transformation dont le noyau dans l'espace de configuration est une fonction bornée, continuellement dérivable et intégrable et non pas simplement une distribution. Nous verrons que ces conditions dépendront du potentiel de référence V_0 . Les équations fondamentales du problème inverse qui relient le noyau de K à la fonction poids W , découlent de l'existence de cet opérateur de transformation et de la complétude des fonctions propres de L_0 et L .

A. Equation fondamentale de Gel'fand-Levitan

Nous supposons qu'il existe un opérateur U_G tel que

$$\phi(k, r) = U_G \phi_0(k, r). \quad (\text{II.6.1})$$

Les conditions d'existence de U_G seront étudiées plus tard. ϕ et ϕ_0 sont les solutions régulières à l'origine des deux équations

$$L\phi + k^2\phi = \left[+ \frac{d^2}{dr^2} - V_1(r) \right] \phi + k^2\phi \quad (\text{II.6.2})$$

$$L_0\phi_0 + k^2\phi_0 = \left[\frac{d^2}{dr^2} - V_0(r) \right] \phi_0 + k^2\phi_0 \quad (\text{II.6.3})$$

$$V_1 = V_0 + V \quad (\text{II.6.4})$$

$$V_0 = \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} + W_0 \quad (\text{II.6.5})$$

Les relations de complétude s'écrivent à l'aide des intégrales de Stieltjes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(k,x) d\rho(E) \phi(k,y) = \delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(k,x) d\rho_0(E) \phi_0(k,y) \quad (\text{II.6.6})$$

où ρ et ρ_0 sont les fonctions spectrales définies au chapitre I. Dans le cas d'un potentiel V complexe, il faut généraliser la fonction spectrale ρ comme nous l'avons fait au chapitre I de façon à tenir compte des zéros multiples de $f(k)$ et des singularités spectrales. Nous appliquons l'opérateur de transformation U à gauche et son hermitien conjugué U^\dagger à droite de l'opérateur poids W dont le noyau dans l'espace de configuration est défini par l'équation

$$W(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(k,x) d\rho(E) \phi_0^*(k,y) \quad (\text{II.6.7})$$

et nous obtenons

$$UWU^\dagger = I. \quad (\text{II.6.8})$$

L'équation fondamentale généralisée de Gel'fand-Levitan s'écrit

$$K_G(x,y) + \Omega(x,y) + \int_0^x K(x,z)\Omega(z,y)dz = 0 \quad \text{si } y < x \quad (\text{II.6.9})$$

où

$$\Omega(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(k,x) [d\rho(E) - d\rho_0(E)] \phi_0^*(k,y); \quad (\text{II.6.10})$$

inversément si nous considérons une fonction $\Omega(x,y)$ telle que

$$L_0(x)\Omega(x,y) = L_0(y)\Omega(x,y) \quad (\text{II.6.11})$$

$$\Omega(x,0) = \Omega(0,y) = 0 \quad (\text{II.6.12})$$

nous pouvons écrire la représentation suivante :

$$\Omega(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(k,x) dh(E) \phi_0(k,y) \quad (\text{II.6.13})$$

où la fonction $h(E)$ n'est pas précisée pour l'instant. Le noyau de l'opérateur de transformation de Gel'fand-Levitan, solution de l'équation fondamentale, possédera automatiquement les propriétés suivantes :

i)

$$L(x)K(x,y) = L_0(y)K(x,y) \quad (II.6.14)$$

où

$$L(x) = L_0(x) + \frac{2d}{dx} K(x,x) \quad (II.6.15)$$

$$K(x,0) = 0 \quad (II.6.16)$$

(l'équation (II.6.14) est parfois appelée l'équation non linéaire de Chudov). Les résultats (II.6.14-16) s'obtiennent en appliquant l'opérateur différentiel $[L(x)-L_0(y)]$ à l'équation fondamentale (II.6.9), en intégrant par parties et en supposant que l'équation fondamentale possède une solution unique ;

ii) la fonction $\phi(k,x)$ définie par l'équation intégrale

$$\phi(k,x) = \phi_0(k,x) + \int_0^x K_G(x,y)\phi_0(k,y)dy, \quad (II.6.17)$$

est la solution régulière de l'équation de Schrödinger

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + V_0(x) + 2\frac{d}{dx} K(x,x)\right]\phi(k,x) = 0 \quad (II.6.18)$$

$$\phi(k,0) = 0.$$

Ce résultat est évident à partir des équations

$$\phi = U\phi_0 \quad (II.6.19)$$

$$LU = UL_0. \quad (II.6.20)$$

Les propriétés i) et ii) sont indépendantes de la forme précise de la fonction $h(E)$ pour autant que l'équation fondamentale ait une solution unique. La forme exacte de $h(E)$ est définie par le fait que l'opérateur de transformation K_G est un opérateur de Volterra qui possède par conséquent un inverse $K_2(x,y)$ tel que

$$\phi_0(k,x) = \phi(k,x) + \int_0^x K_2(x,y)\phi(k,y)dy. \quad (II.6.21)$$

Le fait d'imposer que les ensembles $\{\phi_0(k, x)\}$ et $\{\phi(k, x)\}$ sont complets, conduit à la relation [NEW 66] :

$$h(E) = \rho(E) - \rho_0(E). \quad (\text{II.6.22})$$

B. Equation fondamentale de Marchenko

L'équation fondamentale de Marchenko généralisée peut aussi être obtenue à partir de l'existence d'un opérateur de transformation K_M et de la complétude des deux systèmes de solutions considérées pour L et L_0 . Tout d'abord, nous devons réécrire la relation de complétude (II.6.6) en fonction des solutions de Jost. Si nous supposons que $-k_j$ appartient au domaine d'analyticité, connecté à l'axe réel, de la fonction de Jost, la constante de normalisation C_j est donnée par l'expression :

$$C_j^{-1} = \frac{-\dot{f}(k_j) i^\ell}{2 k_j^{\ell+1} (2\ell+1)!!} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(k_j, x)^{-1}}{x^{\ell+1}} \right] = \frac{-f(-k_j) \dot{f}(k_j)}{4 i(k_j)^{2\ell+2}}. \quad (\text{II.6.23})$$

L'équation fondamentale de Marchenko généralisée sera obtenue au chapitre IX par une méthode différente sans faire l'hypothèse d'analyticité (II.6.23) et dans le cas plus général où le potentiel V_1 est une matrice non hermitienne. Nous transformons séparément les deux termes du premier membre de l'équation (II.6.6)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(k, x) \frac{k^{2\ell+2} dk}{f(k)f(-k)} \phi(k, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \phi(k, x) \frac{k^{2\ell+2} dk}{f(k)f(-k)} \phi(k, y) \\ &= \frac{1}{2\pi i^{\ell+1}} \int_{-\infty}^\infty \phi(k, x) \frac{k^{\ell+1} dk}{f(k)f(-k)} [f(k, y)f(-k) - (-)^{\ell} f(-k, y)f(k)] \\ &= \frac{(-i)^{\ell+1}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \phi(k, x) \frac{k^{\ell+1} dk}{f(k)} f(k, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk [f(-k, x) - (-)^{\ell} f(k, x) S(k)] f(k, y). \end{aligned} \quad (\text{II.6.24})$$

$$\sum_{j=1}^n C_j \phi(k_j, x) \phi(k_j, y) = \sum_{j=1}^n \frac{4i k_j^{2\ell+2}}{f(-k_j) \dot{f}(k_j)} \frac{(-1)^{\ell}}{4k_j^{2\ell+2}} f^2(-k_j) f(k_j, x) f(k_j, y).$$

(II.6.25)

Nous pouvons écrire pour x et $y \geq 0$:

$$\delta(x-y) - (-)^{\ell} \delta(x+y) = \delta(x-y)$$

$$= \sum_{j=1}^n M_j^2 f(k_j, x) f(k_j, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk [f(-kx) - (-)^{\ell} f(k, x) S(k)] f(k, y) dk \quad (II.6.26)$$

où

$$M_j^2 = \frac{C_j f^2(-k_j)}{4 (-k_j^2)^{\ell+1}} = (-)^{\ell} i \frac{f(-k_j)}{f(k_j)} > 0 \quad (II.6.27)$$

si $-k_j$ appartient au domaine d'analyticité relié à l'axe réel de $f(k)$. Dans l'équation (II.6.26), l'intégrant ne peut plus être séparé en deux parties car chacune de ces deux parties peut ne plus être intégrable séparément pour $\ell \geq 1$. L'opérateur poids est défini dans l'espace de configuration par la relation :

$$F(x, y) = \frac{(-)^{\ell+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(k, x) [S(k) - S_0(k)] f_0(k, y) dk$$

$$+ \sum_{j=1}^n M_j^2 f_0(k_j, x) f_0(k_j, y) - \sum_{j=1}^{n_0} M_{j,0}^2 f_0(k_j^0, x) f_0(k_j^0, y) \quad (II.6.28)$$

où les k_j^0 représentent les états liés de l'hamiltonien non perturbé et

$$M_{j,0}^2 = (-)^{\ell} i \frac{f_0(-k_j^0)}{f_0(k_j^0)} \quad (II.6.29)$$

Nous calculons $U_M F U_M^{\dagger}$ en tenant compte du fait que comme U_M est un opérateur réel, nous pouvons écrire pour k réel :

$$f(k, x) = U_M f_0(k, x) \quad (II.6.30)$$

et

$$f(-k, x) = f(k, x)^* = U_M f_0(-k, x) ; \quad (II.6.31)$$

$$[U_M F U_M^{\dagger}](x, y) = \frac{(-)^{\ell+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, x) [S(k) - S_0(k)] f(k, y) dk$$

$$+ \sum_{j=1}^n M_j^2 f(k_j, x) f(k_j, y) - \sum_{j=1}^{n_0} M_{j,0}^2 f(k_j^0, x) f(k_j^0, y)$$

$$= \delta(x-y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk [f(-kx) - (-)^k S_0(k) f(k, x)] f(k, y) - \sum_{j=1}^n M_{j,0}^2 f(k_j^0, x) f(k_j^0, y). \quad (II.6.32)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$U_M F U_M^\dagger = I - U_M U_M^\dagger. \quad (II.6.33)$$

L'équation fondamentale de Marchenko s'écrit alors :

$$K_M(x, y) + \int_x^\infty K_M(x, z) F(z, y) dz + F(x, y) = 0 \quad \text{pour } y > x. \quad (II.6.34)$$

La même méthode que celle appliquée pour Gel'fand-Levitan, montre que :

$$L(x) - L_0(x) = -2 \frac{d}{dx} K_M(x, x). \quad (II.6.35)$$

Remarques :

a) La méthode de Marchenko est mieux adaptée que la méthode de Gel'fand pour le problème de la diffusion car l'opérateur poids peut être obtenu directement à partir des déphasages et des états liés par l'intermédiaire de la matrice S . Dans le cas de Gel'fand, pour obtenir l'opérateur poids W_G , nous devons connaître la fonction de Jost sur l'axe réel. Cette fonction de Jost peut être obtenue à partir des déphasages et des états liés en utilisant une méthode due à Jost et Kohn [JOS 53] et qui est basée sur quatre hypothèses qui sont vérifiées par exemple si on impose que le potentiel V est réel et vérifie $\int_0^\infty dr r |V(r)| < \infty$; ces hypothèses sont :

1. $f(-k) = f^*(k)$ pour k réel ;
2. $f(k)$ est analytique dans le demi-plan supérieur ;
3. $\lim_{|k| \rightarrow \infty} f(k) = 1$ lorsque k appartient au demi-plan supérieur ;
4. les valeurs propres du spectre discret de $L(x)$ sont données par les zéros de $f(k)$ sur le demi-axe imaginaire positif.

Sous ces quatre hypothèses, la fonction de Jost est définie de façon unique à partir des déphasages et des états liés par la formule [NEW 66] :

$$f(k) = \prod_n \left[1 - \frac{E_n}{E(k)} \right] \exp \left[- \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\delta_\ell(k')}{k' - k - i\epsilon} \right] \quad (II.6.36)$$

$$|f(k)| = \prod_n \left[1 - \frac{E_n}{E(k)} \right] \exp \left[- \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\delta_\ell(k')}{k'-k} \right]. \quad (II.6.37)$$

La théorie de Gel'fand proprement dite ne nécessite pas ces quatre hypothèses, c'est-à-dire que nous pouvons trouver le potentiel V si $f(k)$ pour k réel, les états liés et les constantes de normalisation sont donnés. Il suffit que l'équation fondamentale de Gel'fand-Levitan ait une solution pour qu'on soit sûr qu'elle reproduise les $f(k)$, E_i et C_i . Cependant, si on accepte n'importe quelle fonction $f(k)$, on pourrait bien entendu obtenir un potentiel qui n'a pas de moment d'ordre 1 à l'infini. Ainsi, Moses et Tuan [MOS 59] parviennent à construire des potentiels transparents qui ont un spectre discret plongé dans le continu ($V(r) = \frac{6r(r^3-2\lambda)}{(r^3+\lambda)^2}$). Dans ce cas, la quatrième condition est violée et le potentiel décroît à l'infini comme $1/r^2$.

D'autre part, nous pourrions être étonnés que le noyau de Gel'fand ne dépende des déphasages que par l'intermédiaire de la fonction $|f(k)|$. En fait, si nous faisons les quatre hypothèses énoncées ci-dessus, il ne peut correspondre qu'un seul déphasage $\delta_\ell(k)$ pour $|f(k)|$ donné; pour le voir, il suffit de prendre la transformée de Hilbert inverse de l'équation (II.6.37) pour obtenir la relation :

$$\delta_\ell(k) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \frac{|f(k')|}{\prod_n (1-E_n/E(k'))}}{k'-k} dk', \quad (II.6.38)$$

b) les constantes de normalisation requises pour définir une solution unique au problème inverse ne sont pas les mêmes dans les deux approches. Dans la procédure de Gel'fand, la constante de normalisation est déterminée par la valeur à l'origine de la première dérivée non nulle de la fonction d'onde normalisée $\psi_n(x)$:

$$C_i^{1/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\ell+1)!}{x^{\ell+1}} \psi_i(x).$$

Si nous faisons l'hypothèse d'analyticité, nous obtenons la valeur suivante :

$$C_i = \frac{4i(k_i)^{2\ell+2}}{f(-k_i)f(k_i)}$$

qui peut alors être obtenue à partir des états liés et des déphasages par l'intermédiaire du calcul de $f(-k_i)$ et $f(k_i)$. Ce choix de C_i correspond au potentiel [NEW 66] qui a la plus courte portée possible parmi tous les potentiels locaux qui pourraient reproduire les mêmes E_i et $\delta_i(k)$. La constante C_i définit en quelque sorte l'extension spatiale de la fonction d'onde ou la dimension de l'état lié (= distance moyenne entre les deux particules liées).

Ces constantes C_i pourraient être déterminées par des expériences effectuées sur l'état lié considéré. Ainsi, la dimension du deuteron peut être déterminée à partir de l'amplitude de la section efficace dipolaire électrique de photo-désintégration du deuteron au voisinage de son maximum (voir [BLA 63], p. 612). Pour une certaine forme de potentiel (potentiel de Bargmann), Newton [NEW 57] a montré que les données expérimentales conduisent à une constante C_i très proche de celle obtenue par extrapolation analytique. Dans la procédure de Marchenko, la constante de normalisation M_i^1 est liée au comportement asymptotique de la fonction d'onde $\psi_i(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_i(x) = M_i e^{-K_i x}.$$

Une méthode d'extrapolation analytique pour obtenir M_i à partir de la section efficace totale est décrite dans [LOC 78]. Les deux constantes C_i et M_i ne sont pas indépendantes car nous avons la relation

$$C_i M_i^2 = \frac{4(-)^l}{[f(k_j)]^2}.$$

Si $-k_i$ appartient au domaine d'analyticité de la fonction de Jost, nous avons :

$$M_i^2 = (-)^l i \frac{f(-k_i)}{f(k_i)}.$$

§ 7. EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES POUR LES OPERATEURS DE TRANSFORMATION GENERALISES

Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, l'étude du problème inverse est basée sur l'existence d'un opérateur de transformation continu et borné. De façon tout à fait générale, l'existence d'un opérateur de transformation U se ramène à l'étude de l'existence d'une solution convenable à l'équation de similitude

$$L_1 U = U L_0. \quad (\text{II.7.1})$$

Les deux opérateurs L_i considérés sont des opérateurs différentiels du second ordre :

$$L_i(x) = a_i(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_i(x) \frac{d}{dx} + c_i(x) \quad (i = 0, 1). \quad (\text{II.7.2})$$

L'équation (II.7.1) seule, ne définit pas de façon unique l'opérateur de transformation. Nous devons donc préciser le problème de façon à n'avoir qu'une solution à l'équation (II.7.1). Puisque les opérateurs L_i sont des opérateurs différentiels, il est possible de définir des opérateurs de transformation qui sont des opérateurs intégraux du type de Volterra ; par contre, ceci ne serait pas possible si les L_i étaient des opérateurs intégral-différentiels correspondant à des potentiels non-locaux par exemple. Nous considérons un opérateur de transformation dont le noyau $K(x,y)$ dans l'espace de configuration est nul pour $y \notin [x_0, x]$ où x_0 est une constante ($0 \leq x_0 \leq \infty$). Les ensembles ϵ_0 et ϵ_1 sur lesquels L_0 et L_1 agissent respectivement sont définis de la façon suivante :

$$\epsilon_0 = \{f_0(x) : f_0(x) \in C^2(0, \infty) \text{ et } f_0'(x_0) = \alpha_0 f_0(x_0)\}$$

et (II.7.3)

$$\epsilon_1 = \{f_1(x) : f_1(x) \in C^2(0, \infty) \text{ et } f_1'(x_0) = \alpha_1 f_1(x_0)\}.$$

A. U = I + K

L'opérateur U est triangulaire et fait correspondre à tout élément f_0 de ϵ_0 un élément f_1 de ϵ_1 par la relation :

$$f_1(x) = Uf_0(x) = f_0(x) + \int_{x_0}^x K(x,y)f_0(y)dy. \quad (II.7.4)$$

On vérifie aisément que :

i)
$$f_1(x_0) = f_0(x_0) = A \quad (II.7.5)$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + K(x_0, x_0); \quad (II.7.6)$$

ii) si

$$\phi_0 \in \epsilon_0 : L_0 \phi_0 = k^2 \phi_0 \quad (II.7.7)$$

alors

$$\phi_1 = U\phi_0 \in \epsilon_1 : L_1 \phi_1 = k^2 \phi_1. \quad (II.7.8)$$

Nous évaluons $L_1 Uf_0$ et $UL_0 f_0$ pour $f_0 \in \epsilon_0$.

$$L_1 U f_0 = [a_1(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_1(x) \frac{d}{dx} + c_1(x)] [f_0(x) + \int_{x_0}^x K(x,y) f_0(y) dy] \quad (II.7.9)$$

$$= [a_1(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_1(x) \frac{d}{dx} + c_1(x)] f_0(x)$$

$$+ a_1(x) \left[\int_{x_0}^x dy \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y) f_0(y) + \frac{\partial}{\partial y} K(x,y) \Big|_{y=x} f_0(x) \right]$$

$$+ \frac{d}{dx} [K(x,x)] f_0(x) + K(x,x) \frac{d}{dx} f_0(x)$$

$$+ b_1(x) [K(x,x) f_0(x) + \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,y) f_0(y) dy]$$

$$+ c_1(x) \int_{x_0}^x K(x,y) f_0(y) dy. \quad (II.7.10)$$

$$UL_0 f_0(x) = [a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_0(x) \frac{d}{dx} + c_0(x)] f_0(x)$$

$$+ \int_{x_0}^x dy K(x,y) [a_0(y) \frac{d^2}{dy^2} + b_0(y) \frac{d}{dy} + c_0(y)] f_0(y) \quad (II.7.11)$$

$$= [a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_0(x) \frac{d}{dx} + c_0(x)] f_0(x)$$

$$+ \int_{x_0}^x dy K(x,y) c_0(y) f_0(y) - \int_{x_0}^x dy \frac{\partial}{\partial y} [K(x,y) b_0(y)] f_0(y)$$

$$+ K(x,y) b_0(y) f_0(y) \Big|_{x_0}^x + K(x,y) a_0(y) \frac{d}{dy} f_0(y) \Big|_{y=x_0}^{y=x}$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} [K(x,y) a_0(y) f_0(y)] \Big|_{y=x_0}^{y=x}$$

$$+ \int_{x_0}^x \frac{\partial^2}{\partial y^2} [K(x,y) a_0(y)] f_0(y). \quad (II.7.12)$$

L'égalité (II.7.1) conduit aux équations suivantes :

$$[a_1(x) - a_0(x)] \frac{d^2}{dx^2} f_0(x) = 0 \quad (II.7.13)$$

$$[b_1(x) + a_1(x)K(x,x) - b_0(x) - K(x,x)a_0(x)] \frac{d}{dx} f_0(x) = 0 \quad (II.7.14)$$

$$[c_1(x) + a_1(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} K(x,y) \Big|_{y=x} + \frac{d}{dx} K(x,x) \right) + b_1(x)K(x,x) - c_0(x) + a_0(x) \frac{\partial}{\partial y} K(x,y) \Big|_{y=x} + K(x,x) \frac{d}{dx} a_0(x) - b_0(x)K(x,x)] f_0(x) = 0 \quad (II.7.15)$$

$$K(x,x_0)b_0(x_0) + K(x,x_0)a_0(x_0)\alpha_0 - \frac{\partial}{\partial y} [K(x,y)a_0(y)] \Big|_{y=x_0} = 0 \quad (II.7.16)$$

$$\int_{x_0}^x dy [a_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y) + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x} K(x,y) + c_1(x)K(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a_0(y)K(x,y)] + \frac{\partial}{\partial y} (b_0(y)K(x,y)) - c_0(y)K(x,y)] f_0(y) = 0. \quad (II.7.17)$$

L'équation (II.7.13) impose que l'équation de référence et l'équation perturbée possèdent les mêmes masses effectives :

$$a_1(x) = a_0(x) = a(x). \quad (II.7.18)$$

Si l'équation (II.7.18) est vérifiée, l'équation (II.7.14) conduit à la relation :

$$b_1(x) = b_0(x) = b(x). \quad (II.7.19)$$

Avec les hypothèses (II.7.18 et 19), le noyau $K(x,y)$ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites suivantes :

$$L_1(x)K(x,y) = L_0^T(y)K(x,y) \quad (II.7.20)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a(y)K(x,y)] - \frac{\partial}{\partial y} [b(y)K(x,y)]$$

$$+ c_0(y)K(x,y). \quad (II.7.21a)$$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \{K(x, y) b_0(y) + K(x, y) a_0(y) \alpha_0 - \frac{\partial}{\partial y} [K(x, y) a_0(y)]\} = 0 \quad (\text{II.7.22a})$$

$$2a(x) \frac{d}{dx} K(x, x) + K(x, x) \frac{d}{dx} a(x) = c_0(x) - c_1(x) \quad (\text{II.7.23a})$$

$$K(x_0, x_0) = \alpha_1 - \alpha_0. \quad (\text{II.7.24a})$$

Si nous nous limitons au cas le plus souvent rencontré où

$$a(x) = 1 \quad (\text{II.7.25})$$

et

$$b(x) = 0 \quad (\text{II.7.26})$$

les équations (II.7.21-24) deviennent :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) + c_1(x) K(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) + c_0(y) K(x, y) \quad (\text{II.7.21b})$$

$$2 \frac{d}{dx} K(x, x) = c_0(x) - c_1(x) \quad (\text{II.7.23b})$$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} K(x, y) \alpha_0 = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \quad (\text{II.7.22b})$$

$$K(x_0, x_0) = \alpha_1 - \alpha_0. \quad (\text{II.7.24b})$$

L'opérateur de Gel'fand K_G correspond au choix des fonctions régulières $\phi(k, x)$ qui se comportent au voisinage de l'origine de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(k, x) = \frac{x^{k+1}}{(2k+1)!!}. \quad (\text{II.7.27})$$

Nous devons donc faire le choix :

$$x_0 = 0 \quad (\text{II.7.28})$$

et

$$\alpha_0 = \infty. \quad (\text{II.7.29})$$

Comme $\alpha_0 = \infty$, l'équation (II.7.22b) impose :

$$\lim_{y \rightarrow 0} K(x, y) = 0 \quad (\text{II.7.30})$$

et par conséquent

$$\alpha_1 = \alpha_0 + K_G(0, 0) = \alpha_0 = \infty \quad (\text{II.7.31})$$

et

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1. \quad (\text{II.7.32})$$

Lorsque le potentiel de référence ne contient pas de terme centrifuge ($\ell=0$), les deux solutions linéairement indépendantes sont finies à l'origine ; on peut alors définir plusieurs opérateurs du type de Gel'fand que nous noterons K_α et qui correspondent aux différents choix possibles pour α_1 et α_0 . L'opérateur noté $K_+(x, y)$ correspond au choix $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$ et $K_-(x, y) = K_G(x, y)$.

L'opérateur de transformation du type de Marchenko correspond au choix

$$K_M = -K \quad (\text{II.7.33})$$

$$x_0 = \infty \quad (\text{II.7.34})$$

$$\alpha_0 = ik. \quad (\text{II.7.35})$$

Comme K_M est indépendant de k , nous obtenons les conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K(x, y) = 0 \quad (\text{II.7.36})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \{b_0(y)K(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} [K(x, y)a_0(y)]\} = 0 \quad (\text{II.7.37})$$

$$\alpha_1 = ik + \lim_{y \rightarrow \infty} K(y, y) = ik = \alpha_0 \quad (\text{II.7.38})$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = \{f : f \in C^2(0, \infty) \cap L^\infty(0, \infty)\}. \quad (\text{II.7.39})$$

D'autre part, les intégrales suivantes doivent être définies :

$$\int_x^\infty |K_M(x, y)| dy < \infty \quad (II.7.40)$$

$$\int_x^\infty \left| \frac{\partial K_M}{\partial y}(x, y) \right| dy < \infty \quad (II.7.41)$$

$$\int_x^\infty \left| \frac{\partial K_M}{\partial x}(x, y) \right| dy < \infty \quad (II.7.42)$$

$$\int_x^\infty \left| \frac{\partial^2 K_M}{\partial y^2}(x, y) \right| dy < \infty \quad (II.7.43)$$

$$\int_x^\infty \left| \frac{\partial^2 K_M}{\partial x^2}(x, y) \right| dy < \infty. \quad (II.7.44)$$

L'étude de l'existence de ces intégrales sera faite aux chapitres V et suivants en utilisant la méthode de Riemann décrite au chapitre III.

B. U = F + K

De façon à généraliser le domaine d'application de la théorie des opérateurs de transformation triangulaires au cas $b_0 \neq b_1$ et $f_1(x_0) \neq f_0(x_0)$, nous considérons à présent un opérateur de transformation de la forme :

$$U(x, y) = F(x)\delta(x-y) + K(x, y) \quad (II.7.45)$$

où nous avons toujours $K(x, y) = 0$ pour $y \notin]x_0, x[$.

Nous obtenons les égalités suivantes :

$$f_1(x_0) = F(x_0)f_0(x_0) \quad (II.7.46)$$

$$f_1'(x_0) = F'(x_0)f_0(x_0) + F(x_0)f_0'(x_0) + K(x_0, x_0)f_0(x_0) \quad (II.7.47)$$

$$\alpha_1 = \frac{f_1'(x_0)}{f_1(x_0)} = \alpha_0 + \frac{F'(x_0) + K(x_0, x_0)}{F(x_0)} \quad (II.7.48)$$

L'égalité $L_1 U f_0 = U L_0 f_0$ conduit aux équations suivantes :

$$a_1(x) = a_0(x) = a(x), \quad (II.7.49)$$

$$[b_1(x) - b_0(x)]F(x) + 2a(x) \frac{d}{dx} F(x) = 0 \quad (II.7.50a)$$

ou

$$F(x) = \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{b(s) - b_1(s)}{2a(s)} ds \right] F(x_0) \quad (II.7.50b)$$

$$\begin{aligned} & c_1(x)F(x) + a_1(x) \frac{d^2}{dx^2} F(x) + b_1(x) \frac{d}{dx} F(x) + a_1(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \Big|_{y=x} \right. \\ & \left. + \frac{d}{dx} K(x, x) \right] + b_1(x)K(x, x) - c_0(x)F(x) + a_0(x) \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \Big|_{y=x} + K(x, x) \frac{\partial}{\partial x} a(x) \\ & - b_0(x)K(x, x) = 0. \end{aligned} \quad (II.7.51a)$$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \{ K(x, y)b_0(y) + K(x, y)a_0(y)\alpha_0 - \frac{\partial}{\partial y} [K(x, y)a_0(y)] \} = 0 \quad (II.7.52)$$

$$\begin{aligned} & a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) + c_1(x)K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a(y)K(x, y)] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [b_0(y)K(x, y)] - c_0(y)K(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (II.7.53a)$$

ou

$$L_0(x)K(x, y) = L_1^T(y)K(x, y). \quad (II.7.53b)$$

L'équation (II.7.51a) peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} & \left\{ a(x) \left[\left(\frac{b_0(x) - b_1(x)}{2a(x)} \right)' + \left(\frac{b_0(x) - b_1(x)}{2a(x)} \right)^2 \right] + b_1(x) \left(\frac{b(x) - b_1(x)}{2a(x)} \right) \right. \\ & \left. + c_1(x) - c_0(x) \right\} \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{b_0(s) - b_1(s)}{2a(s)} ds \right] F(x_0) + 2a(x) \frac{d}{dx} K(x, x) \\ & + [b_1(x) - b_0(x)]K(x, x) + K(x, x) \frac{d}{dx} a(x) = 0. \end{aligned} \quad (II.7.51b)$$

C. Opérateurs de transformation du type de Marchenko pour des potentiels dépendant des vitesses

Nous considérons le problème à k fixé où les équations différentielles contiennent un terme linéaire en k et prennent la forme :

$$L_i(x) = a_i \frac{d^2}{dx^2} + b_i \frac{d}{dx} + c_i + d_i k. \quad (\text{II.7.54})$$

Nous considérons parmi les fonctions propres de $L_0 + k^2$ un ensemble de deux solutions linéairement indépendantes $f_0^\pm(k, x)$ qui vérifient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$p \frac{d}{dx} f_0^\pm(k, x) + q f_0^\pm(k, x) = \pm k f_0^\pm(k, x). \quad (\text{II.7.55})$$

De telles fonctions ne peuvent être caractérisées que par leur comportement à l'infini où le terme en k^2 est dominant (nous supposons que $a_i \rightarrow 1; b_i, c_i, d_i \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$). La théorie qui sera développée ne marche que pour des opérateurs de transformation du type de Marchenko. Un problème semblable peut être traité à E fixe où le potentiel possède une dépendance linéaire en ℓ . Dans ce cas, on doit considérer les fonctions d'onde dont le comportement est défini à l'origine où $(\ell(\ell+1))/r^2$ constitue le terme dominant et la théorie ne s'applique qu'à des opérateurs de transformation du type de Gel'fand. La théorie de Jaulent-Jean [JAU 76] à ℓ fixé, des potentiels dépendant de k est un cas particulier du premier problème que nous considérons ici tandis que la théorie de Sabatier-Hooshyar [SAB 68, HOO 78] à E fixé pour des potentiels de spin-orbite est un cas particulier du second problème qui peut facilement être traité par analogie au premier. Nous voulons pouvoir écrire :

$$L_0 + k^2 = k^2 - [p(x) \frac{d}{dx} + q(x)]^2 \quad (\text{II.7.56})$$

$$a_0 \frac{d^2}{dx^2} + b_0 \frac{d}{dx} + c_0 + d_0 k = -p^2(x) \frac{d^2}{dx^2} - p(x)[p'(x) + 2q(x)] \frac{d}{dx} - [q^2(x) + p(x)q'(x)].$$

(II.7.57)

Nous supposons que les fonctions $a_1(x) - a_0(x), b_1(x) - b_0(x), c_1(x) - c_0(x), d_1(x)$ tendent vers zéro lorsque x tend vers l'infini et nous considérons des solutions de $L_1, f_1^\pm(k, x)$ qui sont caractérisées par un comportement asymptotique tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1^\pm(k, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) f_0^\pm(k, x). \quad (\text{II.7.58})$$

Nous devons à nouveau évaluer les deux membres de l'équation :

$$L_1 U_1^\pm f_0^\pm = U_1^\pm L_0 f_0^\pm \quad (\text{II.7.59})$$

où

$$U^\pm = F^\pm + K^\pm.$$

(II.7.60)

Nous obtenons les résultats suivants :

$$L_1 U_0^\pm f_0^\pm = [a_1 \frac{d^2}{dx^2} + b_1 \frac{d}{dx} + c_1 + d_1 k] [F^\pm(x) f_0^\pm(k, x) + \int_x^\infty K^\pm(x, y) f_0^\pm(k, y)]$$

$$= F^\pm(x) [a_1 \frac{d^2}{dx^2} + b_1 \frac{d}{dx} + c_1 \pm d_1 p \frac{d}{dx} \pm d_1 q] f_0^\pm$$

$$+ 2a_1 F'^{\pm}(x) \frac{d}{dx} f_0^\pm + a_1 F''^{\pm}(x) f_0^\pm + b_1 F'^{\pm} f_0^\pm$$

$$+ a_1 \left[\int_x^\infty dy \frac{\partial^2}{\partial x^2} K^\pm(x, y) f_0^\pm(k, y) - \left[\frac{\partial}{\partial x} K^\pm(x, y) \right]_{y=x} f_0^\pm(k, x) \right.$$

$$\left. - \frac{d}{dx} [K^\pm(x, x)] f_0^\pm(k, x) - K^\pm(x, x) \frac{d}{dx} f_0^\pm(k, x) \right]$$

$$+ b_1 [-K^\pm(x, x) f_0^\pm + \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x} K^\pm(x, y) f_0^\pm(k, y) dy]$$

$$+ c_1 \int_x^\infty K^\pm(x, y) f_0^\pm(k, y) dy \pm d_1(x) \int_x^\infty K^\pm(x, y) q(y) f_0^\pm(y)$$

$$\pm d_1(x) [K^\pm(x, y) p(y) f_0^\pm(k, y)]_{y=x}^{y=\infty}$$

$$\mp d_1(x) \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial y} [K^\pm(x, y) p(y)] f_0^\pm(k, y) dy.$$

(II.7.61)

Nous calculons à présent $U_0^\pm L_0 f_0^\pm$:

$$U_0^\pm L_0 f_0^\pm(k, x) = F^\pm(x) [a_0 \frac{d^2}{dx^2} + b_0 \frac{d}{dx} + c_0] f_0^\pm(k, x)$$

$$+ \int_x^\infty K^\pm(x, y) [a_0 \frac{d^2}{dy^2} + b_0 \frac{d}{dy} + c_0] f_0^\pm(k, y)$$

$$= f_0^\pm(k, x) \{ F^\pm(x) c_0(x) - K^\pm(x, x) b_0(x) + \frac{\partial}{\partial y} [K^\pm(x, y) a_0(y)]_{y=x} \}$$

$$\begin{aligned}
 & + f_0^{\pm'}(k, x) [F^{\pm}(x)b_0(x) - K^{\pm}(x, x)a_0(x)] + f_0^{\pm''}(k, x)F^{\pm}(x)a_0(x) \\
 & + \int_x^{\infty} dy f_0^{\pm}(y) [c_0(y)K^{\pm}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} [K^{\pm}(x, y)b_0(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a_0(y)K^{\pm}(x, y)]] \\
 & + \lim_{y \rightarrow \infty} [K^{\pm}(x, y)b_0(y)f_0^{\pm}(k, y) + K^{\pm}(x, y)a_0(y) \frac{d}{dy} f_0^{\pm}(k, y) - \frac{\partial}{\partial y} [K(x, y)a_0(y)]f_0^{\pm}(k, y)].
 \end{aligned}$$

(II.7.62)

Egalant les facteurs de $\int dy f_0^{\pm}, f_0^{\pm'}, f_0^{\pm''}$ et les termes en $\lim_{y \rightarrow \infty} f_0^{\pm}, \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{d}{dy} f_0^{\pm}$, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites suivantes :

$$a_1(x) = a_0(x) = a(x) \quad (II.7.63)$$

$$\begin{aligned}
 & a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K^{\pm}(x, y) + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x} K^{\pm}(x, y) + c_1(x)K^{\pm}(x, y) \\
 & \pm d_1(x)q(y)K^{\pm}(x, y) \mp d_1(x) \frac{\partial}{\partial y} [p(y)K^{\pm}(x, y)] \\
 & = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a(y)K^{\pm}(x, y)] - \frac{\partial}{\partial y} [b_0(y)K^{\pm}(x, y)] + c_0(y)K^{\pm}(x, y).
 \end{aligned}$$

(II.7.64)

$$F_1^{\pm}c_1 \pm F_1^{\pm}d_1q + aF^{\pm''} + b_1F^{\pm'} - 2a \frac{d}{dx} [K^{\pm}(x, x)] - b_1K^{\pm}(x, x)$$

$$\mp d_1K^{\pm}(x, x)p = F_0^{\pm}c_0 - K^{\pm}(x, x)b_0 + K^{\pm}(x, x)a', \quad (II.7.65)$$

$$F_1^{\pm}b_1 \pm F_1^{\pm}d_1p + 2aF^{\pm'} = F_0^{\pm}b_0 \quad (II.7.66)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \{d_1(x)K^{\pm}(x, y)p_{\pm}(y) - K^{\pm}(x, y)b_0(y) - \frac{\partial}{\partial y} [K(x, y)a_0(y)]\} = 0 \quad (II.7.67)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} [K^{\pm}(x, y)a_0(y)] = 0. \quad (II.7.68)$$

Ces deux dernières conditions (II.7.67 et 68) sont vérifiées si nous imposons

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K^\pm(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K^\pm(x, y) = 0. \quad (\text{II.7.69})$$

Les équations (II.7.55, 57, 66) montrent que f^\pm vérifie asymptotiquement pour $x \rightarrow \infty$ l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(p \frac{d}{dx} + q + \frac{b - b_0}{2p} + d_1 \right) f^\pm = \pm k f^\pm$$

ou $(p \frac{d}{dx} + q) f^\pm = \pm k f^\pm$ car $\lim_{x \rightarrow \infty} (b - b_0 + 2d_1 p) = 0$ par hypothèse. Si nous posons $a_0 = 1, b_0 = c_0 = d_0 = 0, a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = -U, d_1 = -2Q, p = +i, q = 0$, nous retrouvons les équations de Jaulen-Jean [JAU 76] obtenues par une autre méthode, à savoir :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K^\pm(x, y) - U(x) K^\pm(x, y) \pm 2i Q(x) \frac{\partial}{\partial y} K^\pm(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} K^\pm(x, y) \quad (\text{II.7.70})$$

$$F^{\pm''} - U F^\pm - 2 \frac{d}{dx} K^\pm(x, x) \pm i 2Q K^\pm(x, x) = 0 \quad (\text{II.7.71})$$

$$F^{\pm'} = \pm i Q F^\pm. \quad (\text{II.7.72})$$

L'étude de la résolution de ces équations sera faite plus tard à l'aide de la méthode de Riemann décrite au chapitre III.

APPENDICE A
+++++

FORMULE DE COMPOSITION ET NOTION DE CHEMIN

La résolution d'un problème inverse peut s'effectuer de façon directe ou en plusieurs étapes. Cette deuxième méthode consiste à trouver tout d'abord un potentiel V_1 assez proche du potentiel exact V_2 recherché tel que la résolution du problème inverse soit simplifiée. Si V_1 et V_2 sont très proches, nous pouvons appliquer une méthode itérative qui converge rapidement. Le choix de V_1 peut aussi être guidé par certains modèles (par exemple le modèle de l'échange de bosons pour l'interaction N-N). Cette méthode indirecte est aussi utilisée pour étudier les effets produits par une faible variation dans les données expérimentales. Nous définissons trois opérateurs différentiels L_j qui possèdent la même partie singulière (même potentiel centrifuge et même interaction de Coulomb)

$$L_j = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\alpha}{x} + V_j(x) \quad \text{pour } j = 0, 1, 2 \quad (\text{A.1})$$

où les V_j sont des potentiels réguliers (au sens défini au chapitre I). Il existe deux chemins pour obtenir V_2 à partir de V_0 qui est nul généralement :

i) soit directement ;

ii) soit par l'intermédiaire d'un potentiel V_1 supposé proche de V_2 .

Considérons d'abord l'opérateur de transformation du type de Gel'fand-Levitan, U_G^{ij} qui fait passer de la solution de l'équation (j) à la solution de l'équation (i) par la relation :

$$|\phi_i\rangle = U_G^{(ij)} |\phi_j\rangle \quad (\text{A.2})$$

et son inverse $U_2^{(ij)}$ tel que

$$|\phi_j\rangle = U_2^{(ij)} |\phi_i\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Nous avons évidemment la relation :

$$U_2^{(ij)} = U_G^{(ji)} \quad (\text{A.4})$$

car l'inverse d'un opérateur de Volterra est un opérateur de Volterra.

L'opérateur $U_G^{(ij)}$ vérifie l'équation

$$U_G^{(ij)} W_G^{(ij)} U_G^{(ij)\dagger} = I. \quad (A.5)$$

Nous voulons prouver que

$$U_G^{(2,0)} = U_G^{(2,1)} U_G^{(1,0)}. \quad (A.6)$$

Comme le produit de deux opérateurs du type de Volterra est un opérateur du type de Volterra, il suffit de démontrer que

$$U_G^{(2,1)} U_G^{(1,0)} W_G^{(2,0)} U_G^{(1,0)\dagger} U_G^{(2,1)\dagger} = I \quad (A.7)$$

ou de façon équivalente que

$$U_G^{(1,0)} W_G^{(2,0)} U_G^{(1,0)\dagger} = W_G^{(2,1)}. \quad (A.8)$$

Comme

$$W_G^{(2,0)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0(E)\rangle d\rho_2(E) \langle \phi_0(E)|, \quad (A.9)$$

nous obtenons

$$U_G^{(1,0)} W_G^{(2,0)} U_G^{(1,0)\dagger} = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(E)\rangle d\rho_2(E) \langle \phi_1(E)| = W_G^{(2,1)} \quad (A.10)$$

et

$$K_G^{(2,0)}(x,y) = K_G^{(1,0)}(x,y) + K_G^{(2,1)}(x,y) + \int_y^x K_G^{(2,1)}(x,z) K_G^{(1,0)}(z,y) dz. \quad (A.11)$$

Des relations similaires peuvent être obtenues pour l'opérateur de transformation de Marchenko [COZ 77b] à cause de la forme de $I+F$:

$$\begin{aligned} [I+F]^{(ij)}(x,y) &= \frac{(-)^{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(k,x) [S_i(k) - S_j(k)] f_j(k,y) dk \\ &+ \sum_{\ell=0}^{n_i} M_{\ell}^{2i} f_j(k_{\ell}^i, x) f_j(k_{\ell}^i, y). \end{aligned} \quad (A.12)$$

Nous considérons l'opérateur A dont le noyau s'écrit :

$$A(x, y) = K_M^{(10)}(x, y) + K_M^{(2,1)}(x, y) + \int_x^y K_M^{(2,1)}(x, z) K_M^{(1,0)}(z, y) dz \quad (A.13)$$

et nous l'appliquons à $f_0(k, x)$; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_x^\infty A(x, y) f_0(k, y) dy &= \int_x^\infty K_M^{(10)}(x, y) f_0(k, y) dy + \int_x^\infty K_M^{(2,1)}(x, y) f_0(k, y) dy \\ &+ \int_x^\infty dy \int_x^y dz K_M^{(2,1)}(x, z) K_M^{(1,0)}(z, y) f_0(k, y). \end{aligned} \quad (A.14)$$

Permutant l'ordre des intégrations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_x^\infty A(x, y) f_0(k, y) dy &= f_1(k, y) - f_0(k, y) + \int_x^\infty dz K_M^{(2,1)}(x, z) [f_0(k, z) \\ &+ \int_z^\infty dy K_M^{(1,0)}(z, y) f_0(k, y)] = f_2(k, y) - f_0(k, y) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$A(x, y) = K_M^{(2,0)}(x, y) = K_M^{(10)}(x, y) + K_M^{(2,1)}(x, y) + \int_x^y K_M^{(2,1)}(x, z) K_M^{(1,0)}(z, y) dz. \quad (A.15)$$

APPENDICE B
+++++

PRINCIPES VARIATIONNELS EQUIVALENTS AUX EQUATIONS FONDAMENTALES

Comme il est toujours possible d'associer un principe variationnel à une équation intégrale du type de Fredholm dont le noyau est hermitien défini positif [MIK 64] , nous aimerions trouver le principe variationnel équivalent à l'équation intégrale du problème inverse qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) + g(x) + \int_{x_0}^{x_1} \Omega(x,y)f(y)dy = 0 \tag{B.1}$$

où $f(x)$ est la fonction inconnue, $g(x)$ est une fonction connue ainsi que $\Omega(x,y)$ qui est le noyau de l'équation intégrale. L'opérateur $W = I + \Omega$ est un opérateur hermitien défini positif et l'équation (B.1) peut s'écrire :

$$g + Wf = 0 \tag{B.2}$$

avec

$$(g_1, Wg_2) = (g_2, Wg_1) \tag{B.3}$$

et

$$(g_1, Wg_1) = \int_{x_0}^{x_1} |g_1(y)|^2 dy + \int_{x_0}^{x_1} dy \int_{x_0}^{x_1} dz \bar{g}_1(y) \Omega(y,z) g_1(z) \geq 0 \tag{B.4}$$

$$= 0 \text{ ssi } g_1 = 0 \text{ sur } (x_0, x_1) \tag{B.5}$$

pour $\forall g_1, g_2 \in L^1(x_0, x_1)$.

Nous considérons la fonctionnelle $\underline{V}(s) = (s,g) + (g,s) + (s,Ws)$.

Cette fonctionnelle admet un minimum absolu pour $s=f$ (B.6)

qui vaut

$$\underline{V}(f) = -(f, Wf) < 0. \tag{B.7}$$

En effet, prenons $s = f+r$

$$\underline{V}(s) = \underline{V}(f) + \underline{V}(r) + (f, Wr) + (r, Wf) = \underline{V}(f) + (r, Wr) \geq \underline{V}(f) \tag{B.8}$$

(= ssi $f = s$).

Inversément si $\underline{V}(s)$ a un minimum absolu pour $s=f$, f vérifiera l'équation

$$g + Wf = 0. \quad (B.9)$$

En effet, si

$$\underline{V}(f+r) \geq \underline{V}(f) \quad (= \text{ssi } r = 0), \quad (B.10)$$

on a :

$$2\text{Re}(r, g+Wf) + (r, Wr) \geq 0. \quad (B.11)$$

Prenons $r = \alpha t$ où α est une constante réelle, nous obtenons :

$$2\alpha \text{Re}(t, g+Wf) + \alpha^2 (t, Wt) > 0 \quad (s \neq 0) \quad (B.12)$$

$$= 0 \quad (s = 0), \quad (B.13)$$

ce qui entraîne

$$\text{Re}(t, g+Wf) = 0 \quad (B.14)$$

car, si $\text{Re}(t, g+Wf) \neq 0$, le membre de gauche de l'inégalité serait un polynôme du second ordre en α ayant deux zéros distincts et pouvant par conséquent devenir négatif pour certaines valeurs de α . Pour $\forall t$ nous avons $\text{Re}(t, g+Wf) = 0$. Prenant $r = i\alpha t$, nous obtenons de même

$$- 2\alpha \text{Im}(t, g+Wf) + \alpha^2 (t, Wt) \geq 0, \quad (B.15)$$

ou

$$\text{Im}(t, g+Wf) = 0. \quad (B.16)$$

Par conséquent $\forall t$

$$(t, g+Wf) = 0 \quad (B.17)$$

ou

$$g+Wf = 0. \quad (B.18)$$

Dans le cas de Gel'fand, nous avons les définitions suivantes : $x_0 = 0$, $x_1 = x$, $g(y) = \Omega(x, y)$; $W_G = 1 + \Omega$ où W est hermitien défini positif par construction, tandis que dans le cas de Marchenko, nous avons : $x_0 = x$, $x_1 = \infty$, $g(y) =$

$F(x,y)$ et $W_M = 1+F$ où F est hermitien défini positif si S est unitaire. La fonctionnelle V dépend du paramètre x et s'écrit, dans le cas de Gel' fand :

$$\begin{aligned} \underline{V}_x [s_x] &= \int_0^x \bar{s}_x(y) \Omega(x,y) dy + \int_0^x \bar{\Omega}(x,y) s_x(y) dy + \int_0^x dy |s_x(y)|^2 \\ &+ \int_0^x dy \int_0^x dz \bar{s}_x(y) \Omega(y,z) s_x(z) = \text{Tr} [\Sigma \Sigma^\dagger + (1+\Sigma) \Omega (1+\Sigma^\dagger) - \Omega], \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

où Ω est réel et où Σ est un opérateur triangulaire dont le noyau est $\bar{s}_x(y)$ pour $x \geq y$ et nul pour $y > x$. Le minimum sera obtenu lorsque $\Sigma = K$ et vaut

$$\begin{aligned} \underline{V}_x [K(x,y)] &= - \int_0^x dy \bar{k}(x,y) [K(x,y) + \int_0^x dz \Omega(y,z) K(x,z)] \\ &= \int_0^x dy \bar{k}(x,y) \Omega(x,y) = -K(x,x) - \Omega(x,x) = -\text{Tr} [K + \Omega]. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\underline{V}_2(\Sigma) = \text{Tr} [\Sigma \Sigma^\dagger + (1+\Sigma) \Omega (1+\Sigma^\dagger)] \quad (\text{B.21})$$

est une autre fonctionnelle possible qui a un minimum $-K(x,x)$ pour $\Sigma = K$.

Le principe variationnel fournit une méthode de résolution numérique du problème inverse : une forme analytique contenant plusieurs paramètres peut être supposée pour $\tilde{s}_x(y)$ et on recherchera les valeurs des paramètres qui minimisent la fonctionnelle $V(\tilde{s}_x)$. $K(x,x) \approx -\underline{V}_x(\tilde{s}_x) - \Omega(x,x)$ et le potentiel s'obtient alors par dérivation $V(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x,x)$. Les paramètres qui minimisent la fonctionnelle sont cependant des fonctions de x .

CHAPITRE III : SUR LA METHODE DE RIEMANN

§ 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, les propriétés de la méthode de Riemann sont exposées principalement en vue de son application à la recherche de l'opérateur de transformation qui joue un rôle essentiel dans la théorie du problème inverse de la diffusion. Nous pensons cependant qu'une étude approfondie et une généralisation de la méthode de Riemann est aussi justifiée par ses nombreuses applications. Une de ses applications est l'étude du développement en fonctions propres, qui est généralement abordée à partir de méthodes différentes dont les deux plus importantes sont la méthode des équations intégrales et la méthode du contour d'intégration. Ces méthodes sont développées en détail dans les livres de Courant et Hilbert, Coddington et Levinson, et Titchmarsh. La fonction de Riemann permet de développer une méthode complètement différente qui fournit des résultats très raffinés concernant les développements en fonctions propres et les dérivées de ces fonctions propres d'un problème de Sturm-Liouville [LEV 60]. L'extension de la méthode de Riemann permet également une étude directe des opérateurs de transformation pour des potentiels dépendant des vitesses. Ces applications justifient largement la nécessité d'extension de la méthode.

En 1860, Riemann proposa dans un papier célèbre [RIE 1860] une méthode pour résoudre le problème de Cauchy associé à certains types d'équations aux dérivées partielles décrivant la propagation des ondes sonores d'amplitude finie. Bien qu'établie pour certaines équations particulières, la méthode s'avéra être applicable à toute équation aux dérivées partielles linéaire de type hyperbolique mise sous sa forme normale, à deux variables indépendantes. Cette méthode de résolution consiste en fait à trouver une fonction auxiliaire que nous appelons solution de Riemann, qui est solution de l'équation aux dérivées partielles, adjointe.

Bien que toute équation aux dérivées partielles hyperbolique peut se ramener à la forme normale par un changement de variables adéquat, il serait intéressant pour les raisons exposées plus haut, de pouvoir appliquer la résolution de Riemann directement à l'équation aux dérivées partielles hyperbolique sous sa forme la plus générale. Nous verrons qu'en fait la méthode de Riemann peut être généralisée (Appendice A).

§ 2. FORMULES SIMPLIFIEES CORRESPONDANT A LA METHODE DE RIEMANN HABITUELLE

Nous considérons dans ce paragraphe l'équation aux dérivées partielles de type hyperbolique sous sa forme réduite à laquelle il est toujours possible de se ramener par un changement de variable adéquat :

$$L_{xy} \phi \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x,y) + 2a(x,y) \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} - 2b(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + c(x,y)\phi(x,y) = f(x,y)\phi(x,y). \quad (III.2.1)$$

La fonction de Riemann correspondante $r(x,y;x_0,y_0)$ doit vérifier les équations suivantes :

$$L_{xy}^T r(x,y;x_0,y_0) = 0 \quad (III.2.2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} = (a+b)r \quad \text{si } y-x = y_0 - x_0 \quad (III.2.3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y} = (a-b)r \quad \text{si } y+x = y_0 + x_0 \quad (III.2.4)$$

$$r(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1. \quad (III.2.5)$$

Les conditions aux limites peuvent encore s'écrire

$$r(x,y;x_0,y_0) = \exp \left[\int_{(x_0+y_0)/2}^{(x+y)/2} \left[a\left(t+\frac{x_0-y_0}{2}, t+\frac{y_0-x_0}{2}\right) + b\left(t+\frac{x_0-y_0}{2}, t+\frac{y_0-x_0}{2}\right) \right] dt \right] \quad \text{si } y-x = y_0 - x_0 \quad (III.2.6)$$

$$r(x,y;x_0,y_0) = \exp \left[\int_{(y_0-x_0)/2}^{(y-x)/2} \left[b\left(\frac{x+y}{2}-t, \frac{x+y}{2}+t\right) - a\left(\frac{x+y}{2}-t, \frac{x+y}{2}+t\right) \right] dt \right] \quad \text{si } y+x = y_0 + x_0. \quad (III.2.7)$$

Si nous utilisons les variables canoniques

$$\eta = \frac{x+y}{2}, \quad \xi = \frac{y-x}{2}, \quad \eta_0 = \frac{x_0+y_0}{2}, \quad \xi_0 = \frac{y_0-x_0}{2}, \quad (III.2.8)$$

l'équation (III.2.1) se ramène sous sa forme réduite :

$$L(\eta, \xi)\Phi(\eta, \xi) = \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \Phi(\eta, \xi) + A(\eta, \xi) \frac{\partial \Phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} + B(\eta, \xi) \frac{\partial \Phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} + C(\eta, \xi)\Phi(\eta, \xi) = F(\eta, \xi) \quad (\text{III.2.9})$$

où $F = -f$, $A = a+b$, $B = b-a$, $C = -c$. (III.2.10)

La nouvelle fonction de Riemann $R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)$ vérifie les équations :

$$L^T(\eta, \xi)R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = 0 \quad (\text{III.2.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = A(\eta, \xi)R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \quad (\text{III.2.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = B(\eta_0, \xi)R(\eta_0, \xi; \eta_0, \xi_0) \quad (\text{III.2.13})$$

$$R(\eta_0, \xi_0; \eta_0, \xi_0) = 1. \quad (\text{III.2.14})$$

Les conditions aux limites sont équivalentes à :

$$R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \exp \left[\int_{\eta_0}^{\eta} A(\eta_1, \xi) d\eta_1 \right] \quad (\text{III.2.15})$$

$$R(\eta_0, \xi; \eta_0, \xi_0) = \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} B(\eta_0, \xi_1) d\xi_1 \right]. \quad (\text{III.2.16})$$

Le système d'équations précédent est équivalent à l'équation intégrale :

$$R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = 1 + \int_{\xi_0}^{\xi} B(\eta, \xi_1) R(\eta, \xi_1; \eta_0, \xi_0) d\xi_1 + \int_{\eta_0}^{\eta} A(\eta_1, \xi) R(\eta_1, \xi; \eta_0, \xi_0) d\eta_1 - \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 C(\eta_1, \xi_1) R(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0) \quad (\text{III.2.17})$$

§ 3. FORMULE D'ADDITION DES FONCTIONS DE RIEMANN POUR UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES SEPARABLE EN LES VARIABLES INDEPENDANTES

Nous considérons l'équation séparable suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c_1(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2b_2(y) \frac{\partial u}{\partial y} + c_2(y)u \quad (\text{III.3.1})$$

Si $r_1(x, y; x_0, y_0)$ [$r_2(x, y; x_0, y_0)$] est la fonction de Riemann correspondant au cas où $b_2 = c_2 = 0$ [$b_1 = c_1 = 0$ respectivement], la fonction de Riemann com-

plète $r(x, y; x_0, y_0)$ peut être obtenue à partir des deux relations suivantes :

$$r(x, y; x_0, y_0) = r_1(x, y; x_0, y_0) \exp \left[+ \int_{y_0}^y b_2(t) dt \right] + \int_{y-y_0}^{x-x_0} r_1(x, t; x_0, 0) dr_2(t, y; 0, y_0) \quad (III.3.2)$$

$$= r_2(x, y; x_0, y_0) \exp \left[\int_{x_0}^x b_1(t) dt \right]$$

$$+ \int_{x-x_0}^{y-y_0} r_2(t, y; 0, y_0) dr_1(x, t; x_0, 0). \quad (III.3.3)$$

Tout d'abord, la formule (III.3.3) peut être obtenue à partir de l'équation (III.3.2) par intégrations par parties et en utilisant le lemme suivant.

Lemme : la fonction de Riemann $r_1(x, y; x_0, y_0)$ [$r_2(x, y; x_0, y_0)$] est une fonction paire en $(y-y_0)$ [$(x-x_0)$ respectivement]. Pour démontrer le lemme, il suffit de constater que $r_1(x, y; x_0, y_0)$, $r_1(x, y-y_0; x_0, 0)$ et $r_1(x, y-y_0; x_0, 0)$ sont solutions de la même équation aux dérivées partielles et les mêmes conditions aux limites. Comme la solution est unique, ces fonctions sont égales.

La démonstration de l'équation (III.2.2) se fera en deux étapes. Tout d'abord, elle sera vérifiée dans le cas particulier d'une équation auto-adjointe [$b_1 = b_2 = 0$], puis elle sera généralisée au cas $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$. Dans ce cas particulier $b_1 = b_2 = 0$, l'équation (III.3.2) s'écrit :

$$r(x, y; x_0, y_0) = r_1(x, y; x_0, y_0) + \int_{y-y_0}^{x-x_0} r_1(x, t; x_0, 0) dr_2(t, y; 0, y_0). \quad (III.3.4)$$

Pour $x-x_0 = y-y_0$, le domaine d'intégration est nul et on a $r = r_1 = 1$. Pour $x-x_0 = y-y_0$, le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'origine ; l'intégrand est une fonction impaire de t , par conséquent, l'intégrale s'annule à nouveau et $r = r_1 = 1$ pour $x+y = x_0+y_0$. Les conditions aux limites étant satisfaites, il nous reste à vérifier l'équation aux dérivées partielles. Cette vérification est directe mais un peu longue.

Pour démontrer l'équation (III.3.2), il faut utiliser le changement de fonctions qui transforme l'équation séparable (III.3.1) en une équation réduite.

Nous introduisons les fonctions de Riemann suivantes :

$$\tilde{r}_1(x, y; x_0, y_0) = r_1(x, y; x_0, y_0) \exp \left[- \int_{x_0}^x b_1(t) dt \right], \quad (III.3.5)$$

$$\tilde{r}_2(x, y; x_0, y_0) = r_2(x, y; x_0, y_0) \exp \left[- \int_{y_0}^y b_2(t) dt \right] \quad (\text{III.3.6})$$

$$\tilde{r}(x, y; x_0, y_0) = r(x, y; x_0, y_0) \exp \left[- \int_{x_0}^x b_1(t) dt - \int_{y_0}^y b_2(t) dt \right] \quad (\text{III.3.7})$$

qui correspondent à des équations aux dérivées partielles dont les coefficients sont donnés dans le tableau suivant :

r	b_1	c_1	b_2	c_2
\tilde{r}_2	0	$c_1 - \frac{da_1}{dx} - a_1^2$	0	$c_2 - \frac{db_2}{dy} - b_2^2$
r_1	b_1	c_1	0	0
\tilde{r}_1	0	$c_1 - \frac{da_1}{dx} - a_1^2$	0	0
r_2	0	0	b_2	c_2
\tilde{r}_2	0	0	0	$b_2 - \frac{db_2}{dy} - b_2^2$

Nous avons démontré que

$$\tilde{r}(x, y; x_0, y_0) = \tilde{r}_1(x, y; x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y-y_0} \tilde{r}_1(x, t; x_0, 0) \tilde{r}_2(t, y; 0, y_0) dt. \quad (\text{III.3.8})$$

Nous obtenons l'équation (III.3.2) en multipliant la relation (III.3.8) par $\exp \left[\int_{x_0}^x b_1(t) dt + \int_{y_0}^y b_2(t) dt \right]$.

§ 4. METHODES D'OBTENTION DE LA FONCTION DE RIEMANN

La recherche de fonctions de Riemann a attiré l'attention des mathématiciens depuis de nombreuses années. Les méthodes qui ont été développées se rapportent à des fonctions de Riemann qui correspondent à des équations aux dérivées partielles où les caractéristiques sont des lignes droites. Certaines de ces méthodes peuvent aisément se généraliser et s'appliquer à notre extension de la fonction de Riemann (Appendice A). Nous donnons ci-après une liste de méthodes utiles pour obtenir des fonctions de Riemann.

a) La méthode originale de Riemann est basée sur le fait que la fonction de Riemann ne dépend pas de la courbe \mathcal{L} . Il est parfois possible de résoudre le problème de Cauchy pour certains choix de la courbe \mathcal{L} dépendant d'un paramètre. La comparaison de deux solutions donne alors la fonction de Riemann. Cette méthode a en fait été utilisée en Appendice A pour obtenir une représentation spectrale de la fonction de Riemann lorsque l'équation est à variables séparables.

b) Dans son cours [HAD 52], Hadamard montre que le coefficient du terme logarithmique dans sa solution élémentaire est la fonction de Riemann de l'équation adjointe.

c) Chaundy [CHA 39] a construit la fonction de Riemann-Green à l'aide d'opérateurs symboliques de série de puissances. Nous utiliserons cette méthode pour obtenir certaines fonctions de Riemann utiles pour l'étude du problème inverse de la diffusion.

d) L'équation intégrale et la formule de composition (Appendice A) peuvent également constituer une méthode de construction de la fonction de Green. Nous utiliserons ces méthodes par la suite pour évaluer une borne supérieure pour les fonctions de Riemann pour lesquelles une expression analytique n'a pas pu être obtenue. Cependant, dans des cas très particuliers, étudiés par Cohn [COH 70], Geddes et Mackie [GED 77], la méthode intégrale peut fournir une expression analytique.

e) Mackie a construit des solutions intégrales complexes pour certaines équations qui donnent la fonction de Riemann pour certains choix du contour.

f) Daggitt [DAG 70] trouve la forme que peut avoir la fonction de Riemann en recherchant des transformations invariantes pour l'équation. Malgré la multitude de méthodes proposées assez récemment, nous devons admettre que nous n'avons pas fait de grands progrès en ce qui concerne la détermination de fonctions de Riemann car la plupart des fonctions de Riemann connues actuellement ont été obtenues par Chaundy et Darboux.

§ 5. RECHERCHE DE CERTAINES FONCTIONS DE RIEMANN UTILES POUR LE PROBLEME INVERSE

Pour calculer l'opérateur de translation correspondant à un problème où il y a couplage entre des moments angulaires différents, nous aurons besoin par la suite de la fonction de Riemann correspondant à l'équation aux dérivées partielles auto-adjointe suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{y^2} \right) r(x, y; x_0, y_0) = 0 \quad (III.5.1)$$

avec

$$r(x, y; x_0, y_0) = 1 \quad \text{si} \quad |x-x_0| = |y-y_0|. \quad (III.5.2)$$

En coordonnées caractéristiques, cette équation s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\lambda_2(\lambda_2+1)}{(\eta+\xi)^2} + \frac{\lambda_1(\lambda_1+1)}{(\eta-\xi)^2} \right) R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = 0 \quad (III.5.3)$$

avec

$$R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = 1 \quad \text{si} \quad \eta = \eta_0 \quad \text{ou} \quad \xi = \xi_0. \quad (III.5.4)$$

Suivant Chaundy [CHA 39], nous introduisons les notations suivantes :

$$x_1 = \frac{(\eta-\eta_0)(\xi-\xi_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)} = \frac{(x+y-x_0-y_0)(y-x-y_0+x_0)}{4x x_0} \quad (III.5.5)$$

$$x_2 = -\frac{(\eta-\eta_0)(\xi-\xi_0)}{(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)} = -\frac{(x+y-x_0-y_0)(y-x-y_0+x_0)}{4y y_0} \quad (III.5.6)$$

$$\delta_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2. \quad (III.5.7)$$

Les dérivées premières sont reliées par les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(\xi-\xi_0)(\eta_0+\xi)}{(\eta_0+\xi_0)(\eta+\xi)^2} & \frac{(\xi-\xi_0)(\eta_0-\xi)}{(\eta_0-\xi_0)(\eta-\xi)^2} \\ -\frac{(\eta-\eta_0)(\eta+\xi_0)}{(\eta_0+\xi)(\eta+\xi)^2} & \frac{(\eta-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta_0-\xi_0)(\eta-\xi)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (III.5.8)$$

ou

$$\begin{pmatrix} (\eta-\eta_0) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ (\xi-\xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 + \xi & \eta_0 - \xi \\ \eta + \xi_0 & \eta - \xi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta_2}{(\eta+\xi)} \\ \frac{\delta_1}{(\eta-\xi)} \end{pmatrix} \quad (III.5.9)$$

Nous trouvons pour

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\delta_2}{(\eta + \xi)^2} - \frac{\delta_1}{(\eta - \xi)^2} + \frac{(\eta + \xi_0)(\eta_0 + \xi)}{(\eta + \xi)^2(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \delta_2^2 + \frac{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}{(\eta - \xi)^2(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \delta_1^2$$

$$+ \frac{1}{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \frac{[(\eta + \xi_0)(\eta_0 - \xi) + (\eta - \xi_0)(\eta_0 + \xi)]}{(\eta^2 - \xi^2)} \delta_1 \delta_2 \quad (III.5.10)$$

Comme le coefficient de $\delta_1 \delta_2$ dans (III.5.10) peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)(\eta^2 - \xi^2)} [(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0) + (\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)], \quad (III.5.11)$$

nous trouvons

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\delta_2}{(\eta + \xi)^2} - \frac{\delta_1}{(\eta - \xi)^2} + \frac{1}{(\eta + \xi)^2} \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \delta_2^2 - \frac{1}{(\eta - \xi)^2} \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \delta_1^2$$

$$+ \left[\frac{1}{(\eta - \xi)^2 x_1} - \frac{1}{(\eta + \xi)^2 x_2} \right] \delta_1 \delta_2. \quad (III.5.12)$$

Les équations (III.5.3) et (III.5.4) en fonction des nouvelles variables, s'écrivent :

$$\frac{1}{(\eta + \xi)^2} \left[\delta_2^2 - \ell_2(\ell_2 + 1) + \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \delta_2^2 - \frac{1}{x_2} \delta_1 \delta_2 \right] R(x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{(\eta - \xi)^2} \left[\delta_1^2 - \ell_1(\ell_1 + 1) + \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \delta_1^2 - \frac{1}{x_1} \delta_1 \delta_2 \right] R(x_1, x_2) \quad (III.5.13)$$

$$R(x_1, x_2) = 1 \text{ si } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0. \quad (III.5.14)$$

Nous recherchons d'abord la solution correspondant à $\ell_2 = 0$ puis nous utiliserons la formule d'addition (III.3.2) des fonctions de Riemann pour trouver la fonction de Riemann correspondant à l'équation complète. Pour que l'équation (III.5.13) soit vérifiée pour $\ell_2 = 0$, il suffit d'avoir :

$$\delta_2 R(x_1, x_2) = 0 \quad (III.5.15)$$

$$\left\{ \left[1 - \frac{1}{x_1} \right] \delta_1^2 + \delta_1 - \ell_1 (\ell_1 + 1) \right\} R(x_1, x_2) = 0. \quad (III.5.16)$$

La première équation montre que R ne dépend pas de x_2 , la seconde peut encore s'écrire :

$$\left[x_1 (x_1 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (2x_1 - 1) \frac{\partial}{\partial x_1} - \ell_1 (\ell_1 + 1) \right] R(x_1) = 0 \quad (III.5.17)$$

dont la solution qui vaut 1 lorsque x_1 s'annule, est :

$$R(x_1) = {}_2F_1(\ell_1 + 1, -\ell_1, 1; x_1) \quad (III.5.18a)$$

$$= P_{\ell_1}(1 - 2x_1). \quad (III.5.18b)$$

Par symétrie, la solution correspondant à $\ell_1 = 0$ s'écrit :

$$R(x_2) = P_{\ell_2}(1 - 2x_2). \quad (III.5.19)$$

Appliquant la propriété d'addition (III.3.2), nous obtenons la fonction de Riemann complète

$$R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = P_{\ell_1}[1 - 2x_1] - \int_{\eta - \eta_0 - \xi + \xi_0}^{\eta - \eta_0 + \xi - \xi_0} P_{\ell_1}[1 - 2\tilde{x}_1(t)] dP_{\ell_2}[1 - 2\tilde{x}_2(t)] \quad (III.5.20)$$

où

$$\text{si } x_1 = x_1(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \text{ et } x_2 = x_2(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0), \quad (III.5.21-22)$$

alors

$$\tilde{x}_2(t) = x_2\left(\frac{\eta + \xi + t}{2}, \frac{\eta + \xi - t}{2}, \frac{\eta_0 + \xi_0}{2}, \frac{\eta_0 + \xi_0}{2}\right), \quad (III.5.23a)$$

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{(\eta_0 + \xi_0 - \eta - \xi - t)(\eta + \xi - t - \eta_0 - \xi_0)}{4(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \quad (III.5.23b)$$

$$\tilde{x}_1(t) = x_1\left(\frac{\eta - \xi + t}{2}, \frac{-\eta + \xi + t}{2}, \frac{\eta_0 - \xi_0}{2}, \frac{-\eta_0 + \xi_0}{2}\right) \quad (III.5.24a)$$

$$= \frac{(\eta - \xi + t - \eta_0 + \xi_0)(\xi + t - \eta + \eta_0 - \xi_0)}{4(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)} \quad (III.5.24b)$$

Si nous effectuons le changement de variables

$$t' = \frac{t^2 - (\eta - \eta_0 - \xi + \xi_0)^2}{4(\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)}, \quad (t > 0) \quad (III.5.25)$$

$$1-t' = \frac{(\eta - \eta_0 + \xi - \xi_0)^2 - t^2}{4(\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)},$$

les équations (III.5.23,24) et (III.5.20) s'écrivent :

$$\tilde{x}_2(t') = (1-t')x_2, \quad (III.5.26)$$

$$\tilde{x}_1(t') = t'x_1, \quad (III.5.27)$$

$$R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = P_{\ell_1} (1-2x_1) - 2x_2 \int_0^1 P_{\ell_1} [1-2t'x_1] P'_{\ell_2} [1-2(1-t')x_2] dt'. \quad (III.5.28)$$

Nous retrouvons le résultat obtenu par Chaundy de façon moins directe et qui peut aussi s'écrire si nous faisons une intégration par parties :

$$R(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = P_{\ell_2} (1-2x_2) - 2x_1 \int_0^1 P_{\ell_2} (1-2x_2 + 2x_2 t) P'_{\ell_1} (1-2x_1 t) dt. \quad (III.5.29)$$

La solution correspondant au cas $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, peut être mise sous une forme plus compacte. L'équation (III.5.13) est satisfaite si les deux relations suivantes sont simultanément vérifiées :

$$[\delta_i^{-\ell(\ell+1)} + (1 - \frac{1}{x_i}) \delta_i^2 - \frac{1}{x_i} \delta_i \delta_j] R(x_1, x_2) = 0 \quad i = 1, 2 ; j = 2, 1. \quad (III.5.30)$$

Si nous effectuons le changement de variable

$$z = x_1 + x_2 - x_1 x_2, \quad (III.5.31)$$

nous aurons :

$$\delta_i = (z-x_j) \frac{d}{dz} \quad (j \neq i ; i, j = 1, 2) \quad (III.5.32)$$

$$\delta_i^2 = (z-x_j) \frac{d}{dz} + (z-x_j)^2 \frac{d^2}{dz^2} \quad (III.5.33)$$

$$\delta_i \delta_j = (z-x_i - x_j) \frac{d}{dz} + (z-x_i)(z-x_j) \frac{d^2}{dz^2} \quad (III.5.34)$$

et si nous faisons l'hypothèse que R ne dépend que de z (cette hypothèse ne peut être justifiée qu'a posteriori en vérifiant que la solution obtenue satisfait les bonnes conditions aux limites), les deux équations aux dérivées partielles (III.5.30) se réduisent à l'équation différentielle unique suivante :

$$[z(z-1)\frac{d^2}{dz^2} + (2z-1)\frac{d}{dz} - \ell(\ell+1)]R(z) = 0 \quad (\text{III.5.35})$$

dont la solution qui nous intéresse est :

$$R(x, y; x_0, y_0) = {}_2F_1(\ell+1, -\ell, 1, z) = P_\ell(1-2z) = P_\ell\left(1-2x \frac{-2x}{1} + 2x \frac{x}{1} \frac{x}{2}\right) \quad (\text{III.5.36})$$

où P_ℓ représente le polynôme de Legendre d'ordre ℓ .

Par la suite, nous serons également amenés à considérer la fonction de Riemann qui correspond à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \Delta^2 r = 0. \quad (\text{III.5.37})$$

Cette équation se ramène à l'équation :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + r = 0 \quad (\text{III.5.38})$$

lorsqu'on effectue le changement de variables :

$$x = \Delta x' \quad (\text{III.5.39})$$

$$y = \Delta y'. \quad (\text{III.5.40})$$

La fonction de Riemann peut être obtenue en utilisant la propriété de l'Appendice A. Nous considérons donc les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2}{dx^2} u(\lambda, x) + [\lambda^2 + 1]u(\lambda, x) = 0 \quad (\text{III.5.41})$$

$$\frac{d^2}{dy^2} v(\lambda, y) + \lambda^2 v(\lambda, y) = 0 \quad (\text{III.5.42})$$

$$u_1(\lambda, x) = e^{-ix\sqrt{\lambda^2+1}} \quad (\text{III.5.43})$$

$$u_2(\lambda, x) = e^{ix\sqrt{\lambda^2+1}} \quad (\text{III.5.44})$$

$$w(u_1, u_2) = 2i\sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (\text{III.5.45})$$

$$v_1(\lambda, y) = e^{-i\lambda y} \quad (\text{III.5.46})$$

$$v_2(\lambda, y) = e^{i\lambda y} \quad (\text{III.5.47})$$

$$w(v_1, v_2) = 2i\lambda \quad (\text{III.5.48})$$

$$\bar{v}_1(\lambda, y) = \frac{1}{2\pi} e^{i\lambda y} = \frac{1}{2\pi} v_2(\lambda, y) \quad (\text{III.5.49})$$

$$r(x, y; x_0, y_0) = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(y-y_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \sin[\sqrt{\lambda^2 + 1} (x_0 - x)] \quad (\text{III.5.50})$$

à condition que $y \in [y_0 \mp (x_0 - x); y_0 \pm (x_0 - x)]$; autrement l'intégrale s'annule et la fonction de Riemann doit être définie par une autre formule. Le signe + correspond au cas $x_0 > x$ et $y - y_0 \in [x - x_0, x_0 - x]$ et le signe - correspond au cas $x_0 < x$ et $y - y_0 \in [x_0 - x, x - x_0]$.

Nous considérons d'abord le cas $x_0 > x$ et $y - y_0 \in [x - x_0, x_0 - x]$. En vertu du lemme du § 3, r doit être une fonction paire en $y - y_0$ et en $x - x_0$; la fonction de Riemann doit aussi être réelle ; elle peut d'ailleurs s'écrire :

$$r(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cos \lambda(y - y_0) \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \sin[\sqrt{\lambda^2 + 1} (x_0 - x)]. \quad (\text{III.5.51})$$

Dans le cas considéré ici, nous pouvons poser :

$$x_0 - x = X \operatorname{ch} \alpha \quad (\text{III.5.52})$$

$$y_0 - y = X \operatorname{sh} \alpha \quad (\text{III.5.53})$$

où

$$X^2 = (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2 > 0 \quad (\text{III.5.54})$$

et

$$\lambda = \operatorname{sh} \theta. \quad (\text{III.5.55})$$

r doit donc être paire en α ; en fait, nous allons montrer que r est indépendant de α . Nous pouvons encore écrire la fonction de Riemann sous la forme :

$$\begin{aligned}
 r(x, y; x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp[-iX \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \alpha] \sin[X \operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} \alpha] \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta [e^{iX \operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} \alpha - iX \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \alpha} - e^{-iX \operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} \alpha + iX \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \alpha}] \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta [e^{iX \operatorname{ch}(\theta - \alpha)} - e^{-iX \operatorname{ch}(\theta + \alpha)}] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \sin[X \operatorname{ch} \theta] = J_0(X) \quad (\text{III.5.56})
 \end{aligned}$$

où $J_0(X)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0. La fonction r trouvée est bien une fonction paire en $x - x_0$ et en $y - y_0$. Si $y - y_0$ est en dehors de $[x - x_0, x_0 - x]$, l'intégrale utilisée pour définir r s'annule ce qui ne veut pas dire comme nous l'avons déjà dit, que la fonction de Riemann vaut zéro, mais qu'il faut utiliser l'autre définition (voir Appendice A) qui s'obtient en prenant, à présent, comme constante de séparation $\lambda^2 - 1$ au lieu de λ^2 :

$$r(x, y; x_0, y_0) = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(x-x_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \sin(\sqrt{\lambda^2 - 1} (y - y_0)). \quad (\text{III.5.57})$$

Le signe + correspond au cas $y > y_0$ et $x - x_0 \in [y - y_0, y_0 - y]$ et le signe - correspond au cas $y < y_0$ et $x - x_0 \in [y_0 - y, y - y_0]$. De la même façon, nous trouvons que si $(y - y_0)^2 > (x - x_0)^2$, la fonction de Riemann s'écrit :

$$r(x, y; x_0, y_0) = I_0[\sqrt{(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2}] \quad (\text{III.5.58})$$

Comme $I_0(z) = J_0(iz)$, la fonction de Riemann correspondant à l'équation de départ (III.5.37) s'écrit dans tous les cas :

$$r(x', y'; x'_0, y'_0) = J_0(\sqrt{\Delta^2 [(x' - x'_0)^2 - (y' - y'_0)^2]}) \quad (\text{III.5.59})$$

La fonction de Riemann la plus générale qui correspond à un problème de voies couplées contenant des énergies de seuils différents, les potentiels centrifuges et des interactions de Coulomb, doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l_1(l_1 + 1)}{x^2} + \lambda_1^2 - \frac{\alpha_1}{x} \right) r^C(x, y; x_0, y_0) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{l_2(l_2 + 1)}{y^2} + \lambda_2^2 - \frac{\alpha_2}{y} \right) r^C(x, y; x_0, y_0).$$

Comme nous connaissons la solution de Riemann pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, la formule de composition peut être utilisée pour nous donner une estimation de la fonction de Riemann complète :

$$R_C(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = R_{\ell_1 \ell_2}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 R_{\ell_1 \ell_2}(\eta, \xi; \eta_1, \xi_1)$$

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + [\frac{-\alpha_1}{\eta_1 - \xi_1} + \frac{\alpha_2}{\eta_1 + \xi_1}]) R_C(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0). \quad (III.5.61)$$

Comme l'équation aux dérivées partielles pour la fonction de Riemann est séparable vis-à-vis des variables x et y , il est aussi possible d'obtenir une représentation spectrale. Posant $\Delta^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ et effectuant une séparation des variables, nous sommes amenés à étudier les deux équations différentielles suivantes :

$$[\frac{d^2}{dx^2} + \Delta^2 + \lambda^2 - \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{x^2} - \frac{\alpha_1}{x}]v(\lambda, x) = 0 \quad (III.5.62)$$

$$[\frac{d^2}{dy^2} + \lambda^2 - \frac{\ell_2(\ell_2+1)}{y^2} - \frac{\alpha_2}{y}]w(\lambda, y) = 0 \quad (III.5.63)$$

où λ^2 est la constante de séparation.

Les solutions réelles, régulières $F_2(\lambda, y)$ et irrégulière $G_2(\lambda, y)$ de Coulomb forment un ensemble de deux solutions linéairement indépendantes dont le wronskien est

$$W_2 = Wr [F_2, G_2] = F_2 \frac{d}{dy} G_2 - G_2 \frac{d}{dy} F_2 = -1. \quad (III.5.64)$$

Nous considérons une solution $w(\lambda, y)$ à laquelle une solution $\bar{w}(\lambda, y)$ peut être associée de façon à pouvoir écrire pour toute fonction $f(x) \in L^2(0, \infty)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{w}(\lambda, x) \int_0^{\infty} dy w(\lambda, y) f(y)$$

où \int représente une intégration sur le spectre continu plus une somme infinie sur le spectre discret lorsque α_2 est négatif. Nous savons d'après Titchmarsh [TIT 62] que de telles fonctions existent et nous pouvons par exemple choisir :

$$w(\lambda, y) = \frac{\pi}{2} \bar{w}(\lambda, y) = F_2(\lambda, y). \quad (III.5.65)$$

La méthode développée en Appendice A peut donc être appliquée et nous donne pour $|x-x_0| > |y-y_0|$:

$$R_{ij}(x, y; x_0, y_0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{w}(\lambda, y) w(\lambda, u) g_1(\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}, x, x_0), \quad (\text{III.5.66})$$

où g_1 est la fonction de Green correspondant à l'équation différentielle (III.5.62) avec deux conditions aux limites données en un même point :

$$g_1(\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}, x, x_0) = 2 \operatorname{sign}(x_0 - x) [G_1(\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}, x) F_1(\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}, x_0) - G_1(\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}, x_0) F_1(\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}, x)]. \quad (\text{III.5.67})$$

Résumé des expressions analytiques connues pour les fonctions de Riemann :

$$R_{0, \ell} = P_{\ell}(1-2x_2) \quad (\text{III.5.68})$$

$$R_{\ell, 0} = P_{\ell}(1-2x_1) \quad (\text{III.5.69})$$

$$R_{\ell, \ell} = P_{\ell}(1-2x_1 - 2x_2 + 2x_1 x_2) \quad (\text{III.5.70})$$

$$R_{\ell_1, \ell_2} = P_{\ell_1}(1-2x_1) - 2x_2 \int_0^1 P_{\ell_1}(1-2tx_1) P'_{\ell_2}(1-2x_2 + 2x_2 t) dt \quad (\text{III.5.71})$$

$$= P_{\ell_2}(1-2x_2) - 2x_1 \int_0^1 P_{\ell_2}(1-2x_2 + 2x_2 t) P'_{\ell_1}(1-2x_1 t) dt \quad (\text{III.5.72})$$

$$r_{\Delta} = J_0(\sqrt{\Delta^2[(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2]}) \quad (\text{III.5.73})$$

où

$$x_1 = \frac{(\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)} \quad (\text{III.5.74})$$

et

$$x_2 = \frac{(\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \quad (\text{III.5.75})$$

APPENDIX A

It would be useful if we could directly apply Riemann's method to the most general linear hyperbolic p.d.e. of the second order in two independent variables, of the form :

$$\begin{aligned}
H(x,y)u(x,y) &= A(x,y) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2B(x,y) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \\
&+ C(x,y) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + D(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\
&+ E(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + F(x,y)u(x,y) = 0 \quad (A.1)
\end{aligned}$$

although it is always possible to reduce Eq. (A.1) to its normal form ($A = C = 0, B = -1$) by an appropriate change of variables.

GENERALIZED GREEN'S FORMULA AND THE DEFINITION OF THE CONORMAL

The adjoint operator $H^T(x,y)$ of $H(x,y)$, given by :

$$H^T(x,y)v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Av) + 2 \frac{\partial^2(Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial(Dv)}{\partial x} - \frac{\partial(Ev)}{\partial y} + Fv = 0 \quad (2)$$

is defined so that we have the following generalized Green formula (see Ref. (2b) p. 244) :

$$\iint_{\mathcal{D}} (v H u - u H^T v) dx dy = \int_{\mathcal{L}} (u D_n v - v D_n u + u v P_n) \quad (3)$$

where \mathcal{D} is any domain, enclosed by a curve \mathcal{L} followed in the positive sense when the domain is on the left of \mathcal{L} . D_n is the following linear differential operator :

$$D_n u = (A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}) n_x + (B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y}) n_y \quad (4)$$

and P_n is the adjoint function defined by :

$$P_n = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} - D) n_x + (\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} - E) n_y \quad (5)$$

where $\vec{n} = (n_x, n_y)$ is the internal unitary normal to the curve \mathcal{L} . Since $\vec{dt} = (\frac{dx}{dy})$ and $\vec{nds} = (\frac{-dy}{dx})$, we also can write :

$$D_n(u) ds = (B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y}) dx - (A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}) dy \quad (6)$$

and

$$P_n ds = (\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} - E) dx - (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} - D) dy \quad (7)$$

$H(x,y)$ is self-adjoint if the adjoint function P_n vanishes for any curve \mathcal{L} i.e. if :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = D \\ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = E \end{cases} \quad (8) \quad (9)$$

A unitary vector \vec{v} , called conormal by d'Adhémar, is defined by :

$$\vec{n} = \Lambda \vec{v} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} A(x,y) B(x,y) \\ B(x,y) C(x,y) \end{pmatrix}$$

The function $\Lambda(x,y)$ and the conormal \vec{v} depend on :

- (i) the second order coefficients in the p.d.e. (1)
- (ii) the point of \mathcal{L} which is considered
- (iii) the normal \vec{n} of \mathcal{L} at that point.

With these definitions, Green's formula (3) reads :

$$\iint_{\mathcal{D}} [v H u - u H^T v] dx dy = \int_{\mathcal{L}} \{ \Lambda (u \frac{\partial v}{\partial v} - v \frac{\partial u}{\partial v} + u v P_n) \} ds \quad (11)$$

EXTENDED RIEMANN'S METHOD

We consider Eq. (1) in a domain Ω where the following two properties are verified :

$$(i) \quad B^2(x,y) - A(x,y) C(x,y) > 0 \quad (12)$$

This condition (12) enables us to define two families K_1 and K_2 of characteristic curves defined by the implicit equations :

$$y = K_1(x,y) \quad , \quad (13.a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C(x,y) \left[\frac{\partial K_1}{\partial x} \right]^2 + 2B(x,y) \frac{\partial K_1}{\partial x} + A(x,y) &= 0 \quad (i=1,2) \end{aligned} \right. \quad (13.b)$$

or

$$K_1(x,y,\lambda) = \int^x \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C} ds + \lambda \quad (13.c)$$

$$K_2(x,y,\mu) = \int^x \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C} ds + \mu \quad (13.d)$$

(ii) We consider the two families O_1 and O_2 of curves everywhere orthogonal to the characteristic curves K_2 and K_1 respectively, and we assume that any curve O_2 doesn't cross any curve O_1 more than once in Ω . The implicit equations for O_1 and O_2 are :

$$y = O_1(x,y) \quad (14.a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A(x,y) \left[\frac{\partial O_1}{\partial x} \right]^2 - 2B(x,y) \frac{\partial O_1}{\partial x} + C(x,y) &= 0 \quad (i=1,2) \end{aligned} \right. \quad (14.b)$$

or

$$\left\{ \begin{aligned} O_1(x,y,\alpha) &= \int^x \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} ds + \alpha \end{aligned} \right. \quad (14.c)$$

$$\left\{ \begin{aligned} O_2(x,y,\beta) &= \int^x \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} ds + \beta \end{aligned} \right. \quad (14.d)$$

In the above-defined domain Ω , we intend to solve the following Cauchy problem :

$$H(x,y) u(x,y) = f(x,y) \quad (15)$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad \text{for } P(x,y) \in \mathcal{L} \quad (16.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} (x,y) = h(x,y) \quad \text{for } P(x,y) \in \mathcal{L} \quad (16.b)$$

where \mathcal{L} is an open curve which doesn't cross each curve O_i more than once. The solution of Eqs. (15-16) is easily obtained at a point $P_0(x_0, y_0)$ belonging to Ω , if the following two problems are solved :

(a) We are able to construct the two curves $O_1(\alpha_0)$ and $O_2(\beta_0)$ starting from $P_0(\alpha_0, \beta_0)$ and crossing the curve \mathcal{L} at the points A and B respectively. Since

$$A_i \vec{n}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{n}_i \cdot \left(\frac{AB}{BC} \right) \vec{n}_i = A n_{i,x}^2 + 2B n_{i,x} n_{i,y} + C n_{i,y}^2 = 0 \quad (17)$$

where the index i refers to the curve O_i , we see that the conormal v_i at each point of O_i is tangent to O_i .

(b) We know the corresponding Riemann function $r(x,y;x_0,y_0)$ which is the solution of the following equations:

$$H^T(x,y) r(x,y;x_0,y_0) = 0, \tag{18}$$

$$2 A_1 \frac{\partial r}{\partial v_1} + r \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v_1} + P_{n_1} r = 0 \text{ for } P(x,y) \in O_1(\alpha_0), \tag{19.a}$$

$$2 A_2 \frac{\partial r}{\partial v_2} + r \frac{\partial \Lambda_2}{\partial v_2} + P_{n_2} r = 0 \text{ for } P(x,y) \in O_2(\beta_0), \tag{19.b}$$

$$[\Lambda_2(x_0,y_0) - \Lambda_1(x_0,y_0)] r(x_0,y_0;x_0,y_0) = 2, \tag{20}$$

where n_i is the normal to O_i and v_i , its tangent. The sign of Λ_i chosen in Eq. (20) is defined below. The Green formula (11) applied on the domain \mathcal{D} between the curves $O_1(\alpha_0)$, $O_2(\beta_0)$ and \mathcal{L} , leads to:

$$\iint_{\mathcal{D}} (r H u - u H^T r) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} dx dy r(x,y;x_0,y_0) f(x,y) - \int_{\mathcal{L}} \{ \Lambda (u \frac{\partial r}{\partial v} - r \frac{\partial u}{\partial v}) + u r P_n \} ds \tag{21}$$

The four possible configurations with their corresponding positive directions are shown on Fig. (1). The two curves $O_1(\alpha_0)$ and $O_2(\beta_0)$ divide the domain Ω in four elements $\Omega_A, \Omega_U, \Omega_L, \Omega_R$ which are respectively above, under, on the left of or on the right of P_0 . If we choose an arbitrary direction $P_0 A B P_0$ and choose the sign

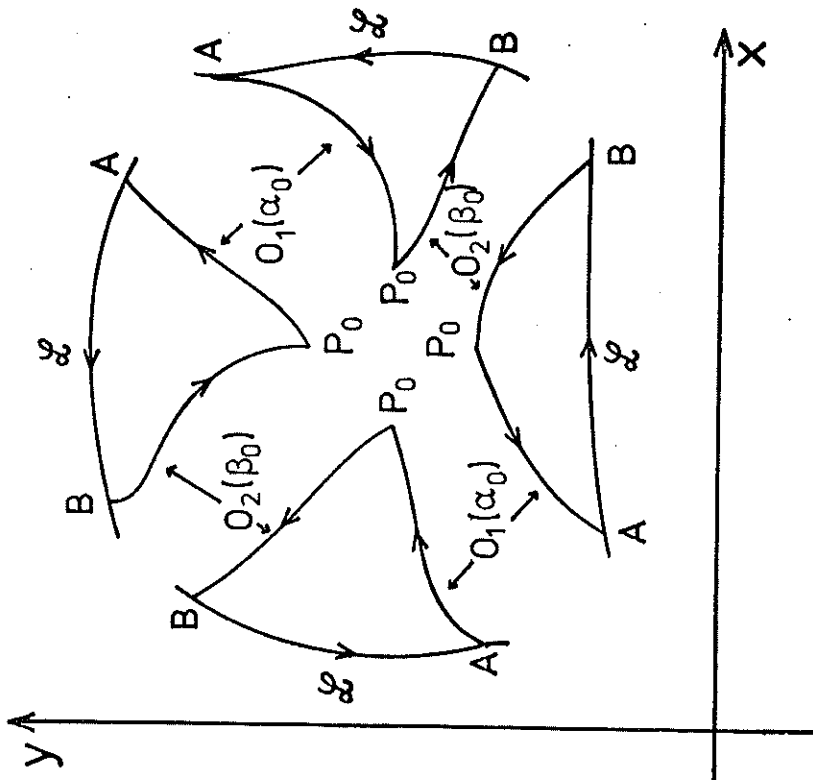


Fig. 1

of Λ in such a way that the direction of \vec{v} coincides with the conventional direction $P_0 A B P_0$, setting $\epsilon = +1$ [-1] when $\mathcal{L} \in \Omega_A \cup \Omega_U \cup \Omega_L \cup \Omega_R$, we can write Eq. (21) as follows :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} dx dy r(x,y;x_0,y_0) f(x,y) &= \epsilon \int_{P_0 A B P_0} \left\{ \Lambda \left(u \frac{\partial r}{\partial v} - r \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right. \\ &+ u r P_n \} ds = \epsilon \int_{A B} \left\{ \Lambda \left(u \frac{\partial r}{\partial v} - r \frac{\partial u}{\partial v} \right) + u r P_n \right\} ds \\ &+ \epsilon \int_{P_0 A} \left\{ \Lambda_1 u \frac{\partial r}{\partial v_1} + u \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v_1} r + u r P_{n_1} \right\} ds - \epsilon \int_{A_1} \left\{ \Lambda_1 r u \right\} ds \\ &+ \epsilon \int_{B O_2 P_0} \left\{ \Lambda_2 u \frac{\partial r}{\partial v_2} + u \frac{\partial \Lambda_2}{\partial v_2} r + u r P_{n_2} \right\} ds - \epsilon \int_{B} \left\{ \Lambda_2 r u \right\} ds \end{aligned} \quad (22)$$

We then get the solution of Eqs. (15-16) :

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0) &= \frac{1}{2} [\Lambda_2 r \mathcal{E}]_B - \frac{1}{2} [\Lambda_1 r \mathcal{E}]_A \\ &- \frac{\epsilon}{2} \iint_{\mathcal{D}} dx dy r(x,y;x_0,y_0) f(x,y) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}^*} \left\{ \Lambda \left(g \frac{\partial r}{\partial v} - r h \right) + g r P_n \right\} ds \end{aligned} \quad (23)$$

RELATIONSHIP BETWEEN RIEMANN'S AND GREEN'S FUNCTIONS

In this section, we connect the Riemann function to the Green function G associated to the problem (15-16) and satisfying the following equations :

$$H(x,y) G(x,y;x_0,y_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (24)$$

$$G(x,y;x_0,y_0) = 0 \text{ for } P(x,y) \in \mathcal{L} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(x,y;x_0,y_0) = 0 \text{ for } P(x,y) \in \mathcal{L} \quad (26)$$

where n is the normal to \mathcal{L} .

Using the extended Riemann method to solve this Cauchy

problem (24-26), we get :

$$G(x_1,y_1;x_0,y_0) = -\frac{\epsilon}{2} r(x_0,y_0;x_1,y_1) \text{ when } P_0 \in \mathcal{D}, \quad (27)$$

$$= 0 \text{ when } P_0 \notin \mathcal{D}, \quad (28)$$

where \mathcal{D} denotes the domain $P_1 A \mathcal{L} B$.

Equivalently, we can write :

$$r(x_0,y_0;x,y) = -2 \epsilon G^I(x_0,y_0;x_1,y_1) \text{ when } P_0 \in \mathcal{D} \quad (29)$$

The adjoint Green function $G^I(x_0,y_0;x_1,y_1)$ is solution of the equations (30, 31, 32)

$$H^T(x,y) G^T(x,y;x_0,y_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (30)$$

$$G^T(x,y;x_0,y_0) = 0 \text{ for } P(x,y) \in \mathcal{L}^T \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G^T(x,y;x_0,y_0) = 0 \text{ for } P(x,y) \in \mathcal{L}^T \quad (32)$$

\mathcal{L}^T is the adjoint curve defined by the following two conditions :

- (i) \mathcal{L}^T doesn't cross each curve O_i more than once
- (ii) $\mathcal{L} + \mathcal{L}^T$ is the limit of a domain \mathcal{E} containing the point $P_0(x_0,y_0)$.

Green's formula (11) with $u = G$ and $v = G^T$, applied on \mathcal{E} leads to :

$$G^T(x,y;x_0,y_0) = G(x_0,y_0;x,y) \quad (33)$$

for $P_0 = (x_0,y_0)$ and $P = (x,y)$ belonging to \mathcal{E} .
Green's formula (11) with $u = u$, $v = G^T$, applied on the domain \mathcal{E} gives :

$$u(x_0,y_0) = \iint_{\mathcal{E}} G^T(x,y;x_0,y_0) f(x,y) dx dy - \int_{\mathcal{L}^T} \left\{ u \frac{\partial G^T}{\partial v} - G^T \frac{\partial u}{\partial v} \right\} ds \quad (34)$$

Since Green's function vanishes outside the domain P_{0AB} and has discontinuous derivatives across O_i , it is easy to show that Eq. (34) reduces to Eq. (23), when Eq. (29) is used. This equivalence of r and G^T is a

little surprising since Riemann's function is a solution of a homogeneous regular differential equation and does not depend on the curve \mathcal{L} while the Green function satisfies a differential equation with a singular inhomogeneous term and depends on \mathcal{L} . However this equivalence is only valid on a subspace $(P_A \mathcal{L} B)$ of Ω : the Riemann function is a continuous function while the Green function is discontinuous and vanishes outside this subspace.

PROPERTIES OF RIEMANN'S SOLUTION

In this section we collect some properties of the generalized Riemann solution.

(a) From Eq. (33), we obtain

$$r(x, y; x_0, y_0) = \bar{r}(x_0, y_0; x, y) \tag{35}$$

So, when $H(x, y)$ is self-adjoint, P_n vanishes and we have :

$$r(x, y; x_0, y_0) = r(x_0, y_0; x, y) \tag{36}$$

(b) Change of functions

When we do the following change of functions

$$u_1(x, y) = \gamma(x, y) u(x, y) \tag{37}$$

in Eq. (1), we obtain :

$$\left[A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 B_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial}{\partial x} + E_1 \frac{\partial}{\partial y} + F_1 \right] u_1 = 0 \tag{38}$$

with

$$(A_1, B_1, C_1) = (A, B, C) \tag{39}$$

$$D_1 = D + 2\gamma \left[A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{1}{\gamma} \tag{40}$$

$$E_1 = E + 2\gamma \left[B \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{1}{\gamma} \tag{41}$$

$$F_1 = \gamma H \frac{1}{\gamma} \tag{42}$$

The Riemann function of Eq. (38) is obtained by :

$$r_1(x, y; x_0, y_0) = \frac{\gamma(x_0, y_0)}{\gamma(x, y)} r(x, y; x_0, y_0) \tag{43}$$

Proof. Eqs. (38-42) are easily obtained by the substitution of Eq. (37) in Eq. (1). Eq. (43) is obtained as follows.

The adjoint equation to Eq. (38) has the following coefficients :

$$(A_1^T, B_1^T, C_1^T) = (A, B, C) \tag{44}$$

$$D_1^T = -D_1 + 2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \\ = -D - 2\gamma \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{\gamma} + 2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) \tag{45}$$

$$E_1^T = -E_1 + 2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) \\ = -E - 2\gamma \left(B \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{\gamma} + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) \tag{46}$$

$$F_1^T = H_1^T \cdot 1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} A + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B + \frac{\partial^2}{\partial y^2} C - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[2\gamma \left[A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{1}{\gamma} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[2\gamma \left[B \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{1}{\gamma} \right] + \gamma H \frac{1}{\gamma} \\ = H^T \cdot 1 - E + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma} \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} \right) \gamma \right] \\ + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\gamma} \left(B \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial y} \right) \gamma \right] + \gamma H \frac{1}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
 &= H^T \cdot 1 - F + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\gamma} \right) \left[A \frac{\partial Y}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial y} \right] + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \frac{2}{\gamma} \left[A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \gamma + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \gamma \right] \\
 &+ 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\gamma} \right) \left[B \frac{\partial Y}{\partial x} + C \frac{\partial Y}{\partial y} \right] + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \frac{2}{\gamma} \left[B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \gamma + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \gamma \right] + \gamma H \frac{1}{\gamma} \quad (47)
 \end{aligned}$$

On the other hand, starting from the adjoint p.d.e (2) satisfied by r and making the substitution (41), we get the following coefficients :

$$(A_1^T, B_1^T, C_1^T) = (A^T, B^T, C^T) = (A, B, C) \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
 D_1^T &= D^T + \frac{2}{\gamma} \left(A^T \frac{\partial Y}{\partial x} + B^T \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \\
 &= -D + 2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{2}{\gamma} \left(A \frac{\partial Y}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_1^T &= E^T + \frac{2}{\gamma} \left(B^T \frac{\partial Y}{\partial x} + C^T \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \\
 &= -E + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{2}{\gamma} \left(B \frac{\partial Y}{\partial x} + C \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1^T &= \frac{1}{\gamma} H^T \gamma \\
 &= H^T \cdot 1 + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \gamma \right) + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) \\
 &+ \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{A}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \\
 &+ \frac{C}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \gamma + \frac{2B}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \gamma - \frac{D}{\gamma} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{E}{\gamma} \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (51)
 \end{aligned}$$

So Eqs. (44-46) and (48-50) are equivalent and the function r_1 , given by Eq. (43), satisfies the correct p.d.e. Since the terms of the second order in the p.d.e. satisfied by r_1 and r are the same, the curves O_i , the functions A_i and the conormals v_i are the same and the correct boundary conditions (52), (53) are also verified :

$$\begin{aligned}
 &[\Lambda_2^{(1)}(x_0, y_0) - \Lambda_1^{(1)}(x_0, y_0)] r_1(x_0, y_0; x_0, y_0) \\
 &= [\Lambda_2(x_0, y_0) - \Lambda_1(x_0, y_0)] r(x_0, y_0; x_0, y_0) \\
 &= 2 \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2 \Lambda \frac{\partial r_1}{\partial v} + r_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial v} + P_n^{(1)} r_1 = \frac{\gamma(x_0, y_0)}{\gamma(x, y)} \left(2 \Lambda \frac{\partial r}{\partial v} + r \frac{\partial \Lambda}{\partial v} + P_n r \right) \\
 &+ 2 \Lambda \gamma(x_0, y_0) r \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\gamma(x, y)} \\
 &- 2 n_x \left(A \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma(x, y)}{\gamma(x, y)} + B \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\gamma(x, y)} \right) \gamma(x_0, y_0) r \\
 &- 2 n_y \left(B \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma(x, y)}{\gamma(x, y)} + C \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\gamma(x, y)} \right) \gamma(x_0, y_0) r \\
 &= 0 \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\gamma}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

c). Composition formula for the Riemann's functions

Since a composition formula exists for the Green functions, such a relation should probably exist for the Riemann function, but in a larger domain. We consider two hyperbolic p.d.e. of the second order which have the same coefficients of the second order, and consequently the same O_i , A_i , \vec{v}_i . Their difference is a first order p.d. operator, noted Δ :

$$\Delta = H_2 - H_1 \tag{54}$$

$$H_i(x,y) = A_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 B_i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_i \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_i \frac{\partial}{\partial x} + E_i \frac{\partial}{\partial y} + F_i \tag{55}$$

The Riemann functions are defined by the equations :

$$H_1^T(x,y) r_i(x,y; x_1, y_1) = 0 \tag{56}$$

$$[\Delta_2(x_1, y_1) - A_1(x_1, y_1)] r_i(x_1, y_1; x_i, y_i) = 2 \tag{57}$$

$$2 A_1 \frac{\partial r_i}{\partial v_1} + r_i \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v_1} + P(i) r_i = 0 \text{ for } P(x,y) \in O_1(\alpha_i), \tag{58}$$

$$2 A_2 \frac{\partial r_i}{\partial v_2} + r_i \frac{\partial \Lambda_2}{\partial v_2} + P(i) r_i = 0 \text{ for } P(x,y) \in O_2(\beta_i); \tag{59}$$

Using Riemann's formula (23) to solve the Cauchy problem for r_i and denoting \mathcal{E} the domain P_{1AP_0B} contained between the curves $O_1(\alpha_1)$, $O_2(\beta_1)$, $O_1(\alpha_2)$ and $O_2(\beta_2)$ and represented on Fig. 2, we get :

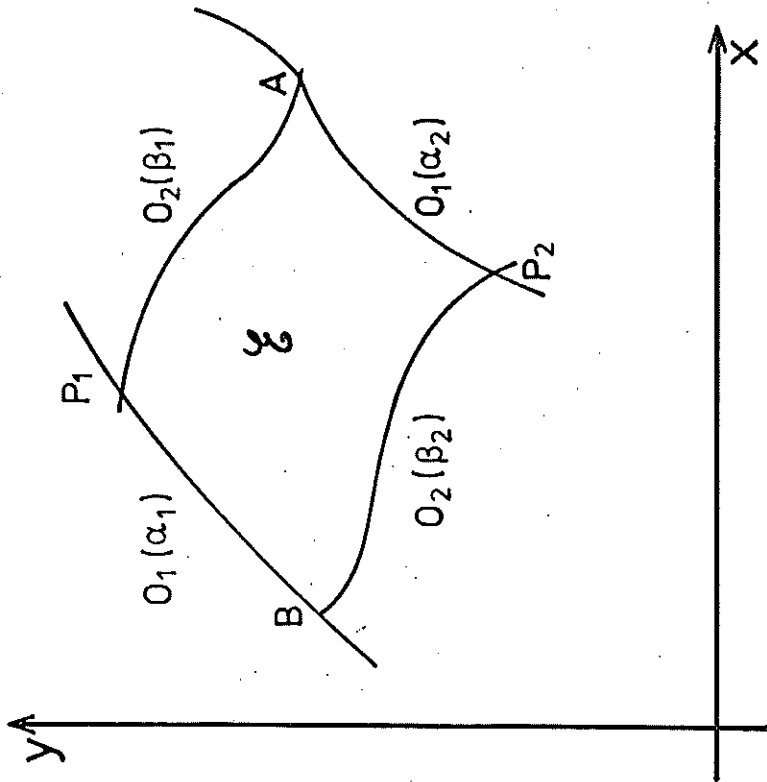


Fig. 2

$$2 \tau_1(x_2, y_2; x_1, y_1) = - [\Lambda_1 \tau_2^T x_1]_A + [\Lambda_2 \tau_2^T x_1]_B$$

$$- e \iint_{\mathcal{L}} dx dy \tau_2^T \Delta^T(x, y) \tau_1$$

$$+ \int \{ \Lambda(x_1 \frac{\partial \tau_1^T}{\partial v} - \tau_2^T \frac{\partial x_1}{\partial v}) + \tau_1 \tau_2^T P(2)^T \} ds$$

$$\mathcal{L} = [0_1^+(\alpha_1) + 0_2^+(\beta_1)]$$

$$= [\Lambda_2 \tau_2^T x_1]_B - [\Lambda_1 \tau_2^T x_1]_A - e \iint_{\mathcal{L}} dx dy \tau_2^T \Delta^T \tau_1$$

$$+ [\Lambda_1 \tau_2^T x_1]_A - [\Lambda_2 \tau_2^T x_1]_B$$

$$+ 2 \tau_2^T(x_1, y_1; x_2, y_2) + \int_{\mathcal{L}^+} \tau_1 \tau_2^T P(2)^T ds$$

$$- \int_{\mathcal{L}^+} \tau_2^T [\Lambda \frac{\partial \tau_1}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} (\Lambda \tau_1)] ds \tag{60}$$

Eq. (60) leads to the integral equation (61) for τ_1 , which is equivalent to the p.d.e. (56-59, i = 1) :

$$\tau_1(x_2, y_2; x_1, y_1) = \tau_2^T(x_1, y_1; x_2, y_2) - \frac{e}{2} \iint_{\mathcal{L}} dx dy \tau_2^T(x, y; x_2, y_2)$$

$$\Delta^T(x, y) \tau_1(x, y; x_1, y_1) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}^+} \tau_1(x, y; x_1, y_1) \tau_2^T(x, y; x_2, y_2)$$

$$[P(2)^T + P(1)] ds \tag{61}$$

where we can replace :

$$\int_{\mathcal{L}^+} \tau_1 \tau_2^T [P(2)^T + P(1)] ds = \int_{\mathcal{L}^+} \{ [\frac{\partial(B_1 - B_2)}{\partial x}] + \frac{\partial(C_1 - C_2)}{\partial y} - (E_1 - E_2) \} dx - [\frac{\partial(\Lambda_1 - \Lambda_2)}{\partial x}] + \frac{\partial(B_1 - B_2)}{\partial y} - (D_1 - D_2) dy \} \tag{62}$$

The method of successive approximations applied to the integral Eq. (61) of Volterra type, leads to upper bounds⁶ for the Riemann function. For some particular cases, Eq. (61) with $\tau_2 = 1$ can even give the analytic expression of the Riemann function (see Refs. 5c and 5d).

In the peculiar case $H_2 = H_1$, we get :

$$P(1) + P(1)^T = 0 \tag{63}$$

and

$$\tau_1(x_2, y_2; x_1, y_1) = \tau_1^T(x_1, y_1; x_2, y_2) \tag{64}$$

d) Spectral representation of the Riemann solution of a separable p.d.e.

A spectral representation of the Riemann function can be obtained when the variables of the p.d.e. are separable. We consider the following Cauchy problem :

$$H(x,y) \phi(x,y) = [L_1(x) - L_2(y)] \phi(x,y) = 0 \tag{65}$$

$$\phi(x,y) = 0 \text{ when } y = y_1 \tag{66}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(x,y) = 0 \text{ when } y = y_1 \tag{67}$$

where

$$L_1(x) = a_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 b_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + c_1(x) \tag{68}$$

and

$$a_1(x) > 0, \quad a_2(y) > 0 \text{ in } \Omega(x,y)$$

After separation of the variables, we are led to consider the following two differential equations :

$$[L_1(x) + \lambda^2] u(\lambda,x) = 0 \tag{69}$$

$$[L_2(y) + \lambda^2] v(\lambda,y) = 0 \tag{70}$$

where λ^2 is the separation constant.

The solution $v_{y_1}(\lambda,y)$ of Eq. (70) must satisfy the boundary conditions :

$$v_{y_1}(\lambda,y) = 0 \text{ for } y = y_1 \tag{71}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v_{y_1}(\lambda,y) = 1 \text{ for } y = y_1 \tag{72}$$

whereas we choose a solution $u(\lambda,x)$ of Eq. (69) to which a second function $\bar{u}(\lambda,x)$ can be associated in order to have the following relations :

$$\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda,x) \sigma(\lambda) d\lambda^2 \tag{73}$$

$$\sigma(\lambda) = \int_0^{\infty} \bar{u}(\lambda,x) \alpha(x) dx \tag{74}$$

The solution $\phi(x,y)$ of Eqs. (65-68) reads then :

$$\phi(x_0,y_0) = \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{u}(\lambda,x) u(\lambda,x_0) \alpha(x) v_{y_1}(\lambda,y_0) \tag{75}$$

while Riemann's method leads to :

$$\begin{aligned} \phi(x_0,y_0) &= -\frac{1}{2} [\Lambda_1 r \phi]_A + \frac{1}{2} [\Lambda_2 r \phi]_B + \frac{1}{2} \int_A^B \{ \Lambda (\phi \frac{\partial r}{\partial v} - r \frac{\partial \phi}{\partial v}) + r \phi P_{\Omega} \} \\ &= -\frac{1}{2} \int_A^B r(x,y_1; x_0, y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(x,y_1)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x,y_1)}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1(x) & 0 \\ 0 & -a_2(y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int_A^B r(x,y_1; x_0, y_0) \alpha(x) a_2(y_1) dx \tag{76} \end{aligned}$$

where A and B are the intersection points of the curves $O_1(\alpha)$ and $O_2(\beta)$ with the straight line $y = y_1$. By comparison of Eqs. (75) and (76), we obtain the representation :

$$a_2(y) r(x,y; x_0, y_0) = \text{sign}(y_0 - y) 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{u}(\lambda,x) u(\lambda,x_0) v_y(\lambda,y_0)$$

when

$$P \in \Omega_A(P_0) \cup \Omega_U(P_0) \quad (77)$$

If v_1 and v_2 are two linearly independent solutions of Eq. (70) and if

$$W(y) = [v_1 \frac{dv_2}{dy} - v_2 \frac{dv_1}{dy}] \quad (78)$$

is their Wronskian, the solution $v(\lambda, y_0)$ reads :

$$v_y(\lambda, y_0) = \frac{[v_1(\lambda, y) v_2(\lambda, y_0) - v_1(\lambda, y_0) v_2(\lambda, y)]}{W(y)} \quad (79)$$

$$= z_2(y) [z_2(\lambda, y, y_0) e(y-y_0) - e(y-y_0) z_2(\lambda, y, y_0)] \quad (80)$$

where

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

and where $z_2(\lambda, y, y_0)$ is the Green function of Eq. (70) with two boundary conditions given at a same point.

Finally, we obtain the following relations :

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{u}(\lambda, x) u(\lambda, x_0) z_2(\lambda, y_0, y_0) = \tau(x, y; x_0, y_0) \quad \text{if } P \in \Omega_A(P_0) \cup \Omega_U(P_0) \quad (81)$$

$$= 0 \quad \text{if } P \in \Omega_L(P_0) \cup \Omega_R(P_0) \quad (82)$$

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{v}(\lambda, y) v(\lambda, y_0) z_1(\lambda, x_0, x_0) = \tau(x, y; x_0, y_0) \quad \text{if } P \in \Omega_L(P_0) \cup \Omega_R(P_0) \quad (83)$$

$$= 0 \quad \text{if } P \in \Omega_A(P_0) \cup \Omega_U(P_0) \quad (84)$$

Using the relation (27) between the Riemann and Green functions, we obtain :

$$G^T(x_0, y_0; x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{u}(\lambda, x) u(\lambda, x_0) z_2(\lambda, y, y_0) \quad (85)$$

when $P \in \Omega_U(P_0) \cup \Omega_A(P_0)$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^2 \bar{v}(\lambda, y) v(\lambda, y_0) z_1(\lambda, x, x_0) \quad (86)$$

when $P \in \Omega_R(P_0) \cup \Omega_L(P_0)$

CHAPITRE IV : GENERALISATION DES PROBLEMES DIRECT ET INVERSE
 ++++++
 POUR L'EQUATION DE SCHRÖDINGER REDUITE A MOMENT ANGULAIRE NUL
 ++++++

§ 1. INTRODUCTION

L'équation de Schrödinger radiale, réduite à moment angulaire $\ell = 0$ joue un rôle particulier, très différent des cas $\ell \neq 0$. Lorsque $\ell = 0$, les deux solutions linéairement indépendantes sont de carré intégrable au voisinage de l'origine. (L'indice de défaut ("Defect index") vaut un pour $\ell = 0$ et zéro pour $\ell \geq 1$). Nous avons dans ce cas la possibilité de définir plusieurs conditions aux limites en $x = 0$:

$$\left. \frac{d\phi_0(k,x)}{dx} \right|_{x=0} = \alpha_0 \phi_0(k,0) .$$

Le cas étudié en théorie de la diffusion correspond au choix $\alpha_0 = \infty$. Gel'fand et Levitan [GEL 51] ont considéré l'étude complète du problème inverse correspondant au cas $V_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ ou ∞ . Nous voulons étendre les problèmes direct et inverse au cas où $V_0 \neq 0$ et où les fonctions solutions de l'équation perturbée ϕ_1 et de l'équation non perturbée ϕ_0 vérifient les conditions

$$\left. \frac{d\phi_i}{dx}(k,x) \right|_{x=0} = \alpha_i \phi_i(k,0) \quad (i = 0,1) \quad (\phi_i \text{ quelconque}) .$$

Nous pensons que cette extension pourra fournir des solutions nouvelles à certaines équations non linéaires. En effet, la résolution de certaines équations non linéaires très importantes en physique, a suscité assez récemment un regain d'intérêt pour le problème inverse de la diffusion et l'étude de ses généralisations. Le problème inverse correspondant à l'équation de Schrödinger à une dimension ($-\infty < x < \infty$) fournit une méthode de résolution pour de nombreuses équations aux dérivées partielles non linéaires (Equations non linéaires de Boussinesq, de Korleweg-de Vries, de Sine Gordon, de Schrödinger, de Klein-Gordon et de Zakharov et Shabat).

Cette méthode est un peu analogue à la méthode de transformée de Fourier pour des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Dans le cas de l'équation de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x,t) - 6 V(x,t) \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} V(x,t) = 0 \quad ,$$

nous considérons la solution $V(x,t)$ du problème non linéaire étudié comme le potentiel à introduire dans l'équation de Schrödinger à une dimension. La condition initiale $(V(x,t), t = 0)$ introduite dans l'équation de Schrödinger nous fournit les données initiales de la diffusion (états liés, constantes de normalisation et paramètre de transmission). La propriété remarquable est que l'équation d'évolution non linéaire pour V est équivalente à une ou plusieurs équations d'évolution pour les données de la diffusion. Ces équations peuvent être résolues aisément et nous donnent les données de la diffusion pour tout t . Pour obtenir la solution $V(x,t)$ du problème non linéaire, pour un temps t donné, il suffit alors de résoudre le problème inverse à partir des données de la diffusion correspondant à cet instant t .

On pensait jusqu'à très récemment, que le problème inverse pour l'équation radiale ($0 \leq x < \infty$) ne serait pas utile pour les équations non linéaires et qu'il fallait plutôt généraliser le problème inverse à une dimension pour des potentiels dépendant des vitesses, le problème inverse matriciel ou encore le problème inverse dans un espace à n dimensions ($n > 1$). Cette dernière extension [NEW 78] permettrait de résoudre des équations non linéaires à $n+1$ variables. Ainsi, Ablowitz et Segur [ABL 75] ont considéré l'équation de Schrödinger non linéaire et l'équation de Zakharov-Shabat [ZAK 71], sur un intervalle semi-infini ($0 \leq x < \infty$). Ils ont montré que ces deux équations ne peuvent être étudiées par la méthode inverse à une dimension que si les équations linéarisées correspondantes peuvent être résolues par la transformée de Fourier sinus ou cosinus. Les solutions de ces deux problèmes ne peuvent en général pas être obtenues par la méthode inverse de l'équation radiale sur $(0, \infty)$.

En 1976, cependant, Moser [MOS 76] a montré que le problème inverse correspondant à l'équation radiale sur $(0, \infty)$ pouvait fournir des solutions à l'équation de Korteweg-de Vries. Pour ces raisons, nous avons généralisé le problème inverse pour l'équation radiale réduite à $\ell = 0$, en espérant fournir de nouvelles solutions à certaines équations non linéaires.

Ce chapitre est structuré comme suit : au paragraphe 2, nous considérons le problème direct ; la fonction spectrale généralisée y est définie, ainsi que la fonction de Jost, la solution régulière, la

solution de Jost et les solutions physiques entrantes et sortantes. Dans le paragraphe 3, nous considérons le problème inverse. Nous généralisons tout d'abord la méthode de Jost et Kohn permettant de trouver la fonction spectrale à partir des déphasages, des états liés et des constantes de normalisation. Ensuite, nous utilisons la méthode de Newton pour obtenir l'équation intégrale fondamentale généralisée de "Gel'fand". Cette méthode est basée sur l'existence d'un opérateur de transformation et de deux systèmes complets de solutions. Le paragraphe 3 se termine par quelques exemples illustrant la méthode généralisée. Ces exemples sont utilisés au paragraphe 4 pour obtenir des solutions analytiques à l'équation non linéaire de Korteweg-de Vries. Afin d'obtenir des formes analytiques nouvelles pour les solutions, nous considérons le cas où α_0 est fini et dépendant du temps. (Le cas considéré par Moses [MOS 76] correspond au problème habituel où α_0 est infini et constant). Ces exemples nous permettent d'espérer que le problème inverse généralisé à $\lambda = 0$, peut être utile pour résoudre certaines autres équations non linéaires.

§ 2. PROBLEME DIRECT ET FONCTION SPECTRALE

Nous considérons l'équation de Schrödinger radiale, réduite, correspondant à l'onde S ($\lambda = 0$) :

$$(L_i + k^2)\phi_i(k, x) = \phi_i''(k, x) + [k^2 - V_i(x)]\phi_i(k, x) = 0 \quad (\text{IV.2.1})$$

pour $i = 0, 1$ et $0 \leq x < \infty$. A cette équation différentielle (VI.2.1) nous associons une condition à l'origine générale :

$$\phi_i'(k, 0) = \alpha_i \phi_i(k, 0) \quad (\text{IV.2.2})$$

où α_i est supposé réel. Parmi les solutions des équations (IV.2.1) et (IV.2.2) nous choisisons la solution qui est normalisée de la façon suivante :

$$\phi_i(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2 + 1}} \quad (\text{IV.2.3})$$

Cette normalisation permet de traiter simultanément les cas

$$\phi_i(k,0) = 0 \quad (\text{où } \alpha_i = \infty) \quad \text{et} \quad \phi_i'(k,0) = 0 \quad (\text{où } \alpha_i = 0)$$

Nous supposons que le potentiel $V_i(x)$ est réel et localement intégrable. Si en particulier nous supposons que le potentiel $V_i(x)$ satisfait la condition

$$\int_0^{\infty} (1+x) |V_i(x)| dx < \infty \quad (\text{IV.2.4})$$

Titchmarsh [TIT 62] a montré le spectre en k^2 comprend une partie discrète qui est finie et qui peut posséder des valeurs positives, nulles et négatives $k_{j,i}^2$ et une partie continue $k^2 \in [0, \infty[$. Si par contre le potentiel V_i est un potentiel de confinement qui tend vers l'infini pour $x \rightarrow \infty$, le spectre devient alors purement discret et comprend une infinité de valeurs propres.

A l'opérateur $L_i(x)$ est associée au moins une fonction spectrale non décroissante $\rho_i(k^2)$ ($-\infty < k^2 < \infty$) qui lorsque la relation (IV.2.4) est vérifiée, est définie par la relation :

$$\rho_i(k^2) = \begin{cases} \sum_{k_{j,i}^2 < k^2} \frac{1}{\int_0^{\infty} |\phi_i(k_{j,i}, t)|^2 dt} = \sum_{k_{j,i}^2 < k^2} C_{j,i} & \text{si } k^2 \leq 0 \\ \sum_{k_{j,i}^2 < k^2} C_{j,i} + \frac{2}{\pi} \int_0^k \frac{k'^2 dk'}{|M_i(k')|^2} & \text{si } k^2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.2.5a})$$

Lorsque le potentiel V_i est un potentiel de confinement, l'intégrale disparaît dans l'équation (IV.2.5b). Si nous avons admis des valeurs complexes pour α_i et V_i , il se pourrait que l'ensemble des fonctions propres ne forme plus une base complète dans $\mathcal{H} = L_2(0, \infty)$; il faut ajouter les fonctions "adjointes" comme nous l'avons vu au chapitre I.

La fonction $M_i(k)$ apparaissant dans l'équation (IV.2.5b) peut jouer le rôle de fonction de Jost généralisée et est définie par le comportement asymptotique de la solution $\phi_i(k,x)$ à partir des relations (IV.2.6) et (IV.2.7) suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_i(k, x) = |M_i(k)| \frac{\sin [kx + \delta_i]}{k} \quad (\text{IV.2.6})$$

$$\arg M_i(k) = -\delta_i(k) \quad (\text{IV.2.7})$$

La fonction M_i et la fonction spectrale sont en fait définies à un facteur constant près, qui dépend de la normalisation de $\phi_i(k, x)$. Nous avons choisi la normalisation définie par l'équation (IV.2.3), qui nous permet d'écrire la relation de complétude sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(k, x) \phi_i(k, y) d\rho_i(k^2) = \delta(x - y)$$

Nous introduisons à présent une solution de "Jost généralisée" $f_i(k, x)$ qui vérifie l'équation différentielle (IV.2.1) et la condition :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_i(k, x) = e^{ikx}, \quad \text{Im } k \geq 0 \quad (\text{IV.2.8})$$

et deux fonctions $F_i(k)$ et $G_i(k)$ définies par les relations :

$$F_i(k) = f_i(k, 0) \quad (\text{IV.2.9})$$

$$G_i(k) = \left. \frac{d}{dx} f_i(k, x) \right|_{x=0} \quad (\text{IV.2.10})$$

Dans le cas de la diffusion généralement étudié, nous avons

$$F_i(k) = M_i(k)$$

Les fonctions $f_i(k, x)$ et $f_i(-k, x)$ forment un ensemble de deux solutions linéairement indépendantes pour $k \neq 0$, $\text{Im } k = 0$, nous pouvons donc écrire

$$\phi_i(k, r) = A f_i(k, r) + B f_i(-k, r)$$

L'équation (IV.2.6) conduit à la relation

$$\phi_i(k, r) = \frac{1}{2ik} [M_i(-k) f_i(+k, r) - f_i(-k, r) M_i(k)] \text{ pour } k \text{ réel} \quad (\text{IV.2.11})$$

où

$$\begin{aligned}
 M_i(k) &= W_r [f_i(k,r), \phi_i(k,r)] = \phi_i'(k,0) f_i(k,0) - \phi_i(k,0) f_i'(k,0) \\
 &= [\alpha_i F_i(k) - G_i(k)] \frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2 + 1}} \quad (\text{IV.2.12})
 \end{aligned}$$

Si $\alpha_0 = \alpha_1$, nous pouvons écrire les relations (IV.2.13), (IV.2.14) entre les Wronskiens perturbés et non perturbés :

$$W_r[\phi_1, f_1] = W_r[\phi_0, f_0] + \int_0^\infty \phi_0(k,r) [V_1(r) - V_0(r)] f_1(k,r) dr \quad (\text{IV.2.13})$$

$$= W_r[\phi_0, f_0] + \int_0^\infty \phi_1(k,r) [V_1(r) - V_0(r)] f_0(k,r) dr \quad (\text{IV.2.14})$$

nous obtenons

$$M_1(k) = M_0(k) + \int_0^\infty \phi_0(k,r) [V_1(r) - V_0(r)] f_1(k,r) dr \quad (\text{IV.2.15})$$

$$= M_0(k) + \int_0^\infty \phi_1(k,r) [V_1(r) - V_0(r)] f_0(k,r) dr \quad (\text{IV.2.16})$$

Dans le cas $V_0 = 0$ et $\alpha_0 = \alpha_1$, ces relations s'écrivent :

$$M_1(k) = \frac{\alpha_1 - ik}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} + \int_0^\infty e^{ikr} V_1(r) \phi_1(k,r) dr \quad (\text{IV.2.17})$$

$$= \frac{\alpha_1 - ik}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} + \int_0^\infty \frac{[\cos kx + \frac{\alpha_1}{k} \sin kx]}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} V_1(r) f_1(k,r) dr \quad (\text{IV.2.18})$$

Par les techniques habituelles [NEW 66] nous pouvons montrer que la fonction de "Jost" généralisée est analytique dans le demi-plan supérieur et est continue dans ce même demi-plan, y compris l'axe réel. Les valeurs propres du spectre discret sont les zéros de la fonction de Jost dans le demi-plan supérieur, l'axe réel y compris.

Lorsque $V_1 = 0$, les formules se réduisent à :

$$\phi_1(k, x) = \frac{1}{k \sqrt{1 + \alpha_1^2}} [k \cos kx + \alpha_1 \sin kx] = \sqrt{\frac{k^2 + \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2}} \frac{\sin[kx + \gamma_1(k)]}{k} \quad (\text{IV.2.19})$$

$$\sin \gamma_1(k) = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \alpha_1^2}} \quad (\text{IV.2.20})$$

$$\cos \gamma_1(k) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{k^2 + \alpha_1^2}} \quad (\text{IV.2.21})$$

$$M_1(k) = \frac{\alpha_1 - ik}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \quad (\text{IV.2.22})$$

Lorsque $\alpha_1 < 0$, le spectre discret est constitué par la valeur propre $-i \alpha_1$, qui est un zéro de $M_1(k)$ sur le demi-axe imaginaire supérieur ; la fonction propre correspondante s'écrit :

$$\phi_1(-i \alpha_1, r) = \frac{e^{\alpha_1 r}}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \quad (\text{IV.2.23})$$

$$C_{1,1} = \left[\int_0^\infty |\phi_1(k_1 = -i \alpha_1, r)|^2 dr \right]^{-1} = \frac{1 + \alpha_1^2}{-2 \alpha_1} \quad (\text{IV.2.24})$$

Nous définissons à présent la transformée de "Fourier-Schrödinger" $\mathcal{F}_i(k)$, de toute fonction $f(x) \in \mathcal{E}_i$
 $\mathcal{E}_i = \{f(x) \in L^2(0, \infty), f'(0) = \alpha_i f(0)\}$

$$\mathcal{F}_i(k) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{F}_i^\rho(k) ; \mathcal{F}_i^\rho(k) = \int_0^\rho f(x) \phi_i(k, x) dx \quad (\text{IV.2.25})$$

Nous savons par la théorie générale des opérateurs différentiels [TIT 62] que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}_i^\rho(k)\|_{L_2} = \|\mathcal{F}_i(k)\|_{L_2} \quad (\text{IV.2.26})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \mathcal{F}_i^\rho(k) - \int_0^\rho f(x) \phi_i(k, x) dx \right\}^2 \frac{d\rho_i}{dk^2} dk^2 = 0 \quad (\text{IV.2.27})$$

Si la fonction $f(x)$ est à support compact $[0, b]$ ou si elle décroît suffisamment rapidement à l'infini, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{F}_i(k) = \int_0^\infty f(x) \phi_i(k, x) dx \quad (\text{IV.2.28})$$

La fonction spectrale est telle que l'on a l'égalité de "Parseval" suivante :

$$\int_0^\infty f^2(t) dt = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}_i^2(k) \frac{d\rho_i(k^2)}{dk^2} dk^2 \quad (\text{IV.2.29})$$

et

$$||f(x)|| = || \int_{-\infty}^\infty \phi_i(k, x) \mathcal{F}_i(k) \frac{d\rho}{dk} dk^2 || \quad (\text{IV.2.30})$$

Nous allons montrer que la fonction spectrale définit de façon unique l'opérateur L_0 et la constante réelle α_0 . En effet, supposons par exemple que $\rho_0(k) = M \rho_1(k)$ où M est une constante et montrons que $L_1 = L_0$ et $\alpha_1 = \alpha_0$. (Nous rappelons que la fonction spectrale ρ_i n'est définie qu'à une constante multiplicative près qui correspond au choix de la normalisation de ϕ_i). Nous considérons les solutions des problèmes $i = 0, 1$ qui possèdent la même valeur en $x = 0$, ces fonctions propres peuvent être reliées par un opérateur de transformation $K(x, y)$. L'existence d'un tel opérateur K borné sera démontrée au chapitre V si le potentiel perturbatif possède des moments d'ordres zéro et un.

$$L_0 \phi_0(k, x) + k^2 \phi_0(k, x) = 0 \quad (\text{IV.2.31})$$

$$\phi_0'(k, 0) = \alpha_0 \phi_0(k, 0) \quad (\text{IV.2.32})$$

$$\phi_0(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_0^2}} \quad (\text{IV.2.33})$$

$$L_1 \phi_1(k, x) + k^2 \phi_1(k, x) = 0 \quad (\text{IV.2.34})$$

$$\phi_1'(k, 0) = \alpha_1 \phi_1(k, 0) \quad (\text{IV.2.35})$$

$$\phi_1(k, 0) = \phi_0(k, 0) = \sqrt{\frac{1 + \alpha_1^2}{1 + \alpha_0^2}} \phi_1(k, 0) \quad (\text{IV.2.36})$$

$$\phi_1(k, x) = \phi_0(k, x) + \int_0^x K(x, y) \phi_0(k, y) dy \quad (\text{IV.2.37})$$

$$\phi_1'(k, 0) = \phi_0'(k, x) + K(0, 0) \phi_0(k, 0) \quad (\text{IV.2.38})$$

où

$$\alpha_1 = \alpha_0 + K(0, 0) \quad (\text{IV.2.40})$$

Comme

$$\alpha_1 = \frac{\phi_1'(k, 0)}{\phi_1(k, 0)} = \frac{\phi_0'(k, 0)}{\phi_0(k, 0)},$$

le Wronskien $Wr(\phi_0, \phi_1)$ est nul et

$$\phi_1(k, x) = \phi_0(k, x) \frac{\sqrt{1 + \alpha_0^2}}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \quad (\text{IV.2.41})$$

Nous prenons la transformée de "Fourier-Schrödinger" $\mathcal{F}_1(k)$ d'une fonction $f(t)$ appartenant à \mathcal{E}_1 et à support compact $[0, b]$ (b quelconque) : (Ces fonctions $f(t)$ forment un ensemble qui est dense dans \mathcal{E}_1)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(k) &= \int_0^b f(x) \phi_1(k, x) dx \\ &= \sqrt{\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2}} \int_0^b dx f(x) \left[\phi_0(k, x) + \int_0^x dy K(x, y) \phi_0(k, y) \right] \\ &= \sqrt{\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2}} \int_0^b dx \phi_0(k, x) \left[f(x) + \int_x^b K(x, y) f(y) dy \right] dx \\ &= \int_0^\infty dx \phi_0(k, x) g(x) dx = \mathcal{F}_0(k) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.42})$$

où

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2}} \left[f(x) + \int_x^b K(x, y) f(y) dy \right] & \text{si } x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases} \quad (\text{IV.2.43a})$$

$$= 0 \quad (\text{IV.2.43b})$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g^2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_0^2(k) d\rho_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_1^2(k) d\rho_0 = M \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_1^2(k) d\rho_1 \\ &= M \int_0^{\infty} f^2(x) dx \end{aligned} \quad (\text{IV.2.44})$$

Par conséquent l'opérateur de transformation

$$T = \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2}} (1 + K) = \frac{1}{\sqrt{C}} (1 + K) \quad (\text{IV.2.45})$$

est tel que

$$||f|| = ||Tf|| \quad (\text{IV.2.46})$$

T est donc un opérateur isométrique. T est aussi un opérateur intégral du type Volterra, qui possède donc un inverse, dont la définition peut être étendue à tout l'espace de Hilbert ; par conséquent T est unitaire et nous avons les relations :

Pour $\forall f \in \mathcal{E}_1$ et à support compact $[0, b]$ (b quelconque) nous pouvons écrire :

$$T^+ f = T^{-1} f \quad (\text{IV.2.47})$$

$$\begin{aligned} T^+ f &= \frac{1}{\sqrt{C}} [f(x) + \int_x^b K^*(y, x) f(y) dy] \\ &= T^{-1} f = \sqrt{C} [f(x) + \int_0^x K_2(x, y) f(y) dy] \end{aligned} \quad (\text{IV.2.48})$$

Pour $x = b$, l'équation (IV.2.48) devient :

$$f(b) = C f(b) + \int_0^b K_2(b, y) f(y) dy \quad (\text{IV.2.49})$$

Nous déduisons de l'équation (IV.2.49) les relations :

$$C = 1 \quad (\text{IV.2.50})$$

$$K_2(b, y) = 0 \quad \text{pour } y \leq b \quad (\text{IV.2.51})$$

$$\phi_1(k, x) = \phi_0(k, x) \quad (\text{IV.2.52})$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 \quad (\text{IV.2.53})$$

et
$$L_1 = L_0 \quad (\text{IV.2.54})$$

Comme dans le cas $\alpha_1 = \infty$, nous pouvons définir des "fonctions d'onde" entrantes et sortantes :

$$\psi_1^\pm(k, r) = \frac{\phi_1(k, r)}{M_1(\pm k)} \quad (\text{IV.2.55})$$

$$\psi_1^-(k, r) = \frac{\phi_1(k, r)}{M_1^*(k)} \quad (k \text{ réel}) \quad (\text{IV.2.56})$$

$$\psi_1(k_{j,1}, r) = \phi_1(k_{j,1}, r) \sqrt{C_{j,1}} \quad (\text{IV.2.57})$$

Les fonctions de Green entrante et sortante par rapport à $H_0 = -L_0$ sont définies par la relation suivante :

$$G_0^\pm(k, r, r') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \phi_0(k', r) \frac{1}{k^2 - H_0 \pm i\epsilon} \phi_0(k', r') dk' + \sum_{j=1}^n \phi_0(k_{j,0}, r) \frac{1}{k^2 - H_0} \phi_0^j(k_{j,0}, r') \quad (\text{IV.2.58})$$

Pour $V_0 = 0$, nous avons :

$$G_0^\pm(k, r, r') = -\frac{1}{k} e^{\pm i(kr_> + \gamma)} \sin(kr_< + \gamma) \quad (\text{IV.2.59})$$

La fonction de Green $G_0^\pm(k, r, r')$ nous permet d'écrire l'équation intégrale :

$$\psi_1^\pm(k, r) = \psi_0^\pm(k, r) + \int_0^\infty G_0^\pm(k, r, r') [V_1(r') - V_0(r')] \psi_1^\pm(k, r') dr' \quad (\text{IV.2.60})$$

qui est équivalente à l'équation différentielle (IV.2.1) et aux conditions aux limites

$$\psi_1^\pm(0) = \alpha_1 \psi_1^\pm(0) \quad (\text{IV.2.61})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_1^\pm(k, x) = \sin(kx + \delta) e^{\pm i\delta} \quad (\text{IV.2.62})$$

§ 3. PROBLEME INVERSE ET EQUATION DE GEL'FAND LEVITAN GENERALISEE

Nous avons vu que la fonction spectrale définit de façon unique L_1 et α_1 . Nous nous proposons de trouver une méthode nous permettant de construire L_1 et α_1 à partir du spectre $\{k_{j,1}^2\}$, des déphasages à l'infini δ_1 et des constantes de normalisation $\{C_{j,1}\}$. La résolution du problème s'effectue en deux étapes :

- i) Construction de la fonction spectrale ρ_1 à partir des $k_{j,1}^2$, δ_j , $C_{j,1}$,
- ii) Construction de L_1 et α_1 à partir de la fonction spectrale ρ_1 .

i) Construction de la fonction spectrale

Pour $k^2 < 0$, ρ_1 est défini de façon univoque et directe à partir des $k_{j,1}^2$, $C_{j,1}$. Pour $k^2 > 0$, la construction de ρ_1 se ramène à la construction de la "fonction de Jost" $M_1(k)$ pour k réel dont la phase est donnée sur l'axe réel par $(-\delta_1(k))$. La fonction de "Jost" peut être obtenue si nous faisons les quatre hypothèses suivantes qui sont réalisées si le potentiel possède des moments d'ordres zéro et un :

- 1) $M_1(k) = M_1(-k)^*$ pour k réel
- 2) $M_1(k)$ est analytique dans le demi-plan supérieur
- 3) $\lim_{|k| \rightarrow \infty} M_1(k) = \frac{-ik + \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}}$ dans le demi-plan supérieur
- 4) les $k_{j,1}$ correspondent aux zéros de $M(k)$ dans le demi-plan supérieur.

La constante α_1 est directement obtenue à partir du comportement asymptotique des déphasages $\delta_1(k)$ pour des grandes valeurs de k .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_1(k) = -\arg(k/\alpha_1) \quad [\text{si nous posons } \delta_1(0) = 0] \quad (\text{IV.3.1})$$

Nous obtenons $\alpha_1 = \infty$ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_1(k) - \delta_1(0) = 0 - n_1 \pi \quad (\text{IV.3.2})$$

où n_1 représente le nombre d'états liés. α_1 est fini si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_1(k) - \delta_1(0) = -\frac{\pi}{2} \text{sign}(\alpha_1) - n_1 \pi \quad ; \quad (\text{IV.3.3})$$

nous avons alors :

$$\alpha_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} - \left[\frac{d}{dk} \text{tg} \delta_1(k) \right]^{-1} \quad . \quad (\text{IV.3.4})$$

Moyennant les quatre hypothèses précitées, nous pouvons généraliser la méthode de Jost et Kohn.

Si α_1 est fini, $\frac{M_1(k)}{k}$ est une fonction analytique dans le demi-plan supérieur et continue dans le demi-plan supérieur y compris l'axe réel.

$$\frac{M_1(k)}{k} = \frac{\alpha_1 F_1(k) - G_1(k)}{k \sqrt{\alpha_1^2 + 1}} \quad (\text{IV.3.5})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_1(k)}{k} = \frac{-i + \frac{\alpha_1}{k}}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{i\gamma(k)}}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} \quad (\text{IV.3.6})$$

Nous considérons la fonction réduite $M_1^{\text{Réd}}$ définie de la façon suivante :

$$M_1^{\text{Réd}}(k) = \frac{M_1(k)}{k} (1 + \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2} \text{Sgn} \alpha_1} \prod_{j=1}^{n_1} \frac{k + k_{j,1}}{k - k_{j,1}} \quad (\text{IV.3.7})$$

$$\text{Arg} M_1^{\text{Réd}}(k) = -\delta_1(k) - \frac{\pi}{2} \text{Sgn} \alpha_1 + 2 \sum_{j=1}^{n_1} \text{arctg} \frac{k}{k_{j,1}} \quad (\text{IV.3.8})$$

Nous obtenons

$$M_1(k) = \frac{k e^{\frac{i\pi}{2} \text{Sgn} \alpha_1}}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \prod_{j=1}^{n_1} \left(1 - \frac{k_{j,1}^2}{k^2}\right) \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' [\delta_1(k') + \frac{\pi}{2} \text{Sgn} \alpha_1]}{k' - k - i\epsilon} \right\} \quad (\text{IV.3.9})$$

ii) Construction de l'opérateur différentiel L_1 à partir de $\rho_1(k)$ et équation de Gel'fand Levitan généralisée.

Connaissant la fonction spectrale $\rho_1(k)$, nous nous proposons de déterminer l'opérateur différentiel L_1 à partir d'un opérateur L_0 ayant la fonction spectrale $\rho_0(k)$. Les quatre hypothèses que nous avons faites pour réaliser la première étape, ne sont pas nécessaires pour mener à bien la seconde étape. Par conséquent, si la fonction spectrale $\rho_1(k)$ peut être obtenue par une autre méthode, ne faisant pas appel aux quatre hypothèses précitées, si elle nous est donnée, la méthode qui suit, reste valable, mais dans ce cas elle conduira en général à un potentiel $V(x) = V_1(x) - V_0(x)$ ne possédant pas des moments d'ordre 0 et 1. La fonction spectrale $\rho_1(k^2)$ ne peut cependant pas être une fonction monotone non-décroissante, quelconque. Elle doit vérifier les conditions suivantes :

a) si $f(x)$ est une fonction à support compact, $\in L_2(0, \infty)$ et si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_0(k) d\rho_1(k^2) = 0 \quad (\text{IV.3.10})$$

où
$$\mathcal{F}_0(k) = \int_0^{\infty} f(x) \phi_0(k, x) dx \quad (\text{IV.3.11})$$

alors
$$f(x) \equiv 0 \quad (\text{IV.3.12})$$

b) La fonction
$$\theta^N(x) = \int_{-\infty}^N \phi_0(k, x) [d\rho_1(k^2) - d\rho_0(k^2)] \quad (\text{IV.3.13})$$

converge absolument vers une fonction $\theta(x)$ pour x fini et pour $N \rightarrow \infty$

$$\theta(0) = \alpha_0 - \alpha_1 \quad (\text{IV.3.14})$$

La première condition découle du fait que

$$\mathcal{F}_0(k) = \mathcal{F}_1(k) = \int_0^{\infty} g(y) \phi_1(k, y) dy \quad (\text{IV.3.15})$$

où
$$g(y) = f(y) + \int_y^{\infty} dx H_G(x, y) f(x) \quad (\text{IV.3.16})$$

Par conséquent la relation de Parseval conduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_1^2(k) d\rho_1(k^2) = 0$$

ou

$$g(y) = f(y) + \int_y^b dx H_G(x,y) f(x) = 0$$

Cette dernière équation intégrale en $f(y)$ est du type Volterra homogène donc $f(y) = 0$.

La deuxième condition deviendra plus claire par la suite ; elle découle du fait que

$$\theta(x) = \Omega(x,0)$$

$$\theta(0) = \Omega(0,0) = -K(0,0)$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'existence d'un opérateur de transformation et de deux systèmes de solutions complets assurent l'existence d'une équation fondamentale du type de Gel'fand. A partir de ρ_1 , nous voulons construire L_1 connaissant un opérateur L_0 et sa fonction spectrale ρ_0 .

Nous définissons le noyau symétrique de l'équation fondamentale par la relation

$$\Omega(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk^2 \phi_0(k,x) \left[\frac{d\rho_1(k^2)}{dk^2} \frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2} - \frac{d\rho_0(k^2)}{dk^2} \right] \phi_0(k,y) \quad (\text{IV.3.17})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk^2 \phi_0(k,x) \left[\frac{d\rho_1(k^2)}{dk^2} \frac{1}{1 + \alpha_1^2} - \frac{d\rho_0(k^2)}{dk^2} \frac{1}{1 + \alpha_0^2} \right] \phi_0(k,y) \quad (\text{IV.3.18})$$

Lorsque $\alpha_1 \rightarrow \infty$, il faut choisir $\alpha_0 \rightarrow \infty$ et considérer la première équation. Il faut préciser la signification de $\phi_0(k_{i,1},x)$. Cette fonction doit vérifier les trois équations :

$$L_0(x) \phi_0(k_{i,1},x) + k_{i,1}^2 \phi_0(k_{i,1},x) = 0 \quad (\text{IV.3.19})$$

$$\phi_0'(k_{i,1},0) = \alpha_0 \phi_0(k_{i,1},0) \quad (\text{IV.3.20})$$

$$\phi_0(k_{i,1},0) = 1 \quad (\text{IV.3.21})$$

Si $V_0 = 0$ par exemple, on a :

$$\phi_0(k_{i,1}, x) = [\sin(k_{i,1}, x) \frac{\alpha_0}{k_{i,1}} + \cos(k_{i,1}, x)] \text{ si } k_{i,1} \text{ est réel} \quad (\text{IV.3.22a})$$

$$= (1 + \alpha_0 x) \text{ si } k_{i,1} = 0 \quad (\text{IV.3.22b})$$

$$= [\text{Sh}(\kappa_{i,1}, x) \frac{\alpha_0}{\kappa_{i,1}} + \text{Ch}(\kappa_{i,1}, x)] \text{ si } k_{i,1} = i\kappa_{i,1} \quad (\text{IV.3.22c})$$

où $\kappa_{i,1}$ est réel.

Nous supposons qu'il existe un opérateur de transformation $U = T + K$ tel que

$$\phi_1(k, x) = \phi_0(k, x) + \int_0^x K(x, y) \phi_0(k, y) dy \quad (\text{IV.3.23})$$

où ϕ_1 vérifie les équations

$$L_1 \phi_1 + k^2 \phi_1 = 0$$

$$\phi_1(k, 0) = \phi_0(k, 0) = 1$$

$$\phi_1'(k, 0) = \alpha_1 \phi_1(k, 0) = \phi_0'(k, 0) + K(0, 0) \phi_0(k, 0)$$

et par conséquent

$$\alpha_1 = \alpha_0 + K(0, 0) \quad (\text{IV.3.24})$$

L'existence d'un tel opérateur de transformation sera démontrée au chapitre V. Appliquant U à gauche et U^+ à droite de la définition de Ω nous déduisons

$$U \Omega U^+ = I - U U^+$$

ou
$$U W U^+ = I$$

$$W = I + \Omega = \int_{-\infty}^{\infty} dk^2 \phi_0(k, x) \frac{d\rho_1}{dk^2} \left(\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2} \right) \phi_0(k, y)$$

De la relation $U + U\Omega = U^+{}^{-1}$, nous obtenons pour $y < x$ l'équation de Gel'fand-Levitan généralisée :

$$K(x, y) + \Omega(x, y) + \int_0^x K(x, y) \Omega(z, y) dz = 0 \quad (\text{IV.3.25})$$

Connaissant $K(x,y)$, solution de l'équation (IV.3.25), le potentiel perturbatif V et la constante α_1 , s'obtiennent à partir des équations :

$$V(x) = V_1(x) - V_0(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x,x) \quad (\text{IV.3.26})$$

$$\alpha_1 = K(0,0) + \alpha_0 \quad (\text{IV.3.27})$$

(Dans le cas particulier $L_1 = L_0$, $\alpha_1 \neq \alpha_0$, l'opérateur de transformation relie deux solutions linéairement indépendantes de la même équation différentielle).

L'opérateur de transformation doit vérifier les équations

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_1(x) \right] K(x,y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - V_0(y) \right] K(x,y) \quad (\text{IV.3.28})$$

$$\frac{d}{dx} K(x,x) = \frac{1}{2} [V_1(x) - V_0(x)] \quad (\text{IV.3.29})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} K(x,y) \Big|_{y=0} = \alpha_0 K(x,0) \quad (\text{IV.3.30})$$

$$K(0,0) = \alpha_1 - \alpha_0 \quad (\text{IV.3.31})$$

qui seront étudiées au chapitre V.

La condition a) imposée à la fonction spectrale, assure l'existence d'une solution unique à l'équation intégrale fondamentale. Pour le démontrer, il suffit de montrer que l'équation intégrale homogène du type de Fredholm

$$g(y) + \int_0^x \Omega(z,y) g(z) dz = 0 \quad (\text{IV.3.32})$$

ne possède que la solution triviale $g = 0$.

Multipliant par $g(y)$ et intégrant l'équation (IV.3.32) nous obtenons :

$$\int_0^x dy g^2(y) + \int_0^x dy g(y) \int_0^x \Omega(z,y) g(z) dz = 0$$

ou

$$\int_0^x dy g^2(y) + \int_{-\infty}^{\infty} dk^2 \left[\frac{d\rho_1}{dk^2} \frac{1}{1 + \alpha_1^2} - \frac{d\rho_0}{dk^2} \frac{1}{1 + \alpha_0^2} \right] \left[\int_0^x dy g(y) \phi_0(k,y) \right]^2 = 0 \quad (\text{IV.3.34})$$

La relation de Parseval conduit à l'équation :

$$\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk^2 \frac{d\rho_1}{dk^2} \left[\int_0^x dy g(y) \phi_0(k,y) \right]^2 = 0 \quad (\text{IV.3.35})$$

La condition a) entraîne $\mathcal{J}_0(k) \equiv 0$ et $g(y) = 0$.

La condition b)

$$\theta(0) = \alpha_0 - \alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k,0) d\rho_1 \phi_1(k,0) - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(k,0) d\rho_0 \phi_0(k,0)$$

ne conduit pas à $\alpha_0 = \alpha_1$, car nous n'avons l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k,x) d\rho_1 \phi_1(k,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(k,x) d\rho_0 \phi_0(k,y) \quad (\text{IV.3.36})$$

que pour $x^2 + y^2 > 0$.

Nous verrons d'ailleurs dans les exemples suivants que nous obtenons effectivement $\Omega(0,0) = \theta(0) = \alpha_0 - \alpha_1 \neq 0$.

EXEMPLE 1. Le problème non perturbé est caractérisé par $\alpha_0 > 0$, $V_0 = 0$

$$\frac{d\rho_0(k^2)}{dk} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} k^2 \frac{1 + \alpha_0^2}{k^2 + \alpha_0^2} & k^2 > 0 \\ 0 & k^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.3.37})$$

Nous considérons la perturbation la plus simple suivante

$$\frac{\rho_1(k^2)}{1 + \alpha_1^2} = \frac{\rho_0(k^2)}{1 + \alpha_0^2} + C \delta(k^2 - \gamma^2) \quad (\text{IV.3.38})$$

$$\begin{aligned} \Omega(x,y) &= C \int_{-\infty}^{\infty} dk^2 \phi_0(kx) \phi_0(k,y) \delta(k^2 - \gamma^2) \\ &= C \phi_0(\gamma x) \phi_0(\gamma y) \\ &= C \left(\frac{\alpha_0}{\gamma} \sin \gamma x + \cos \gamma x \right) \left(\frac{\alpha_0}{\gamma} \sin \gamma y + \cos \gamma y \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.3.39})$$

$$\Omega(0,0) = \alpha_0 - \alpha_1 = C \neq 0 \quad (\text{IV.3.40})$$

Comme $\Omega(x,y)$ est séparable en les variables x,y , nous pouvons écrire $K(x,y)$ sous la forme :

$$K(x,y) = f(x) \phi_0(\gamma,y) \quad (\text{IV.3.41})$$

L'équation intégrale fondamentale devient :

$$f(x) + C \phi_0(\gamma,x) + C f(x) \int_0^x \phi_0^2(\gamma,s) ds = 0 \quad (\text{IV.3.42})$$

et par conséquent

$$K(x,y) = \frac{-C \phi_0(\gamma,x) \phi_0(\gamma,y)}{1 + C \int_0^x \phi_0^2(\gamma,s) ds} \quad (\text{IV.3.43})$$

$$K(0,0) = -C \quad (\text{IV.3.44})$$

$$K(x,x) = \frac{-C \phi_0^2(\gamma,x)}{1 + C \int_0^x \phi_0^2(\gamma,s) ds} = -\frac{d}{dx} \ln [1 + C \int_0^x \phi_0^2(\gamma,s) ds] \quad (\text{IV.3.45})$$

$$V(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x,x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \{1 + C \int_0^x [\frac{\alpha_0}{\gamma} \sin \gamma s + \cos \gamma s]^2 ds\} \quad (\text{IV.3.46})$$

$$\phi_1(\gamma,x) = \frac{\phi_0(\gamma,x)}{1 + C \int_0^x \phi_0^2(\gamma,s) ds} \quad (\text{IV.3.47})$$

Si $\alpha_0 = 0$,

$$V(x) = \frac{2 \sin(2 \gamma x) \gamma C}{\{1 + \frac{C}{\gamma} [\frac{\gamma x}{2} + \frac{\sin 2 \gamma x}{4}]\}^2} + \frac{2 C^2 \cos^4 \gamma x}{\{1 + \frac{C}{\gamma} [\frac{\gamma x}{2} + \frac{\sin 2 \gamma x}{4}]\}^2} \quad (\text{IV.3.48})$$

EXEMPLE II. Nous nous donnons les fonctions

$$\frac{1}{|M_1(k)|^2} = \frac{1 + \alpha_1^2}{k^2 + \alpha_1^2} \quad (\text{IV.3.49})$$

et

$$\frac{1}{|M_0(k)|^2} = \frac{1 + \alpha_0^2}{k^2 + \alpha_0^2} \quad (\alpha_1 > 0, \alpha_0 > 0) \quad (\text{IV.3.50})$$

Nous obtenons pour $V_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \Omega(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [k \cos kx + \alpha_0 \sin kx][k \cos ky + \alpha_0 \sin ky] \\ &\quad \left[\frac{1}{k^2 + \alpha_1^2} - \frac{1}{k^2 + \alpha_0^2} \right] dk \\ &= \frac{2}{\pi} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) (\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial x}) (\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y}) \int_0^\infty \frac{\sin kx \sin ky}{(k^2 + \alpha_1^2)(k^2 + \alpha_0^2)} dk \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) (\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial x}) (\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y}) \left[\frac{e^{-\alpha_1(x-y)} - e^{-\alpha_1(x+y)}}{\alpha_1(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\alpha_0(x-y)} - e^{-\alpha_0(x+y)}}{\alpha_0(\alpha_1^2 - \alpha_0^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.3.51})$$

Après quelques calculs, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \Omega(x, y) &= \frac{-1}{2 \alpha_1} (\alpha_0 - \alpha_1)^2 e^{-\alpha_1(x+y)} + \frac{1}{2 \alpha_1} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) \\ &\quad [e^{-\alpha_1(x-y)} \eta(x-y) + e^{-\alpha_1(y-x)} \eta(y-x)] \\ &= \frac{(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 x} [\alpha_0 \text{sh } \alpha_1 y < + \alpha_1 \text{ch } \alpha_1 y <] . \end{aligned} \quad (\text{IV.3.52})$$

Ce dernier résultat (IV.3.52) nous suggère qu'il pourrait être obtenu de façon plus astucieuse en remarquant que l'expression de départ pour $\Omega(x,y)$ est proportionnelle à la représentation spectrale de la résolvante de l'équation $(L_0 - \alpha_1^2)\phi = 0$, nous pouvons donc écrire :

$$(-L_0 + \alpha_1^2) G(i\alpha_1, x, y) = \delta(x-y) \quad (\text{IV.3.53})$$

$$\Omega(x,y) = (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) G(i\alpha_1, x, y) \quad (\text{IV.3.54})$$

$$= (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) \frac{f_0(i\alpha_1, x_>) \phi_0(i\alpha_1, x_<)}{M_0(i\alpha_1)} \quad (\text{IV.3.55})$$

Pour $V_0 = 0$, nous avons :

$$\Omega(x,y) = \frac{(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 x_>} [\alpha_0 \text{sh } \alpha_1 y_< + \alpha_1 \text{ch } \alpha_1 y_<] \quad (\text{IV.3.56})$$

A nouveau, nous constatons que $\Omega(0,0) = (\alpha_0 - \alpha_1) \neq 0$.

Si $\psi(k,x)$ est une solution quelconque de l'équation :

$$[L_0 + k^2] \psi(k,x) = 0 \quad (\text{IV.3.57})$$

nous obtenons les relations suivantes :

$$\psi L_0 G - G L_0 \psi = (k^2 + \alpha_1^2) \psi G - \delta(x-y) \psi G$$

$$\psi(y) = (k^2 + \alpha_1^2) \int_a^b \psi G(i\alpha_1, x, y) dx - \text{Wr}[\psi, G]_a^b$$

si $y \in [a, b]$ et où $\text{Wr}[\psi, G] = \psi G' - \psi' G$.

$$\text{Nous posons } K(x,y) = a(x) \phi_0(i\alpha_0, y) \quad (\text{IV.3.58})$$

et nous introduisons cette expression dans l'équation intégrale fondamentale :

$$a(x) \phi_0(i\alpha_0, y) + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) G(i\alpha_1, x, y)$$

$$+ (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) a(x) \int_0^x \phi_0(i\alpha_0, z) G(i\alpha_1, z, y) dz = 0 \quad y < x,$$

$$a(x) \phi_0(i\alpha_0, y) + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) G(i\alpha_1, x, y) + a(x) \left\{ -\phi_0(i\alpha_0, y) - \text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, z), G(i\alpha_1, z, y)] \Big|_{z=0}^{z=x} \right\} = 0$$

ou encore,

$$\begin{aligned} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) G(i\alpha_1, x, y) &= a(x) \text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, z), G(i\alpha_1, z, y)] \Big|_{z=0}^{z=x} \\ (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) \frac{f_0(i\alpha_1, x)}{M_0(i\alpha_1)} \phi_0(i\alpha_1, y) &= a(x) \text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)] \frac{\phi_0(i\alpha_1, y)}{M_0(i\alpha_1)} \\ - a(x) \text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, 0), \phi_0(i\alpha_1, 0)] &\frac{f_0(i\alpha_1, y)}{M_0(i\alpha_1)} \\ &= a(x) \text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)] \frac{\phi_0(i\alpha_1, y)}{M_0(i\alpha_1)} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.59})$$

Nous déduisons les résultats :

$$a(x) = \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) f_0(i\alpha_1, x)}{\text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)]}$$

$$K(x, y) = \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) f_0(i\alpha_1, x) \phi_0(i\alpha_0, y)}{\text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)]} \quad (\text{IV.3.60})$$

$$\begin{aligned} K(x, x) &= \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) f_0(i\alpha_1, x) \phi_0(i\alpha_0, x)}{\text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)]} \\ &= - \frac{d}{dx} \ln \{ \text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)] \} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.61})$$

car

$$\begin{aligned} &\text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)] - \text{Wr} [\phi_0(i\alpha_0, 0), f_0(i\alpha_1, 0)] \\ &= (\alpha_1^2 - \alpha_0^2) \int_0^x \phi_0(i\alpha_0, t) f_0(i\alpha_1, t) dt \end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{dx} \text{Wr}[\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)] = (\alpha_1^2 - \alpha_0^2) \phi_0(i\alpha_0, x) f_0(i\alpha_1, x)$$

et par conséquent nous obtenons :

$$V(x) = V_1(x) - V_0(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \{ \text{Wr}[\phi_0(i\alpha_0, x), f_0(i\alpha_1, x)] \} \quad (\text{IV.3.62})$$

Si $V_0(x) = 0$, les équations (IV.3.60-62) s'écrivent :

$$K(x, y) = (\alpha_1 - \alpha_0) e^{\alpha_0(y-x)} \quad (\text{IV.3.63})$$

$$V(x) = 0 \quad (\text{IV.3.64})$$

et

$$\begin{aligned} \phi_1(k, x) &= \phi_0(k, x) + (\alpha_1 - \alpha_0) e^{-\alpha_0 x} \int_0^x e^{\alpha_0 y} \phi_0(k, y) dy \\ &= \cos kx + \frac{\alpha_1}{k} \sin kx \end{aligned} \quad (\text{IV.3.65})$$

EXEMPLE III. La méthode précédente peut également s'appliquer au cas plus général suivant :

$$M_1(k) = M_0(k) \prod_{j=1}^n \frac{k + i b_j}{k + i a_j} \sqrt{\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2}} \quad (\text{IV.3.66})$$

Les a_j ($j = 1, n$) sont supposés positifs, ce qui assure l'analyticité de la fonction $M_1(k)$ dans le demi-plan supérieur. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Omega(x, y) &= \int_0^\infty \phi_0(k, x) \phi_0(k, y) \left[\prod_{j=1}^n \frac{k^2 + a_j^2}{k^2 + b_j^2} - 1 \right] \frac{d \rho_0}{dk} dk \\ &= \int_0^\infty \phi_0(k, x) \phi_0(k, y) \left[\prod_{j=1}^n \frac{X_j}{k^2 + b_j^2} \right] \frac{d \rho_0}{dk} dk \end{aligned} \quad (\text{IV.3.67})$$

où :

$$X_j = \frac{\prod_{\ell=1}^n (a_\ell^2 - b_j^2)}{\prod_{\ell \neq j} (b_\ell^2 - b_j^2)} \quad (\text{IV.3.68})$$

Le noyau symétrique $\Omega(x,y)$ peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \Omega(x,y) &= \sum_{j=1}^n X_j G_0(i b_j; x,y) = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\phi_0(i b_j, y_<) f_0(i b_j, x_>)}{M_0(i b_j)} \\ &= \sum_{j=1}^n X_j \frac{e^{-b_j x_>} [\alpha_0 \operatorname{sh} b_j y_< + b_j \operatorname{ch} b_j y_<]}{b_j (\alpha_0 + b_j)} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.69})$$

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \Omega(0,0) = \sum_{j=1}^n X_j \frac{1}{(\alpha_0 + b_j)} \quad (\text{IV.3.70})$$

Nous posons par analogie au cas II :

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^n r_j(x) \phi_0(i a_j, y) \quad (\text{IV.3.71})$$

L'équation intégrale fondamentale devient :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n r_j(x) \phi_0(i a_j, y) + \sum_{j=1}^n X_j G_0(i b_j; x,y) \\ &+ \int_0^x \sum_{\ell=1}^n r_\ell(x) \phi_0(i a_\ell, z) \sum_{j=1}^n X_j G_0(i b_j, z,y) dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.3.72})$$

$$\int_0^x \phi_0(i a_\ell, z) G_0(i b_j, z,y) dz =$$

$$\frac{1}{b_j^2 - a_\ell^2} \left\{ \phi_0(i a_\ell, y) + \operatorname{Wr} [\phi_0(i a_\ell, z), G_0(i b_j, z,y)] \Big|_{z=0}^{z=x} \right\} \quad (\text{IV.3.73})$$

Evaluons le Wronskien :

$$W = \text{Wr} [\phi_0(i a_\ell, z), G_0(i b_j, z, y)] \text{ pour } z > y \text{ et pour } z < y$$

Si $z > y$, nous obtenons :

$$W = \text{Wr} [\phi_0(i a_\ell, z), f_0(i b_j, z)] \frac{\phi_0(i b_j, y)}{M_0(i b_j)} \quad (\text{IV.3.74})$$

Si $z < y$, nous avons :

$$W = \text{Wr} [\phi_0(i a_\ell, z), \phi_0(i b_j, z)] \frac{f_0(i b_j, y)}{M_0(i b_j)} \quad (\text{IV.3.75})$$

Tenant compte du fait que

$$\sum_j \frac{X_j}{b_j^2 - a_\ell^2} = \left[\prod_{j=1}^n \frac{k^2 + a_j^2}{k^2 + b_j^2} - 1 \right]_{k^2 = -a_\ell^2} = -1 \quad (\text{IV.3.76})$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n r_j(x) \phi_0(i a_j, y) + \sum_{j=1}^n X_j G_0(i b_j, x, y) \\ & + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n r_\ell(x) \frac{X_j}{b_j^2 - a_\ell^2} [\phi_0(i a_\ell, y) + \text{Wr} [\phi_0(i a_\ell, z), G_0(i b_j, z, y)] \Big|_{z=0}^{z=x}] \\ & = \sum_{j=1}^n r_j(x) \phi_0(i a_j, y) + \sum_{j=1}^n X_j f_0(i b_j, x) \frac{\phi_0(i b_j, y)}{M_0(i b_j)} \\ & - \sum_{j=1}^n r_j(x) \phi_0(i a_j, y) \\ & + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n r_\ell(x) \frac{X_j}{b_j^2 - a_\ell^2} \text{Wr} [\phi_0(i a_\ell, x), f_0(i b_j, x)] \frac{\phi_0(i b_j, y)}{M_0(i b_j)} \\ & - \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n r_\ell(x) \frac{X_j}{b_j^2 - a_\ell^2} \text{Wr} [\phi_0(i a_\ell, 0), \phi_0(i b_j, 0)] \frac{f_0(i b_j, y)}{M_0(i b_j)} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.3.77})$$

Comme $\phi'_0(k,0) = \alpha_0 \phi_0(k,0)$

$$\text{Wr}[\phi_0(k_1,0), \phi_0(k_2,0)] = \phi_0(k_1,0) \alpha_0 \phi_0(k_2,0) - \phi_0(k_2,0) \alpha_0 \phi_0(k_1,0) = 0 \quad (\text{IV.3.78})$$

le dernier terme tombe et nous pouvons écrire l'équation équivalente suivante :

$$f_j X_j \psi_j + A_{j\ell} r_\ell X_j \psi_j = 0 \quad (\text{IV.3.79a})$$

ou

$$\vec{f} + A \vec{r} = 0 \quad (\text{IV.3.79b})$$

où nous avons défini :

$$f_j = f_0(i b_j, x) \quad (\text{IV.3.80})$$

$$\psi_j = \frac{\phi_0(i b_j, y)}{M_0(i b_j)} \quad (\text{IV.3.81})$$

$$r_\ell = r_\ell(x) \quad (\text{IV.3.82})$$

et

$$A_{j\ell}(x) = \frac{1}{b_j^2 - a_\ell^2} \text{Wr}[\phi_0(i a_\ell, x), f_0(i b_j, x)] \quad (\text{IV.3.83})$$

Par conséquent nous obtenons :

$$\vec{r} = - A^{-1} \vec{f} \quad (\text{IV.3.84})$$

$$\phi_j(y) = \phi(i a_j, y) \quad (\text{IV.3.85})$$

$$K(x, y) = \vec{r}(x) \cdot \vec{\phi}(y) = - A^{-1} \vec{f}(x) \vec{\phi}(y) = - [A^{-1}]_{ij} f_0(i b_i, x) \phi_0(i a_j, y) \quad (\text{IV.3.86})$$

Comme nous avons la relation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A_{j\ell}(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{(b_j^2 - a_\ell^2)} \text{Wr}[\phi_0(i a_\ell, x), f_0(i b_j, x)] \\ &= \phi_0(i a_\ell, x) f_0(i b_j, x) \end{aligned} \quad (\text{IV.3.87})$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} K(x,x) &= - \phi_i(x) (A^{-1})_{ij} f_j(x) = - (A^{-1})_{ij} A'_{ji} \\ &= - \text{trace} [A^{-1} A'] = - \frac{d}{dx} \ln \det A \end{aligned} \quad (\text{IV.3.88})$$

car
$$\frac{d}{dx} \det A = \text{trace} [A^{-1} A'] \det A \quad (\text{IV.3.89})$$

$$V(x) = V_1(x) - V_0(x) = - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x) \quad (\text{IV.3.90})$$

$$\begin{aligned} \phi_1(k,x) &= \phi_0(k,x) + \int_0^x K(x,y) \phi_0(k,y) \\ &= \phi_0(k,x) - A^{-1} \vec{f}(x) \int_0^x \vec{\phi}(y) \vec{\phi}_0(k,y) dy \\ &= \phi_0(k,x) - A^{-1} \vec{f}(x) \vec{\beta}(x) \\ &= \det \begin{vmatrix} A(x) & \vec{f} \\ \vec{\beta} & \phi_0(k,x) \end{vmatrix} / \det A(x) \end{aligned} \quad (\text{IV.3.91})$$

où \vec{f} représente un vecteur colonne, $\vec{\beta}$ un vecteur ligne de composantes $\beta_j = \int_0^x \phi_0(i \alpha_j, y) \phi_0(k, y) dy$ et où nous avons appliqué le théorème de Frobenius Schur :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det (D - C A^{-1} B)$$

Dans le cas particulier

$$\frac{M_1}{M_0} = \frac{k + i b}{k + i a} \sqrt{\frac{1 + \alpha_0^2}{1 + \alpha_1^2}} \quad (\text{IV.3.92})$$

nous obtenons

$$\Omega(x, y) = (a^2 - b^2) \frac{\phi_0(i b, x) f_0(i b, y)}{M_0(i b)} \quad (\text{IV.3.93})$$

$$\Omega(0, 0) = \frac{a^2 - b^2}{\alpha_0 + b} \quad (\text{IV.3.94})$$

et par conséquent

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{a^2 - b^2}{\alpha_0 + b} \quad (\text{si } a = \alpha_0 \rightarrow \alpha_1 = b) \quad (\text{IV.3.95})$$

$$K(x, x) = - \frac{\phi_0(i a, x) f_0(i b, x) (b^2 - a^2)}{\text{Wr} [\phi_0(i a, x), f_0(i b, x)]} \quad (\text{IV.3.96})$$

Si nous supposons que $V_0 = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} K(x, x) &= \frac{e^{-bx} [\text{ch}(ax) + \frac{\alpha_0}{a} \text{sh}(ax)] (b^2 - a^2)}{\{e^{-bx} [a \text{sh}(ax) + \alpha_0 \text{ch}(ax)] + b e^{-bx} [\text{ch}(ax) + \frac{\alpha_0}{a} \text{sh}(ax)]\}} \\ &= \frac{\text{ch}(ax) + \frac{\alpha_0}{a} \text{sh} ax (b^2 - a^2)}{(a + \frac{\alpha_0}{a} b) \text{sh} ax + (\alpha_0 + b) \text{ch} ax} \quad (\text{IV.3.97}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= 2 \frac{d}{dx} K(x, x) \\ &= 2(b^2 - a^2) \{ [(a + \frac{\alpha_0}{a} b) \text{sh} ax + (\alpha_0 + b) \text{ch} ax] [a \text{sh} ax + \alpha_0 \text{ch} ax] \\ &\quad - [\text{ch} ax + \frac{\alpha_0}{a} \text{sh} ax] [(a^2 + \alpha_0 b) \text{ch} ax + (\alpha_0 + b) a \text{sh} ax] \} / \\ &\quad \{ (a + \frac{\alpha_0}{a} b) \text{sh} ax + (\alpha_0 + b) \text{ch} ax \}^2 \\ &= \frac{2(b^2 - a^2) (\alpha_0^2 - a^2)}{[(a + \frac{\alpha_0}{a} b) \text{sh} ax + (\alpha_0 + b) \text{ch} ax]^2} \quad (\text{IV.3.98}) \end{aligned}$$

§ 4. EQUATION NON LINEAIRE DE KORTEWEG-DE VRIES

Moses [MOS 76] a récemment montré que certaines solutions du problème inverse correspondant à l'équation radiale ($\ell = 0$, $0 \leq x < \infty$) peuvent constituer des solutions de l'équation non linéaire de Korteweg-de Vries ; il a ainsi prouvé que contrairement à ce que l'on avait cru jusqu'alors [ABL 75], il est possible de résoudre certains problèmes non linéaires par la méthode inverse correspondant à l'équation radiale ($0 \leq x < \infty$). Nous avons étendu dans les paragraphes précédents le problème inverse au cas où α_0 et α_1 sont quelconques et nous pensons que cette extension pourra élargir la classe des solutions d'équations non linéaires, pouvant s'obtenir par la méthode inverse. Nous allons vérifier que les quelques exemples simples de potentiels que nous avons construits par la méthode inverse pour l'équation de Schrödinger radiale généralisée ($\alpha_0 \neq \infty$, $\alpha_1 \neq \infty$) ($\ell = 0$, $0 \leq x < \infty$) peuvent vérifier l'équation non linéaire de Korteweg-de Vries dans certains cas particuliers et si certains paramètres de la diffusion dépendent de façon bien précise mais simple du temps. En prenant par exemple comme paramètre dépendant du temps, la constante α_0 (qui est fixe et infinie dans le problème inverse classique considéré par Moses) nous pensons pouvoir trouver des expressions analytiques nouvelles pour l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV) qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x,t) - 6V(x,t) \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} V(x,t) = 0 \quad (\text{IV.4.1})$$

Pour que les solutions obtenues soient intéressantes, il faut bien entendu que les équations, décrivant la dépendance temporelle des paramètres choisis, soient linéaires ou tout au moins puissent être résolues aisément.

Dans le paragraphe précédent, nous avons obtenu les potentiels suivants :

$$V(x) = \frac{2(b^2 - a^2) (\alpha^2 - a^2)}{[(a + \frac{\alpha b}{a}) \text{sh } ax + (\alpha + b) \text{ch } ax]^2} \quad (\text{IV.4.2})$$

et

$$V(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left\{ 1 + C \int_0^x \left[\frac{\alpha_0}{\gamma} \sin \gamma s + \cos \gamma s \right]^2 ds \right\} \quad (\text{IV.4.3})$$

Nous n'avons pas l'intention de faire une recherche exhaustive de tous les cas particuliers des équations (IV.4.2) et (IV.4.3) qui seraient des solutions intéressantes de l'équation de K-dV, mais nous voulons seulement montrer deux exemples d'expressions analytiques nouvelles, solutions de l'équation de K-dV.

Si dans le potentiel défini par l'équation (IV.4.2), nous supposons que seul α dépende du temps et si nous introduisons ce potentiel dans l'équation de K-dV, nous obtenons les étapes successives suivantes :

$$V(x,t) = \frac{N}{F^2} \quad (\text{IV.4.4})$$

où $F = (a + \frac{\alpha b}{a}) \text{ sh } ax + (\alpha + b) \text{ ch } ax \quad (\text{IV.4.5})$

$$F' = a G = a \{ (a + \frac{\alpha b}{a}) \text{ ch } ax + (\alpha + b) \text{ sh } ax \} \quad (\text{IV.4.6})$$

$$G' = a F \quad (\text{IV.4.7})$$

$$V' = \frac{-2 N a G}{F^3} \quad (\text{IV.4.8})$$

$$V'' = \frac{-2 N a^2}{F^2} + \frac{6 N a^2 G^2}{F^4} \quad (\text{IV.4.9})$$

$$V''' = 16 \frac{N a^3 G}{F^3} - \frac{24 N a^3 G^3}{F^5} \quad (\text{IV.4.10})$$

$$V''' - 6 VV' = 16 \frac{N a^3 G}{F^3} + 12 N a \frac{G}{F^5} [N - 2 a^2 G^2] \quad (\text{IV.4.11})$$

Grâce à la relation remarquable

$$N^2 - 2 a^2 G^2 = -2 a^2 F^2 \quad (\text{IV.4.12})$$

nous obtenons :

$$V''' - 6 VV' = -8 N a^3 \frac{G}{F^3} \quad (\text{IV.4.13})$$

$$\dot{V} = 4 a (b^2 - a^2) \frac{G}{F^3} \dot{\alpha} \quad (\text{IV.4.14})$$

Par conséquent, l'Eq. (IV.4.1) de K-dV est équivalente à l'équation différentielle du premier ordre (non linéaire, mais facile à résoudre) décrivant l'évolution temporelle de α :

$$\dot{\alpha} = \frac{2 N a^2}{(b^2 - a^2)} = 4 a^2 (\alpha^2 - a^2) \quad (\text{IV.4.15})$$

dont la solution s'écrit :

$$\alpha(t) = - a \operatorname{Coth} [4 a^3 (t - t_0) + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha_0 - a}{\alpha_0 + a}] \quad (\text{IV.4.16})$$

Le potentiel défini par l'Eq. (IV.4.3) dans le cas particulier où $\alpha_0 = \gamma = 0$ devient

$$V = \frac{2 C^2}{(1 + C x)^2} \quad (\text{IV.4.17})$$

Le potentiel (IV.4.17) est une solution stationnaire déjà connue de l'équation $K-dV (\frac{dC}{dt} = 0)$.

Le potentiel (IV.4.3) dans le cas particulier $\alpha_0 > 0$, $\gamma = 0$, devient :

$$\begin{aligned} V(x) &= - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln [1 + C \int_0^x [1 + \alpha_0 s]^2 ds] \\ &= - 2 \frac{d}{dx} \frac{C [1 + \alpha_0 x]^2}{1 + \frac{C [1 + \alpha_0 x]^3}{3 \alpha_0} - \frac{C}{3 \alpha_0}} \\ &= - 6 \alpha_0 C \frac{d}{dx} \frac{[1 + \alpha_0 x]^2}{(3 \alpha_0 - C) + C(1 + \alpha_0 x)^3} \\ &= - 6 \alpha_0 C \frac{\{(3 \alpha_0 - C) + C(1 + \alpha_0 x)^3\}(1 + \alpha_0 x) 2 \alpha_0 - 3 C \alpha_0 (1 + \alpha_0 x)^4}{\{(3 \alpha_0 - C) + C(1 + \alpha_0 x)^3\}^2} \\ &= 6 \alpha_0^2 \frac{(1 + \alpha_0 x)^4 - 2(1 + \alpha_0 x)(3 \alpha_0 - C) \frac{1}{C}}{\{\frac{(3 \alpha_0 - C)}{C} + (1 + \alpha_0 x)^3\}^2} \quad (\text{IV.4.18}) \end{aligned}$$

Nous supposons que α_0 est constant mais fini, et que C dépend du temps. Posant

$$P(t) = \frac{[3 \alpha_0 - C(t)]}{\alpha_0^3 C}$$

et imposant que $V(x,t)$ vérifie l'équation K-dV, nous obtenons après quelques calculs

$$P(t) = 12 t \quad (\text{IV.4.19})$$

et

$$V(x,t) = 6 \alpha_0^2 \frac{(1 + \alpha_0 x)^4 - 24 \alpha^3 t (1 + \alpha_0 x)}{[(1 + \alpha_0 x)^3 + 12 \alpha^3 t]^2} \quad (\text{IV.4.20})$$

Ces exemples suggèrent l'existence d'une relation entre des équations non linéaires et la méthode inverse que nous avons généralisée. Nous ne sommes cependant pas parvenus à définir une méthode de résolution systématique de certaines équations non linéaires avec une condition initiale donnée par le problème inverse généralisé : la relation [MOS 76] est plus compliquée que celle qui existe entre l'équation de K-dV et le problème inverse à une dimension ($0 \leq x < \infty$). Récemment, F. Lambert [LAM 79] a obtenu de nouvelles solutions à l'équation de K-dV qui ne peuvent pas être obtenues par le problème inverse à une dimension. Ceci montre qu'une généralisation de la méthode inverse est nécessaire pour trouver toutes les solutions possibles de l'équation K-dV.

§ 5. CONCLUSIONS

Ce chapitre a été consacré à la généralisation des problèmes direct et inverse associés à l'équation de Schrödinger radiale, réduite de moment angulaire l nul. La solution considérée ne s'annule pas nécessairement à l'origine. Nous avons défini et étudié les propriétés des fonctions qui correspondent aux fonctions habituellement rencontrées en théorie de la diffusion (solution régulière, solution de Jost, fonction de Jost, solution entrante et sortante, fonction de Green, ...). Nous avons précisé ce que deviennent la fonction spectrale et les "données de la diffusion" ("scattering data") dans ce cas.

La méthode de Jost et Kohn et l'équation fondamentale de Gel'fand-Levitan ont été étendues pour être appliquées au problème considéré. Nous avons résolu quelques exemples illustrant la nouvelle méthode. Ces exemples ont fourni dans certains cas particuliers, des solutions à l'équation non linéaire de Korteweg-de Vries. Cette dernière constatation nous permet d'espérer que la théorie que nous avons développée, pourrait être utile pour la résolution de certaines équations non linéaires, comme c'est le cas pour le problème inverse à une dimension.

CHAPITRE V : ETUDE COMPARATIVE DES APPROCHES DE MARCHENKO
++++
ET DE GEL'FAND POUR LA DIFFUSION A UNE VOIE (ℓ FIXE)
++++

§ 1. INTRODUCTION

Les approches de Gel'fand et de Marchenko peuvent toutes deux être utilisées dans les problèmes inverses de la théorie de transport et de la théorie de la diffusion. La méthode de Marchenko est cependant mieux adaptée pour le problème de la diffusion alors que c'est l'approche de Gel'fand qui est la plus directe en théorie de transport. La raison est la suivante : les données expérimentales du problème de la diffusion comprennent les déphasages et les états liés, qui avec les constantes de normalisation constituent les données de départ nécessaires pour appliquer la méthode de Marchenko. La méthode de Gel'fand, elle, nécessite la connaissance de la fonction spectrale. Une étape supplémentaire est donc nécessaire dans ce cas, à savoir la construction de la fonction spectrale à partir des données expérimentales par la méthode de Jost et Kohn. Dans le cas de la théorie de transport, la situation est inverse : la fonction spectrale est connue et c'est la procédure de Marchenko qui nécessite une étape supplémentaire. Dans ce chapitre consacré à la théorie de la diffusion à une voie, nous comparons les deux méthodes sur un autre plan : nous recherchons des conditions suffisantes à imposer au potentiel perturbatif afin qu'il existe des opérateurs de Gel'fand ou de Marchenko bornés. Ces conditions suffisantes d'existence dépendent du potentiel de référence. Nous introduirons dans le potentiel de référence, les parties singulières habituellement rencontrées en physique nucléaire, que sont le potentiel centrifuge et le potentiel de Coulomb. Les conditions d'existence d'un opérateur de transformation du type de Gel'fand, borné, diffèrent des conditions d'existence d'un opérateur borné du type de Marchenko. Les conditions obtenues sont des conditions suffisantes mais nous pensons qu'elles sont pratiquement nécessaires car elles ont été obtenues par une méthode qui permet de construire effectivement les opérateurs de transformation. Des différences entre les deux approches seront également constatées dans les chapitres ultérieurs où nous étudierons la diffusion à voies couplées et la diffusion dans un espace à $d > 1$ dimensions.

Ce chapitre est structuré comme suit : dans le paragraphe 2, nous introduisons les notations du chapitre et rappelons quelques propriétés qui sont communes aux approches de Gel'fand et de Marchenko. Au paragraphe 3, les équations aux dérivées partielles avec leurs conditions aux limites, satisfaites par les différents types d'opérateur de transformation, sont transformées en équations intégrales en utilisant la méthode de Riemann décrite au chapitre III. Le paragraphe 4 contient la recherche des conditions d'existence des opérateurs de transformation lorsque le potentiel de référence est nul tandis qu'au paragraphe 5, nous considérons le cas où le potentiel de référence comprend le potentiel centrifuge. Des conditions d'existence d'un opérateur de transformation sont trouvées au paragraphe 6 pour un potentiel de référence contenant le potentiel centrifuge et l'interaction coulombienne. Les conclusions du chapitre V sont tirées dans le paragraphe 7.

§ 2. NOTATIONS ET THEOREMES

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notations et nous énonçons deux théorèmes qui sont communs aux théories généralisées de Gel'fand et de Marchenko. Nous considérons les deux opérateurs différentiels du second ordre :

$$L_i(x) = \frac{d^2}{dx^2} - V_i(x) \quad (i = 0, 1). \quad (\text{V.2.1.})$$

Le potentiel de référence V_0 contient les singularités usuelles de la diffusion que sont la partie centrifuge et l'interaction de Coulomb :

$$V_0(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\alpha}{x} + V'_0(x). \quad (\text{V.2.2.})$$

Le potentiel $V(x) = V_1(x) - V_0(x)$ est appelé le potentiel perturbatif ou le potentiel "nucléaire".

Les équations de Schrödinger s'écrivent :

$$[L_0(x) + k^2]\psi_0(k,x) = 0, \quad (V.2.3a)$$

$$[L_1(x) + k^2]\psi_1(k,x) = 0. \quad (V.2.3b)$$

THEOREME I

i) Si $F(x,y)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$[L_0(x) - L_0(y)]F(x,y) = 0 ; \quad (V.2.4)$$

ii) si $K(x,y)$ vérifie l'équation intégrale :

$$K(x,y) \pm \int_{x_0}^x K(x,t)F(t,y)dt + F(x,y) = 0 \quad (V.2.5)$$

où le signe + et $x_0 = 0$ [- et $x_0 = \infty$] correspondent à la représentation de Gel'fand [de Marchenko respectivement] ;

iii) si l'équation intégrale homogène correspondant à l'Eq. (V.2.5) n'a pas de solution non triviale, pour presque tout x ;

iv) si

$$\lim_{t \rightarrow x_0} [K(x,t) \frac{\partial}{\partial t} F(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} K(x,t)F(x,t)] = 0 \quad (V.2.6)$$

alors l'opérateur de transformation $K(x,y)$ vérifiera l'équation aux dérivées partielles

$$[L_0(x) - L_0^T(y) \pm 2 \frac{d}{dx} K(x,x)]K(x,y) = 0. \quad (V.2.7)$$

Ce théorème a été démontré par Cornille [COR 73] pour le problème self-adjoint $L_0 = L_0^T$ qui est considéré ici.

THEOREME II [COR 73]

i) Si il existe un noyau $K(x,y)$ tel que

$$\psi_1(k,x) = \psi_0(k,x) \pm \int_{x_0}^x K(x,y)\psi_0(k,y)dy ; \quad (V.2.8)$$

ii) si

$$\lim_{y \rightarrow x_0} [K(x,y) \frac{\partial}{\partial y} \psi_0(k,y) - \frac{\partial}{\partial y} K(x,y) \psi_0(k,y)] = 0 \quad (V.2.9)$$

alors

$$[L_0(x) - L_0(y) \pm 2 \frac{d}{dx} K(x,x)] K(x,y) = 0 \quad (V.2.10)$$

$$V_1(x) - V_0(x) = \pm 2 K(x,x). \quad (V.2.11)$$

En général, il n'y a pas de relation entre les noyaux K qui interviennent dans ces deux théorèmes. Ils ne sont identiques que si $F(x,y)$ est choisi de façon telle que l'équation (V.2.6) est équivalente à l'équation (V.2.9).

Notre but est de déterminer la classe des potentiels perturbatifs $V(x)$, pour laquelle un opérateur de transformation existe et est borné. L'importance de cette question est justifiée par les trois raisons suivantes :

i) l'existence d'une équation fondamentale du type de Gel'fand généralisée peut être démontrée comme l'a fait Newton [NEW 66] à partir de l'existence d'un opérateur de transformation borné et de l'existence de deux systèmes complets de solutions pour l'équation non perturbée et pour l'équation perturbée. Pour démontrer qu'il existe une équation de "Marchenko" généralisée dans le cas d'un potentiel de référence non nul, nous aurons également besoin d'un opérateur de transformation borné ;

ii) possédant une borne supérieure pour l'opérateur de transformation, nous pouvons déterminer une borne supérieure pour le noyau de l'équation fondamentale. Cette borne nous permet alors de déterminer les conditions à imposer aux données du problème inverse $(\delta_\ell(k), E_i, C_i)$ pour que le problème inverse soit bien posé et possède une solution convenable [AGR 63] ;

iii) les bornes obtenues pour l'opérateur de transformation de Marchenko sont nécessaires pour assurer la stabilité du problème inverse. En effet, les déphasages expérimentaux ne sont connus qu'en dessous d'une certaine énergie et on peut se poser la question de savoir si cela suffit pour définir la solution. En fait, ce n'est pas suffisant si on ne restreint pas la classe des potentiels

recherchés [VIA 69, CIU 75]. Par contre, si nous imposons que la solution du problème inverse doit appartenir à la classe des potentiels pour laquelle une borne convenable pour l'opérateur de transformation a été obtenue, on peut espérer que la solution soit stable vis-à-vis de faibles changements des déphasages au-dessus d'une certaine énergie, comme cela a été démontré pour $V_0 = 0$ [MAR 68, LUN 69].

§ 3. EQUATIONS INTEGRALES POUR LES OPERATEURS DE TRANSFORMATION

Nous avons vu au chapitre II que les opérateurs de transformation généralisés du type de Marchenko $K_M(x,y)$ et du type de Gel'fand $K_G(x,y)$ doivent satisfaire les équations aux dérivées partielles et les conditions aux limites suivantes :

$$L_1(x) K_M(x,y) = L_0^T(y) K_M(x,y) \quad y > x \quad (V.3.1)$$

$$\lim_{x+y \rightarrow \infty} K_M(x,y) = \lim_{x+y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K_M(x,y) = 0 \quad (V.3.2)$$

$$K_M(x,x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty V(s) ds \quad (V.3.3)$$

$$\text{et} \quad L_1(x) K_G(x,y) = L_0^T(y) K_G(x,y) \quad x > y \quad (V.3.4)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} K_G(x,y) = 0 \quad (V.3.5)$$

$$K_G(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x V(s) ds. \quad (V.3.6)$$

Les opérateurs de Marchenko et de Gel'fand diffèrent par les conditions aux limites et par les domaines du plan (x,y) où ils s'appliquent.

La recherche des conditions à imposer au potentiel perturbatif V pour que $K(x,y)$ soit une fonction bornée et non pas une distribution est facilitée si nous pouvons remplacer l'équation aux dérivées partielles et ses conditions aux limites par une équation intégrale équivalente. Agranovich et Marchenko dans le cas $V_0 = 0$, et Coudray-Coz dans le cas $V_0 = \frac{2}{r^2}$ ($\lambda = 1$), sont parvenus à déterminer une équation intégrale équivalente à l'équation aux dérivées partielles pour K_M et ses conditions aux limites. Leur méthode est très spécifique ; elle utilise entre autres

les propriétés particulières des fonctions de Bessel pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$ respectivement. Cette méthode ne peut en aucun cas être utilisée si V contient un terme supplémentaire au potentiel centrifuge. Nous sommes parvenus à obtenir l'équation intégrale dans le cas général, en utilisant la méthode de Riemann étudiée au chapitre III. Dans les cas particuliers $V_0 = 0$ et $V_0 = \frac{+2}{r^2}$, nous retrouvons les équations d'Agranovich et Marchenko, de Coudray et Coz, respectivement. La fonction de Riemann $r(s,u;x,y)$ à utiliser doit vérifier les équations suivantes :

$$L_0^T(s)r(s,u;x,y) = L_0(u)r(s,u;x,y) \quad (V.3.7)$$

$$r(s,u;x,y) = 1 \quad \text{sur} \quad x^2 - y^2 = s^2 - u^2. \quad (V.3.8)$$

Cette dernière condition est équivalente aux conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial u} \right) r(s,u;x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad u-s = y-x \\ \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial u} \right) r(s,u;x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad u+s = y+x \\ r(x,y,x,y) = 1. \end{array} \right.$$

Comme L_0 est un opérateur auto-adjoint, nous avons la propriété démontrée au chapitre III :

$$r(x,y;s,u) = r(s,u;x,y). \quad (V.3.9)$$

Appliquant la méthode de Riemann au problème défini par les équations (V.3.1,2,3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} K_M(x,y) &= \frac{1}{2} r\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}; x,y\right) K_M\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} r\left(\frac{s+x-y}{2}, \frac{s+y-x}{2}; x,y\right) K_M\left(\frac{s+x-y}{2}, \frac{s+y-x}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} du ds r(s,u;x,y) V(s) K_M(s,u) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} ds \left[r(s,s;x,y) \frac{d}{ds} K_M(s,s) - K_M(s,s) \frac{d}{ds} r(s,s;x,y) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\frac{s+x-y}{2}}^{s/2} dt [r(t, s-t; x, y) \frac{d}{dt} K_M(t, s-t) - \\
 & - K_M(t, s-t) \frac{d}{dt} r(t, s-t; x, y)] \\
 & = \frac{1}{2} r\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}; x, y\right) K_M\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} r\left(\frac{s+x-y}{2}, \frac{s+y-x}{2}; x, y\right) K_M\left(\frac{s+x-y}{2}, \frac{s+y-x}{2}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} du ds r(s, u; x, y) V(s) K_M(s, u) - \\
 & - \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} ds r(s, s; x, y) \frac{d}{ds} K_M(s, s) + \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} K_M(s, s) r(s, s; x, y) - \\
 & - \frac{1}{2} K_M\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) r\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}; x, y\right) - \\
 & - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\frac{s+x-y}{2}}^{s/2} dt K_M(t, s-t) \frac{d}{dt} r(t, s-t; x, y) + \\
 & + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2} r(s/2, s/2; x, y) K_M(s/2, s/2) - \\
 & - \lim_{s \rightarrow \infty} r\left(\frac{s+x-y}{2}, \frac{s+y-x}{2}; x, y\right) K_M\left(\frac{s+x-y}{2}, \frac{s+y-x}{2}\right) \\
 & = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} du ds r(s, u; x, y) V(s) K_M(s, u) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} ds r(s, s; x, y) V(s) + \lim_{s \rightarrow \infty} K_M(s, s) r(s, s; x, y) - \\
 & - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\frac{s+x-y}{2}}^{s/2} dt K_M(t, s-t) \frac{d}{dt} r(t, s-t; x, y) \tag{V.3.10}
 \end{aligned}$$

où \mathcal{D}_M est le domaine représenté sur la figure ci-après

$$\iint_{\mathcal{D}_M} f(s, u) du ds = \int_x^{\frac{x+y}{2}} ds \int_{y-s+x}^{y+s-x} du f(s, u) + \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} ds \int_s^{y+s-x} du f(s, u)$$

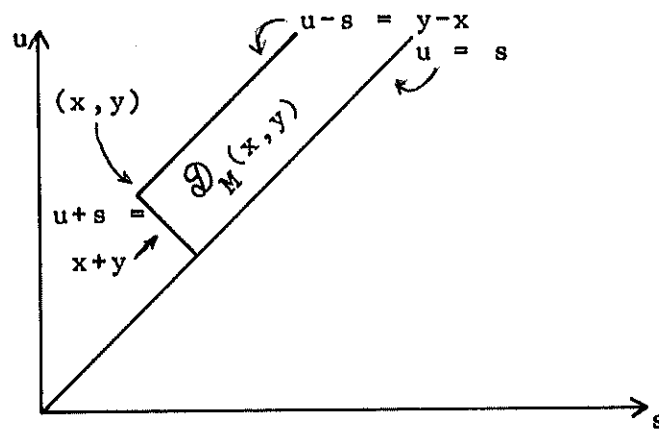


Fig. 1

Pour le noyau de Gel'fand K_G défini par les équations (V.3,4,5,6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 K_G(x,y) &= \frac{1}{2} r\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}; x,y\right) K_G\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} r(x-y, 0; x,y) K_G(x-y, 0) \\
 &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_G} du ds r(s,u; x,y) V(s) K_G(s,u) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} ds \left[r(s,s; x,y) \frac{d}{ds} K_G(s,s) - K_G(s,s) \frac{d}{ds} r(s,s; x,y) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\frac{x-y}{2}}^{x-y} ds \left[r(s, x-y-s; x,y) \frac{d}{ds} K_G(s, x-y-s) - K_G(s, x-y-s) \frac{d}{ds} r(s, x-y-s) \right] \\
 &= \frac{1}{2} r\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}; x,y\right) K_G\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} r(x-y, 0; x,y) K_G(x-y, 0) \\
 &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_G} du ds r(s,u; x,y) V(s) K_G(s,u) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} ds r(s,s; x,y) V(s) - \frac{1}{2} K_G\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) r\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}; x,y\right) \\
 &+ \frac{1}{2} K_G\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) r\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}; x,y\right) - \int_{\frac{x-y}{2}}^{x-y} ds K_G(s, x-y-s) \frac{d}{ds} r(s, x-y+s)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} r(x-y, 0, x, y) K_G(x-y, 0) - \frac{1}{2} r\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}; x, y\right) K_G\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

$$K_G(x, y) = + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_G} du ds r(s, u; x, y) V(s) K_G(s, u) + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} ds r(s, s; x, y) V(s) - \int_{\frac{x-y}{2}}^{x-y} ds K_G(s, x-y-s) \frac{d}{ds} r(s, x-y-s; x, y) \quad (V.3.11)$$

$$K_G(x, y) = \frac{1}{2} r\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}; x, y\right) K_G\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} r(x-y, 0; x, y) K_G(x-y, 0)$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_1} r(s, u; x, y) V(s) K_G(s, u) du ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+y}{2}} ds [r(s, s; x, y) \frac{d}{ds} K_G(s, s) - K_G(s, s) \frac{d}{ds} r(s, s; x, y)] - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x-y}{2}} ds [r(s, 0; x, y) \frac{\partial}{\partial u} K_G(s, u) - K_G(s, 0) \frac{\partial}{\partial u} r(s, u; x, y)]_{u=0} + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_1} r(s, u; x, y) V(s) K(s, u) du ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+y}{2}} ds r(s, s; x, y) V(s) - \frac{1}{2} \int_0^{x-y} ds [r(s, 0; x, y) \frac{\partial}{\partial u} K(s, u)]_{u=0} \quad (V.3.12)$$

$$\text{où } \iint_{\mathcal{D}_G} f(s, u) du ds = \int_{(x-y)/2}^{(x-y)} ds \int_{(x-y-s)}^s du f(s, u)$$

$$+ \int_{x-y}^{(x+y)/2} ds \int_{y-x+s}^s du f(s, u) + \int_{(x+y)/2}^x ds \int_{(y-x+s)}^{(x+y-s)} du f(s, u)$$

$$\text{et } \iint_{\mathcal{D}_1} f(s, u) du ds = \int_0^{x-y} ds \int_0^s du f(s, u) + \int_{x-y}^x ds \int_{y-x+s}^s f(s, u).$$

Les domaines \mathcal{D}_G et \mathcal{D}_1 sont représentés sur la figure 2 ci-dessous.

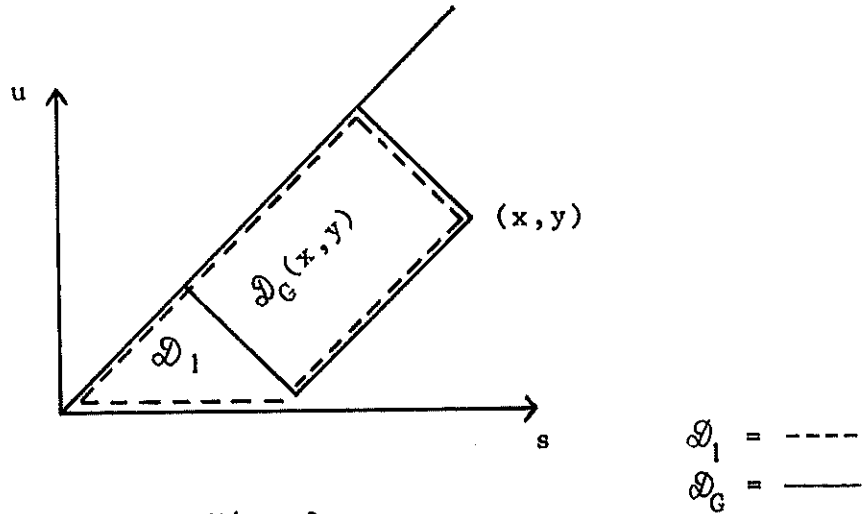


Fig. 2

L'opérateur $K_\alpha(x,y)$ introduit dans le cas où V_0 n'est pas singulier à l'origine, c'est-à-dire où toutes les solutions de l'équation différentielle de Schrödinger sont finies à l'origine, vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 K_\alpha(x,y) &= r(x-y,0;x,y)K_\alpha(x-y,0) + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_G} du ds r(s,u;x,y)V(s)K_\alpha(s,u) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} ds r(s,s;x,y)V(s) - \int_{(x-y)/2}^{(x-y)} ds K_\alpha(s,x-y-s) \\
 &\qquad \qquad \qquad \frac{d}{ds} r(s,x-y-s;x,y) \qquad \qquad \qquad (V.3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} K_\alpha(x-y,0) + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_1} r(s,u;x,y)K_\alpha(s,u)V(s) du ds \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{(x+y)/2} ds r(s,s;x,y)V(s) + \frac{1}{2} r(0,0;x,y)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{x-y} ds K_\alpha(s,0) \left[\frac{\partial}{\partial u} r(s,0;x,y) - \alpha_0 r(s,0;x,y) \right].
 \end{aligned}$$

(V.3.14)

Les opérateurs K_\pm sont des cas particuliers de l'opérateur K_α :

$K_+ = K_\alpha$ si $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 < \infty$ et $K_- = K_G$ si $\alpha_0 = \alpha_1 = \infty$.
 Si nous prolongeons le potentiel $V_0(y)$ pour des valeurs négatives de y par la relation $V_0(y) = V_0(-y)$, les conditions en $y = 0$ imposées aux noyaux $K_\pm(x,y)$ sont telles que $K_\pm(x,y) = \pm K_\pm(x,-y)$ car l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites sont paires en y .

Si nous appliquons la méthode de Riemann sur le domaine $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ représenté ci-dessous,

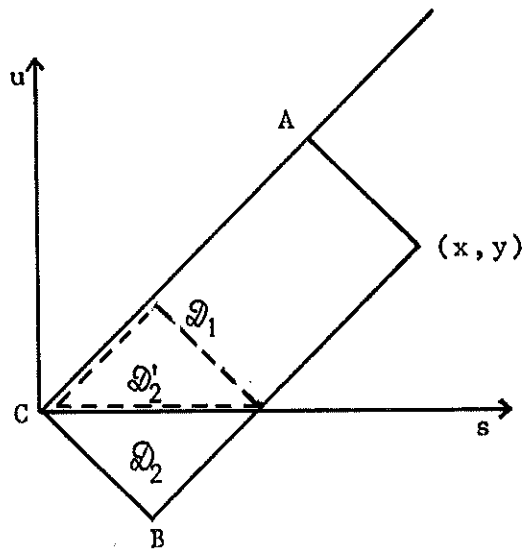


Fig. 3

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 K_\pm(x,y) &= \frac{1}{2} K_\pm\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} K_\pm\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \\
 &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} r(s,u;x,y) K_\pm(s,u) V(s) \, du \, ds \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\overrightarrow{BCA}} \left\{ \left(r \frac{\partial K_\pm}{\partial u} - K_\pm \frac{\partial r}{\partial u} \right) ds + \left(r \frac{\partial K_\pm}{\partial s} - K_\pm \frac{\partial r}{\partial s} \right) du \right\} \\
 &= \frac{1}{2} K_\pm\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \pm \frac{1}{2} K_\pm\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} r(s,u;x,y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & K_{\pm}(s,u)V(s) \, du \, ds + \frac{1}{2} \int_{\vec{CB}} ds \left[r \frac{d}{ds} K_{\pm} - K_{\pm} \frac{d}{ds} r \right] \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\vec{CA}} ds \left[r \frac{d}{ds} K_{\pm} - K_{\pm} \frac{d}{ds} r \right] \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^{(x+y)/2} r(s,s;x,y)V(s) \, ds \pm \frac{1}{2} \int_0^{(x-y)/2} r(s,-s;x,y)V(s) \, ds \\
 & + \frac{1}{2} r(0,0;x,y) K_{\pm}(0,0) + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}'_1 + \mathcal{D}'_2} r(s,u;x,y) K_{\pm}(s,u)V(s) \, du \, ds
 \end{aligned} \tag{V.3.15}$$

Si \mathcal{D}'_2 est le domaine symétrique de \mathcal{D}_2 par rapport à l'axe Os , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 K_{\pm}(x,y) &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+y}{2}} r(s,s;x,y)V(s) \, ds \pm \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x-y}{2}} r(s,-s;x,y)V(s) \, ds \\
 & + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}'_1} du \, ds \, r(s,u;x,y) K_{\pm}(s,u)V(s) \\
 & \pm \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}'_2} du \, ds \, r(s,-u;x,y) K_{\pm}(s,u)V(s).
 \end{aligned} \tag{V.3.16}$$

Ces équations intégrales sont étudiées dans les paragraphes ultérieurs pour différents potentiels de référence V_0 .

§ 4. POTENTIEL DE REFERENCE V_0 NUL

Lorsque le potentiel de référence V_0 est nul, la fonction de Riemann partielle est égale à l'unité et la fonction de Riemann complète $r_c(x,y;s,u)$ devient une fonction paire en $(y-u)$ (voir chapitre III). Nous introduisons les variables canoniques suivantes :

$$\eta = \frac{x+y}{2}, \quad \xi = \frac{y-x}{2}, \quad \eta_0 = \frac{s+u}{2}, \quad \xi_0 = \frac{u-s}{2}$$

pour la représentation de Marchenko ($y \geq x$) et

$$\eta = \frac{x+y}{2}, \quad \xi = \frac{x-y}{2}, \quad \eta_0 = \frac{s+u}{2}, \quad \xi_0 = \frac{s-u}{2}$$

pour la représentation de Gel'fand-Levitan ($x \geq y$) .

La fonction de Riemann $r(x,y;s,u)$ où nous effectuons le changement de variables canoniques sera notée $R(\eta,\xi;\eta_0,\xi_0)$ tandis que le noyau $K(x,y)$ après ce changement de variables sera toujours appelé $K(\eta,\xi)$ pour alléger les notations. Les équations intégrales pour les noyaux de transformations s'écrivent alors :

$$K_M(\eta,\xi) = \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} V(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{\xi} d\xi_0 \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 V(\eta_0 - \xi_0) K_M(\eta_0, \xi_0), \quad (V.4.1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} R_C(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) d\eta_0, \quad (V.4.2)$$

$$K_G(\eta,\xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} V(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{\xi} d\xi_0 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_0 V(\eta_0 + \xi_0) K_G(\eta_0, \xi_0), \quad (V.4.3)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\eta} V(\eta_0) d\eta_0 + \left\{ \int_0^{\xi} d\eta_0 \int_0^{\eta_0} d\xi_0 + \int_{\xi}^{\eta} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \right\} V(\eta_0 + \xi_0) K_G(\eta_0, \xi_0) - \int_0^{\xi} d\xi_0 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right) K(\eta_0, \xi_0) \right]_{\eta_0 = \xi_0}, \quad (V.4.4)$$

$$K_G(\eta,\xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} R_C(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) d\eta_0 - \int_0^{\xi} d\xi_0 K(\xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_C(\xi, \xi_0; \eta, \xi)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\eta} R_C(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) d\eta_0$$

$$- \int_0^{\xi} d\xi_0 R_C(\xi_0, \xi_0; \eta, \xi) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) K(\eta_1, \xi_1) \right]_{\eta_1 = \xi_1 = \xi_0},$$

(V.4.5)

$$K_{\alpha}(\eta,\xi) = R_C(\xi, \xi; \eta, \xi) K_{\alpha}(\xi, \xi) + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} d\eta_0 R_C(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0)$$

$$- \int_0^{\xi} d\xi_0 K_{\alpha}(\xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_C(\xi, \xi_0; \eta, \xi)$$

(V.4.6)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} R_C(\xi, \xi; n, \xi) K_\alpha(\xi, \xi) + \frac{1}{2} \int_0^\eta d\eta_0 R_C(\eta_0, 0; n, \xi) V(\eta_0) \\
 &+ \frac{1}{2} R_C(0, 0; n, \xi) K(0, 0) + \int_0^\xi d\xi_1 \{K(\xi_1, \xi_1) \frac{1}{2} (\frac{\partial}{\partial \eta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_0}) \\
 &R_C(\eta_0, \xi_0; n, \xi) - R_C(\xi_1, \xi_1; n, \xi) \frac{1}{2} (\frac{\partial}{\partial \eta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_0}) K(\eta_0, \xi_0)\}_{\eta_0 = \xi_0 = \xi_1},
 \end{aligned}
 \tag{V.4.7}$$

où la fonction de Riemann complète R_C est solution de l'équation

$$R_C(\eta_0, \xi_0; n, \xi) = 1 - \epsilon \iint_{\mathcal{D}} d\xi_1 d\eta_1 V(s_1) R_C(\eta_1, \xi_1; n, \xi). \tag{V.4.8}$$

\mathcal{D} représente le domaine compris entre les droites caractéristiques issues des points $P = (\eta, \xi)$ et $P_0 = (\eta_0, \xi_0)$ et ϵ vaut $+1$ [-1] si $P \in \Omega_A \cup \Omega_U$ [$P \in \Omega_L \cup \Omega_R$ respectivement] (voir chapitre III). Pour la représentation de Marchenko, nous obtenons les relations suivantes :

$$0 < \xi_0 < \xi < \eta < \eta_0 < \infty \text{ et } \epsilon = -1 \tag{V.4.9}$$

$$R_C^M(\eta_0, \xi_0; n, \xi) = 1 + \int_{\xi_0}^\xi d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta_0 - \xi_1} d\eta_1 V(\eta_1 - \xi_1) R_C^M(\eta_1, \xi_1; n, \xi) \tag{V.4.10}$$

tandis que dans la représentation de Gel'fand-Levitan, ces relations s'écrivent :

$$0 < \xi_0 < \xi < \eta_0 < \eta \text{ et } \epsilon = -1 \tag{V.4.11}$$

$$R_C^G(\eta_0, \xi_0; n, \xi) = 1 + \int_{\xi_0}^\xi d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta_0 + \xi_1} d\eta_1 V(\eta_1 + \xi_1) R_C^G(\eta_1, \xi_1; n, \xi). \tag{V.4.12}$$

Les équations intégrales (V.4.10) et (V.4.12) étant du type de Volterra, la méthode des approximations successives converge et fournit les bornes suivantes pour les modules des fonctions de Riemann :

$$|R_C(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |R_C^{(n)}(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \quad (V.4.13)$$

$$|R_C^{(0)}(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| = 1 \quad (V.4.14)$$

$$|R_C^{(p)}(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 G(\eta_1, \xi_2; \eta, \xi) \dots \int_{\xi_{p-1}}^{\xi} d\xi_p G(\eta_{p-1}, \xi_p; \eta, \xi) \quad (V.4.15)$$

où

$$G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) = G^M(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 |V(\eta_1 - \xi_1)| \quad (V.4.16)$$

pour la représentation de Marchenko et

$$G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) = G^G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) = \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 |V(\eta_1 + \xi_1)| \quad (V.4.17)$$

pour la représentation de Gel'fand-Levitan.

Nous obtenons les majorations suivantes :

$$|R_C^{(p)}(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 G(\eta_0, \xi_2; \eta, \xi) \dots \int_{\xi_{p-1}}^{\xi} d\xi_p G(\eta_0, \xi_p; \eta, \xi) \quad (V.4.18)$$

$$\leq \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) \frac{[\int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 G(\eta_0, \xi_2; \eta, \xi)]^{p-1}}{(p-1)!} \leq \frac{[\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi)]^p}{p!} \quad (V.4.19)$$

et par conséquent :

$$|R_C(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 G(\eta_0, \xi_1; \eta, \xi) \right] \quad (V.4.20)$$

$$|R_C^M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 |V(\eta_1 - \xi_1)| \right] \quad (V.4.21)$$

$$|R_C^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 |V(\eta_1 + \xi_1)| \right] \quad (V.4.22)$$

Nous définissons les fonctions monotones suivantes :

$$\sigma_{\ell}(x) = \int_x^{\infty} s^{\ell} |V(s)| ds \quad (V.4.23)$$

$$\rho_{\ell}(x) = \int_0^x s^{\ell} |V(s)| ds \quad (V.4.24)$$

$$\sigma^{(\ell)}(x) = \int_x^{\infty} \sigma^{(\ell-1)}(s) ds \quad (V.4.25)$$

où

$$\sigma^{(0)}(x) = \sigma_0(x) \quad (V.4.26)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(x) &= \int_x^{\infty} ds \int_s^{\infty} |V(t)| dt = \int_x^{\infty} dt |V(t)| (t-x) \\ &= \sigma_1(x) - x \sigma_0(x) \end{aligned} \quad (V.4.27)$$

$$\rho^{(\ell)}(x) = \int_0^x \rho^{(\ell-1)}(s) ds \quad (V.4.28)$$

où

$$\rho^{(0)}(x) = \rho_0(x). \quad (V.4.29)$$

$$v(x) = \max_{0 \leq \xi \leq x} \left| \int_0^x V(t) dt \right| \quad (V.4.30)$$

$$w(x) = \max_{x \leq \xi \leq \infty} \left| \int_x^{\infty} V(t) dt \right| \quad (V.4.31)$$

$$y(x) = \max \left| \int_0^x dr \int_r^{\infty} V(t) dt \right|. \quad (V.4.32)$$

$\rho(x)$, $v(x)$ n'existent pas pour les potentiels qui vérifient l'équation (I.2.2) mais qui ne sont pas intégrables à l'origine. Par contre, $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$, $w(x)$ existent pour $x > 0$ si le potentiel vérifie l'équation (I.2.4). $y(x)$ existe pour les potentiels vérifiant (I.2.4) et même pour des potentiels ne vérifiant pas (I.2.4) mais qui oscillent au voisinage de l'origine de façon telle que $\int_r^{\infty} V(t) dt \in L_1(0, a)$.

Avec ces fonctions monotones, l'équation (V.4.21) peut encore s'écrire :

$$|R_C^M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \exp [\sigma^{(1)}(\eta - \xi) + \sigma^{(1)}(\eta_0 - \xi_0) - \sigma^{(1)}(\eta_0 - \xi) - \sigma^{(1)}(\eta - \xi_0)] \quad (V.4.33)$$

$$\leq \exp [\sigma^{(1)}(\eta - \xi) - \sigma^{(1)}(\eta - \xi_0)]. \quad (V.4.34)$$

Pour la représentation de Gel'fand-Levitan, nous obtenons :

$$|R_C^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \exp [\rho^{(1)}(\eta + \xi) - \rho^{(1)}(\eta + \xi_0) - \rho^{(1)}(\eta_0 + \xi) + \rho^{(1)}(\eta_0 + \xi_0)] \quad (V.4.35)$$

$$\leq \exp [\rho^{(1)}(\eta + \xi) - \rho^{(1)}(\eta + \xi_0)] \quad (V.4.36)$$

si le potentiel V est intégrable à l'origine ; autrement, nous utiliserons plutôt les bornes suivantes :

$$|R_C^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \exp [\sigma^{(1)}(\eta_0 + \xi_0) - \sigma^{(1)}(\eta_0 + \xi) - \sigma^{(1)}(\eta + \xi_0) + \sigma^{(1)}(\eta + \xi)] \quad (V.4.37)$$

$$\leq \exp [\sigma^{(1)}(\eta_0 + \xi_0) - \sigma^{(1)}(\eta_0 + \xi)]. \quad (V.4.38)$$

Une borne pour le module de la dérivée de R_C^G par rapport à ξ_0 est aussi nécessaire :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} R_C^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = - \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 V(\eta_1 + \xi_0) R_C^G(\eta_1, \xi_0; \eta, \xi) \quad (V.4.39)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_C^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) \right| &\leq \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_2 |V(\eta_2 + \xi_0)| \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_2}^{\eta} d\eta_1 |V(\eta_1 + \xi_1)| \right] \\ &\leq \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 |V(\eta_1 + \xi_1)| \right] \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_2 |V(\eta_2 + \xi_0)| \end{aligned} \quad (V.4.40)$$

Si nous utilisons les bornes (V.4.21, V.4.34) pour $|R_C^M|$ dans l'équation (V.4.2), nous obtenons la borne suivante pour $|K_M(n, \xi)|$:

$$|K_M(n, \xi)| \leq \frac{1}{2} \int_n^\infty d\eta_0 |V(\eta_0)| \exp \left[\int_0^\xi d\xi_1 \int_n^{\eta_0} d\eta_1 |V(\eta_1 - \xi_1)| \right] \sigma_0(n) \quad (V.4.41)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sigma_0(n) \exp \left[(\xi - n) \int_{n-\xi}^n dt |V(t)| + \int_{n-\xi}^n t |V(t)| + \xi \int_n^\infty dt |V(t)| \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \sigma_0(n) \exp [\sigma^{(1)}(n-\xi) - \sigma^{(1)}(n)] \quad (V.4.42)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sigma_0(n) \exp [\sigma^{(1)}(n-\xi)] \quad (V.4.43)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sigma_0(n) \exp [\sigma_1(n-\xi)]$$

$$\leq \frac{1}{2} \sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp [\sigma_1(x)]. \quad (V.4.44)$$

La borne (V.4.44) a été obtenue par Agranovich et Marchenko [AGR 63] par une autre méthode qui n'utilise pas la solution de Riemann et qui ne peut être généralisée au cas $V \neq 0$. Un résultat un peu meilleur peut être obtenu en appliquant directement la méthode des approximations successives à l'équation (V.4.1)

$$K_M(n, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_M^{(n)}(n, \xi) \quad (V.4.45)$$

$$|K_M^0(n, \xi)| \leq \frac{1}{2} w(n). \quad (V.4.46)$$

Montrons par récurrence l'inégalité suivante qui est vraie pour $n=0$

$$|K_M^{(n)}(n, \xi)| \leq \frac{1}{2} w(n) \frac{1}{n!} \left[\int_0^\xi d\xi_0 \int_n^\infty d\eta_0 |V(\eta_0 - \xi_0)| \right]^n \quad (V.4.47)$$

Pour $n+1$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |K_M^{(n+1)}(n, \xi)| &\leq \int_n^\infty d\eta_0 \int_0^\xi d\xi_0 |V(\eta_0 - \xi_0)| \frac{1}{2} w(\eta_0) \frac{1}{n!} \\ &\quad \left[\int_0^{\xi_0} d\xi_1 \int_{\eta_0}^\infty d\eta_1 |V(\eta_1 - \xi_1)| \right]^n \\ &\leq \frac{1}{2} w(n) \int_0^\xi d\xi_0 \int_{n-\xi_0}^\infty dt_0 |V(t_0)| \frac{1}{n!} \left[\int_0^{\xi_0} d\xi_1 \int_{n-\xi_1}^\infty dt_1 |V(t_1)| \right]^n \\ &\leq \frac{1}{2} w(n) \frac{1}{(n+1)!} \left[\int_0^\xi d\xi_0 \int_{n-\xi_0}^\infty dt_0 |V(t_0)| \right]^{n+1} \end{aligned} \quad (V.4.48)$$

et par conséquent :

$$|K_M(x, y)| \leq \frac{1}{2} w\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[\int_0^\xi d\xi_0 \int_n^\infty d\eta_0 |V(\eta_0 - \xi_0)| \right]. \quad (V.4.49)$$

L'opérateur de transformation du type de Marchenko existe et est borné pour des potentiels possédant un moment d'ordre un et zéro :

$$V(x) \in L^1(b, \infty) \quad (V.4.50)$$

$$xV(x) \in L^1(b, \infty) \quad b > 0. \quad (V.4.51)$$

Il est possible que $K_M(0,0)$ soit infini ; en fait, c'est le cas si $V(s)$ n'est pas intégrable à l'origine car

$$K_M(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty V(s) ds. \quad (V.4.52)$$

Les dérivées de l'opérateur de transformation du type de Marchenko sont données par les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} K_M(\eta, \xi) = -\frac{1}{2} V(\eta) - \int_0^\xi d\xi_0 V(\eta - \xi_0) K_M(\eta, \xi_0) \quad (V.4.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_M(\eta, \xi) = \int_\eta^\infty d\eta_0 V(\eta_0 - \xi) K_M(\eta_0, \xi). \quad (V.4.54)$$

Nous obtenons les bornes suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} K_M(\eta, \xi) + \frac{1}{2} V(\eta) \right| &\leq \int_0^\xi d\xi_0 |V(\eta - \xi_0)| |K_M(\eta, \xi_0)| \\ &\leq \frac{1}{2} w(\eta) \exp [\sigma^{(1)}(\eta - \xi) - \sigma^{(1)}(\eta)] \\ &\quad [\sigma_0(\eta - \xi) - \sigma_0(\eta)] \quad (V.4.55) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} w(\eta) \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \exp [\sigma^{(1)}(\eta - \xi) - \sigma^{(1)}(\eta)] \right|. \quad (V.4.56)$$

Par conséquent, l'opérateur de Marchenko possède des dérivées premières bornées.

Nous considérons à présent l'opérateur de Gel'fand-Levitan et nous supposons que $\rho^0(x)$ existe. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} |K_G(\eta, \xi)| &\leq \frac{1}{2} \int_\xi^\eta d\eta_0 |R_G^G(\eta_0, 0; \eta, \xi)| |V(\eta_0)| \\ &\quad + \int_0^\xi d\xi_0 |K_G(\xi, \xi_0)| \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_G^G(\xi, \xi_0; \eta, \xi) \right| \\ &\leq \exp [\rho^{(1)}(\eta + \xi) - \rho^{(1)}(\eta)] \frac{1}{2} [\rho_0(\eta) - \rho_0(\xi)] \\ &\quad + \exp [\rho^{(1)}(\eta + \xi)] \int_0^\xi d\xi_0 e^{-\rho^{(1)}(\eta + \xi_0)} [\rho_0(\eta + \xi_0) - \rho_0(\xi + \xi_0)] \\ &\quad |K_G(\xi, \xi_0)| \quad (V.4.57) \end{aligned}$$

$$|K_G^{(0)}(n, \xi)| \leq \exp [\rho^{(1)}(n+\xi) - \rho^{(1)}(n)] \frac{1}{2} [\rho_0(n) - \rho_0(\xi)] \quad (V.4.58)$$

$$\begin{aligned} |K_G^{(p)}(n, \xi)| &\leq \exp [\rho^{(1)}(n+\xi)] \int_0^\xi d\xi_1 e^{-\rho^{(1)}(n+\xi_1)} [\rho_0(n+\xi_1) - \\ &-\rho_0(\xi+\xi_1)] \exp [\rho^{(1)}(\xi+\xi_1)] \int_0^{\xi_1} d\xi_2 e^{\rho^{(1)}(\xi+\xi_2)} [\rho_0(\xi+\xi_2) - \\ &-\rho_0(\xi_1+\xi_2)] \exp [\rho^{(1)}(\xi+\xi_2)] \dots \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p e^{-\rho^{(1)}(\xi+\xi_p)} \\ &[\rho_0(\xi+\xi_p) - \rho_0(\xi_{p-1}+\xi_p)] \exp [\rho^{(1)}(\xi+\xi_p) - \rho^{(1)}(\xi)] \frac{1}{2} [\rho_0(\xi) - \rho_0(\xi_p)] \end{aligned} \quad (V.4.59)$$

$$\begin{aligned} &\leq \exp [\rho^{(1)}(n+\xi)] \frac{1}{2} \rho_0(n) \int_0^\xi d\xi_1 [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(\xi+\xi_1)] \\ &\int_0^{\xi_1} d\xi_2 [\rho_0(\xi+\xi_2) - \rho_0(\xi_1+\xi_2)] \dots \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p [\rho_0(\xi+\xi_p) - \rho_0(\xi_{p-1}+\xi_p)] \\ &\leq \frac{1}{2} \rho_0(n) \exp [\rho^{(1)}(n+\xi)] \int_0^\xi d\xi_1 [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(\xi+\xi_1)] \\ &\int_0^{\xi_1} d\xi_2 [\rho_0(\xi+\xi_2) - \rho_0(\xi_1+\xi_2)] \frac{\left\{ \int_0^{\xi_2} d\xi_3 [\rho_0(\xi+\xi_3) - \rho_0(\xi_2+\xi_3)] \right\}^{p-2}}{(p-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \rho_0(n) \exp [\rho^{(1)}(n+\xi)] \int_0^\xi d\xi_1 [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(\xi+\xi_1)] \\ &\left[\int_0^{\xi_1} d\xi_2 \frac{[\rho_0(\xi+\xi_2) - \rho_0(\xi_1+\xi_2)]}{(p-1)!} \right]^{p-1} \end{aligned} \quad (V.4.60)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \rho_0(n) \exp [\rho^{(1)}(n+\xi)] \int_0^\xi d\xi_1 [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(2\xi_1)] \\ &\frac{\left[\int_0^{\xi_1} d\xi_2 [\rho_0(n+\xi_2) - \rho_0(\xi_1+\xi_2)] \right]^{p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \rho_0(n) \exp [\rho^{(1)}(n+\xi)] \frac{\left\{ \int_0^\xi d\xi_1 [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(2\xi_1)] \right\}^p}{p!} \quad (V.4.61)$$

Nous obtenons le résultat suivant :

$$K_G(n, \xi) \leq \frac{1}{2} \rho_0(n) \exp [2\rho^{(1)}(n+\xi) - \rho^{(1)}(n)]. \quad (V.4.62)$$

De meilleurs résultats valables dans le cas où ρ_0 n'existe pas, peuvent être obtenus si nous appliquons directement la méthode des approximations successives à l'équation intégrale (V.4.3) du type de Volterra :

$$|K_G^{(0)}(n, \xi)| \leq \frac{1}{2} \int_\xi^n |V(n_0)| dn_0 \quad (V.4.63)$$

$$|K_G^{(p+1)}(n, \xi)| \leq \int_0^\xi d\xi_0 \int_\xi^n dn_0 |V(n_0 + \xi_0)| \int_0^{\xi_0} d\xi_1 \int_{\xi_0}^{n_0} dn_1 |V(n_1 + \xi_1)| \dots \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p \int_{\xi_{p-1}}^{n_{p-1}} d\xi_p |V(n_p + \xi_p)| |K^0(n_p, \xi_p)| \quad (V.4.64)$$

$$\leq \int_0^\xi d\xi_0 \int_\xi^n dn_0 |V(n_0 + \xi_0)| \int_0^{\xi_0} d\xi_1 \int_{\xi_0}^n dn_1 |V(n_1 + \xi_1)| \dots \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p \int_{\xi_{p-1}}^n dn_p |V(n_p + \xi_p)| |K^0(n, \xi_p)|. \quad (V.4.65)$$

Comme nous avons la relation

$$\int_\xi^n dn_0 |V(n_0 + \xi_0)| = \int_{\xi + \xi_0}^{n + \xi_0} dt |V(t)| \leq F(n, \xi) \quad (V.4.66)$$

pour $\xi_0 \in [0, \xi]$

$$F(n, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = \xi \\ \int_\xi^{n+\xi} |V(t)| dt & \text{si } n > \xi \end{cases} \quad (V.4.67)$$

et comme

$$|K_G^0(n, \xi)| \leq \frac{1}{2} F(n, \xi), \quad (V.4.68)$$

nous déduisons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |K_G^{(p+1)}(n, \xi)| &\leq \int_0^\xi d\xi_0 F(n, \xi) \int_0^{\xi_0} d\xi_1 F(n, \xi_0) \dots \\ &\quad \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p F(n, \xi_{p-1}) \frac{1}{2} F(n, \xi_p) \\ &\leq \frac{1}{2} F(n, \xi) \int_0^\xi d\xi_0 F(n, \xi_0) \frac{[\int_0^{\xi_0} d\xi_1 F(n, \xi_1)]^p}{p!} \end{aligned} \quad (V.4.69)$$

$$\leq \frac{1}{2} F(n, \xi) \frac{[\int_0^\xi d\xi_0 F(n, \xi_0)]^{p+1}}{(p+1)!} \quad (V.4.70)$$

et par conséquent nous pouvons écrire :

$$|K_G(n, \xi)| \leq \frac{1}{2} F(n, \xi) \exp \left[\int_0^\xi d\xi_0 F(n, \xi_0) \right] \quad (V.4.71)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_\xi^{n+\xi} dt |V(t)| \right] \exp \left\{ \int_0^\xi d\xi_0 \int_{\xi_0}^{n+\xi_0} dt |V(t)| \right\} \quad (V.4.72)$$

où l'exposant peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^\xi d\xi_0 \int_{\xi_0}^{n+\xi_0} dt |V(t)| &= \int_0^\xi dt |V(t)| t + \xi \int_\xi^n dt |V(t)| + \\ &+ \int_n^{n+\xi} dt |V(t)| (n+\xi-t). \end{aligned} \quad (V.4.73)$$

Par conséquent, l'exposant intervenant dans l'équation (V.4.72) est bien défini si $V \in L^{loc}_1[\xi, \infty]$ et possède un moment d'ordre un au voisinage de l'origine.

Le calcul de l'opérateur de transformation $K_\alpha(n, \xi)$ ainsi que la recherche d'une borne supérieure doit s'effectuer en deux étapes. Tout d'abord, il faut résoudre l'équation intégrale

du type de Volterra à une variable pour $K_\alpha(\xi, \xi)$:

$$\begin{aligned}
 K_\alpha(\xi, \xi) = & \int_0^\xi d\eta_0 R_C^G(\eta_0, 0; \xi, \xi) V(\eta_0) + R_C^G(0, 0, \xi, \xi) (\alpha_1 - \alpha_0) \\
 & + \int_0^\xi d\xi_1 K_\alpha(\xi_1, \xi_1) \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right) R_C^G(\eta_0, \xi_0; \xi, \xi) \right. \\
 & \left. - \alpha_0 R_C^G(\eta_0, \xi_0; \xi, \xi) \right]_{\eta_0 = \xi_0 = \xi_1}.
 \end{aligned} \tag{V.4.74}$$

Ensuite, nous considérons l'équation pour $K_\alpha(\eta, \xi)$:

$$\begin{aligned}
 K_\alpha(\eta, \xi) = & K_\alpha(\xi, \xi) + \frac{1}{2} \int_\xi^\eta d\eta_0 R_C^G(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) \\
 & - \int_0^\xi d\xi_0 K_\alpha(\xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_C^G(\xi, \xi_0; \eta, \xi)
 \end{aligned} \tag{V.4.75}$$

ou encore

$$K_\alpha(\eta, \xi) = K_\alpha(\xi, \xi) + \int_\xi^\eta d\eta_0 \int_0^\xi d\xi_0 V(\eta_0 + \xi_0) K_\alpha(\eta_0, \xi_0) + \frac{1}{2} \int_\xi^\eta ds V(s). \tag{V.4.76}$$

La première étape requiert l'évaluation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right) R_C^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) \right]_{\eta_0 = \xi_0 = \xi_1} = \\
 & \left[\int_{\xi_1}^\eta d\eta_2 V(\eta_2 + \xi_1) R_C^G(\eta_2, \xi_1; \eta, \xi) - \int_{\xi_1}^\xi d\xi_2 V(\xi_1 + \xi_2) R_C^G(\xi_1, \xi_2; \eta, \xi) \right],
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left| \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right) R_C^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) \right]_{\eta_0 = \xi_0 = \xi_1} \right| \leq$$

$$\begin{aligned} & \exp \left[\int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\xi_1}^{\eta} d\eta_2 |V(\eta_2 + \xi_2)| \right] \left[\int_{2\xi_1}^{\eta + \xi_1} dt |V(t)| + \right. \\ & \left. \int_{2\xi_1}^{\xi + \xi_1} dt |V(t)| \right] \leq 2 \exp \left[\int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\xi_1}^{\eta} d\eta_2 |V(\eta_2 + \xi_2)| \right. \\ & \left. \int_{2\xi_1}^{\eta + \xi_1} |V(t)| dt \right]. \end{aligned} \quad (V.4.77)$$

Posant

$$E(\xi, \xi_1) = \exp \left[\int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_0 \int_{\xi_1}^{\xi} d\eta_0 |V(\eta_0 + \xi_0)| \right], \quad (V.4.78)$$

et

$$F(\eta, \xi) = |\alpha_0| + 2 \int_{2\xi}^{\eta + \xi} |V(t)| dt, \quad (V.4.79)$$

l'équation (V.4.74) conduit à l'inégalité :

$$|K_{\alpha}(\xi, \xi)| \leq E(\xi, 0) [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|] + \int_0^{\xi} d\xi_1 F(\xi, \xi_1) E(\xi, \xi_1) K_{\alpha}(\xi_1, \xi_1). \quad (V.4.80)$$

Nous appliquons la méthode des approximations successives à l'équation (V.4.80) :

$$K_{\alpha}(\xi, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{\alpha}^{(n)}(\xi, \xi) \quad (V.4.81)$$

$$|K_{\alpha}^{(0)}(\xi, \xi)| \leq E(\xi, 0) [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|]$$

$$|K_{\alpha}^{p+1}(\xi, \xi)| \leq \int_0^{\xi} d\xi_1 E(\xi, \xi_1) F(\xi, \xi_1) K_{\alpha}^p(\xi_1, \xi_1)$$

$$\leq \int_0^{\xi} d\xi_1 E(\xi, \xi_1) F(\xi, \xi_1) \int_0^{\xi_1} d\xi_2 E(\xi_1, \xi_2) F(\xi_1, \xi_2) E(\xi_2, \xi_3) \dots$$

$$\int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p E(\xi_{p-1}, \xi_p) F(\xi_{p-1}, \xi_p) E(\xi_p, 0) [\rho_0(\xi_p) + |\alpha_1 - \alpha_0|].$$

Comme $E(\xi, \xi_1)E(\xi_1, \xi_2) \leq E(\xi, \xi_2)$ pour $\xi \geq \xi_1 \geq \xi_2$, nous avons :

$$E(\xi, \xi_1)E(\xi_1, \xi_2) \dots E(\xi_{p-1}, \xi_p)E(\xi_p, 0) \leq E(\xi, 0)$$

et par conséquent :

$$|K_\alpha^{(p+1)}(\xi, \xi)| \leq E(\xi, 0) [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|]$$

$$\int_0^\xi d\xi_1 F(\xi, \xi_1) \int_0^{\xi_1} d\xi_2 F(\xi, \xi_2) \dots \int_0^{\xi_{p-1}} F(\xi_{p-1}, \xi_p) d\xi_p$$

$$\leq E(\xi, 0) [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|] \frac{[\int_0^\xi d\xi_1 F(\xi, \xi_1)]^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$|K_\alpha(\xi, \xi)| \leq E(\xi, 0) [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|] \exp \left[\int_0^\xi d\xi_1 F(\xi, \xi_1) \right] \quad (V.4.82)$$

$$E(\xi, 0) = \exp \left[\int_0^\xi d\eta_0 \int_0^\xi d\xi_0 V(\eta_0 + \xi_0) \right] \leq \exp [\rho^{(1)}(2\xi) - \rho^{(1)}(\xi)].$$

$$\exp \left[\int_0^\xi d\xi_1 F(\xi, \xi_1) \right] = \exp \left\{ \int_0^\xi d\xi_1 [|\alpha_0| + 2 \int_{2\xi_1}^{\xi + \xi_1} |V(t)| dt] \right\}$$

$$\leq \exp [\rho^{(1)}(2\xi) - 2\rho^{(1)}(\xi) + |\alpha_0| \xi].$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$|K_\alpha(\xi, \xi)| \leq [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|] \exp [|\alpha_0| \xi + 2\rho^{(1)}(2\xi) - 2\rho^{(1)}(\xi)].$$

(V.4.83)

Nous recherchons à présent une borne pour $|K_\alpha(n, \xi)|$:

$$|K_\alpha^{(0)}(n, \xi)| \leq |K_\alpha(\xi, \xi)| + \frac{1}{2} \int_\xi^n d\eta_0 |R_C^G(\eta_0, 0; n, \xi)| |V(\eta_0)|$$

$$\leq [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|] \exp [|\alpha_0| \xi + 2\rho^{(1)}(2\xi) - 2\rho^{(1)}(\xi)]$$

$$+ \frac{1}{2} \exp [\rho^{(1)}(n+\xi) - \rho^{(1)}(n)] [\rho_0(n) - \rho_0(\xi)]$$

$$|K_\alpha^{(p)}(n, \xi)| \leq \int_0^\xi d\xi_1 e^{\rho^{(1)}(n+\xi) - \rho^{(1)}(n+\xi_1)} [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(\xi+\xi_1)]$$

$$K_\alpha^{(p-1)}(\xi, \xi_1)$$

$$\leq \int_0^\xi d\xi_1 e^{\rho^{(1)}(n+\xi) - \rho^{(1)}(n-\xi_1)} [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(\xi+\xi_1)]$$

$$\int_0^{\xi_1} d\xi_2 e^{\rho^{(1)}(\xi+\xi_1) - \rho^{(1)}(\xi+\xi_2)} \dots \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p e^{\rho^{(1)}(\xi+\xi_{p-1}) - \rho^{(1)}(\xi+\xi_p)}$$

$$[\rho_0(\xi+\xi_p) - \rho_0(\xi_{p-1}-\xi_p)] |K_\alpha^{(0)}(\xi, \xi_p)|$$

$$\leq e^{\rho^{(1)}(n+\xi)} \int_0^\xi d\xi_1 [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(\xi+\xi_1)] \int_0^{\xi_1} d\xi_2 [\rho_0(\xi+\xi_2) - \rho_0(\xi_1+\xi_2)]$$

$$\int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p [\rho_0(\xi+\xi_p) - \rho_0(\xi_{p-1}+\xi_p)] e^{-\rho^{(1)}(\xi+\xi_p)} |K_\alpha^{(0)}(\xi, \xi_p)|.$$

Comme

$$e^{-\rho^{(1)}(\xi+\xi_p)} |K_\alpha^{(0)}(\xi, \xi_p)| \leq \frac{1}{2} \rho_0(\xi) + [\rho_0(\xi) + |\alpha_1 - \alpha_0|] e^{\rho^{(1)}(2\xi) + |\alpha_0| \xi}$$

$$= W(\xi),$$

nous pouvons écrire :

$$|K_\alpha^{(p)}(n, \xi)| \leq W(\xi) e^{\rho^{(1)}(n+\xi)} \frac{\left\{ \int_0^\xi d\xi_1 [\rho_0(n+\xi_1) - \rho_0(\xi+\xi_1)] \right\}^p}{p!}$$

et

$$|K_{\alpha}(n, \xi)| \leq e^{[\rho^{(1)}(n+\xi)+\rho^{(1)}(n+\xi)-\rho^{(1)}(n)-\rho^{(1)}(2\xi)+\rho^{(1)}(\xi)]W(\xi)}. \quad (V.4.84)$$

L'existence d'un opérateur $K_{\alpha}(n, \xi)$ borné est assurée si le potentiel possède des moments d'ordre zéro et un.

§ 5. LE POTENTIEL DE REFERENCE EST LE POTENTIEL CENTRIFUGE

Lorsque le potentiel de référence V_0 contient le potentiel centrifuge :

$$V_0(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2},$$

l'opérateur de transformation K_{α} n'existe plus ; seuls les opérateurs K_M et K_G ont un sens et sont étudiés dans ce paragraphe à partir des deux équations intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} K_M(n, \xi) = & \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} R(\eta_0, 0; n, \xi) K_M(\eta_0, 0) + \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 R(\eta_0, 0; n, \xi) V(\eta_0) \\ & + \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} d\xi_0 K_M(\eta_0, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\eta_0, \xi_0; n, \xi) + \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 R(\eta_0, \xi_0; n, \xi) \end{aligned} \quad (V.5.1)$$

et

$$\begin{aligned} K_G(n, \xi) = & \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} d\eta_0 R(\eta_0, 0; n, \xi) V(\eta_0) - \int_0^{\xi} d\xi_0 K(\xi, \xi_0; n, \xi) \frac{\partial R}{\partial \xi_0}(\xi, \xi_0; n, \xi) \\ & + \int_0^{\xi} d\xi_0 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_0 R(\eta_0, \xi_0; n, \xi) K_G(\eta_0, \xi_0) V(\eta_0 + \xi_0). \end{aligned} \quad (V.5.2)$$

La fonction de Riemann partielle correspondant aux deux équations (V.5.1 et 2), prend la forme :

$$R(\eta_0, \xi_0; n, \xi) = P_{\ell}(1-2z) \quad (V.5.3)$$

où P_ℓ représente la fonction de Legendre d'ordre ℓ et où

$$Z = \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)(\xi_0^2 - \xi^2)}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)}. \quad (\text{V.5.4})$$

Bien que ξ et ξ_0 aient des signes opposés dans les représentations de Gel'fand et de Marchenko, l'expression (V.5.3) de la fonction de Riemann est valable pour ces deux représentations, car Z est une fonction paire en ξ et ξ_0 .

Comme

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = P_\ell \left[1 + \frac{2(\xi^2 - \xi_0^2)}{(\eta^2 - \xi^2)} \right] \quad (\text{V.5.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = -4P'_\ell(1-2Z) \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)\xi_0(\eta_0^2 - \xi^2)}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)^2} \quad (\text{V.5.6})$$

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = -4P'_\ell \left(1 + 2 \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{(\eta^2 - \xi^2)} \right) \frac{\xi_0}{\eta^2 - \xi^2} \quad (\text{V.5.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\xi, \xi_0; \eta, \xi) = 0, \quad (\text{V.5.8})$$

les équations intégrales (V.5.1 et 2) se simplifient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K_M(\eta, \xi) &= P_\ell \left[\frac{\eta^2 + \xi^2}{\eta^2 - \xi^2} \right] \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} K_M(\eta_0, 0) + \frac{1}{2} \int_\eta^\infty d\eta_0 R(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) \\ &+ \int_\eta^\infty d\eta_0 \int_0^\xi d\xi_0 R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) V(\eta_0 - \xi_0) K_M(\eta_0, \xi_0) \\ &+ \int_0^\xi d\xi_0 \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} K_M(\eta_0, \xi_0) \left\{ -4P'_\ell \left(1 + 2 \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\eta^2 - \xi^2} \right) \frac{\xi_0}{(\eta^2 - \xi^2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_\eta^\infty d\eta_0 R(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) + \int_\eta^\infty d\eta_0 \int_0^\xi d\xi_0 R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) V(\eta_0 - \xi_0) K_M(\eta_0, \xi_0) \end{aligned} \quad (\text{V.5.9})$$

où nous avons supposé que $\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} K_M(\eta_0, 0) = 0$. Cette hypothèse sera justifiée plus tard en vérifiant que la borne obtenue pour $K_M(\eta_0, \xi_0)$ tend effectivement vers zéro pour η_0 tendant vers l'infini.

$$K_G(\eta, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} d\eta_0 R(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) + \int_0^{\xi} d\xi_0 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_0 R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) K_G(\eta_0, \xi_0) V(\eta_0 + \xi_0). \quad (V.5.10)$$

Nous devons tout d'abord obtenir une borne supérieure pour la fonction de Riemann. Dans le domaine de Marchenko, nous avons les inégalités suivantes :

$$0 \leq \xi_0 \leq \xi < \eta < \eta_0$$

$$1 \leq 1 - 2Z = 1 + 2 \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)(\xi^2 - \xi_0^2)}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)} \leq 2 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}. \quad (V.5.11)$$

L'inégalité de gauche est évidente ; celle de droite se ramène, après multiplication des deux membres par $\frac{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)} \geq 0$, à la vérification de l'inégalité

$$E(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \frac{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)} + 2 \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)(\xi^2 - \xi_0^2)}{(\eta + \xi)^2 (\eta_0 - \xi_0)^2} \leq 2. \quad (V.5.12)$$

Or, nous obtenons successivement les inégalités suivantes :

$$E(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \leq \frac{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)} + 2 \frac{(\eta_0 + \eta)(\xi - \xi_0)}{(\eta_0 - \xi_0)(\eta + \xi)} \leq 1 + 2 \frac{\eta\xi - \eta_0\xi_0}{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}. \quad (V.5.13)$$

Puisque

$$\frac{\partial E(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)}{\partial \xi_0} = 2 \frac{\eta\xi - \eta_0^2}{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)^2} < 0, \quad (V.5.14)$$

nous pouvons écrire :

$$E(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \leq E(\eta, \xi; \eta_0, 0) \leq 1 + \frac{2\eta\xi}{\eta_0(\eta+\xi)} \leq 1 + \frac{2\eta\xi}{\eta_0^2\xi} \leq 2. \quad (\text{V.5.15})$$

Dans le domaine de Gel'fand, nous avons les inégalités suivantes :

$$0 \leq \xi_0 \leq \xi \leq \eta_0 \leq \eta < \infty$$

$$-1 \leq 1 - 2Z = 1 - 2 \frac{(\eta^2 - \eta_0^2)(\xi^2 - \xi_0^2)}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)} \leq 1 \quad (\text{V.5.16})$$

car

$$0 \leq \frac{(\eta^2 - \eta_0^2)(\xi^2 - \xi_0^2)}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)} \leq 1.$$

Une fonction de Legendre d'ordre ℓ quelconque (même complexe), possède la représentation intégrale de Laplace suivante :

$$P_\ell(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{x + \sqrt{x^2-1} \cos \phi\}^\ell d\phi. \quad (\text{V.5.17})$$

Comme $P_\ell(x) = P_{-\ell-1}(x)$, nous avons également

$$P_\ell(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \cos \phi)^{-\ell-1} d\phi. \quad (\text{V.5.18})$$

Pour $|x| \leq 1$, nous pouvons poser $x = \cos \theta$ et par conséquent

$$P_\ell(x) = P_\ell(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi]^\ell d\phi$$

$$|P_\ell(\cos \theta)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi|^\ell d\phi \leq 1. \quad (\text{V.5.19})$$

Pour $x \geq 1$ et $\text{Re } \ell \geq 0$, nous trouvons :

$$|P_\ell(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |(x + \sqrt{x^2-1} \cos \phi)^\ell| d\phi \leq (2x)^{\text{Re } \ell}. \quad (\text{V.5.20})$$

Pour $\text{Re } \ell \leq 0$ et $x \geq 1$, la seconde représentation (18) nous donne :

$$|P_\ell(x)| \leq (2x)^{|\operatorname{Re} \ell|}. \quad (\text{V.5.21})$$

Comme $P'_\ell(1) = \frac{\ell(\ell+1)}{2} > 0$ ($\ell \geq 0$) et comme $P_\ell(x)$ possède tous ses zéros dans l'intervalle $[-1, 1]$, $P_\ell(x)$ est une fonction croissante pour $x \geq 1$:

$$1 \leq P_\ell(x) \leq (2x)^\ell \quad (\text{V.5.22})$$

pour $x \geq 1$, $\ell \geq 0$.

Par conséquent, nous obtenons les bornes suivantes pour les fonctions de Riemann :

$$|R^G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq 1 \quad (\text{V.5.23})$$

$$|R^M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \left(4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right)^{|\operatorname{Re} \ell|}. \quad (\text{V.5.24})$$

Grâce à l'inégalité (V.5.23) et au fait que $\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi, \xi_0; \eta, \xi) = 0$, nous obtenons la même borne pour l'opérateur de transformation que dans le cas $\ell = 0$

$$|K_G(\eta, \xi)| \leq \frac{1}{2} F(\eta, \xi) \exp \left\{ \int_0^\xi d\xi_0 \int_{\xi_0}^{\eta + \xi_0} dt |V(t)| \right\} \quad (\text{V.5.25})$$

où $F(\eta, \xi)$ a été défini par l'équation (V.4.67).

Les conditions à imposer au potentiel sont les mêmes que pour $\ell = 0$: le potentiel doit posséder des moments d'ordre zéro et un. La borne (V.5.25) obtenue pour K_G assure l'existence de l'intégrale $\int_0^x dy K_G(x, y) \phi_0(k, y)$. Par contre, comme la borne pour la fonction de Riemann dans la représentation de Marchenko dépend de ℓ , nous obtiendrons une dépendance vis-à-vis de ℓ pour la borne de l'opérateur de transformation et les conditions à imposer au potentiel V .

La méthode des approximations successives nous fournit les bornes suivantes :

$$|K_M^0(\eta, \xi)| \leq \frac{1}{2} \left| \int_\eta^\infty R(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) d\eta_0 \right| \leq \left[4 \frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \right]^\ell \sigma_0(\eta) \quad (\text{V.5.26})$$

$$\begin{aligned}
 |K_M^{(p+1)}(\eta, \xi)| &\leq \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 |R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| |V(\eta_0 - \xi_0)| \\
 &\int_{\eta_0}^{\infty} d\eta_1 \int_0^{\xi_0} d\xi_1 |R(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0)| |V(\eta_1 - \xi_1)| \dots \\
 &\int_{\eta_{p-1}}^{\infty} d\eta_p \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p |R(\eta_p, \xi_p; \eta_{p-1}, \xi_{p-1})| |V(\eta_p - \xi_p)| |K_M^0(\eta_p, \xi_p)| \\
 &\leq \frac{1}{2} \sigma_0(\eta) \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \left[4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right]^{\lambda} |V(\eta_0 - \xi_0)| \dots \\
 &\int_{\eta_{p-1}}^{\infty} d\eta_p \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p \left[4 \frac{(\eta_{p-1} + \xi_{p-1})(\eta_p - \xi_p)}{(\eta_{p-1} - \xi_{p-1})(\eta_p + \xi_p)} \right]^{\lambda} |V(\eta_p - \xi_p)| \left(4 \frac{\eta_p + \xi_p}{\eta_p - \xi_p} \right)^{\lambda} \\
 &\leq \frac{1}{2} \sigma_0(\eta) (4^{\lambda})^{p+1} \left[4 \frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \right]^{\lambda} \frac{\left[\int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 |V(\eta_0 - \xi_0)| \right]^{p+1}}{(p+1)!}. \quad (V.5.27)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$|K_M(\eta, \xi)| \leq \frac{1}{2} \sigma_0(\eta) \left[4 \frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \right]^{\lambda} \exp \left\{ 4^{\lambda} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 |V(\eta_0 - \xi_0)| \right\} \quad (V.5.28)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sigma_0(\eta) \left[4 \frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \right]^{\lambda} \exp[4^{\lambda} (\sigma^{(1)}(\eta - \xi) - \sigma^{(1)}(\eta))]. \quad (V.5.29)$$

Nous rappelons que nous avons supposé que $\lim_{y \rightarrow \infty} K(x, y) = 0$.

Pour que cette hypothèse soit vérifiée a posteriori, il faut exiger que $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta + \xi)^{\lambda} \sigma_0(\eta) < \infty$ ou encore pour $\eta + \xi > \Lambda$

$(\eta + \xi)^{\lambda} \sigma_0(\eta) \leq (2\eta)^{\lambda} \sigma_0(\eta) \leq 2^{\lambda} \sigma_{\lambda}(\eta) < \infty$. La condition $\lim_{y \rightarrow \infty} K(x, y) = 0$ est certainement satisfaite si nous nous limitons à

des potentiels qui ont un moment d'ordre λ au voisinage de l'infini. Par contre, comme dans le cas $\lambda = 0$, nous pouvons accepter des potentiels singuliers à l'origine, tel que $\sigma^1(r)$ existe et soit intégrable au voisinage de l'origine.

Comme la solution de Jost se comporte comme $1/x^{\lambda}$ au voisinage de l'origine, la singularité en $1/x^{\lambda}$ à l'origine de

$K(x, y)$ est naturelle. Nous devons à présent assurer l'existence de $\int_x^\infty K_M(x, y) f_0(k, y) dy$. Nous avons successivement :

$$\left| \int_x^\infty K_M(x, y) f_0(k, y) dy \right| \leq \int_x^\infty \frac{4^\ell}{2} \sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right) \frac{y^\ell}{x^\ell} \exp [4^\ell \sigma^{(1)}(x)] |f_0(k, y)| dy$$

$$\leq \frac{4^\ell}{2x^\ell} \exp [4^\ell \sigma^{(1)}(x)] \int_x^\infty \sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right) y^\ell C \left[\frac{1 + |k|y}{|k|y} \right]^\ell e^{-\text{Im } ky} dy.$$

L'intégrabilité est assurée si, à nouveau, nous supposons l'existence d'un moment d'ordre ℓ .

L'étude précédente peut aussi s'appliquer à un potentiel perturbatif complexe. Elle est aussi valable si ℓ est non entier et complexe, auquel cas le potentiel de référence correspondrait à la partie singulière du potentiel recherché. Cette partie singulière doit être connue au départ et ne peut être obtenue à partir des déphasages. Nous savons par exemple que les mêmes données de la diffusion peuvent être produites par des potentiels différents pour des ondes partielles différentes. Lorsque ℓ est complexe, il faut cependant remplacer ℓ par $|\text{Re } \ell|$ dans toutes les inégalités qui apparaissent dans ce paragraphe.

§ 6. INTRODUCTION D'UNE INTERACTION DE COULOMB DANS LE POTENTIEL DE REFERENCE

Nous considérons à présent l'existence d'un opérateur de transformation borné, lorsque le potentiel de référence V_0 contient l'interaction coulombienne et le potentiel centrifuge :

$$V_0(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\alpha}{x}. \quad (\text{V.6.1})$$

La singularité à l'origine de l'équation différentielle étant régulière, une solution régulière à l'origine peut toujours être définie par la condition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi_0(k, x) = \frac{x^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}. \quad (\text{V.6.2})$$

L'équation intégrale définissant cette solution régulière reste

valable car le potentiel coulombien vérifie la condition

$$\int_0^x t |V(t)| dt < \infty. \quad (\text{V.6.3})$$

La solution régulière ϕ_0 correspondant au potentiel de référence V_0 est solution de l'équation intégrale

$$\phi_0(k, x) = \frac{u_\ell(kx)}{k^{\ell+1}} + \int_0^x g_\ell(k^2, x, t) V_0(t) \phi_0(k, t) dt \quad (\text{V.6.4})$$

$$g_\ell(k^2, x, t) = \frac{(-)^{\ell}}{k} i [j_\ell(kx) k_\ell^{(1)}(-ky) - j_\ell(ky) h_\ell^{(1)}(-kx)]. \quad (\text{V.6.5})$$

Comme cette équation est une équation de Volterra de seconde espèce, elle a une solution unique qui pour x fixé est analytique et entière en k . Cependant, le comportement asymptotique à l'infini est particulier ; pour $|\arg k| < \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_0(k, x) = \frac{e^{\frac{\pi\alpha}{4k}}}{k^{\ell+1}} \frac{\ell!}{|\Gamma(\ell + 1 + \frac{i\alpha}{2k})|} \sin [kx - \frac{\ell\pi}{2} - \frac{\alpha}{2k} \ln 2kx + \sigma_\ell] \quad (\text{V.6.6})$$

où

$$\sigma_\ell = \frac{1}{2i} \ln \frac{\Gamma(\ell + 1 + \frac{i\alpha}{2k})}{\Gamma(\ell + 1 - \frac{i\alpha}{2k})} \quad (\text{V.6.7})$$

si $\alpha < 0$, l'équation possède une suite dénombrable et infinie d'états liés qui s'accroissent en $k = 0$ ($k_m = \frac{-i\alpha}{2(\ell+m)}$ $m = 1, 2, \dots$). L'expression suivante peut être obtenue pour la solution régulière

$$\phi_0(k, x) = \frac{x^{\ell+1} e^{ikx}}{(2\ell+1)!!} {}_1F_1(\ell + 1 + \frac{i\alpha}{2k}; 2\ell+2; -2ikx) \quad (\text{V.6.8})$$

où ${}_1F_1$ représente la fonction hypergéométrique confluyente.

A partir des deux relations remarquables :

$${}_1F_1(a; b; z) = e^z {}_1F_1(b-a; b; -z) \quad (\text{V.6.9})$$

et

$${}_1F_1(a+1; b; z) - {}_1F_1(a; b; z) = \frac{z}{b} {}_1F_1(a+1; b+1; z), \quad (\text{V.6.10})$$

nous obtenons :

$$\phi_0(k, x) = \frac{x^{\ell+1} e^{-ikx}}{(2\ell+1)!!} {}_1F_1\left(\ell + 1 - \frac{i\alpha}{2k}; 2\ell+2, 2ikx\right) \quad (V.6.11)$$

$$= \frac{1}{(\pm 2ik)^{\ell+1} (2\ell+1)!!} M_{\pm \frac{i\alpha}{2k}, \ell+1/2}(\pm 2ikx) \quad (V.6.12)$$

et

$$\begin{aligned} \phi_0(k, x) = & \frac{2\ell+2}{(-2ik)} \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} [e^{ikx} {}_1F_1\left(\ell + 1 + \frac{i\alpha}{2k}, 2\ell+1, -2ikx\right) \\ & - e^{-ikx} {}_1F_1\left(\ell + 1 - \frac{i\alpha}{2k}, 2\ell+1, 2ikx\right)] \quad (V.6.13) \end{aligned}$$

où M représente la fonction régulière de Wittaker et où $-\frac{\pi}{2} < \arg k < \frac{3\pi}{2}$. Utilisant le développement en série de la fonction hypergéométrique, nous obtenons pour $k \neq 0$ l'expression

$$\phi_0(0, x) = x^{\ell+1} {}_0F_1(2\ell+2; \alpha x). \quad (V.6.14)$$

Nous ne pouvons plus définir la solution de Jost à partir du comportement asymptotique habituel car le potentiel ne vérifie plus la condition $|V(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim O(r^{-\alpha})$, $\alpha > 1$. Les solutions de Jost possèdent les comportements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_{\pm 0}(k, x) &= e^{\pm i kx} (\mp 2kx)^{\mp \frac{i\alpha}{2k}} \\ &= e^{\pm i kx \mp \frac{i\alpha}{2k} \ln 2kr}. \quad (V.6.15) \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire [HUM 64] :

$$f_{\pm 0}(k, x) = e^{\frac{\pi\alpha}{4k}} (\pm)^{\ell} W_{\pm} \quad (V.6.16)$$

$$W_+ = W_{-\frac{i\alpha}{2k}, \ell+1/2} \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} 2kr \right) \quad (V.6.17)$$

$$W_- = W_{\frac{i\alpha}{2k}, \ell+1/2} \left(e^{\frac{i\pi}{2}} 2kr \right) \quad (V.6.18)$$

$$\text{Wr}(W_+, W_-) = -2ik e^{-\pi\alpha} \quad (\text{V.6.19})$$

où W représente la fonction de Wittaker irrégulière. Comme fonction de k , elle possède des singularités essentielles en $k = 0$ et $k = \infty$ mais ne possède pas d'autre singularité dans le plan complexe. Afin de définir de façon univoque la fonction de Wittaker, nous effectuons dans le plan k une coupure le long du demi-axe imaginaire négatif et nous considérons les valeurs de k telles que

$$-\frac{\pi}{2} < \arg k < \frac{3\pi}{2}$$

$$f_{0+}(k, x) = e^{ikx + \frac{\pi\alpha}{2k}} (-2ikx)^{\ell+1} U(\ell + 1 + \frac{i\alpha}{2k}, 2\ell+2, -2ikx)$$

$$\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikx - \frac{i\alpha}{2k} \ln 2kx} {}_2F_0(\ell + 1 + \frac{i\alpha}{2k}, \frac{i\alpha}{2k} - \ell; \frac{1}{2ikx})$$

où U est la fonction de Kummer et ${}_2F_0$ la fonction hypergéométrique généralisée qui vérifie la condition : $\lim_{z \rightarrow 0} {}_2F_0(a, b, z) = 1$. Les fonctions de Jost sont définies par la relation habituelle :

$$f_{0\pm}(k) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(kx)^\ell}{i^\ell (2\ell-1)!!} f_{0\pm}(k, x) = e^{\frac{\pi\alpha}{4k}} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell + 1 \pm \frac{i\alpha}{2k})} \quad (\text{V.6.20})$$

car $\lim_{z \rightarrow 0} z^{b-1} U(a, b, z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}$ si $\text{Re } b > 1$.

Nous obtenons la relation habituelle suivante

$$\phi_0(k, x) = \frac{1}{2ik} \frac{1}{(ik)^\ell} [f_{0-}(k) f_{0+}(k, x) - (-)^\ell f_{0+}(k) f_{0-}(k, x)]. \quad (\text{V.6.21})$$

Si nous ajoutons au potentiel de référence, un potentiel perturbatif local et régulier et si l'hamiltonien de départ possède un nombre infini d'états liés, l'hamiltonien perturbé possède également une infinité d'états liés, qui sont déplacés par rapport aux états liés initiaux. Ce résultat peut être déduit du théorème gé-

néral suivant qui montre que le comportement en $\frac{1}{r^2}$ à l'infini est le comportement limite [REE 78, tome IV, page 87]. Nous considérons l'opérateur $-\Delta+V$ sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous supposons que pour tout ε le potentiel peut se décomposer en la somme de deux termes $V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$ où $V_1(\vec{r}) \in L^2$ ou R ($R =$ classe de Rolnik) tandis que $V_2(\vec{r}) \in (L^\infty)_\varepsilon$ c'est-à-dire $\|V_2\|_\infty < \varepsilon$. Dans ces conditions, nous considérons les deux possibilités suivantes :

i) si pour $R > 0$ et $\varepsilon > 0$ $V(\vec{r}) < -r^{-2+\varepsilon}$ pour $r > R$, alors le spectre discret est composé d'une suite infinie d'états liés qui s'accroissent en zéro ;

ii) si pour $R > 0$ et $\varepsilon > 0$ $V(\vec{r}) > -r^{-2-\varepsilon}$ pour $r > R$, alors le spectre est fini.

L'étude de l'opérateur de transformation est à nouveau basée sur la méthode de Riemann. Une borne supérieure doit être trouvée pour la fonction de Riemann partielle qui correspond à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} - \frac{\alpha}{s} \right] r(s,u;x,y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{u^2} - \frac{\alpha}{u} \right] r(s,u;x,y). \tag{V.6.22}$$

L'équation intégrale équivalente prend la forme (V.6.23) si nous utilisons les coordonnées caractéristiques :

$$R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = R_0(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) + \iint_{\mathcal{D}} d\eta_1 d\xi_1$$

$$R_0(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0) \propto \left[\frac{1}{\eta_1 - \xi_1} - \frac{1}{\eta_1 \pm \xi_1} \right] R(\eta_1, \xi_1; \eta, \xi) \tag{V.6.23}$$

où \mathcal{D} représente le domaine compris entre les droites caractéristiques issues de (η_0, ξ_0) et (η, ξ) et où $R_0(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)$ est la fonction de Riemann correspondant au cas $\alpha = 0$ [les signes supérieurs (inférieurs) dans l'Eq. (V.6.23) correspondent à la représentation de Marchenko (Gel'fand)]. L'équation aux dérivées partielles étant auto-adjointe, nous avons :

$$R_0(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = R_0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0). \tag{V.6.24}$$

Nous pouvons écrire l'équation (V.6.23) sous la forme (V.6.25) valable pour les deux représentations à la fois :

$$R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = R_0(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1$$

$$R_0(\eta_0, \xi_0; \eta_1, \xi_1) \propto \left[\frac{1}{\eta_1 - \xi_1} - \frac{1}{\eta_1 + \xi_1} \right] R(\eta_1, \xi_1; \eta, \xi). \quad (\text{V.6.25})$$

Pour la représentation de Marchenko, la méthode des approximations successives appliquées à l'équation intégrale (V.6.25), nous fournit les bornes suivantes :

$$|R_M^{(0)}(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| = |R_0(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)|$$

$$\leq \left[4 \frac{(\eta + \xi)(\eta - \xi)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right]^\ell$$

$$= F(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) 4^\ell \quad (\text{V.6.26})$$

$$|R_M^{(p)}(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq 4^{\ell(p+1)} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 F(\eta_1, \xi_1; \eta, \xi) g(\eta_1, \xi_1)$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 F(\eta_2, \xi_2; \eta_1, \xi_1) g(\eta_2, \xi_2) \dots$$

$$\int_{\xi_{p-1}}^{\xi} d\xi_p \int_{\eta}^{\eta_{p-1}} d\eta_p F(\eta_p, \xi_p; \eta_{p-1}, \xi_{p-1}) g(\eta_p, \xi_p) F(\eta, \xi; \eta_p, \xi_p) \quad (\text{V.6.27})$$

où

$$g(\eta, \xi) = |\alpha| \frac{2\xi}{\eta^2 - \xi^2} \quad (\text{V.6.28})$$

si nous utilisons les deux propriétés suivantes :

$$F(\eta_1, \xi_1; \eta, \xi) F(\eta_2, \xi_2; \eta_1, \xi_1) = F(\eta_2, \xi_2; \eta, \xi) \quad (\text{V.6.29})$$

et

$$g(\eta_p, \xi_p) \leq |\alpha| \frac{1}{\eta_p - \xi_p} \leq |\alpha| \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_p}} \frac{1}{\sqrt{\eta_p - \xi}}, \quad (\text{V.6.30})$$

nous obtenons :

$$|R_M^{(p)}(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq F(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) 4^{\ell(p+1)} |\alpha|^p$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_1}} \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_2}} \dots \int_{\xi_{p-1}}^{\xi} d\xi_p \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_p}}$$

$$\int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \frac{1}{\sqrt{\eta_1 - \xi}} \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 \frac{1}{\sqrt{\eta_2 - \xi}} \dots \int_{\eta}^{\eta_{p-1}} d\eta_p \frac{1}{\sqrt{\eta_p - \xi}} \quad (V.6.31)$$

$$\leq \left[4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right]^{\ell} (4^{\ell})^p |\alpha|^p \frac{\left[\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi_1}{\sqrt{\eta - \xi_1}} \right]^p}{p!} \frac{\left[\int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta_1}{\sqrt{\eta_1 - \xi}} \right]^p}{p!} \quad (V.6.32)$$

et par conséquent :

$$|R_M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| \leq \left[4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right]^{\ell} I_0 \left(2 \sqrt{4^{\ell} |\alpha| \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi_1}{\sqrt{\eta - \xi_1}} \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta_1}{\sqrt{\eta_1 - \xi}}} \right) \quad (V.6.33)$$

$$\leq \left[4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right]^{\ell} \exp \left[2^{\ell+2} \sqrt{|\alpha| \sqrt{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}} \right]$$

$$\leq \left[4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right]^{\ell} \exp \left[2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha| (\eta_0 - \xi_0)} \right] \quad (V.6.34)$$

ou

$$|R_M(s, u; x, y)| \leq \left[4 \frac{ys}{xu} \right]^{\ell} \exp \left[2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha| s} \right] \quad (V.6.35)$$

où nous avons utilisé les propriétés bien connues :

$$I_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^p}{(p!)^2} \quad (V.6.36)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \theta} d\theta \quad (V.6.37)$$

$$\leq e^z. \quad (V.6.38)$$

Nous évaluons à présent la fonction de Riemann R_G dans la représentation de Gel'fand. La même méthode nous donne

$$\begin{aligned}
 |R_G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| &\leq \exp [4 \sqrt{|\alpha| \sqrt{(\eta_0 - \xi_0)(\eta - \xi)}}] \\
 &\leq \exp [4 \sqrt{|\alpha| (\eta - \xi_0)}] \\
 &\leq \exp [4 \sqrt{|\alpha| \eta}] \tag{V.6.39}
 \end{aligned}$$

Une estimation de la dérivée par rapport à ξ_0 de la fonction de Riemann est aussi nécessaire et peut s'obtenir à partir de l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \\
 &\frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0(\eta_0, \xi_0; \eta_1, \xi_1) \frac{2\alpha\xi_1}{\eta_1^2 - \xi_1^2} R(\eta_1, \xi_1; \eta, \xi) \\
 &- \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 R_0(\eta_0, \xi_0; \eta_1, \xi_0) \frac{2\alpha\xi_0}{\eta_1^2 - \xi_0^2} R(\eta_1, \xi_0; \eta, \xi) \tag{V.6.40}
 \end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = -4 P'_\ell(1-2z) \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)\xi_0(\eta_0^2 - \xi_0^2)}{(\eta^2 - \xi_0^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)^2} \tag{V.6.41}$$

Dans le domaine de Gel'fand ($0 \leq \xi_0 \leq \xi \leq \eta_0 \leq \eta$), nous avons

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0^G(\eta_0; \xi_0, \eta, \xi) \right| &\leq |P'_\ell(1-2z)| \frac{4\xi_0}{(\eta_0 + \xi_0)(\eta_0 - \xi_0)} \leq |P'_\ell(1-2z)| \frac{2}{\eta_0 - \xi_0} \\
 &\leq \frac{\ell(\ell+1)}{\eta_0 - \xi_0} \tag{V.6.42}
 \end{aligned}$$

Dans le domaine de Marchenko ($0 \leq \xi_0 \leq \xi < \eta \leq \eta_0$), nous avons

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0^M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) \right| &\leq 4 |P'_\ell(1-2z)| \frac{\xi_0}{\eta^2 - \xi^2} \leq |P'_\ell(1-2z)| \frac{2}{(\eta - \xi)} \\
 &\leq \left[4 \frac{(\eta + \xi)(\eta - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right]^{\ell-1} \frac{2\ell(\ell+1)}{(\eta - \xi)}. \quad (V.6.43)
 \end{aligned}$$

Dans le domaine de Gel'fand, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R^G(\xi, \xi_0; \eta, \xi) \right| &\leq 0 + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0^G(\xi, \xi_0; \eta_1, \xi_1) \right| \\
 &\frac{2|\alpha|\xi_1}{\eta_1^2 - \xi_1^2} |R^G(\eta_1, \xi_1; \eta, \xi)| + \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 |R_0^G(\xi, \xi_0; \eta_1, \xi_0)| \frac{2|\alpha|\xi_0}{\eta_1^2 - \xi_0^2} |R^G(\eta_1, \xi_0; \eta, \xi)| \\
 &\leq \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 \frac{\ell(\ell+1)}{(\xi - \xi_0)} \frac{2|\alpha|\xi_1}{(\eta_1^2 - \xi_1^2)} \exp[4\sqrt{|\alpha|(\eta - \xi_0)}] \\
 &\quad + \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 \frac{2|\alpha|\xi_0}{(\eta_1^2 - \xi_0^2)} \exp[4\sqrt{|\alpha|(\eta - \xi_0)}] \\
 &\leq \exp[4\sqrt{|\alpha|(\eta - \xi_0)}] |\alpha| \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{(\xi - \xi_0)} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 2\xi_1 \frac{1}{2\xi_1} \ell n \frac{\eta_1 - \xi_1}{\eta_1 + \xi_1} \right\}_{\eta_1 = \xi}^{\eta_1 = \eta} \\
 &\quad + \ell n \frac{(\eta - \xi_0)(\xi + \xi_0)}{(\eta + \xi_0)(\xi - \xi_0)}.
 \end{aligned}$$

Nous devons évaluer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \ell n \frac{\eta_1 - \xi_1}{\eta_1 + \xi_1} \Big|_{\eta_1 = \xi}^{\eta_1 = \eta} &= 2\xi \ell n 2 - (\xi + \xi_0) \ell n \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi} \right) + (\eta - \xi) \ell n \frac{\eta}{\eta - \xi} \\
 &- (\eta - \xi_0) \ell n \frac{\eta}{\eta - \xi_0} + (\eta + \xi_0) \ell n \frac{\eta + \xi_0}{\eta} - (\eta + \xi) \ell n \frac{\eta + \xi}{\eta} + (\xi - \xi_0) \ell n \left(\frac{\xi}{\xi - \xi_0} \right) \\
 &\leq (\xi - \xi_0)(1 + \ell n 2) + (\xi - \xi_0) \ell n \frac{\xi}{(\xi - \xi_0)} \leq (\xi - \xi_0) \left[2 + \ell n \frac{\xi}{(\xi - \xi_0)} \right]
 \end{aligned}$$

car les deuxième et troisième termes sont négatifs et le premier terme a été majoré par le théorème des accroissements finis.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R^G(\xi, \xi_0; n, \xi) \right| \leq \exp [4\sqrt{|\alpha|(\eta - \xi_0)}] |\alpha| \{ \ell(\ell+1) [2 + \ell n \frac{\xi}{\xi - \xi_0}] + \ell n \frac{\xi + \xi_0}{\xi - \xi_0} \}. \quad (V.6.44)$$

Pour la fonction de Riemann considérée dans le domaine de Marchenko, nous obtenons la borne suivante :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R^M(\eta_0, \xi_0; n, \xi) \right| &\leq \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0^M(\eta_0, \xi_0; n, \xi) \right| \\ &+ \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_0^M(\eta_0, \xi_0; \eta_1, \xi_1) \right| \frac{2|\alpha|\xi_1}{(\eta_1^2 - \xi_1^2)} |R^M(\eta_1, \xi_1; n, \xi)| \\ &+ \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 |R_0^M(\eta_0, \xi_0; \eta_1, \xi_0)| \frac{2|\alpha|\xi_0}{\eta_1^2 - \xi_0^2} |R^M(\eta_1, \xi_0; n, \xi)| \\ &\leq [4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}]^{\ell-1} \frac{2\ell(\ell+1)}{(\eta - \xi)} + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \\ &[4 \frac{(\eta_1 + \xi_1)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta_1 - \xi_1)(\eta_0 + \xi_0)}]^{\ell-1} \frac{2\ell(\ell+1)}{(\eta_1 - \xi_1)} \frac{2|\alpha|\xi_1}{(\eta_1^2 - \xi_1^2)} [4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_1 - \xi_1)}{(\eta - \xi)(\eta_1 + \xi_1)}]^{\ell} \\ &\exp [2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_1 - \xi_1)}] + \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 [4 \frac{(\eta_1 + \xi_0)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta_1 - \xi_0)(\eta_0 + \xi_0)}]^{\ell} \\ &\frac{2|\alpha|\xi_0}{\eta_1^2 - \xi_0^2} [4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_1 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_1 + \xi_0)}]^{\ell} \exp [2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_1 - \xi_0)}] \\ &\leq [4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}]^{\ell-1} \frac{2\ell(\ell+1)}{(\eta - \xi)} + [4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}]^{\ell-1} 4^{\ell} \frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \\ &2|\alpha|\ell(\ell+1) \exp (2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_0 - \xi_0)}) \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \frac{2\xi_1}{(\eta_1 + \xi_1)^2(\eta_1 - \xi_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[4 \frac{(\eta+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^\ell 4^\ell |\alpha| \exp \left[2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_0-\xi_0)} \right] \int_\eta^{\eta_0} d\eta_1 \frac{2\xi_0}{\eta_1^2 - \xi_0^2} \\
 & \leq \left[4 \frac{(\eta+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^{\ell-1} \frac{2\ell(\ell+1)}{(\eta-\xi)} + \left[4 \frac{(\eta+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^{\ell-1} 4^\ell \frac{(\eta+\xi)}{(\eta-\xi)} \\
 & 2|\alpha|\ell(\ell+1) \exp \left[2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_0-\xi_0)} \right] \frac{(\xi-\xi_0)}{(\eta-\xi)} \\
 & + \left[4 \frac{(\eta+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^\ell 4^\ell |\alpha| \exp \left[2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_0-\xi_0)} \right] \frac{2\xi_0}{(\eta-\xi_0)}.
 \end{aligned}$$

(V.6.45)

L'opérateur de transformation du type de Gel'fand, vérifie l'équation intégrale

$$\begin{aligned}
 K_G(\eta, \xi) & = \frac{1}{2} \int_\xi^\eta d\eta_0 R_G(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) - \int_0^\xi d\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_G(\xi, \xi_0; \eta, \xi) K_G(\xi, \xi_0) \\
 & + \int_0^\xi d\xi_0 \int_\xi^\eta d\eta_0 R_G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) K_G(\eta_0, \xi_0) V(\eta_0 + \xi_0).
 \end{aligned}$$

(V.6.46)

A cause de la présence du deuxième terme dans l'équation intégrale (V.6.46), nous ne sommes pas parvenus à appliquer la méthode des approximations successives et nous n'avons pas pu obtenir une expression analytique pour la borne de $|K_G(\eta, \xi)|$. Il nous semble cependant que $K_G(\eta, \xi)$ doit exister sous des conditions très générales. Comme $R_G(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)$ et $\frac{\partial}{\partial \xi_0} R_G(\xi, \xi_0; \eta, \xi)$ peuvent être bornées par des fonctions indépendantes de ℓ , les conditions à imposer au potentiel perturbatif seront indépendantes de ℓ .

Nous considérons à présent l'opérateur de transformation du type de Marchenko

$$\begin{aligned}
 K_M(\eta, \xi) & = \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} R_M(\eta_0, 0; \eta, \xi) K_M(\eta_0, 0) + \frac{1}{2} \int_\eta^\infty d\eta_0 R_M(\eta_0, 0; \eta, \xi) V(\eta_0) \\
 & + \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \int_0^\xi d\xi_0 K_M(\eta_0, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 R_M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) V(\eta_0 - \xi_0) K_M(\eta_0, \xi_0). \quad (\text{V.6.47})$$

Nous supposons que :

$$\text{i)} \quad \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} |R_M(\eta_0, 0; \eta, \xi) K_M(\eta_0, 0)| = 0; \quad (\text{V.6.48})$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} |K_M(\eta_0, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_M(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi)| = 0. \quad (\text{V.6.49})$$

Pour vérifier ces deux conditions, il suffit d'imposer :

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} |K_M(\eta_0, \xi_0)| \exp [2^{\ell+2} \sqrt{|\alpha| \eta_0}] = 0. \quad (\text{V.6.50})$$

Nous verrons plus tard la condition à imposer au potentiel pour que cette condition (V.6.50) soit vérifiée. Appliquant la méthode des approximations successives à l'équation (V.6.47), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |K_M^{(0)}(\eta, \xi)| &\leq \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 |R(\eta_0, 0; \eta, \xi)| |V(\eta_0)| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[4 \frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \right]^{\ell} \int_{\eta}^{\infty} \exp \{ 2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha| \eta_0} \} |V(\eta_0)| = \frac{1}{2} \left[\frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \right]^{\ell} \tilde{\sigma}(\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |K_M^{(p+1)}(\eta, \xi)| &\leq \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 4 \left[\frac{(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \frac{(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta_0 + \xi_0)} \right]^{\ell} \\ &\exp \{ 2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha| (\eta_0 - \xi_0)} \} |V(\eta_0 - \xi_0)| \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta_1 \int_0^{\xi} d\xi_1 \\ &\left[4 \frac{(\eta_0 + \xi_0)(\eta_1 - \xi_1)}{(\eta_0 - \xi_0)(\eta_1 + \xi_1)} \right]^{\ell} \exp \{ 2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha| (\eta_1 - \xi_1)} \} |V(\eta_1 - \xi_1)| \\ &\dots \int_{\eta_{p-1}}^{\infty} d\eta_p \int_0^{\xi_{p-1}} d\xi_p \left[4 \frac{(\eta_{p-1} + \xi_{p-1})(\eta_p - \xi_p)}{(\eta_{p-1} - \xi_{p-1})(\eta_p + \xi_p)} \right]^{\ell} \\ &\exp \{ 2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha| (\eta_p - \xi_p)} \} |V(\eta_p - \xi_p)| \frac{1}{2} \left[4 \frac{(\eta_p + \xi_p)}{(\eta_p - \xi_p)} \right]^{\ell} \tilde{\sigma}(\eta_p), \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(\eta) \left[4 \frac{(\eta+\xi)}{(\eta-\xi)} \right]^\ell 4^{\ell(p+1)}$$

$$\frac{\left[\int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \exp \{ 2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_0 - \xi_0)} \} |V(\eta_0 - \xi_0)| \right]^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$\leq \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(\eta) \left[4 \frac{(\eta+\xi)}{(\eta-\xi)} \right]^\ell 4^{\ell(p+1)}$$

$$\frac{\left[\int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \exp \{ 2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_0 - \xi_0)} \} |V(\eta_0 - \xi_0)| \right]^{p+1}}{(p+1)!}$$

et par conséquent :

$$|K_M(\eta, \xi)| \leq \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(\eta) \left[4 \frac{(\eta+\xi)}{(\eta-\xi)} \right]^\ell \exp \left\{ 4^\ell \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \right. \\ \left. \exp [2^{(\ell+2)} \sqrt{|\alpha|(\eta_0 - \xi_0)}] |V(\eta_0 - \xi_0)| \right\} \quad (V.6.51)$$

Définissant

$$\tilde{V}(s) = 4^\ell V(s) \exp [2^{\ell+2} \sqrt{|\alpha|s}] \quad (V.6.52)$$

et

$$\tilde{\sigma}_\ell = \int_{\eta}^{\infty} s^\ell |\tilde{V}(s)| ds \quad (V.6.53)$$

et utilisant les coordonnées physiques, nous obtenons :

$$|K_M(x, y)| \leq \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_0 \left(\frac{x+y}{2} \right) \left[\frac{y}{x} \right]^\ell \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+y}{2}} ds \int_{x+y-s}^{y-x+s} du |\tilde{V}(s)| \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} ds \int_s^{y-x+s} du |\tilde{V}(s)| \right\} \\ \leq \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_0 \left(\frac{x+y}{2} \right) \left[\frac{y}{x} \right]^\ell \exp [\tilde{\sigma}_1(x)] \quad (V.6.54)$$

ou aussi

$$\leq \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_0 \left(\frac{x+y}{2}\right) \left[\frac{y}{x}\right]^\ell \exp \left\{ \frac{1}{2} (y-x) \tilde{\sigma}_0(x) \right\}. \quad (\text{V.6.55})$$

Le comportement singulier en $\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de l'origine est en accord avec le comportement x^ℓ à l'origine de la solution de Jost. La croissance en y^ℓ peut être éliminée si nous imposons que le potentiel $\tilde{V}(s)$ possède un moment d'ordre ℓ ; dans ce cas, nous obtenons la borne :

$$|K_M(x,y)| \leq \frac{2^{(\ell-1)}}{x^\ell} \tilde{\sigma}_\ell \left(\frac{x+y}{2}\right) \exp [\tilde{\sigma}_1(x)]. \quad (\text{V.6.56})$$

Pour que l'opérateur de transformation de Marchenko possède le comportement $K_M(x,y) \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} C \exp \{-2^{\ell+2} \sqrt{|\alpha|x}\}$, il suffit d'imposer

$$\begin{aligned} \exp \{2^{\ell+2} \sqrt{|\alpha|x}\} \tilde{\sigma}_\ell \left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \int_\eta^\infty s^\ell \exp \{2^{\ell+3} \sqrt{|\alpha|s}\} |V(s)| ds \\ &= \hat{\sigma}(\eta) < \infty. \end{aligned}$$

L'opérateur de transformation $K_M(x,y)$ sera borné si $\hat{\sigma}_\ell(x)$ existe. La présence du potentiel de Coulomb demande que le potentiel perturbatif possède une décroissance exponentielle.

§ 7. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons trouvé des conditions suffisantes à imposer aux potentiels perturbatifs pour qu'il existe des opérateurs de transformation bornés, dans le cas de la diffusion à une voie et pour différents potentiels de référence V_0 . Lorsque le potentiel de référence contient le potentiel centrifuge, les conditions à imposer au potentiel sont indépendantes de ℓ pour l'opérateur de transformation du type de Gel'fand et dépendantes de ℓ dans le cas de l'opérateur de Marchenko. Etant donné que nous connaissons l'expression analytique exacte de la fonction de Riemann dans le cas d'un potentiel centrifuge, les conditions suffisantes obtenues sont pratiquement des conditions nécessaires car la méthode utilisée pour définir ces conditions est une méthode de construction de l'opérateur K et nous savons que généralement

des conditions suffisantes obtenues par une méthode constructive peuvent difficilement être améliorées. Lorsque le potentiel de référence contient le potentiel centrifuge et le potentiel de Coulomb, nos calculs nous ont conduit à exiger que le potentiel perturbatif possède à l'infini une décroissance plus rapide qu'une certaine exponentielle afin d'obtenir un opérateur de transformation du type de Marchenko borné. Des conditions probablement moins fortes pourraient peut-être être obtenues si l'expression exacte de la fonction de Riemann était connue dans ce cas. Dans le cas de l'opérateur de Gel'fand, les conditions à imposer au potentiel perturbatif restent indépendantes de ℓ . Dans ce cas, la méthode de Riemann et la méthode des approximations successives ne nous ont pas permis d'obtenir une forme analytique pour la borne de l'opérateur de transformation, ceci est dû au fait que dans ce cas il existe une contribution supplémentaire proportionnelle à $\frac{\partial}{\partial \xi} R^G(\xi, \xi_0; \eta, \xi) \neq 0$. Dans tous les cas considérés, les conditions obtenues⁰ sont indépendantes du fait que le potentiel est attractif, répulsif, ou même complexe ; elles sont aussi indépendantes de l'intensité de la force. Les conditions dépendent de l'existence de certaines intégrales, faisant intervenir le module du potentiel (les conditions d'existence de certaines solutions à l'équation de Schrödinger sont du même type).

Si, dans un problème donné, nous connaissons à l'avance par une méthode quelconque, une première approximation U_1 au potentiel recherché, il est évident qu'il faut choisir ce potentiel U_1 comme potentiel de référence. Ce potentiel U_1 doit nécessairement contenir les singularités U_0 du problème que sont le potentiel centrifuge et le potentiel de Coulomb si ils sont présents ; nous avons donc :

$$U_1 = U_0 + U_{01}$$

$$U_0 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{\alpha}{r}$$

où U_{01} est un potentiel régulier. Nous n'avons pas fait une recherche des conditions à imposer au potentiel perturbatif

$U_{12} = U_2 - U_1$ pour qu'il existe un noyau de transformation borné, lorsque le potentiel de référence est U_1 , ce problème se ramène à un des cas que nous avons étudiés dans ce chapitre car nous

[COZ 77b] avons démontré le théorème suivant : si nous appelons $A(U_0)$ la classe des potentiels pour lesquels il existe un opérateur de transformation borné et intégrable lorsque U_0 est le potentiel de référence défini plus haut et si U_1 et $U_2 \in A(U_0)$ alors $U_2 \in A(U_1)$.

Les bornes obtenues pour les opérateurs de transformation sont aussi utiles pour rechercher les conditions à imposer aux données de la diffusion, afin de définir un problème inverse qui possède une solution convenable et stable.



CHAPITRE VI : ETUDE DE L'OPERATEUR DE TRANSFORMATION
++++
CORRESPONDANT A DES VOIES COUPLEES
++++

§ 1. INTRODUCTION

Le problème inverse de la diffusion pour un système d'équations couplées a été très peu étudié bien qu'il puisse donner lieu à de très nombreuses applications nucléaires. Ainsi, le processus de diffusion d'une particule avec spin, dont la direction peut être changée par un champ extérieur, peut être étudié par un système d'équations qui décrivent chaque état de la particule de projection de spin m_s bien définie et qui sont couplées par les éléments de la matrice d'interaction $V_{m_s, m'_s}(r)$. Le problème inverse dans ce cas consisterait à déterminer les éléments $V_{m_s, m'_s}(r)$ à partir de la matrice de diffusion $S_{m_s, m'_s}(E)$. Un autre exemple d'utilisation du formalisme du problème inverse à voies couplées serait la construction du potentiel créé par une cible déformée (à symétrie non sphérique), inerte et se trouvant dans une position fixe dans l'espace. Ce problème comprend généralement un nombre infini d'équations couplées qui correspondent aux différentes valeurs (ℓ, m) du moment angulaire et de sa projection. La construction du potentiel déformé $V(\vec{r})$ demande la connaissance des données de la diffusion pour différentes directions du faisceau incident. Une généralisation de ce problème serait la détermination du potentiel optique créé par une cible déformée qui tourne ou qui vibre. Une telle cible serait par exemple le noyau dans l'approximation du modèle collectif où on ne tient pas compte du mouvement individuel des particules composant la cible. Dans ce cas, l'orientation du noyau par rapport au faisceau incident ne reste pas constante et l'état du mouvement du noyau est influencé par l'interaction avec la particule incidente (excitation de degrés de liberté collectifs de la cible). Le noyau cible possède alors plusieurs états excités et la méthode de construction du potentiel à partir de la matrice S restera la même (la construction des éléments de la matrice S qui correspondent aux voies fermées et aux transitions à partir d'états excités, n'est cependant pas évident). Ce problème se rencontre généralement dans l'étude des processus inélastiques décrits par des équations couplées.

Dans tous ces cas, les états finaux et initiaux possibles du système sont des états à deux corps où la cible peut se trouver dans son état fondamental ou dans un de ses états excités (supposés discrets et en nombre fini). Les voies couplées, avec une légère modification, peuvent également constituer un modèle pour les processus de réarrangement où la masse réduite n'est pas la même dans toutes les voies. Cependant, une étude complète demande une approche plus compliquée qui tiendrait compte des états du continu. L'approximation à n voies couplées est néanmoins souvent très valable lorsque l'énergie du système est largement en-dessous du seuil de fragmentation de la cible ; cette approximation est à la base de nombreux modèles en physique atomique et nucléaire. Le modèle peut aussi s'appliquer aux réactions d'échange de charge π -noyau ou aux réactions d'hypérons avec un noyau, où un Λ^0 se trouve dans la voie initiale et un Σ dans la voie finale.

Nous considérons le problème à n voies, décrivant l'interaction entre deux systèmes ; nous supposons que tous les degrés de liberté internes ont été éliminés de façon à réduire le problème à une série d'équations couplées ne contenant que la coordonnée relative. L'étude du problème inverse comprend comme première étape la recherche des conditions d'existence d'un opérateur de transformation qui constitue l'objet de ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous ne considérons que les opérateurs du type de Marchenko essentiellement pour trois raisons.

La première raison est d'ordre pratique : comme le montrent les chapitres V et VII, la méthode que nous utilisons (méthode de Riemann et approximations successives) ne nous permet pas d'obtenir des conditions d'existence et une borne pour le noyau du type de Gel'fand dans le cas le plus général.

L'étude comparative des théories de Gel'fand et de Marchenko, faite au chapitre V, montre cependant que la méthode de Gel'fand est plus générale que la méthode de Marchenko lorsque le potentiel de référence est non nul : les conditions à imposer au potentiel perturbatif sont plus fortes dans le cas de Marchenko. De façon équivalente, nous verrons au chapitre IX que la méthode de Marchenko impose plus de conditions sur les données de la diffusion que ne le fait la méthode de Gel'fand. Dans ces conditions, il serait logique d'étendre la méthode de Gel'fand plutôt que la méthode de Marchenko. Cet argument se justifie lorsqu'il s'agit d'un problème à une voie.

La généralisation de la théorie de Gel'fand pour des voies couplées à moment angulaire L nul a été réalisée par Cox [COX 66], bien que Cox n'ait pas recherché des bornes et des conditions d'existence pour le noyau de l'opérateur de transformation. Contrairement à l'équation généralisée ($L \neq 0$) du type de Marchenko que nous démontrerons au chapitre IX, l'équation obtenue par Cox nécessite des données de départ qui ne sont pas accessibles expérimentalement.

La troisième justification de notre choix est que la théorie développée par Agranovich et Marchenko [AGR 63] est plus complète; dans le cas où le potentiel de référence est nul, les conditions nécessaires et suffisantes à imposer aux données de la diffusion ont été trouvées et une étude de la stabilité du problème inverse a été faite par Lundina et Marchenko [MAR 68, LUN 69]. Il n'existe pas d'étude correspondante dans le cas de la théorie de Gel'fand. Il nous semble d'ailleurs évident que le fait de réduire la classe des potentiels accessibles par la méthode inverse, assure une plus grande stabilité à la méthode.

Au paragraphe 2, nous introduisons les équations couplées et les différents types de solutions qui seront considérées dans la suite. Nous étudions de façon plus approfondie le comportement au voisinage de l'origine de la solution "régulière". Les équations aux dérivées partielles couplées vérifiées par les opérateurs de transformation sont obtenues au paragraphe 3 et la fonction de Riemann correspondante est étudiée au paragraphe 4. Au paragraphe 5, nous déduisons une borne pour l'opérateur de transformation de Marchenko et ses dérivées. Au paragraphe 6, une borne est obtenue pour la solution de Jost non perturbée; elle permet de justifier la convergence de l'intégrale qui provient de l'application de l'opérateur de transformation à la solution de Jost non perturbée. Au paragraphe 7, l'analyticité de la solution de Jost est obtenue. Les conclusions de ce chapitre sont tirées au paragraphe 8.

§ 2. PROBLEME DE LA DIFFUSION A VOIES COUPLEES

A. Notations

Nous considérons deux systèmes L_0 et L_1 de n équations différentielles couplées, définies par les équations :

$$L_0(x)\phi_0(\Lambda, x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} I + \Lambda^2 - U_0(x) \right] \phi_0(\Lambda, x) \quad (\text{VI.2.1})$$

et

$$L_1(x)\phi_1(\Lambda, x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} I + \Lambda^2 - U_0(x) - U(x) \right] \phi_1(\Lambda, x) \quad (\text{VI.2.2})$$

où $\phi_0, \phi_1, I, \Lambda, U_0, U$ représentent respectivement la matrice solution non perturbée, la matrice solution perturbée, la matrice unité, la matrice diagonale contenant les énergies des différentes voies, le potentiel matriciel non perturbé et le potentiel perturbé. Le potentiel de référence $U_0(x)$ est diagonal et contient les singularités habituellement rencontrées en physique nucléaire que sont le potentiel de Coulomb et le potentiel centrifuge tandis que le potentiel perturbatif peut être complexe non hermitien. Nous avons les relations :

$$U_0(x) = \frac{L(L+1)}{x^2} + \frac{\alpha}{x} \quad (\text{VI.2.3})$$

$$U_1 = U_0 + U \quad (\text{VI.2.4})$$

$$L_{ij} = l_i \delta_{ij} \quad (\text{VI.2.5})$$

$$l_{\max} = \sup_i l_i \quad (\text{VI.2.6})$$

$$l_{\min} = \inf_i l_i \quad (\text{VI.2.7})$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_i \delta_{ij} \quad (\text{VI.2.8})$$

$$I_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{VI.2.9})$$

$$\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (\text{VI.2.10})$$

$$\lambda_i^2 = k^2 - k_i^2 \quad (\text{VI.2.11})$$

où k_i^2 est l'énergie de seuil de la voie i et k^2 l'énergie totale (nous supposons que $k_1 = 0$)

$$U_{ij} = V_{ij} + iW_{ij} \quad (\text{VI.2.12})$$

Le système ne possède pas nécessairement la symétrie hermitienne, c'est-à-dire que $V_{ij}^* \neq V_{ji}$. Nous utiliserons les signes $*$, T , \dagger pour désigner le conjugué, la transposée et le conjugué hermitien. L'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L_n^2(0, \infty)$ est l'espace des fonctions vecteurs ψ telles que $\sum_{j=1}^n \int_0^\infty |\psi_j(x)|^2 dx < \infty$. La norme d'une matrice A , notée $\|A\|$, sera définie

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|.$$

Cette norme possède bien toutes les propriétés qu'une norme doit posséder ; nous désignerons par $|A|$ la matrice qui possède les éléments $|A|_{ij} = |A_{ij}|$.

Comme dans le cas scalaire, nous définissons une solution "régulière" et deux solutions irrégulières de Jost. Un système de n équations différentielles du second ordre, possède $2n$ solutions vecteurs linéairement indépendantes. Lorsque nous considérons les solutions qui correspondent au spectre continu $k^2 \in [0, \infty)$, nous préférons définir des solutions matricielles $n \times n$ dont chaque colonne est une solution du système correspondant à différentes conditions aux limites. Dans ce cas, il existe deux solutions matricielles linéairement indépendantes. Pour chaque valeur propre du spectre discret, il peut exister r vecteurs colonnes ψ_i , solutions linéairement indépendantes et de carré intégrable ($\psi_i \in L_n^2(0, \infty)$ $1 \leq i \leq r \leq n$). Nous pouvons aussi représenter la solution de l'état lié par une matrice $n \times n$ mais la matrice G est généralement singulière ($\det G = 0$). Nous appellerons le nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants (= le rang de la matrice G), la dégénérescence de l'état lié.

B. Solution "régulière"

La solution matricielle régulière est définie par l'équation intégrale :

$$G_1(\lambda, x) = G_0(\lambda, x) + \int_0^x g_0(\lambda, x, y) U(y) G_1(\lambda, y) dy \quad (\text{VI.2.13})$$

où G_0 et g_0 représentent les matrices diagonales, solution régulière et fonction de Green, non perturbées :

$$\begin{aligned}
 G_0(\lambda, x)_{ij} &= \delta_{ij} \phi_0^{(i)}(\lambda_i, x) \\
 &= \delta_{ij} \frac{1}{(\pm 2i\lambda_i)^{\ell_i+1} (2\ell_i+1)!!} M_{\pm \frac{i\alpha_i}{2\lambda_i}, \ell_i+1/2}(\pm 2i\lambda_i, x).
 \end{aligned}
 \tag{VI.2.14}$$

D'autres expressions utiles pour $\phi_0^{(i)}(\lambda_i, x)$ ont été données au chapitre V, §6. La fonction de Green possède les éléments :

$$\begin{aligned}
 [g_0(\lambda, x, y)]_{ij} &= \frac{\delta_{ij}}{\text{Wr}[\phi_0^{(i)}(\lambda_i, x), f_0^{(i)}(\lambda_i, x)]} \\
 &= [\phi_0^{(i)}(\lambda_i, x) f_0^{(i)}(\lambda_i, y) - \phi_0^{(i)}(\lambda_i, y) f_0^{(i)}(\lambda_i, x)],
 \end{aligned}
 \tag{VI.2.15}$$

où $f_0^{(i)}(\lambda_i, x)$ représente la solution de Jost pour la i ème équation non perturbée et est définie au chapitre VI, §6. L'intégrale qui intervient dans la définition de G_1 peut parfois diverger si les éléments non diagonaux de U ne s'annulent pas suffisamment rapidement pour x tendant vers zéro (si par exemple $\lim_{x \rightarrow 0} x^{|\ell_i - \ell_j + 1|} U_{ij}(x) \neq 0$). Il existe cependant toujours une façon de réécrire l'équation intégrale qui permet d'éviter cette divergence (voir [NEW 66], p. 464). Il suffit généralement d'ajouter au terme non homogène de l'équation intégrale, un multiple (judicieusement choisi et dépendant de V) de la solution non perturbée. Comme la méthode de régularisation dépend du cas particulier considéré, il est impossible d'écrire l'équation sous une forme à la fois générale et non divergente. Par la suite, nous conserverons la forme de l'équation intégrale ci-dessus en supposant que les manipulations de régularisation ont été effectuées si c'est nécessaire.

Nous étudions à présent le comportement de la solution régulière au voisinage de l'origine et nous montrerons que le terme régulier ne s'applique qu'aux éléments diagonaux. Nous supposons qu'au voisinage de l'origine nous avons la relation suivante :

$$-\Lambda^2 + U_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n
 \tag{VI.2.16}$$

pour $|x| < |x_0| \neq 0$.

Un tel comportement est typique du potentiel de Coulomb ou d'un potentiel de Yukawa. Dans le cas non couplé, le comportement à l'origine des solutions est déterminé par le seul potentiel centrifuge. Dans le cas couplé, le problème devient plus compliqué. Nous essayons tout d'abord d'appliquer la méthode habituelle de Fuchs au cas de deux équations couplées. Nous considérons une solution vecteur $\Phi(\Lambda, x)$ et nous posons :

$$\Phi(\Lambda, x) = \begin{pmatrix} x^{\rho_1} & 0 \\ 0 & x^{\rho_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(1)} x^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(2)} x^j \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.17})$$

où nous avons choisi ρ_1 et ρ_2 de façon à ce que $a_0^{(1)}$ et $a_0^{(2)}$ soient non nuls. En fait, si ce choix n'est pas possible, cela signifierait soit que $a_0^{(i)} = 0$ et que ϕ_i est identiquement nulle, soit que ϕ_i n'est pas développable en série de puissance (peut-être parce qu'il a un comportement logarithmique comme le suggère Newton page 463 dans [NEW 66]). En effectuant le remplacement du développement de la solution dans le système différentiel, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_1 + j)(\rho_1 + j - 1) a_j^{(1)} x^{\rho_1 + j - 2} \\ \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_2 + j)(\rho_2 + j - 1) a_j^{(2)} x^{\rho_2 + j - 2} \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\rho_1(\rho_1 + 1)}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_2(\rho_2 + 1)}{x^2} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell}^{(1,1)} x^{\ell} & \frac{1}{x} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell}^{(1,2)} x^{\ell} \\ \frac{1}{x} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell}^{(2,1)} x^{\ell} & \frac{1}{x} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell}^{(2,2)} x^{\ell} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} x^{\rho_1 + m} \\ \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} x^{\rho_2 + m} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{VI.2.18})$$

Etant donné la symétrie du problème, nous pouvons toujours faire l'hypothèse de travail $\rho_2 \leq \rho_1$. Egalant les termes du même ordre en x nous trouvons les résultats suivants : si $\rho_1 = \rho_2$,

nous retrouvons le cas habituel avec

$$\rho_1 = (\ell_1 + 1, -\ell_1) \quad (\text{VI.2.19})$$

et

$$\rho_2 = (\ell_2 + 1, -\ell_2) \quad (\ell_1 = \ell_2) \quad (\text{VI.2.20})$$

si $\rho_2 < \rho_1 \leq \rho_2 + 1$, nous obtenons :

$$\rho_1 (\rho_1 - 1) a_0^{(1)} - \ell_1 (\ell_1 + 1) a_0^{(1)} + A_0^{(1,2)} a_0^{(2)} = 0 \quad (\text{VI.2.21})$$

$$[\rho_2 (\rho_2 - 1) - \ell_2 (\ell_2 + 1)] a_0^{(2)} = 0 \quad (\text{VI.2.22})$$

c'est-à-dire

$$\rho_2 = (\ell_2 + 1, -\ell_2). \quad (\text{VI.2.23})$$

Il faut que $A_0^{(1,2)}$ soit tel que

$$\rho_2 < \rho_1 = \left[\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \left[A_0^{(1,2)} \frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}} - \ell_1 (\ell_1 + 1) \right]}}{2} \right] \lesssim 1 + \rho_2 \quad (\text{VI.2.24})$$

si le couplage V_{12} est moins singulier que $\frac{1}{x}$ à l'origine ($A_0^{12} = 0$), nous obtenons aussi $\rho_1 = (\ell_1 + 1, -\ell_1)$. Nous trouvons la relation :

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{\rho_1 + j - 2} \{ [(\rho_1 + j)(\rho_1 + j - 1) - \ell_1 (\ell_1 + 1)] a_j^{(1)} + \sum_{\ell} A_{\ell}^{(1,1)} a_{j-1-\ell}^{(1)} + \sum_{\ell} A_{\ell}^{(1,2)} a_{j-\ell}^{(2)} \} = 0. \quad (\text{VI.2.25})$$

Nous n'avons pas mis de limites à la sommation sur ℓ étant entendu que les constantes ayant un indice négatif sont nulles.

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{\rho_2 + j - 2} \{ [(\rho_2 + j)(\rho_2 + j - 1) - \ell_2 (\ell_2 + 1)] a_j^{(2)} + \sum_{\ell=0} A_{\ell}^{(2,1)} a_{j-2-\ell}^{(1)} + \sum_{\ell=0} A_{\ell}^{(2,2)} a_{j-1-\ell}^{(2)} \} = 0 \quad (\text{VI.2.26})$$

Ces équations nous permettent de construire $a_j^{(1)}$ et $a_j^{(2)}$ pour $j \geq 1$ et $a_0^{(1)}$ et $a_0^{(2)}$ donnés.

Si $\rho_1 > \rho_2 + 1$, les deux équations s'écrivent de façon générale :

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{2^{-1+j}} \{[(1+\rho_2+j)(\rho_2+j)-\ell_1(\ell_1+1)]a_{1+\rho_2-\rho_1+j}^{(1)} + \sum_{\ell} A_{\ell}^{(1,1)} a_{\rho_2-\rho_1+j-\ell}^{(1)} + \sum_{\ell} A_{\ell}^{(1,2)} a_{j-\ell}^{(2)}\} = 0 \quad (\text{VI.2.27})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{2^{-2+j}} \{[(\rho_2+j)(\rho_2+j-1)-\ell_2(\ell_2+1)]a_j^{(2)} + \sum_{\ell} A_{\ell}^{(2,1)} a_{\rho_2-\rho_1-1+j-\ell}^{(1)} + \sum_{\ell} A_{\ell}^{(2,2)} a_{j-\ell-1}^{(2)}\} = 0 \quad (\text{VI.2.28})$$

c'est-à-dire

$$A_0^{(1,2)} a_0^{(2)} = 0 \quad (\text{VI.2.29})$$

$$[(\rho_2+j)(\rho_2+j-1)-\ell_2(\ell_2+1)]a_0^{(2)} = 0. \quad (\text{VI.2.30})$$

Si $A_j^{(1,2)} = 0$ pour $(j=0, \dots, \ell_2 - \ell_1 - 1)$ alors la solution est régulière à l'origine. Si $A_0^{(1,2)} \neq 0$, nous trouvons qu'il faut imposer $a_0^{(2)} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse que ρ_2 est la plus petite puissance du développement en série de ϕ_2 . Nous avons deux possibilités : la première qui sera considérée plus en détail par après, suppose que ϕ_2 n'est pas développable en série (singularité logarithmique par exemple). La seconde possibilité est que l'hypothèse $\rho_1 > \rho_2 + 1$ n'est pas valable.

Cette étude préliminaire semble indiquer que si le couplage se comporte en $\frac{1}{x}$ à l'origine, nous aurons la possibilité d'avoir une solution qui n'est pas développable à l'origine lorsque $|\ell_2 - \ell_1| \geq 2$.

Nous allons à présent étendre la méthode de Frobenius au cas matriciel.

Cette méthode de Frobenius est utilisée dans le cas scalaire lorsque la différence des racines de l'équation indiciale est entière et que par conséquent la méthode de Fuchs ne marche pas. Si le système de n équations différentielles d'ordre 2 peut se ramener à une seule équation différentielle d'ordre $2n$, on peut toujours appliquer à cette dernière la méthode de Frobenius décrite dans [INC 26], page 396 (cependant, si une équation différentielle d'ordre n peut toujours se ramener à n équations différentielles du premier ordre et cela

d'une infinité de façons, l'inverse n'est pas toujours vrai). On trouve alors dans ce cas (peu probable) que la solution peut contenir les termes $[\ln x]^i$ ($i = 1, n-1$). En fait, nous verrons dans la suite que l'exposant i le plus élevé de $(\ln x)^i$ dépend du maximum de la différence entre deux moments angulaires. Nous supposons qu'au voisinage de l'origine, nous avons le développement suivant

$$x [U_1^{-\Lambda^2}] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad \text{pour } |x| < |x_0| \neq 0 \quad (\text{VI.2.31})$$

où les A_n sont des matrices constantes.

Nous définissons la fonction matricielle $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \psi_{\alpha}(y) x^{L+(\alpha+1+y)I} \quad (\text{VI.2.32})$$

où $\psi_{\alpha}(y)$ est une matrice définie par récurrence à partir de l'équation matricielle :

$$\psi_{\alpha}(y) [L+I(y+\alpha)] [L+I(1+y+\alpha)] - L(L+I) \psi_{\alpha}(y) = \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} A_{\mu} \psi_{\alpha-\mu-1}(y) \quad \alpha \geq 1 \quad (\text{VI.2.33})$$

où $\psi_0(y)$ sera précisée plus tard.

Ce système (VI.2.33) de $n \times n$ équations à $n \times n$ inconnues $[\psi_{\alpha}]_{ij}$ possède la solution évidente suivante :

$$[\psi_{\alpha}]_{ij} = \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} [A_{\mu} \psi_{\alpha-\mu-1}(y)]_{ij} \frac{1}{[\ell_j + y + \alpha] [(\ell_j + 1 + y + \alpha) - \ell_i (\ell_i + 1)]} \quad (\text{VI.2.34})$$

qui est finie pour $y + \alpha \neq \begin{cases} -(\ell_j + \ell_i + 1) \\ \ell_i - \ell_j \end{cases}$; par conséquent, la solution sera finie pour y non entier et α entier. Cependant, nous devons pouvoir définir la relation de récurrence pour $y=0$. Dans ce cas, si $y=0$ et si $\alpha = \ell_i - \ell_j$, il faudra nécessairement choisir $\psi_0(y)$ de façon telle que

$$\sum_{\mu=0}^{\alpha-1} [A_{\mu} \psi_{\alpha-\mu-1}(y)]_{ij} = 0 \quad \text{pour } y=0 \quad \text{et } \alpha = \ell_i - \ell_j$$

ou $\sum_{\mu=0}^{\ell_i - \ell_j - 1} [A_{\mu} \psi_{(\ell_i - \ell_j - \mu - 1)}(0)]_{ij} = 0$.

Nous évaluons à présent l'expression suivante :

$$\{x^2 \frac{d^2}{dx^2} - L(L+1) - x^2[V-\Lambda^2]\} \Delta(x, y) =$$

$$\{x^2 \frac{d^2}{dx^2} - L(L+1) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1}\} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \psi_{\alpha}(y) x^{\alpha+L+1+y}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \{\psi_{\alpha}(y) [(L+\alpha+1+y)(L+\alpha+y)] x^{\alpha+L+1+y}$$

$$- L(L+1)\psi_{\alpha}(y)x^{\alpha+L+1+y} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_{\alpha}(y)x^{\alpha+L+1+y+n+1}\}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} A_{\mu} \psi_{\alpha-\mu-1}(y) x^{\alpha+L+1+y} - \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_{\alpha}(y) x^{\alpha+L+1+y+n+1}\}$$

$$+ [\psi_0(y)(L+1+y)(L+y) - L(L+1)\psi_0(y)] x^{L+1+y}. \quad (\text{VI.2.35})$$

Nous obtenons par conséquent, quel que soit le choix de $\psi_0(y)$, la relation suivante :

$$\{x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - L(L+1) - x[V-\Lambda^2]\} \Delta(x, y) = [\psi_0(y)(L+y)(L+y+1) - L(L+1)\psi_0(y)] x^{L+1+y}.$$

(VI.2.36)

En outre, en imposant que $\psi_0(y)$ et L commutent, nous pouvons écrire le second membre de l'équation (VI.2.36) sous la forme $\psi_0(y) [y^2 + y(2L+1)]$. Nous prenons le choix particulier suivant :

$$\psi_0(y) = y^N \quad (\text{VI.2.37})$$

où N est un entier quelconque.

Cependant, pour que le processus de récurrence définisse des fonctions $\psi_{\alpha}(y)$ finies en $y=0$, il faudra choisir une valeur de N suffisamment grande.

Nous avons alors les propriétés suivantes :

$$\frac{d^k}{dy^k} \psi_0(0) = 0 \quad k = 0, N-1 \quad (\text{VI.2.38})$$

et

$$\frac{d^N}{dy^N} \psi_0(0) = N!. \quad (\text{VI.2.39})$$

Nous calculons à présent la dérivée Nième des deux membres de l'équation (VI.2.36) et nous trouvons :

$$\left\{x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - L(L+1) - x[V-\Lambda^2]\right\} \frac{\partial^N}{\partial y^N} \Delta(x,y) = \frac{\partial^N}{\partial y^N} [\psi_0(y)y(2L+1+y)]. \quad (\text{VI.2.40})$$

Nous constatons que le second membre s'annule pour $y=0$ et par conséquent $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^N}{\partial y^N} \Delta(x,y)$ est solution du système d'équations différentielles de départ quel que soit N . Cette solution, pour un N donné, s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^N}{\partial y^N} \Delta(x,0) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{j=0}^N C_N^j \frac{d^j}{dy^j} \psi_{\alpha}(0) [\ln x]^{(N-j)} x^{L+(\alpha+1)I} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{j=0}^N C_N^j \frac{d^j}{dy^j} \psi_{\alpha}(0) [\ln x]^{(N-j)} x^{L+(\alpha+1)I} + N! x^{L+I}. \end{aligned} \quad (\text{VI.2.41})$$

Nous voyons que la solution obtenue est bien la solution "régulière" ($\alpha > 0$) et qu'elle peut contenir des puissances de $\ln x$. Il faudrait préciser la valeur de N qui donne la solution intéressante $\chi_N(x) = \frac{\partial^N}{\partial y^N} \Delta_N(x,0)$ du problème. La solution sera intéressante si elle nous fournit n vecteurs colonnes linéairement indépendants. Il doit donc exister une valeur de N pas trop petite, pour que le processus de récurrence marche en $y=0$ et qui soit telle que $\det \chi_N(x) \neq 0$. La valeur de N est difficile à préciser dans le cas tout à fait général car elle dépend des différents moments angulaires ℓ_i ($i = 1, n$) qui sont couplés et du potentiel de couplage. Nous pouvons cependant faire les constatations suivantes qui pour un cas particulier donné, nous fournissent une méthode de recherche de N : les $\psi_{\alpha}(y)$ sont des fonctions matricielles holomorphes en y ; $[\psi_0(y)]_{ii}$ possède un zéro d'ordre N en $y=0$ (les autres éléments $[\psi_0(y)]_{ij}$ ($i \neq j$) sont identiquement nuls).

De la relation de récurrence

$$\psi_1(y) [L+I(y+1)][L+I(2+y)] - L(L+I)\psi_1(y) = A_{00} \psi_0(y),$$

nous obtenons :

$$[\psi_1(y)]_{ij} = [A_{0ij} y^N] \frac{1}{(\ell_j + y + 1)(\ell_j + y + 2) - \ell_i(\ell_i + 1)}.$$

Le dénominateur possède un zéro simple en $y=0$, si $\ell_i = \ell_j + 1$; par conséquent les éléments $[\psi_1(y)]_{ij}$ ont un zéro d'ordre N au moins en $y=0$ si $\ell_i \neq \ell_j + 1$ et un zéro d'ordre $N-1$ au moins si $\ell_i = \ell_j + 1$. Seule la valeur minimum de l'ordre du zéro peut être donnée car il se peut que A_{0ij} soit

nul. Comme $\chi_N(x) = \sum_{j=0}^N \phi_j(x) [\ln x]^j x^{L+1}$ où $\phi_j(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} C_N^j \frac{d^{N-j}}{dy^{N-j}} \psi_\alpha(0) x^\alpha$, il peut apparaître des puissances de $\ln x$ si $\phi_j(x) \neq 0$ pour $1 \leq j \leq N$. Dans la somme (VI.2.41), ψ_1 peut au plus introduire un terme en $\ln x$ dans l'élément (i, j) de la matrice solution régulière si

$$[A_0]_{ij} \neq 0 \quad \text{et} \quad \ell_i = \ell_j + 1$$

$$[\psi_2(y)]_{ij} = \frac{\sum_{\ell} [A_0]_{i\ell} [\psi_1]_{\ell j} + [A_1]_{ij} [\psi_0]_{jj}}{(\ell_j + y + 2)(\ell_j + y + 3) - \ell_i(\ell_i + 1)}$$

$[\psi_2(y)]_{ij}$ possède donc un zéro d'ordre $N-1$ au moins si $\ell_i \neq \ell_j + 2$ et un zéro d'ordre $N-2$ au moins si $\ell_i = \ell_j + 2$; par conséquent, ψ_2 peut au plus introduire des termes en $\ln x$ et $(\ln x)^2$. Jusqu'à présent, nous n'avons pas encore précisé la valeur de N . N doit être suffisamment grand pour que tous les $\psi_\alpha(y)$ soient finis en $y=0$ ($\alpha=1, \infty$). En continuant le raisonnement précédent, nous trouvons que $[\psi_\alpha(y)]_{ij}$ a un zéro d'ordre $N-\alpha+1$ au moins si $\ell_i \neq \ell_j + \alpha$ ou un zéro d'ordre $N-\alpha$ au moins si $\ell_i = \ell_j + \alpha$. Ce raisonnement suppose en particulier que ℓ_i prend toutes les valeurs entières comprises entre ℓ_{\min} et ℓ_{\max} et que tous les $(A_\mu)_{ij}$ sont non nuls; si $\alpha_M = \ell_{\max} - \ell_{\min}$, pour $\alpha \geq \alpha_M$, les $\psi_\alpha(y)$ auront un zéro d'ordre $N-\alpha_M$ au moins; par conséquent, nous devons choisir N de façon telle que les ψ_α restent bornés, c'est-à-dire $N \geq \alpha_M$. D'autre part, comme $\frac{d^{N-j}}{dy^{N-j}} \psi_\alpha(0) = 0$ si $N-j > \alpha_M$, c'est-à-dire: $\phi_j(x) = 0$ si $j > \alpha_M$, par conséquent, le développement de la solution régulière peut contenir au plus les termes $(\ln x), (\ln x)^2, \dots, (\ln x)^{\alpha_M}$ dans les circonstances que nous avons envisagées. Par contre, si nous supposons qu'il y a conservation de la parité, les moments angulaires ℓ_i ont tous la même parité; par conséquent dans ce cas N vaut au plus $\frac{\alpha_M}{4}$. En effet, ψ_0 et ψ_1 ont un zéro d'ordre N car $\ell_i - \ell_j \neq 1$, ψ_2 et ψ_3 un zéro d'ordre $N-1$ au moins et ainsi de suite. L'exposant le plus élevé possible de $\ln x$ est dans ce cas $(\ell_{\max} - \ell_{\min})/4$. Dans les calculs numériques qui nécessitent la connaissance de la fonction et de sa dérivée première à l'origine, la condition aux limites $\lim_{x \rightarrow 0} [G(\lambda, x)]_{ij} = x^{\ell_i+1} \delta_{ij}$ est généralement appliquée, alors que nous venons de démontrer que cette condition pour la dérivée première n'est pas toujours compatible avec le problème considéré. Nous pensons que dans certains cas, cette façon de procéder peut conduire à des erreurs numériques et qu'une étude préliminaire semblable à celle que nous venons de développer et adaptée au cas considéré, serait nécessaire.

C. Solutions de Jost

Les solutions de Jost $F_{1\pm}(\lambda, x)$ sont définies par l'équation intégrale :

$$F_{1\pm}(\lambda, x) = F_{0\pm}(\lambda, x) - \int_x^{\infty} g_0(\lambda, x, x') V(x') F_1(\lambda, x') dx' \quad (\text{VI.2.42})$$

où $\text{Im } \lambda \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$

$$[F_{0\pm}(\lambda, x)]_{ij} = \delta_{ij} f_0^{(i)}(\lambda_i, x) \quad (\text{VI.2.43})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{0\pm}^{(i)}(\lambda_i, x) = e^{i[\pm \lambda_i x - \frac{i\alpha_i}{2\lambda_i} \ln(2\lambda_i x)]} \quad (\text{VI.2.44})$$

Pour que l'intégrale intervenant dans la définition (VI.2.42) de $F_{1\pm}$ converge, il faut que le potentiel V décroisse suffisamment rapidement à l'infini. On peut montrer que les conditions d'existence de $F_{1\pm}$ se ramènent aux conditions d'existence d'un noyau $K_M(x, y)$ du type de Marchenko et à l'existence de l'intégrale qui intervient dans la formule

$$F_1(\lambda, x) = F_0(\lambda, x) + \int_x^{\infty} K_M(x, y) F_0(\lambda, y) dy. \quad (\text{VI.2.45})$$

§ 3. EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES POUR LES ELEMENTS DE $K_M(x, y)$

L'opérateur de transformation $U_M = I + K_M$ est un opérateur matriciel, intégral, du type de Volterra et permet d'écrire la relation (VI.2.45). Par conséquent, l'opérateur de transformation doit vérifier l'équation opérationnelle

$$L_1 U = U L_0 \quad (\text{VI.3.1})$$

qui conduit au système d'équation aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m [L_1(x)]_{im} K_{m\ell}(x,y) = \sum_m [L_0^T(y)]_{m\ell} K_{im}(x,y) \quad (\text{VI.3.2}) \\ 2 \frac{d}{dx} K_{im}(x,x) = -V_{im}(x) \quad (\text{VI.3.3}) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} K_{im}(x,y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K_{im}(x,y) = 0. \quad (\text{VI.3.4}) \end{array} \right.$$

L'étude de l'existence d'un noyau K_M borné et de ses dérivées est simplifiée si nous étudions auparavant la fonction de Riemann associée au système (VI.3.2).

§ 4. BORNE SUPERIEURE POUR LA FONCTION DE RIEMANN

Bien qu'une représentation spectrale pour la fonction de Riemann ait été obtenue au chapitre III, nous n'avons pas pu obtenir une expression analytique pour la fonction de Riemann générale. Il existe cependant des formes analytiques simples r_{ij}^Δ et r_{ij}^0 correspondant respectivement aux cas $\ell_i = \alpha_i = 0$ $i = 1, n$ et $k_i = \alpha_i = 0$ $i = 1, n$:

$$r_{ij}^\Delta(x,y;s,u) = J_0(\sqrt{\Delta_{ij}^2} [(x-s)^2 - (y-u)^2]) \quad (\text{VI.4.1})$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro et $\Delta_{ij}^2 = k_i^2 - k_j^2$ et

$$r_{ij}^0(x,y;s,u) = P_{\ell_j}(1-2x_2) - 2x_1 \int_0^1 P_{\ell_j}(1-2x_2+2x_2 t) P'_{\ell_i}(1-2x_1 t) dt \quad (\text{VI.4.2})$$

où

$$x_1 = \frac{(\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)} \quad (\text{VI.4.3})$$

$$x_2 = \frac{(\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \quad (\text{VI.4.4})$$

et où P_{ℓ_j} représente la fonction de Legendre d'ordre ℓ_j . La fonction r_{ij}^0 sera utilisée pour évaluer la fonction de Riemann complète r_{ij} . L'expression pour r_{ij}^Δ permet de vérifier dans le cas limite $\ell_i = \alpha_i = 0$ ($i = 1, n$) la borne que nous obtiendrons pour r_{ij} . Nous recherchons tout d'abord une borne supérieure pour r_{ij}^0 dans le domaine \mathcal{D}_M de Marchenko où nous avons les inégalités :

$$0 \leq \xi_0 \leq \xi \leq \eta \leq \eta_0 < \infty. \quad (\text{VI.4.5})$$

Nous vérifions facilement que, d'après les définitions (VI.4.3 et 4)

$$x_1 < 0 \quad (\text{VI.4.6})$$

et

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\eta_0 \xi}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \leq \frac{\eta_0 \xi}{2\eta_0 \xi} \leq \frac{1}{2}$$

ou

$$0 \leq 1 - 2x_2 \leq 1. \quad (\text{VI.4.7})$$

Par une méthode similaire à celle utilisée au chapitre V, nous pouvons démontrer l'inégalité (voir [ROC 79a])

$$1 \leq 1 - 2x_1 = 1 + 2 \frac{(\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)} \leq \frac{2(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}. \quad (\text{VI.4.8})$$

Nous recherchons à présent une borne supérieure pour $|R_{ij}^0|$. Partant de sa représentation (VI.4.2), nous obtenons :

$$|R_{ij}^0| \leq |P_{\ell_j}(1 - 2x_2)| + \left| \int_0^1 P_{\ell_j}(1 - 2x_2 + 2x_2 t) d P_{\ell_i}(1 - 2x_1 t) \right|. \quad (\text{VI.4.9})$$

Comme

$$0 \leq 1 - 2x_2(1-t) \leq 1 \quad (\text{VI.4.10})$$

et

$$1 \leq 1 - 2x_1 t \leq 2 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \quad (\text{VI.4.11})$$

pour $0 \leq t \leq 1$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} |R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| &\leq 1 + |P_{\ell_i}(1 - 2x_1) - 1| \\ &\leq P_{\ell_i}(1 - 2x_1) \leq \left(4 \frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \right)^{\ell_i}, \end{aligned} \quad (\text{VI.4.12})$$

où nous avons utilisé la propriété des polynômes de Legendre :

$$1 \leq P_{\ell}(x) \leq (2x)^{\ell}$$

pour $x > 1$ et ℓ réel positif.

Cette borne pour $|R_{ij}^0|$ permet d'évaluer une borne pour la fonction de Riemann complète R_{ij} à partir de la formule de composition des fonctions de Riemann :

$$R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 R_{ij}^{(0)}(\eta, \xi; \eta_1, \xi_1) \\ \{k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_1} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_1}\} R_{ij}(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0). \quad (\text{VI.4.13})$$

Définissant :

$$\tilde{R}_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \left(\frac{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}{4(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)} \right)^{\lambda_i}, \quad (\text{VI.4.14})$$

$$\tilde{R}_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \left(\frac{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)}{4(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)} \right)^{\lambda_i} \quad (\text{VI.4.15})$$

$$\mu_{ij}^2 = 4^{\lambda_i} |k_i^2 - k_j^2| \quad (\text{VI.4.16})$$

et

$$a_{ij} = 4^{\lambda_i} \max(\alpha_i, \alpha_j), \quad (\text{VI.4.17})$$

l'équation (VI.4.13) peut s'écrire :

$$\tilde{R}_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \tilde{R}_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \tilde{R}_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_1, \xi_1) \\ 4^{\lambda_i} \left\{ (k_i^2 - k_j^2) + \left(\frac{-\alpha_i}{\eta_1 - \xi_1} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_1} \right) \right\} \tilde{R}_{ij}(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0), \quad (\text{VI.4.18})$$

où

$$|\tilde{R}_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| \leq 1. \quad (\text{VI.4.19})$$

Si nous appliquons la méthode des approximations successives au module de l'équation (VI.4.18), nous obtenons :

$$|\tilde{R}_{ij}^{(0)}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| \leq |\tilde{R}_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| \leq 1. \quad (\text{VI.4.20})$$

$$\begin{aligned}
 |\hat{R}_{ij}^{(p)}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| &= \left| \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 \hat{R}_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_1, \xi_1) \right. \\
 & 4^{\ell i} (k_i^2 - k_j^2 + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_1} - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_1}) \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi_2 \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_2 \hat{R}_{ij}^0(\eta_1, \xi_1; \eta_2, \xi_2) \\
 & 4^{\ell i} (k_i^2 - k_j^2 + \frac{\alpha_j}{\eta_2 + \xi_2} - \frac{\alpha_i}{\eta_2 - \xi_2}) \dots \int_{\xi_0}^{\xi_{p-1}} d\xi_p \int_{\eta_{p-1}}^{\eta_0} d\eta_p \\
 & \left. \hat{R}_{ij}^0(\eta_{p-1}, \xi_{p-1}; \eta_p, \xi_p) 4^{\ell i} (k_i^2 - k_j^2 + \frac{\alpha_j}{\eta_p + \xi_p} - \frac{\alpha_i}{\eta_p - \xi_p}) \right.
 \end{aligned}$$

$$|\hat{R}_{ij}^{(0)}(\eta_p, \xi_p; \eta_0, \xi_0)|$$

$$\leq [\mu_{ij}^2(\eta_0 - \xi_0) + a_{ij}]^p \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_1}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi_1 \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_2}} \dots$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi_{p-1}} d\xi_p \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_p}} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 \frac{1}{\sqrt{\eta_1 - \xi}} \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_2 \frac{1}{\sqrt{\eta_2 - \xi}} \dots \int_{\eta_{p-1}}^{\eta_0} d\eta_p \frac{1}{\sqrt{\eta_p - \xi}}$$

(notons que pour $p=0$, $\xi_p = \xi$ et $\eta_p = \eta$).

$$|\hat{R}_{ij}^{(p)}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| \leq [\mu_{ij}^2(\eta_0 - \xi_0) + a_{ij}]^p$$

$$\frac{\left(\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi_1}} \right)^p \left(\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 \frac{1}{\sqrt{\eta_1 - \xi}} \right)^p}{p! p!}$$

(VI.4.21)

Rappelant que la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro est définie par les relations :

$$I_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^p}{(p!)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \theta} d\theta \leq e^z ,$$

nous déduisons aisément les bornes suivantes :

$$|R_{ij}(n, \xi; n_0, \xi_0)| \leq 4^{\ell_i} \left[\frac{(n+\xi)(n_0-\xi_0)}{(n-\xi)(n_0+\xi_0)} \right]^{\ell_i}$$

$$I_0 \left(2\sqrt{[\mu_{ij}^2(n_0-\xi_0)+a]} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \frac{1}{\sqrt{n-\xi_1}} \int_n^{n_0} d\eta_1 \frac{1}{\sqrt{\eta_1-\xi}} \right)$$

$$\leq 4^{\ell_i} \left[\frac{(n+\xi)(n_0-\xi_0)}{(n-\xi)(n_0+\xi_0)} \right]^{\ell_i} \exp [4\sqrt{[\mu_{ij}^2(n_0-\xi_0)+a_{ij}]} (n_0-\xi_0)] \quad (\text{VI.4.22})$$

La même méthode, appliquée au cas où $\alpha_i = \alpha_j = 0$, aurait conduit à :

$$|R_{ij}(n, \xi; n_0, \xi_0)| \leq 4^{\ell_i} \left[\frac{(n+\xi)(n_0-\xi_0)}{(n-\xi)(n_0+\xi_0)} \right]^{\ell_i} \exp [2\mu_{ij}(n_0-\xi_0)] \quad (\text{VI.4.23})$$

qui dans le cas $\ell_i = 0$ est en accord avec l'expression (VI.4.1) pour r^Δ . Nous constatons qu'en faisant $a_{ij} = 0$ dans (VI.4.22), nous retrouvons (VI.4.23) où l'argument de l'exponentielle est multiplié par 2 ; ceci est dû aux approximations que nous avons faites pour rendre l'intégrant séparable dans les équations (VI.4.20 et 21). Nous pouvons effectuer d'autres approximations à l'estimation (VI.4.22) : i) comme $n\xi_0 \leq n_0\xi$, nous obtenons :

$$\frac{(n+\xi)(n_0-\xi_0)}{(n-\xi)(n_0+\xi_0)} \geq 1$$

et

$$|R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| \leq 4^{\lambda_i} \left[\frac{(\eta + \xi)(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta_0 + \xi_0)(\eta - \xi)} \right]^{\lambda_{\max}} \exp \{4\sqrt{[\mu_i^2(\eta_0 - \xi_0) + a_i]}(\eta_0 - \xi_0)\} \quad (\text{VI.4.24})$$

où $\mu_i = \max_j \mu_{ij}$ et $a_i = \max_j a_{ij}$.

ii) Puisque $\frac{\eta + \xi}{\eta_0 + \xi_0} \leq \frac{\eta + \xi}{\eta} \leq \frac{\eta + \xi}{\eta} \leq 2$, nous pouvons également écrire

$$|R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| \leq 8^{\lambda_i} \left(\frac{\eta_0 - \xi_0}{\eta_0 + \xi_0} \right)^{\lambda_i} \exp \{4\sqrt{[\mu_i^2(\eta_0 - \xi_0) + a_i]}(\eta_0 - \xi_0)\}. \quad (\text{VI.4.25})$$

Cette dernière inégalité a été obtenue par Coz et Rochus [COZ 76] par une autre méthode. Nous verrons par la suite qu'il est préférable d'utiliser l'inégalité (VI.4.24) pour obtenir une estimation de l'opérateur de transformation.

§ 5. BORNE POUR L'OPERATEUR DE TRANSFORMATION DU TYPE DE MARCHENKO ET SES DERIVEES

En fonction des variables caractéristiques, l'équation intégrale pour l'opérateur de translation s'écrit :

$$\begin{aligned} K_{ij}(\eta, \xi) &= \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, 0) U_{ij}(\eta_0) \\ &+ \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \sum_{\ell} U_{i\ell}(\eta_0 - \xi_0) K_{\ell j}(\eta_0, \xi_0) \\ &+ \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, 0) K_{ij}(\eta_0, 0) + \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} d\xi_0 K_{ij}(\eta_0, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0). \end{aligned} \quad (\text{VI.5.1})$$

Nous supposons que $K_{ij}(\eta_0, \xi_0)$ décroît suffisamment rapidement pour $\eta_0 \rightarrow \infty$ de façon à pouvoir négliger les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (VI.5.1). Cette hypothèse sera vérifiée plus tard.

Si nous introduisons dans l'équation (VI.5.1) les matrices \tilde{R} , \tilde{K} et \tilde{U} , dont les éléments sont définis par les relations suivantes :

$$R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \tilde{R}_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \left[4 \frac{(\eta + \xi)}{(\eta_0 + \xi_0)} \frac{(\eta_0 - \xi_0)}{(\eta - \xi)} \right]^{\lambda_{\max}} \exp [4\sqrt{[\mu^2(\eta_0 - \xi_0) + a]}(\eta_0 - \xi_0)], \quad (\text{VI.5.2})$$

$$K_{ij}(\eta, \xi) = \tilde{K}_{ij}(\eta, \xi) \left(\frac{\eta + \xi}{\eta - \xi} \right)^{\ell \max} \quad (\text{VI.5.3})$$

$$\tilde{U}_{ij}(\eta) = 4^{\ell \max} \exp [4\sqrt{[\mu^2(\eta_0 - \xi_0) + a](\eta_0 - \xi_0)}] U_{ij}(\eta) \quad (\text{VI.5.4})$$

où

$$\mu = \max(\mu_{ij}) = 2^{\ell \max} \sqrt{k_{\max}^2 - k_{\min}^2} \quad (\text{VI.5.5})$$

et

$$a = \max_{i,j} (a_{ij}) = 4^{\ell \max} \max_{i=1, n} |\alpha_i|, \quad (\text{VI.5.6})$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ij}(\eta, \xi) &= \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \tilde{R}_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, 0) \tilde{U}_{ij}(\eta_0) \\ &+ \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \tilde{R}_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \sum_{\ell} \tilde{U}_{i\ell}(\eta_0 - \xi_0) \tilde{K}_{\ell j}(\eta_0, \xi_0). \end{aligned} \quad (\text{VI.5.7})$$

Les approximations successives appliquées aux modules des deux membres de l'équation (VI.5.7) donnent :

$$|\tilde{K}_{ij}^{(p)}(\eta, \xi)| \leq \frac{1}{2n} \frac{\tilde{\sigma}^0(\eta)}{p!} \left\{ \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 ||\tilde{U}(\eta_0 - \xi_0)|| \right\}^p \quad (\text{VI.5.8})$$

et finalement :

$$||\tilde{K}(\eta, \xi)|| \leq \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^0(\eta) \exp \left[\int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 ||\tilde{U}(\eta_0 - \xi_0)|| \right]. \quad (\text{VI.5.9})$$

Retournant aux variables physiques, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 ||\tilde{U}(\eta_0 - \xi_0)|| &= \frac{1}{2} \int_x^{(x+y)/2} ds \int_{x+y-s}^{y-x+s} du ||\tilde{U}(s)|| \\ &+ \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} ds \int_s^{y-x+s} du ||\tilde{U}(s)|| \\ &= \int_x^{(x+y)/2} ds ||\tilde{U}(s)|| (s-x) + \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} ds ||\tilde{U}(s)|| (y-x) \end{aligned}$$

$$\leq \int_x^{\infty} ||\tilde{U}(s)|| s ds = \tilde{\sigma}^1(x) \quad \text{et aussi} \leq \frac{1}{2} (y-x) \tilde{\sigma}^0(x). \quad (\text{VI.5.10})$$

nous pouvons donc écrire :

$$||K(x,y)|| \leq \frac{n}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\ell_{\max}} \hat{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[\hat{\sigma}^0(x) \left(\frac{y-x}{2}\right) \right] \quad (\text{VI.5.11})$$

et

$$||K(x,y)|| \leq \frac{n}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\ell_{\max}} \hat{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[\hat{\sigma}^1(x) \right] \quad (\text{VI.5.12})$$

$$\leq \frac{2^{\ell_{\max}-1} n}{x^{\ell_{\max}}} \hat{\sigma}^{\ell_{\max}}\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[\hat{\sigma}^1(x) \right] \quad (\text{VI.5.13})$$

si $\hat{\sigma}^{\ell_{\max}}$ existe et où

$$\hat{\sigma}^{\ell}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \text{Sup}_i \sum_{j=1}^n \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} \eta_0^{\ell} 4^{\ell_i} |U_{ij}(\eta_0)| \exp \left[4 \sqrt{\mu_i^2 (\eta_0 - \xi_0)^2 + a_i (\eta_0 - \xi_0)} \right] d\eta_0 \quad (\text{VI.5.14})$$

$$\mu_i^2 = \max_j (4^{\ell_i} |k_i^2 - k_j^2|) \quad (\text{VI.5.15})$$

$$a_i = 2^{(2\ell_i+1)} \max_j (|\alpha_j|). \quad (\text{VI.5.16})$$

La même méthode utilisant la deuxième estimation (VI.4.25) nous donne l'estimation suivante :

$$|K_{ij}(x,y)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\ell_i} \hat{\sigma}^{\ell_i}\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[\hat{\sigma}^{(\ell_i - \ell_j + 1)}(x) \right]. \quad (\text{VI.5.17})$$

Cependant, il n'est pas évident à partir de cette borne qu'il existe une limite finie pour $K_{ij}(x,y)$ lorsque x tend vers zéro. Si par contre nous avons utilisé l'estimation (VI.4.23) sans approximation, la méthode des approximations successives aurait donné :

$$|K_{ij}(x,y)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\ell_i} \hat{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[||\Sigma(x,y)|| \right] \quad (\text{VI.5.18})$$

où

$$\Sigma_{ij}(x,y) = \frac{1}{2} \int_x^{(x+y)/2} ds \int_{x+y-s}^{y-x+s} du |\hat{U}_{ij}(s)| \left(\frac{u}{s}\right)^{\ell_j - \ell_i} + \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} ds \int_s^{y-x+s} du |\hat{U}_{ij}(s)| \left(\frac{u}{s}\right)^{\ell_j - \ell_i}. \quad (\text{VI.5.19})$$

La matrice Σ possède les bornes suivantes :

si $\ell_i \geq \ell_j$, comme $\frac{u}{s} > 1$, nous obtenons :

$$||\Sigma(x,y)|| \leq \tilde{\sigma}^1(x). \quad (VI.5.20)$$

Pour $\ell_i < \ell_j$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}(x,y) &\leq 3^{\ell_j - \ell_i} \tilde{\sigma}^1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_x^{(x+y)/2} ds \int_{x+y-s}^{y-x+s} du |\tilde{U}_{ij}(s)| \left(\frac{u}{s}\right)^{\ell_j - \ell_i} \\ &\leq 3^{\ell_j - \ell_i} \tilde{\sigma}^1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^{\ell_j - \ell_i} [\tilde{\sigma}^1(x) - \tilde{\sigma}^1\left(\frac{x+y}{2}\right)]. \end{aligned} \quad (VI.5.21)$$

Il n'est pas évident à partir de cette formule que $\lim_{y \rightarrow \infty} K(x,y)$ soit finie alors que c'est évident à partir de l'estimation (VI.5.17).

Nous devons à présent vérifier a posteriori que les deux derniers termes de l'équation (VI.5.1) peuvent effectivement être négligés. Pour cela, nous devons connaître les comportements asymptotiques de $R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)$ et $\frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)$ pour $\eta_0 \rightarrow \infty$. Nous savons déjà que :

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} |R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| \leq 4^{\ell_i} \left[\frac{(\eta - \xi)}{(\eta + \xi)}\right]^{\ell_i} \exp[2\mu_{ij}(\eta - \xi)]. \quad (VI.5.22)$$

Pour obtenir une estimation de $\frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)$, nous utiliserons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) &= \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \\ &- \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 R_{ij}^0(\eta_1, \xi_0; \eta_0, \xi_0) \left[k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_0} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_0} \right] R_{ij}(\eta_1, \xi_0; \eta, \xi) \\ &+ \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}^0(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0) \left[k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_1} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_1} \right] R_{ij}(\eta_1, \xi_1; \eta, \xi) \end{aligned} \quad (VI.5.23)$$

et

$$\begin{aligned} R_{ij}^1 &= -2x'_2 P'_{\ell_j}(1-2x_2) - 2x'_1 \int_0^1 P_{\ell_j}(1-2x_2 t) P'_{\ell_i}(1-2x_1 + 2x_1 t) dt \\ &+ 2x_1 2x'_2 \int_0^1 t P'_{\ell_j}(1-2x_2 t) P'_{\ell_i}(1-2x_1 + 2x_1 t) dt \\ &- 2x_1 2x'_1 \int_0^1 (t-1) P_{\ell_j}(1-2x_2 t) P''_{\ell_i}(1-2x_1 + 2x_1 t) dt \end{aligned} \quad (VI.5.24)$$

où les "primes" désignent des dérivées par rapport à une des variables $\eta, \xi; \eta_0, \xi_0$.
 Nous rappelons quelques bornes utiles :

$$|P_\ell(x)| \leq 1 \quad \text{pour } |x| \leq 1$$

$$|P'_\ell(x)| \leq \frac{\ell(\ell+1)}{2} \quad \text{pour } |x| \leq 1$$

$$P_\ell(x) \leq (2x)^\ell \quad \text{pour } x \geq 1$$

$$P'_\ell(x) \leq \ell(\ell+1)(2x)^{\ell-1} \quad \text{pour } x \geq 1.$$

Si nous posons $Z = 1 - 2x_1$ et comme $0 \leq 1 - 2x_2 \leq 1$ et $1 \leq 1 - 2x_1 \leq \frac{2(\eta+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0+\xi_0)}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |R_{ij}^0| &\leq |x'_2|^{\ell_j(\ell_j+1)+4} |x'_1| |P'_{\ell_i}(Z)| + |x'_2|^{\ell_j(\ell_j+1)} \ell_i(\ell_i+1) (2Z)^{\ell_i} \\ &\leq 4|x'_1|^{\ell_i(\ell_i+1)} (2Z)^{\ell_i-1} + |x'_2|^{\ell_j(\ell_j+1)} [1 + \ell_i(\ell_i+1) (2Z)^{\ell_i}] \\ |R_{ij}^0| &\leq (2Z)^{\ell_i} (|x'_1| + |x'_2|) \ell_{\max}(\ell_{\max}+1) 2[1 + \ell_{\max}(\ell_{\max}+1)] \\ &\leq A(2Z)^{\ell_i} (|x'_1| + |x'_2|). \end{aligned} \tag{VI.5.25}$$

Par conséquent, nous avons

$$\left| \frac{\partial R_{ij}^0}{\partial \xi_0} \right| \leq A(2Z)^{\ell_i} \left(\left| \frac{\partial x_1}{\partial \xi_0} \right| + \left| \frac{\partial x_2}{\partial \xi_0} \right| \right) \tag{VI.5.26}$$

où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x_1}{\partial \xi_0} \right| + \left| \frac{\partial x_2}{\partial \xi_0} \right| &= \frac{(\eta_0 - \eta)}{(\eta - \xi)} \left| \frac{-(\eta_0 - \xi_0) + (\xi - \xi_0)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right| + \frac{(\eta_0 - \eta)}{(\eta + \xi)} \left| \frac{-(\eta_0 + \xi_0) - (\xi - \xi_0)}{(\eta_0 + \xi_0)^2} \right| \\ &\leq \frac{(\eta_0 - \eta)(\eta_0 - \xi)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)^2} + \frac{(\eta_0 - \eta)(\eta_0 + \xi)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)^2} \\ &\leq \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{(\eta_0 + \xi)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \leq \frac{2(\eta_0 + \xi)}{(\eta - \xi)(\eta_0 + \xi_0)} \leq \frac{4\eta_0}{(\eta - \xi)\eta_0} \\ &\leq \frac{4}{(\eta - \xi)} \end{aligned} \tag{VI.5.27}$$

$$\left| \frac{\partial R_{ij}^0}{\partial \xi_0} \right| \leq \frac{A' (2Z)^{\lambda_i}}{(n-\xi)} = \frac{A'}{(n-\xi)} \left[4 \frac{(n+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(n-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^{\lambda_i} \quad (\text{VI.5.28})$$

$$(A' = 4A).$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(n, \xi; \eta_0, \xi_0) \right| &\leq \left[4 \frac{(n+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(n-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^{\lambda_i} \frac{A'}{(n-\xi)} \\ &+ \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_1 \left| k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_0} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_0} \right| 4^{\lambda_i} \left[\frac{(n+\xi)(\eta_1-\xi_0)}{(n-\xi)(\eta_1+\xi_0)} \right]^{\lambda_i} \\ &\exp \{ 4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_1-\xi_0)^2 + a_{ij}(\eta_1-\xi_0)]} \} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_1 \frac{A'}{(\eta_1-\xi_1)} \left[4 \frac{(n+\xi_1)(\eta_0-\xi_1)}{(n-\xi_1)(\eta_0+\xi_1)} \right]^{\lambda_i} \\ &\left| k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_1} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_1} \right| 4^{\lambda_i} \left[\frac{(n+\xi_1)(\eta_1-\xi_1)}{(n-\xi_1)(\eta_1+\xi_1)} \right]^{\lambda_i} \exp \{ 4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_1-\xi_1)^2 + a_{ij}(\eta_1-\xi_1)]} \} \\ &\leq \left[4 \frac{(n+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(n-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^{\lambda_i} \frac{A'}{(n-\xi)} + \left[\frac{(n+\xi)}{(n-\xi)} \right]^{\lambda_i} 4^{\lambda_i} \exp [4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_0-\xi_0)^2 + a_{ij}(\eta_0-\xi_0)]}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_1 \left| k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_0} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_0} \right| \\ &+ A' (16)^{\lambda_i} \left[\frac{(n+\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(n-\xi)(\eta_0+\xi_0)} \right]^{\lambda_i} \exp [4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_0-\xi_0)^2 + a_{ij}(\eta_0-\xi_0)]}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_1 \frac{1}{(\eta_1-\xi_1)} \left| k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{\eta_1 - \xi_1} + \frac{\alpha_j}{\eta_1 + \xi_1} \right| \\ \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(n, \xi; \eta_0, \xi_0) \right| &\leq \left[\frac{(n+\xi)}{(n-\xi)} \right]^{\lambda_i} \left\{ \frac{A' 4^{\lambda_i}}{(n-\xi)} + \exp [4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_0-\xi_0)^2 + a_{ij}(\eta_0-\xi_0)]}] \right\} \end{aligned}$$

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_1 \left(\mu_{ij}^2 + \frac{a_{ij}}{\eta_1 - \xi_0} \right) 4^{\lambda_i} A' \exp \{ 4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_0-\xi_0)^2 + a_{ij}(\eta_0-\xi_0)]} \} \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_1$$

$$\frac{1}{(\eta_1 - \xi_1)} \left(\mu_{ij}^2 + \frac{a_{ij}}{(\eta_1 - \xi_1)} \right)$$

$$\leq \left[\frac{\eta + \xi}{\eta - \xi} \right]^{\ell_i} \left\{ \frac{A' 4^{\ell_i}}{(\eta - \xi)} + \exp \left\{ 4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_0 - \xi_0) + a_{ij}](\eta_0 - \xi_0)} \right\} \left(\mu_{ij}^2 + \frac{a_{ij}}{\eta - \xi_0} \right) \eta_0 \right. \\ \left. + 4^{\ell_i} A' \exp \left\{ 4\sqrt{[\mu_{ij}^2(\eta_0 - \xi_0) + a_{ij}](\eta_0 - \xi_0)} \right\} \left[\frac{\mu_{ij}^2}{\eta - \xi} + \frac{a_{ij}}{(\eta - \xi)^2} \right] \eta_0 \right. \quad (VI.5.29)$$

Nous aurons donc bien :

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \right| |K(\eta_0, \xi_0)| = 0 \quad (VI.5.30)$$

et

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} |R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| |K(\eta_0, \xi_0)| = 0 \quad (VI.5.31)$$

si nous supposons que $\delta^{\ell_i+1}(\eta)$ existe de façon à pouvoir écrire :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_0} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \right| |K_{ij}(\eta_0, \xi_0)| \underset{\eta_0 \rightarrow \infty}{\approx} |K_{ij}(\eta_0, \xi_0)| \\ \eta_0 \exp \left[4\sqrt{\mu_{ij}^2(\eta_0 - \xi_0)^2 + a_{ij}(\eta_0 - \xi_0)} \right] \leq C(2/s)^{\ell_i} \delta^{\ell_i+1}(\eta_0) \exp \left[\sigma^{\ell_i - \ell_j + 1}(s) \right] \quad (VI.5.32)$$

où

$$\delta^{\ell}(\eta) = \sup_i \sum_{j=1}^n \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \eta_0^{\ell} 4^{\ell_i} |U_{ij}(\eta_0)| \exp \left[8\sqrt{\mu_i^2(\eta_0 - \xi_0)^2 + a_i(\eta_0 - \xi_0)} \right]. \quad (VI.5.33)$$

L'opérateur de transformation sera borné si le potentiel correspondant total est tel que $\hat{\sigma}^{\ell, \max+1}(\eta)$ existe.

Nous recherchons à présent des bornes supérieures pour les dérivées de l'opérateur de transformation. Pour cela, nous devons obtenir des bornes supérieures pour les dérivées de la fonction de Riemann :

i) bornes pour $\left| \frac{\partial}{\partial \eta} R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \right|$ et $\left| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \right|$;
 comme

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \eta} \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial \eta} \right| \leq \frac{(\xi - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}{(\eta - \xi)^2(\eta_0 - \xi_0)} + \frac{(\eta_0 + \xi)(\xi - \xi_0)}{(\eta + \xi)^2(\eta_0 + \xi_0)} \leq \frac{(\eta_0 - \xi)}{(\eta - \xi)^2} + \frac{(\eta_0 + \xi)}{(\eta + \xi)^2} \\ \leq \frac{2\eta_0}{(\eta - \xi)^2}. \quad (VI.5.34)$$

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right| \leq \frac{(n-\xi)_0 (n_0-n)}{(n-\xi)^2 (n_0-\xi_0)} + \frac{(n+\xi)_0 (n_0-n)}{(n+\xi)^2 (n_0+\xi_0)} \leq \frac{(n-\xi)_0}{(n-\xi)^2} + \frac{(n+\xi)_0}{(n+\xi)^2}$$

$$\leq \frac{2n}{(n-\xi)^2} \tag{VI.5.35}$$

La formulè (VI.5.25) nous fournit les bornes suivantes :

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} R_{ij}^0(n, \xi; n_0, \xi_0) \right| \leq \frac{2An_0}{(n-\xi)^2} \left[4 \frac{(n+\xi)_0 (n_0-\xi_0)}{(n-\xi)(n_0+\xi_0)} \right]^{k_i} \tag{VI.5.36}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}^0(n, \xi; n_0, \xi_0) \right| \leq \frac{2An}{(n-\xi)^2} \left(4 \frac{(n+\xi)_0 (n_0-\xi_0)}{(n-\xi)(n_0+\xi_0)} \right)^{k_i} \tag{VI.5.37}$$

ii) bornes pour $\left| \frac{\partial}{\partial n} R_{ij}(n, \xi; n_0, \xi_0) \right|$ et $\left| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}(n, \xi; n_0, \xi_0) \right|$ si nous dèrivons l'èquation (VI.4.13) respectivement par rapport à n et ξ et si nous posons :

$$T_{ij}(n, \xi) = k_i^2 - k_j^2 - \frac{\alpha_i}{n-\xi} + \frac{\alpha_j}{n+\xi} \tag{VI.5.38}$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial n} R_{ij}(n, \xi; n_0, \xi_0) = \frac{\partial}{\partial n} R_{ij}^0(n, \xi; n_0, \xi_0) - \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 R_{ij}^0(n, \xi; n, \xi_1)$$

$$T_{ij}(n, \xi_1) R_{ij}(n, \xi_1; n_0, \xi_0) +$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_n^{n_0} dn_1 \frac{\partial}{\partial n} R_{ij}^0(n, \xi; n_1, \xi_1) T_{ij}(n_1, \xi_1) R_{ij}(n_1, \xi_1; n_0, \xi_0),$$

$$\tag{VI.5.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}(n, \xi; n_0, \xi_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}^0(n, \xi; n_0, \xi_0)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_1, \xi) \cdot T_{ij}(\eta_1, \xi) R_{ij}(\eta_1, \xi; \eta_0, \xi_0) \\
 & + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_1, \xi_1) T_{ij}(\eta_1, \xi_1) \\
 & R_{ij}(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0)
 \end{aligned} \tag{VI.5.40}$$

Définissant les fonctions suivantes :

$$D_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \left[\frac{(\eta_0 + \xi_0)(\eta - \xi)}{4(\eta_0 - \xi_0)(\eta + \xi)} \right]^{\ell_i} \frac{\partial}{\partial \eta} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0), \tag{VI.5.41}$$

$$C_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \left[\frac{(\eta_0 + \xi_0)(\eta - \xi)}{4(\eta_0 - \xi_0)(\eta + \xi)} \right]^{\ell_i} \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0), \tag{VI.5.42}$$

$$\tilde{R}_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \left[\frac{(\eta_0 + \xi_0)(\eta - \xi)}{4(\eta_0 - \xi_0)(\eta + \xi)} \right]^{\ell_i} R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0), \tag{VI.5.43}$$

$$\tilde{R}_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = \left[\frac{(\eta_0 + \xi_0)(\eta - \xi)}{4(\eta_0 - \xi_0)(\eta + \xi)} \right]^{\ell_i} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0), \tag{VI.5.44}$$

$$E(\eta_0 - \xi_0) = 4^{\ell_i} \exp[4\sqrt{\mu_{ij}^2(\eta_0 - \xi_0)^2 + a_{ij}(\eta_0 - \xi_0)}], \tag{VI.5.45}$$

les équations (VI.5.39-40) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 |D_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| & \leq \frac{2 A \eta_0}{(\eta - \xi)^2} + E(\eta_0 - \xi_0) [\mu_{ij}^2 (\xi - \xi_0) + a_{ij} \ln \frac{\eta - \xi_0}{\eta - \xi}] \\
 & + \frac{2A}{(\eta - \xi)^2} E(\eta_0 - \xi_0) \left[\mu_{ij}^2 \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)(\xi - \xi_0)}{2} \right. \\
 & \left. + a_{ij} \left(\frac{(\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0)}{2} + (\eta_0^2 - \xi_0^2) \ln \frac{\eta + \xi}{\eta - \xi} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{VI.5.46}$$

et

$$\begin{aligned}
 |C_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0)| &\leq \frac{2A\eta}{(\eta-\xi)^2} + E(\eta_0 - \xi_0) [\mu_{ij}^2(\eta_0 - \eta) + a_{ij} \ln \frac{\eta_0 - \xi}{\eta - \xi}] \\
 &+ \frac{2A\eta}{(\eta-\xi)^2} E(\eta_0 - \xi_0) \{ \mu_{ij}^2(\eta_0 - \eta) (\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} a_{ij} [\eta_1 \ln \frac{(\eta_1 + \xi)(\eta_1 - \xi_0)}{(\eta_1 - \xi)(\eta_1 + \xi_0)}] \} \\
 &+ \frac{1}{2} a_{ij} [\xi_1 \ln \frac{(\eta_0 + \xi_1)(\eta_0 - \xi_1)}{(\eta + \xi_1)(\eta - \xi_1)}] \quad \begin{matrix} \eta_1 = \eta \\ \eta_1 = \eta_0 \\ \xi_1 = \xi \\ \xi_1 = \xi_0 \end{matrix} \quad (VI.5.47)
 \end{aligned}$$

Si nous utilisons la propriété bien connue $\ln x < x-1$ pour $x > 1$, les équations (VI.5.46) et (VI.5.47) peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial}{\partial \eta} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \right| &\leq \left[\frac{4(\eta_0 - \xi_0)(\eta + \xi)}{(\eta_0 + \xi_0)(\eta - \xi)} \right]^i \left\{ \frac{2A \eta_0}{(\eta - \xi)^2} + \right. \\
 &E(\eta_0 - \xi_0) \left[\mu_{ij}^2(\xi - \xi_0) + a_{ij} \frac{\xi - \xi_0}{\eta - \xi} \right] + \frac{2A}{(\eta - \xi)^2} E(\eta_0 - \xi_0) \\
 &\left. \left[\mu_{ij}^2 \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)(\xi - \xi_0)}{2} + a_{ij} \frac{(\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0)}{2} + a_{ij} \frac{(\eta_0^2 - \xi_0^2)}{(\eta - \xi)} \frac{2\xi}{2} \right] \right\}, \quad (VI.5.48)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) \right| &\leq \left[4 \frac{(\eta_0 - \xi_0)(\eta + \xi)}{(\eta_0 + \xi_0)(\eta - \xi)} \right]^i \left\{ \frac{2A\eta}{(\eta - \xi)^2} + \right. \\
 &E(\eta_0 - \xi_0) \left[\mu_{ij}^2(\eta_0 - \eta) + a_{ij} \frac{\eta_0 - \eta}{\eta - \xi} \right] + \frac{2A\eta}{(\eta - \xi)^2} E(\eta_0 - \xi_0) \\
 &\left. \left[\mu_{ij}^2(\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} a_{ij} \eta \frac{2\xi}{(\eta - \xi)} + \frac{1}{2} a_{ij} \xi \frac{\eta_0^2 - \eta^2}{\eta^2 - \xi^2} \right] \right\} \quad (VI.5.49)
 \end{aligned}$$

iii) bornes pour les dérivées de l'opérateur de transformation.

Si nous effectuons la dérivée de l'équation (VI.5.1) par rapport à η , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} K_{ij}(\eta, \xi) &= \frac{-1}{2} R_{ij}(\eta, \xi, \eta, 0) U_{ij}(\eta) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta} R_{ij}(\eta, \xi, \eta_0, 0) U_{ij}(\eta_0) \\ &- \sum_{\ell} \int_0^{\xi} d\xi_0 R_{ij}(\eta, \xi; \eta, \xi_0) U_{i\ell}(\eta - \xi_0) K_{\ell j}(\eta, \xi_0) \\ &+ \sum_{\ell} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \frac{\partial}{\partial \eta} R_{ij}(\eta, \xi, \eta_0, \xi_0) U_{i\ell}(\eta_0 - \xi_0) K_{\ell j}(\eta_0, \xi_0). \end{aligned}$$

(VI.5.50)

Si nous posons $\hat{U}_{ij}(\eta) = E(\eta)U_{ij}(\eta)$, nous obtenons la borne supérieure suivante :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} K_{ij}(\eta, \xi) \right| \left(\frac{\eta - \xi}{(\eta + \xi)^4} \right)^{\ell_{\max}} &\leq \frac{1}{2} \hat{U}_{ij}(\eta) + \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \left\{ \frac{2 A \eta_0}{(\eta - \xi)^2} \right. \\ &+ E(\eta_0) [\mu_{ij}^2 \xi + a_{ij} \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi}] + \frac{2A}{(\eta - \xi)^2} E(\eta_0) \left(\frac{\mu_{ij}^2 \eta_0^2 \xi}{2} \right. \\ &+ a_{ij} \frac{3 \eta \eta_0^2}{(\eta - \xi)} \left. \right\} |U_{ij}(\eta_0)| + \sum_{\ell} \int_0^{\xi} d\xi_0 \left(\frac{\eta - \xi_0}{\eta + \xi_0} \right)^{\ell_{\max}} |\hat{U}_{i\ell}(\eta - \xi_0)| |K_{\ell j}(\eta, \xi_0)| \\ &+ \sum_{\ell} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \left(\frac{\eta_0 - \xi_0}{\eta_0 + \xi_0} \right)^{\ell_{\max}} \left\{ \frac{2 A \eta_0}{(\eta - \xi)^2} + E(\eta_0 - \xi_0) (\mu_{ij}^2 (\xi - \xi_0) + a_{ij} \frac{\eta - \xi_0}{\eta - \xi_0}) \right. \\ &+ \frac{2A}{(\eta - \xi)^2} E(\eta_0 - \xi_0) \left[\frac{\mu_{ij}^2 (\eta_0^2 - \eta^2) (\xi - \xi_0)}{2} + a_{ij} \frac{(\eta_0 - \eta) (\xi - \xi_0)}{2} \right. \\ &+ a_{ij} \frac{(\eta_0^2 - \xi_0^2) (\eta + \xi)}{(\eta - \xi)} \left. \right\} |U_{i\ell}(\eta_0 - \xi_0)| |K_{\ell j}(\eta_0, \xi_0)| \end{aligned} \quad (VI.5.51)$$

Comme nous avons la borne suivante pour $|K_{\ell j}|$:

$$|K_{\ell j}(\eta_0, \xi_0)| \leq \frac{\eta}{2} \left(\frac{\eta_0 + \xi_0}{\eta_0 - \xi_0} \right)^{\ell_{\max}} \hat{\sigma}^0(\eta_0) \exp[\hat{\sigma}^1(\eta_0 - \xi_0)]$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial}{\partial \eta} K(\eta, \xi) \right| \left(\frac{\eta - \xi}{4(\eta + \xi)} \right)^{\ell \max} \leq \frac{1}{2} \left| \hat{U}(\eta) \right| + \frac{A}{(\eta - \xi)^2} \sigma^1(\eta) \\
 & + \frac{1}{2} \mu_{ij}^2 \xi \left[\hat{\sigma}^0(\eta) + \frac{A}{(\eta - \xi)^2} \hat{\sigma}^2(\eta) \right] \\
 & + a_{ij} \frac{\eta}{2(\eta - \xi)} \left[\hat{\sigma}^0(\eta) + \frac{6A}{(\eta - \xi)} \hat{\sigma}^2(\eta) \right] \\
 & + \frac{\eta}{2} \hat{\sigma}^0(\eta) \exp[\hat{\sigma}^1(\eta - \xi)] \int_{\xi - \xi_0}^{\eta} \left| U(s) \right| ds \\
 & + \eta \hat{\sigma}^0(\eta) \exp[\hat{\sigma}^1(\eta - \xi)] \frac{A}{(\eta - \xi)^2} \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \eta_0 \left| U(\eta_0 - \xi_0) \right| \\
 & + \frac{\eta}{2} \hat{\sigma}^0(\eta) \exp[\hat{\sigma}^1(\eta - \xi)] \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \left\{ \mu_{ij}^2 \xi \left[1 + \frac{A \eta_0^2}{(\eta - \xi)^2} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{a_{ij}}{(\eta - \xi)} \left[\eta + \frac{A\xi}{(\eta - \xi)} \eta_0 + \frac{2A(\eta + \xi)}{(\eta - \xi)^2} \eta_0^2 \right] \right\} \left| \hat{U}(\eta_0 - \xi_0) \right| .
 \end{aligned}$$

(VI.5.52)

où nous devons évaluer l'intégrale

$$\int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_0^{\xi} d\xi_0 \eta_0^{\ell} f(\eta_0 - \xi_0)$$

pour $\ell=0, 1$ ou 2 et $f(\eta_0 - \xi_0) = \left| U(\eta_0 - \xi_0) \right|$ ou $\left| \hat{U}(\eta_0 - \xi_0) \right|$.
 Nous obtenons facilement :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\eta}^{\infty} d\eta_0 \int_{\eta_0 - \xi}^{\eta_0} ds \eta_0^{\ell} f(s) \leq \int_{\eta - \xi}^{\infty} ds \int_s^{s + \xi} d\eta_0 \eta_0^{\ell} f(s) \\
 & = \int_{\eta - \xi}^{\infty} ds f(s) \frac{(s + \xi)^{\ell + 1} - s^{\ell + 1}}{\ell + 1} = \frac{1}{\ell + 1} \sum_{j=0}^{\ell} C_{\ell + 1}^j \sum^j(\eta - \xi) \xi^{\ell + 1 - j}
 \end{aligned}$$

(VI.5.53)

où

$$\sum^j(\eta - \xi) = \begin{cases} \sigma^j(\eta - \xi) & \text{si } f(\eta - \xi) = \left| U(\eta - \xi) \right| \\ \hat{\sigma}^j(\eta - \xi) & \text{si } f(\eta - \xi) = \left| \hat{U}(\eta - \xi) \right| \end{cases} \quad \text{(VI.5.54)}$$

Si le potentiel possède les moments impliqués dans les équations (VI.5.52-54), l'opérateur de transformation aura une dérivée première bornée par rapport à η . Les mêmes considérations montrent que la dérivée de K par rapport à ξ dans les mêmes conditions. Par conséquent, les dérivées par rapport à x et à y sont bornées.

§ 6. BORNE POUR LA SOLUTION DE JOST

Nous recherchons à présent une borne supérieure pour la solution de Jost non perturbée :

$$[F_0(\lambda, x)]_{ij} = \delta_{ij} f_0^{(i)}(\lambda_i, x) \quad (\text{VI.6.1})$$

$$f_0^{(i)}(\lambda_i, x) = e^{[i\lambda_i x + \frac{\pi\alpha_i}{4\lambda_i}] (-2i\lambda_i x)^{\ell_i+1} U[\ell_i+1 + \frac{i\alpha_i}{2\lambda_i}, 2\ell_i+2, -2i\lambda_i x]} \quad (\text{VI.6.2})$$

Nous supposons que l'interaction de Coulomb est répulsive ($\alpha_i \geq 0$) et nous posons

$$Z = -2i\lambda_i x, \quad \kappa = \frac{-i\alpha_i}{2\lambda_i}, \quad \nu = \ell_i + \frac{1}{2}.$$

Si nous avons

$$\text{Re}(1+2\nu) > \text{Re}(\frac{1}{2} + \nu - \kappa) > 0 \quad \text{ou} \quad \text{Re}(\ell_i + 1 + \frac{i\alpha_i}{2\lambda_i}) > 0,$$

la représentation intégrale (13.2.5) de la référence [ABR 64] pour la fonction de Kummer U peut être utilisée :

$$U(\frac{1}{2} + \nu - \kappa, 1+2\nu, Z) = \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} - \kappa)} \int_0^\infty e^{-Zt} t^{\nu - \kappa - 1/2} (1+t)^{\nu + \kappa - 1/2} dt \quad (\text{VI.6.3})$$

ou

$$U(\frac{1}{2} + \nu - \kappa, 1+2\nu, Z) = \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} - \kappa)} \frac{1}{Z} \int_0^\infty e^{-t} (t/Z)^{\nu - \kappa - 1/2} (1+t/Z)^{\nu + \kappa - 1/2} dt. \quad (\text{VI.6.4})$$

Par conséquent, nous pouvons écrire pour

$$\frac{\text{Im} \lambda_i}{|\lambda_i|^2} = - \frac{(\ell_i + 1)2}{\alpha_i} \quad (\text{VI.6.5})$$

$$\begin{aligned}
 f_0^{(i)}(\lambda_i, x) &= \frac{e^{\pi\alpha_i/4\lambda_i} e^{-Z/2} (Z)^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+1/2-\kappa)Z} \int_0^\infty e^{-t} (t/Z)^{\nu-\kappa-1/2} (1+t/Z)^{\nu+\kappa-1/2} dt \\
 &= \frac{e^{\pi\alpha_i/4\lambda_i} e^{-Z/2} (Z)^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+1/2-\kappa)Z^{2\nu}} \int_0^\infty e^{-t} (t)^{2\nu-1} (Z/t+1)^{\nu+\kappa-1/2} dt.
 \end{aligned} \tag{VI.6.6}$$

Si nous posons $\lambda_i = \gamma+i\delta$, nous obtenons pour $|\lambda_i| \geq s > 0$, la borne

$$|f_0^{(i)}(\lambda_i, x)| \leq \frac{\exp[\alpha_i \pi \delta / 4 |\lambda_i|^2 - \delta x] \exp[\alpha_i \pi / 2 s] \delta_{ij}}{|\Gamma(\ell_i + 1 + i\alpha_i / 2\lambda_i) (2|\lambda_i| x)^{\ell_i}|} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\ell_i} (1+2|\lambda_i|x/t)^{\ell_i} dt \tag{VI.6.7}$$

car

$$\begin{aligned}
 |(Z/t+1)^{\ell_i - i\alpha_i/2\lambda_i}| &= e^{\operatorname{Re}\{(\ell_i - i\alpha_i/2\lambda_i) \ln(Z/t+1)\}} \\
 &= |Z/t+1|^{\ell_i - \alpha_i \delta / 2 |\lambda_i|^2} e^{(\alpha_i \gamma / 2 |\lambda_i|^2) \arg(1+Z/t)} \\
 &\leq |1+2|\lambda_i|x/t|^{\ell_i} e^{\alpha_i \pi / 2 s}.
 \end{aligned} \tag{VI.6.8}$$

La fonction de Jost se comporte comme $Z^{-\ell}$ à l'origine et a une discontinuité le long de l'axe λ_i imaginaire négatif (nous avons choisi les prescriptions $-\pi < \arg Z < \pi$, $\arg(-i) = -\pi/2$ et $-\pi/2 < \arg \lambda_i < 3\pi/2$). Nous pouvons évaluer l'intégrale apparaissant dans l'équation (VI.6.7)

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-t} t^{\ell_i} (t+2|\lambda_i|x)^{\ell_i} dt &= \sum_{j=0}^{\ell_i} C_{\ell_i}^j (2|\lambda_i|x)^{\ell_i-j} (\ell_i+j)! \\
 &\leq (2\ell_i)! [1+2|\lambda_i|x]^{\ell_i},
 \end{aligned} \tag{VI.6.9}$$

de sorte que nous pouvons écrire le résultat final :

$$|[\mathbb{F}_0(\lambda, x)]_{ii}| \leq \frac{\exp[\frac{3\alpha_i \pi}{4s} - \delta x]}{|\Gamma(\ell_i + 1 + \frac{i\alpha_i}{2\lambda_i})|} (2\ell_i)! \frac{[1+2|\lambda_i|x]^{\ell_i}}{[2|\lambda_i|x]^{\ell_i}} \tag{VI.6.10}$$

où

$$\begin{aligned}
 \left| \Gamma(\ell_i + 1 + \frac{i\alpha_i}{2\lambda_i}) \right| &= \left[\left[\ell_i^2 + \frac{\alpha_i^2}{4\lambda_i^2} \right] \left[(\ell_i - 1)^2 + \frac{\alpha_i^2}{4\lambda_i^2} \right] \dots \right. \\
 &\quad \left. \left[1 + \frac{\alpha_i^2}{4\lambda_i^2} \right] \frac{\pi \alpha_i}{2\lambda_i \operatorname{Sinh}(\pi \alpha_i / 2\lambda_i)} \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{VI.6.11}$$

Utilisant la borne (VI.6.10) obtenue pour $F_0(\lambda, y)$ lorsque $\operatorname{Im} \lambda_i \geq \delta > 0$ nous pouvons vérifier la convergence de l'intégrale

$$\begin{aligned}
 &\int_x^\infty K(x, y) F_0(\lambda, y) dy \\
 = &\int_x^\infty y^{\ell_{\max}} \sigma_0^{\frac{x+y}{2}} e^{-\delta y} \frac{1+2|\lambda_i|y}{(2|\lambda_i|y)^{\ell_i}} < \infty \quad \text{pour } x \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{VI.6.12}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty dy \sigma_0^{\ell_{\max} \frac{x+y}{2}} &= 4^{\ell_{\max}} \int_x^\infty dy \int_{(x+y)/2}^\infty d\eta_0 \eta_0^{\ell_{\max}} ||\hat{U}(\eta_0)|| \\
 &= 4^{\ell_{\max}} \int_x^\infty d\eta_0 \int_x^{2\eta_0-x} dy \eta_0^{\ell_{\max}} ||\hat{U}(\eta_0)||
 \end{aligned}
 \tag{VI.6.13}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2^{(2\ell_{\max}+1)} \int_x^\infty d\eta_0 \eta_0^{\ell_{\max}+1} ||\hat{U}(\eta_0)|| \\
 &= 2\sigma_0^{\ell_{\max}+1} (x) < \infty.
 \end{aligned}
 \tag{VI.6.14}$$

Puisque nous supposons que $\sigma_0^{\ell_{\max}+1}(x)$ existe pour $x \geq 0$, nous pouvons justifier le changement de l'ordre des intégrations dans l'équation (VI.6.13) par le théorème de Tonelli-Fubini. Les équations (VI.6.13-14) montrent que $x^{\ell_{\max}} K(x, y)$ est borné et intégrable si $\sigma_0^{\ell_{\max}+1}(0)$ est borné. Les résultats obtenus sont valables même si le potentiel est complexe non-hermitien. Le potentiel perturbatif doit avoir une décroissance exponentielle dont le taux de décroissance est mesuré par $8\sqrt{\mu^2 x^2 + ax}$. En l'absence des interactions coulombiennes, $U_{ij}(x)$ doit décroître plus rapidement que

$\exp [-2^{\ell} i^{+2} |k_i^2 - k_j^2|^{1/2} x]$. Les bornes que nous avons obtenues pour l'opérateur de transformation et ses dérivées sont nécessaires si nous voulons démontrer l'unicité et la stabilité d'une solution "convenable" à l'équation fondamentale du problème inverse, dont l'existence sera montrée plus tard (chapitre IX).

§ 7. ANALYTICITE DE LA SOLUTION DE JOST

Nous considérons tout d'abord la solution de Jost comme une fonction des n variables $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dont un des éléments est défini par l'équation

$$[F(\lambda, x)]_{ij} = \delta_{ij} [F_0(\lambda, x)]_{ij} + \int_x^\infty K_{ij}(x, y) [F_0(\lambda, y)]_{jj} dy. \quad (VI.7.1)$$

Comme $[F_0(\lambda, x)]_{jj}$ ne dépend que de λ_j et que le noyau $K_{ij}(x, y)$ est une fonction entière de $\Delta_{ji}^2 = k_j^2 - k_i^2$ (à partir d'un théorème de Poincaré), $[F(\lambda, x)]_{ij}$ n'est fonction que de λ_j et de Δ_{ji}^2 ($i = 1, n$) . Par conséquent $F_{ij}(\lambda, x)$ est une fonction paire en tous les λ_i sauf λ_j (ce résultat est en accord avec [NEW 61]). A présent, au lieu de considérer $F(\lambda, x)$ comme une fonction de plusieurs variables, la conservation de l'énergie entre les voies peut être utilisée pour éliminer $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ en fonction de la plus grande composante $\lambda_1 = k$ et des $n-1$ constantes $\Delta_{1\ell}^2$ ($\ell = 2, n$) et de considérer $F(\lambda, x)$ comme une fonction de λ_1 uniquement.

Pour cela, nous devons définir comme dans [HUM 64] ou [WEI 64] une surface de Riemann λ_1 comprenant 2^{n-1} feuillets et ayant des points de branchement en $\lambda_1 = \pm \Delta_{\ell 1}$ ($\ell = 2, \dots, n$) . A chaque feuillet, Weidenmüller [WEI 64] associe un vecteur $\vec{\tau}$ de $n-1$ éléments $\tau_\ell = \pm 1$ définis suivant la règle

$$\text{Sign Re } \lambda_{\ell+1} = \tau_\ell \text{ Sign Re } \lambda_1,$$

$$\text{Sign Im } \lambda_{\ell+1} = \tau_\ell \text{ Sign Im } \lambda_1.$$

Le feuillet physique est défini par $\tau_\ell = 1$ ($\ell = 1, n-1$) . En vue de démontrer l'analyticité de $F(\lambda_1, x)$ par rapport à la variable λ_1 dans le demi-plan physique supérieur, il faut vérifier l'existence et la continuité de $F(\lambda_1, x)$ et de sa dérivée première. L'existence d'une fonction $F_{ij}(\lambda_1, x)$ bornée et continue pour $\frac{\text{Im } \lambda_1}{\sigma^{\max+1}} > 0$ ($\tau_\ell = 1, \ell = 1, n-1$) donc pour $\text{Im } \lambda_j > 0$ a déjà été démontrée si $\hat{\sigma}^{\max+1}(0)$ existe. Comme l'intégrale dans l'équation (1) converge absolument, la dérivée de F par rapport à λ_1 , peut être

effectuée sous le signe d'intégration :

$$\frac{d}{d\lambda_1} F_{ij}(\lambda_1, x) = \left[\frac{d}{d\lambda_1} F_0(\lambda_1, x) \right]_{jj} \delta_{ij} + \int_x^\infty K_{ij}(x, t) \left[\frac{d}{d\lambda_1} F_0(\lambda_1, t) \right]_{jj} dt.$$

Comme $\frac{d}{d\lambda_1} F_0(\lambda_1, x)$ existe et est bornée pour $\text{Im } \lambda_1 > 0$ et puisque $K_{ij}(x, t)$ est absolument intégrable, la dérivée $\left[\frac{d}{d\lambda_1} F_0(\lambda_1, x) \right]_{ij}$ est bien définie et bornée. Par conséquent, la fonction matricielle $F(\lambda_1, x)$ est analytique dans le demi-plan physique supérieur pour tout $x > 0$ fixé.

§ 8. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons trouvé des conditions suffisantes pour que le potentiel matriciel perturbatif possède un opérateur de transformation du type Marchenko, borné et intégrable avec des dérivées premières bornées. Ces conditions dépendent évidemment du potentiel de référence : sa partie centrifuge exige que le potentiel perturbatif possède certains moments (voir équations (VI.5.13 et 14)) tandis que l'interaction coulombienne ou les énergies de seuils différentes demandent une décroissance exponentielle du potentiel perturbatif (voir équations (VI.5.13 et 14)). Pour cette classe de potentiels, nous avons démontré l'analyticité de la solution de Jost dans le demi-plan physique supérieur (pour $\alpha_i > 0$). Cette propriété d'analyticité est essentielle si on veut établir l'existence d'une équation fondamentale pour le problème inverse. Les bornes (VI.5.13, 17 ; VI.5.52) obtenues pour l'opérateur de transformation et ses dérivées sont fondamentales pour les deux raisons suivantes :

i) elles permettent d'obtenir une borne supérieure pour le noyau de l'équation fondamentale et par conséquent nous donneront les conditions qu'il faudra imposer aux données "expérimentales" du problème inverse pour obtenir une solution convenable ;

ii) elles sont aussi nécessaires pour assurer la stabilité du problème inverse. En effet, les données expérimentales de la diffusion ne sont connues que jusqu'à une certaine énergie et il faudrait s'assurer que des faibles variations des déphasages pour des grandes valeurs de l'énergie influencent peu le potentiel obtenu. Bien sûr, il n'en sera pas ainsi si nous ne limitons pas la classe des potentiels acceptables (voir [VIA 69] et [CIU 75]). Dans le cas de potentiels séparables, Ernst et Miller [ERN 75] ont montré par un calcul numérique que les déphasages pour les hautes énergies

influencent fortement le potentiel séparable obtenu. Par contre, si nous imposons que la solution du problème inverse doit appartenir à la classe des potentiels locaux, définie plus haut, alors les estimations que nous avons obtenues pour K et ses dérivées premières doivent nous permettre de montrer que la solution est stable par rapport à de faibles variations dans les déphasages au-dessus d'une certaine énergie. Ce résultat a été effectivement démontré par Marchenko et Lundina [MAR 68][LUN 69] dans le cas scalaire, où le potentiel de référence est nul.

CHAPITRE VII : ETUDE DES OPERATEURS DE TRANSFORMATION

DANS UN ESPACE A $d \neq 1$ DIMENSIONS

§ 1. INTRODUCTION

Le problème inverse pour un système à plusieurs particules n'a pratiquement pas été développé, bien que celui-ci permettrait l'étude de phénomènes intéressants. Ainsi le problème inverse semble être le moyen le plus direct pour répondre à la question difficile concernant l'existence de forces à trois ou plusieurs corps et leur rôle dans les processus nucléaires. Il serait aussi utile de posséder une méthode inverse permettant d'obtenir à partir des données à $N \geq 3$ corps des informations concernant le problème à deux corps. Considérons par exemple un système de trois particules qui interagissent par l'intermédiaire d'un potentiel à trois corps $V(\vec{\rho}_6)$ où $\vec{\rho}_6$ représente le vecteur à six composantes, caractérisant les positions relatives des trois particules en coordonnées hypersphériques. En vue de ramener l'équation de Schrödinger à un système d'équations différentielles couplées, nous développons la fonction d'onde sur une base de fonctions hypersphériques (harmoniques \vec{K}) $Y_{\vec{K}}(\Omega_{\vec{\rho}_6})$ (au lieu des fonctions habituelles $Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{\rho}_6})$).

Nous supposons que le potentiel $V(\vec{\rho}_6)$ possède la symétrie hypersphérique : $V(\vec{\rho}_6) = V(|\vec{\rho}_6|)$; nous pouvons, dans ce cas, effectuer la séparation des variables et ne conserver qu'un système d'équations différentielles en la variable $|\vec{\rho}_6|$. La méthode inverse consiste alors à obtenir $V_{\vec{K}}(|\vec{\rho}_6|)$ à partir des données expérimentales dans l'onde hypersphérique \vec{K} .

Dans ce chapitre, nous définissons des fonctions d'onde radiales pour le problème de diffusion dans un espace à $d > 1$ dimensions pour un potentiel possédant la symétrie hypersphérique, par des conditions de régularité à l'origine (solution régulière) ou en imposant le comportement à l'infini (solution de Jost). Nous discutons alors de l'existence de noyaux de transformation pour les deux types de solutions. Le problème de la représentation des solutions régulières est essentiellement différent de celui des solutions de Jost. Si il est toujours possible de comparer les conditions d'existence d'opérateurs de transformation de Gel'fand et de Marchenko dans le cas scalaire et pour un espace de dimension impaire, il n'en va généralement plus de même dans les autres cas. Nous avons obtenu des conditions d'existence et des bornes pour le noyau de Marchenko dans un espace de dimension d quelconque à la fois dans le cas scalaire et matriciel. Pour la représentation de Gel'fand, la solu-

tion de Riemann n'est utile que pour un espace de dimension d impaire ; elle fournit une borne pour le noyau de Gel'fand dans le cas scalaire. Dans le cas couplé et pour d impair, nous obtenons une équation intégrale pour le noyau de transformation de Gel'fand mais nous n'avons pas pu déterminer une expression analytique pour sa borne.

Le chapitre est structuré comme suit : au paragraphe 2, nous étudions l'équation radiale et ses solutions pour le problème de la diffusion dans un espace à $d > 1$ dimensions. Au paragraphe 3, nous recherchons les conditions d'existence ainsi que des bornes pour les noyaux de transformation dans le cas d'une équation scalaire. Une généralisation de l'étude des opérateurs de transformation pour un potentiel à symétrie axiale, est faite au paragraphe 4.

Le paragraphe 5 étudie les conditions d'existence des noyaux de transformation dans le cas d'équations couplées, tandis que nous tirons les conclusions du chapitre au paragraphe 6.

§ 2. EQUATION RADIALE

Nous considérons l'équation de Schrödinger stationnaire dans un espace à d dimensions :

$$\Delta_d \psi(\vec{k}, \vec{x}) + [k^2 - v(\vec{x})] \psi(\vec{k}, \vec{x}) = 0, \quad (\text{VII.2.1})$$

où

$$\Delta_d = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (\text{VII.2.2})$$

L'équation (VII.2.1) pour $d > 1$ (le cas $d = 1$ n'est pas considéré ici) est une équation aux dérivées partielles et la recherche d'une solution ψ^\pm ne peut plus être basée sur l'existence d'un ensemble de deux solutions linéairement indépendantes comme on le fait dans le cas de l'équation différentielle radiale du second ordre. Cependant, à l'aide du théorème de Green, nous pouvons obtenir l'équation intégrale équivalente à l'équation (VII.2.1) :

$$\begin{aligned} \psi(\vec{k}, \vec{x}) = & \int_V G(\vec{k}, \vec{x} - \vec{x}') v(\vec{x}') \psi(\vec{k}, \vec{x}') d\vec{x}' + \int_S [\psi(\vec{k}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{k}, \vec{x} - \vec{x}') \\ & - G(\vec{k}, \vec{x} - \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n} \psi(\vec{k}, \vec{x}')] ds' \end{aligned} \quad (\text{VII.2.3})$$

où V est un volume quelconque limité par la surface S et où $G^+(\vec{k}, \vec{x} - \vec{x}')$

est la fonction de Green vérifiant l'équation de Helmholtz :

$$\Delta_d G^\pm(\vec{k}, \vec{x}) + k^2 G^\pm(\vec{k}, \vec{x}) = \delta(\vec{x}). \quad (\text{VII.2.4})$$

Par le principe de radiation, nous obtenons la solution de Green unique suivante :

$$G^\pm(\vec{k}, \vec{x}) = G^\pm(k, x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{k^2 - p^2 \pm i\epsilon} d\vec{p} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikx}}{x}. \quad (\text{VII.2.5})$$

La fonction d'onde totale $\psi^+(\vec{k}, \vec{r})$ est la superposition d'une fonction d'onde entrante $\psi^i(\vec{k}, \vec{r})$ et d'une fonction d'onde diffusée $\psi^{Sc}(\vec{k}, \vec{r})$. $\psi^{Sc}(\vec{k}, \vec{r})$ doit vérifier à l'infini la condition de radiation de Sommerfeld [SOM 12] qui signifie qu'il n'y a pas d'énergie diffusée en provenance de l'infini et qui s'écrit :

$$\int_S ds' [\psi^{Sc}(\vec{k}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(k, |\vec{x}-\vec{x}'|) - G(k, |\vec{x}-\vec{x}'|) \frac{\partial}{\partial n} \psi^{Sc}(\vec{k}, \vec{x}')] = 0. \quad (\text{VII.2.6})$$

Comme la fonction

$$\psi^i(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (\text{VII.2.7})$$

vérifie l'équation de Helmholtz, le théorème de Green conduit à la relation :

$$\psi^i(\vec{k}, \vec{x}) = \int_S [\psi^i(\vec{k}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(k, |\vec{x}-\vec{x}'|) - G(k, |\vec{x}-\vec{x}'|) \frac{\partial}{\partial n} \psi^i(\vec{k}, \vec{x}')] ds'. \quad (\text{VII.2.8})$$

Nous obtenons finalement :

$$\psi^+(\vec{k}, \vec{x}) = \int G^+(k, |\vec{x}-\vec{x}'|) U(\vec{x}') \psi^+(\vec{x}') dx' + \psi^{(i)}(\vec{x}) \quad (\text{VII.2.9})$$

où le domaine d'intégration comprend tout l'espace ou un volume quelconque suffisamment grand de façon à contenir \vec{x} . La fonction $\psi^+(\vec{k}, \vec{x})$ possède le comportement asymptotique :

$$\psi^+(\vec{k}, \vec{x}) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + f^+(\vec{k}, \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}) \frac{e^{ikx}}{x}. \quad (\text{VII.2.10})$$

Coz et Rochus [COZ 77a] ont montré que ce comportement (VII.2.10) est indépendant du fait que $\psi^+(\vec{k}, \vec{x})$ est solution de l'équation de Schrödinger. Ce comportement à l'infini provient simplement de la condition de Sommerfeld ou

des conditions équivalentes de Rellich [REL 43] qui expriment le fait que la fonction d'onde est associée à un transport d'énergie. Les solutions $\psi^+(\vec{k}, \vec{x})$ forment un ensemble de fonctions orthonormées, correspondant au spectre continu et constituent avec les fonctions $\psi_i(x)$ du spectre discret, un ensemble complet :

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int [\psi^+(\vec{k}, \vec{x}')]^* \psi^+(\vec{p}, \vec{x}) d\vec{x} = \delta(\vec{p}-\vec{k}) \quad (\text{VII.2.11})$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int [\psi^+(\vec{k}, \vec{x})]^* \psi^+(\vec{k}, \vec{y}) d\vec{k} + \sum_i \psi_i(x) \psi_i(y) = \delta(x-y). \quad (\text{VII.2.12})$$

L'amplitude de diffusion $f(\vec{k}, \vec{k}')$ est reliée à $f^+(\vec{k}, \frac{\vec{x}}{x})$ par la relation :

$$f^+(\vec{k}, \frac{\vec{x}}{x}) = -2\pi^2 f(\vec{k}, \vec{k}') \quad (\text{VII.2.13})$$

où
$$\vec{k}' = \frac{\vec{x}}{x} k \quad (\text{VII.2.14})$$

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) \psi^+(\vec{k}, \vec{x}) d\vec{x}. \quad (\text{VII.2.15})$$

Nous considérons dans la suite le cas où le potentiel possède la symétrie hypersphérique

$$V(\vec{x}) = V(x) \quad (x = |\vec{x}|) \quad (\text{VII.2.16})$$

et vérifie les conditions :

$$\int_0^R s |V(s)| ds < \infty \quad (\text{VII.2.17})$$

$$\int_R^\infty |V(s)| ds < \infty. \quad (\text{VII.2.18})$$

Dans ces conditions, la solution $\psi(\vec{k}, \vec{x}) = \psi^+(\vec{k}, \vec{x})$ possède le comportement asymptotique [GIL 63] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r^{(d-1)/2}} + o\left(r^{-\frac{d+1}{2}}\right) \quad (\text{VII.2.19})$$

où θ est l'angle défini par la relation $\vec{k} \cdot \vec{x} = k r \cos \theta$.

Le développement d'une onde plane dans un espace à d dimensions, peut s'écrire sous la forme :

$$e^{ikr \cos \theta} = \left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-2)/2} \Gamma\left[\frac{1}{2}(d-2)\right] \sum_{p=0}^{\infty} i^p \left(p + \frac{d-2}{2}\right) J_{p+(d-2)/2}(kr) \times C_p^{(d-2)/2}(\cos \theta) \quad (\text{VII.2.20})$$

où C_p^{d-2} représente le polynôme de Gegenbauer [ERD 53 p. 177] défini par la fonction génératrice :

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p C_p^{(d-2)/2}(\cos \theta) = (1 - 2r \cos \theta + r^2)^{-(d-2)/2}. \quad (\text{VII.2.21})$$

Les polynômes de Gegenbauer sont reliés aux polynômes de Jacobi par la relation (voir ERD 53 p. 174) :

$$(\lambda + 1/2)_p C_p^\lambda(x) = (2\lambda)_p P_p^{\alpha\alpha}(x). \quad (\text{VII.2.22})$$

Pour $d = 3$, nous retrouvons le résultat habituel $C_p^{1/2} = P_p$. La fonction de Bessel $J_{p+(d-2)/2}$ possède les comportements asymptotiques suivants :

$$J_{p+(d-2)/2}(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin \left[kr - \left(p + \frac{d-3}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] + e^{|\text{Im } kr|} o(|z|^{-1}) \quad (\text{VII.2.23})$$

($|\arg k| < \pi$
 $r > 0$)

$$\underset{r \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{kr}{r}\right)^{p+(d-2)/2} \frac{1}{\Gamma\left(p + \frac{d}{2}\right)}. \quad (\text{VII.2.24})$$

Nous introduisons la fonction de Bessel hypersphérique régulière $j_p(kr)$ définie par la relation (VIII.2.25)

$$j_p(kr) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-2)/2} J_{p+(d-2)/2}(kr) \quad (\text{VII.2.25})$$

qui possède les comportements suivants :

$$j_p(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-1)/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \left[kr - \left(p + \frac{d-3}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{VII.2.26})$$

$$\underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+d}{2}\right)} \left(\frac{kr}{2}\right)^p. \quad (\text{VII.2.27})$$

Le développement de l'onde plane peut donc encore s'écrire :

$$\exp [ikr \cos \theta] = \sum_p (2p + d-2) i^p j_p(kr) C_p^{(d-2)/2}(\cos \theta) \quad (\text{VII.2.28})$$

$$\begin{aligned} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_p (2p+d-2) i^p \left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-1)/2} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \frac{i}{2} [\exp \{-i[kr - (p + \frac{d-3}{2}) \frac{\pi}{2}]\}] \\ - \exp \{i[kr - (p + \frac{d-3}{2}) \frac{\pi}{2}]\}] C_p^{(d-2)/2}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{VII.2.29})$$

La fonction d'onde diffusée ψ_{Sc} s'écrira :

$$\psi_{Sc}(k, r) = \frac{\exp(ikr)}{r^{(d-1)/2}} f(k, \theta) \quad (\text{VII.2.30})$$

où l'amplitude de transition $f(k, \theta)$ est définie par la relation

$$f(k, \theta) = i \frac{2^{(d-5)/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(d-2)/2}{k^{(d-1)/2}} \sum_p (2p+d-2) \exp [i(d-3) \frac{\pi}{4}] (S_p^{-1}) C_p^{(d-2)/2}(\cos \theta) \quad (\text{VII.2.31})$$

où S_p est la matrice S pour l'onde p .

Les fonctions de Bessel hypersphériques, régulière j_p et irrégulière y_p , vérifient l'équation différentielle

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(d-1)}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{p(p+d-2)}{r^2} \right] \begin{Bmatrix} j_p \\ y_p \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{VII.2.32})$$

Généralement, on préfère utiliser les fonctions analogues aux fonctions de Riccati-Bessel

$$u_p = r^{(d-1)/2} j_p \quad (\text{VII.2.33})$$

et

$$v_p = r^{(d-1)/2} y_p \quad (\text{VII.2.34})$$

qui sont solutions de l'équation radiale réduite :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{p(p+d-2)}{r^2} - \frac{(d-1)(d-3)}{4r^2} \right] \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{VII.2.35})$$

Nous considérons à présent la solution régulière $\phi_p(k, r)$ et les solutions de Jost $f_p^\pm(k, r)$ de l'équation différentielle

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{(\nu^2 - 1/4)}{r^2} - V(r) \right] g_p(k, r) = 0$$

où $\nu = p + \frac{d-2}{2}$, avec les conditions aux limites habituelles.

Les équations intégrales équivalentes aux équations différentielles avec leurs conditions aux limites s'écrivent :

$$\phi_p(k, r) = \frac{u_p(k, r)}{k^{p+1}} + \int_0^r G_p(k, r, s) V(s) \phi_p(k, s) ds$$

$$f_p^\pm(k, r) = h_p^\pm(k, r) - \int_r^\infty G_p(k, r, s) V(s) f_p^\pm(k, s) ds.$$

Le potentiel possède les propriétés (VII.2.17 et 18) qui assurent l'existence des fonctions $\phi_p(k, r)$, $f_p^\pm(k, r)$ ainsi que leurs propriétés habituelles étudiées au chapitre I.

§ 3. ETUDE DES OPERATEURS DE TRANSFORMATION (CAS NON COUPLE)

Etant assurés de l'existence et des propriétés analytiques de la solution régulière et des solutions de Jost, nous considérons à présent l'existence des opérateurs de transformation dans le cas non couplé. Alors que l'existence et les propriétés des solutions ne dépendent que des propriétés des fonctions de Bessel qui sont indépendantes des valeurs particulières de p , l'existence d'un opérateur de transformation dépendra des propriétés des fonctions de Legendre d'ordre p , qui changent suivant que p est un entier ou un demi-entier.

Nous considérons l'opérateur différentiel de référence

$$L(x) = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} \quad (\text{VII.3.1})$$

où

$$\lambda = \nu - 1/2 = p + \frac{d-3}{2}. \quad (\text{VII.3.2})$$

Les noyaux des opérateurs de transformation sont solutions de l'équation de Darboux habituelle :

$$L(x)K(x, y) = L(y)K(x, y) + V(x)K(x, y) \quad (\text{VII.3.3})$$

avec les conditions aux limites :

- cas de la solution irrégulière (Marchenkò)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K_M(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K_M(x, y) = 0 \quad (\text{VII.3.4})$$

$$K_M(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty V(s) ds \quad y \geq x \quad (\text{VII.3.5})$$

- cas de la solution régulière (Gel'fand-Levitan)

$$\lim_{y \rightarrow 0} K_G(x, y) = 0 \quad (\text{VII.3.6})$$

$$K_G(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x V(s) ds \quad x \geq y. \quad (\text{VII.3.7})$$

Nous avons montré au chapitre V que les équations aux dérivées partielles (VII.3.3), avec les conditions aux limites (VII.3.4-7), sont équivalentes aux équations intégrales :

$$K_M(x, y) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} du ds r(s, u; x, y) V(s) K(s, u) + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty ds r(s, s; x, y) V(s) \\ + \lim_{s \rightarrow \infty} K(s, s) r(s, s; x, y) - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\frac{s+x-y}{2}}^{s/2} dt K(t, s-t) \frac{d}{dt} r(t, s-t; x, y) \quad (\text{VII.3.8})$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} du ds r(s, u; x, y) V(s) K(s, u) + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty ds r(s, s; x, y) V(s) \quad (\text{VII.3.9})$$

car nous supposons que $K_M(x, y)$ décroît suffisamment rapidement pour $(x+y) \rightarrow \infty$ (cette hypothèse sera justifiée plus tard).

$$K_G(x, y) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_G} du ds r(s, u; x, y) V(s) K_G(s, u) + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} ds r(s, s; x, y) V(s) \\ + \int_{\frac{x-y}{2}}^{x-y} ds K_G(s, x-y-s) \frac{d}{ds} r(s, x-y-s; x, y). \quad (\text{VII.3.10})$$

Dans le cas non couplé, considéré dans ce paragraphe, la fonction de Riemann $r(s, u; x, y)$ est donnée par la relation suivante :

$$r(s, u; x, y) = P_{\lambda} \left(\frac{1-2x_1 - 2x_2 + 2x_1 x_2}{1-2z} \right) = P_{\lambda}(1-2z) \quad (\text{VII.3.11})$$

où nous rappelons que

$$z = \frac{(\eta_0^2 - \eta^2)(\xi_0^2 - \xi^2)}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)} \quad (\text{VII.3.12})$$

P_{λ} représente la fonction de Legendre d'ordre $\lambda = p + \frac{d-3}{2}$ qui est un entier (demi-entier) si la dimension de l'espace considéré est impaire (paire respectivement).

Le long de la droite $(x-y = u+s)$, $(1-2z)$ vaut (-1) ; par conséquent, pour λ entier (espace de dimension impaire), nous pouvons écrire :

$$r(s, u; x, y) = P_{\lambda}(-1) = (-1)^{\lambda} \quad \text{si } x-y = u+s \quad (\text{VII.3.13})$$

et

$$K_G(x, y) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_G} ds du r(s, u; x, y) V(s) K(s, u) + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} ds r(s, s; x, y) V(s) \quad (\text{VII.3.14})$$

(d impair).

Si λ est un demi-entier (d pair), $P_{\lambda}(1-2z)$ n'est pas défini pour $z = +1$; par conséquent, la représentation des solutions régulières pour des espaces de dimensions paires ne peut être étudiée par la méthode des fonctions de Riemann et ne sera pas considérée ici. Par contre, la méthode de Marchenko peut être étendue à des espaces qui ont une dimension de parité quelconque.

A. Représentation de Marchenko

Dans le domaine de Marchenko, l'argument $X = 1-2z$ de la fonction de Riemann vérifie l'inégalité démontrée au chapitre V :

$$1 \leq 1-2z \leq 2 \frac{(\eta+\xi)(\eta-\xi)}{(\eta-\xi)(\eta+\xi)} \quad (\text{VII.3.15})$$

Par conséquent, en utilisant la représentation intégrale de Laplace pour la fonction de Legendre, nous obtenons :

$$|R^M(\eta_0, \xi_0, \eta, \xi)| \leq [4 \frac{(\eta+\xi)(\eta-\xi)}{(\eta-\xi)(\eta+\xi)}]^{\text{Re } \lambda} \quad (\text{VII.3.16})$$

L'équation intégrale (VII.3.9) est du type de Volterra et peut par conséquent être résolue par la méthode des approximations successives qui nous fournit les bornes suivantes :

$$\begin{aligned}
 |K_M(\eta, \xi)| &\leq \frac{1}{2} \sigma_0(\eta) \left[4 \frac{(\eta+\xi)}{(\eta-\xi)} \right]^\lambda \exp \left[4^\lambda \int_\eta^\infty d\eta_0 \int_0^\xi d\xi_0 |V(\eta_0 - \xi_0)| \right] \\
 &\leq \frac{1}{2} \sigma_0(\eta) \left[4 \frac{(\eta+\xi)}{(\eta-\xi)} \right]^\lambda \exp \{ 4^\lambda [\sigma^{(1)}(\eta-\xi) - \sigma^{(1)}(\eta)] \}. \quad (\text{VII.3.17})
 \end{aligned}$$

Nous devons à présent justifier le fait que nous pouvons laisser tomber les termes en $\lim_{s \rightarrow \infty} \dots$ dans l'équation intégrale (VII.3.8). Comme

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = P_\lambda \left[1 + 2 \frac{(\xi_0^2 - \xi^2)}{(\eta^2 - \xi^2)} \right] \quad \text{et}$$

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\eta_0, \xi_0; \eta, \xi) = -4 \frac{P'_\lambda \left[1 + 2 \frac{(\xi_0^2 - \xi^2)}{(\eta^2 - \xi^2)} \right] \frac{\xi_0}{(\eta^2 - \xi^2)}}{\lambda}$$

les termes en $\lim \dots$ dans l'équation (VII.3.8) disparaissent car

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} |K_M(\eta, \xi)| \propto \lim_{\eta \rightarrow \infty} \sigma_0(\eta) = 0.$$

L'existence d'un noyau K_M borné et intégrable est donc démontrée quel que soit λ c'est-à-dire quelle que soit la dimension d de l'espace ($d \geq 2$), si le potentiel V possède un moment d'ordre λ à l'infini.

B. Représentation de Gel'fand

Dans ce paragraphe, nous avons été amenés à distinguer les espaces de dimensions paires et impaires pour la représentation de Gel'fand. Pour λ non entier (d pair), la méthode de Riemann ne peut pas être appliquée pour la recherche d'une borne pour l'opérateur de transformation. Par contre, si λ est un entier (c'est-à-dire d impair) et si les moments d'ordre zéro et d'ordre un existent pour le potentiel, nous obtenons par la méthode développée au chapitre V, la borne

$$|K_G(x, y)| \leq \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{x+y}{2} \right) \exp [\rho_1(x)].$$

§ 4. OPERATEURS DE TRANSFORMATION POUR UN POTENTIEL A SYMETRIE AXIALE

L'étude développée au paragraphe précédent peut s'étendre sans difficulté à un hamiltonien généralisé à symétrie axiale, introduit par Gilbert et Weinstein [GIL 63] et qui prend la forme :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{s}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + k^2 - \tilde{V} \right] \psi = 0 \quad (\text{VII.4.1})$$

où s est une constante > -1 . Nous définissons les coordonnées zonales :

$$x_i = r \xi_i \quad (i = 1, n), \quad (\text{VII.4.2})$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \rho^2, \quad (\text{VII.4.3})$$

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (\text{VII.4.4})$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad (\text{VII.4.5})$$

$$\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \quad (\text{VII.4.6})$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \rho). \quad (\text{VII.4.7})$$

L'équation (VII.4.1) peut s'obtenir à partir de l'équation de Schrödinger dans un espace à $d = n+s+1$ dimensions. La réduction que nous avons considérée auparavant correspond au choix $n=0$, $s = d-1$. En fonction des coordonnées r et $\vec{\xi}$, nous obtenons :

$$r^2 [\Delta_d + k^2 - \tilde{V}(r, \vec{\xi})] \psi(r, \vec{\xi}) = \frac{1}{r^{n+s-2}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{n+s} \frac{\partial \psi}{\partial r}) + r^2 [k^2 - \tilde{V}(r, \vec{\xi})] - n(s-1)\psi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} - \xi_j \left[\sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} + (s-1)\psi \right] \right\} = 0. \quad (\text{VII.4.8})$$

La fonction $\psi(\vec{x}, r)$ possède le comportement asymptotique :

$$\psi(\vec{x}, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + f(\vec{k}, \vec{\theta}) \frac{e^{ikr}}{r^{\frac{n+s}{2}}} + O\left(\frac{1}{r^{\frac{n+s}{2} + 1}}\right). \quad (\text{VII.4.9})$$

Dans ce cas-ci, $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ possède le développement :

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} = \left(\frac{2}{kr}\right)^{\frac{n+s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) \sum_{\vec{M}} i^m \left(m + \frac{n+s-1}{2}\right) \vec{k}^{\vec{M}} k^{-m} J_{m+\frac{(n+s-1)}{2}}(kr) V_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi}) \quad (\text{VII.4.10})$$

où

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (\text{VII.4.11})$$

$$\vec{M} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \quad (\text{VII.4.12})$$

$$\vec{k}^{\vec{M}} = \prod_i k_i^{m_i} \quad (\text{VII.4.13})$$

$V_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi})$ sont des polynômes étudiés par Gilbert et définis par la fonction génératrice :

$$(1 - 2\vec{a}\vec{\xi} + |\vec{a}|^2)^{-\frac{n+s-1}{2}} = \sum_{\vec{M}=0}^{\infty} \frac{\vec{a}^{\vec{M}}}{a^{\vec{M}}} V_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi}) \quad (\text{VII.4.14})$$

où

$$\vec{a}^{\vec{M}} = a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} \quad (\text{VII.4.15})$$

Définissant la fonction de Bessel sphérique généralisée :

$$j_m^{(n,s)}(kr) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) \left(\frac{2}{kr}\right)^{\frac{n+s-1}{2}} J_{m+\frac{(n+s-1)}{2}}(k,r) \quad (\text{VII.4.16})$$

et

$$y_m^{(n,s)}(r) = i^m r^{\frac{n+s}{2}} (2m + n + s - 1) J_{m+\frac{n+s-1}{2}}(k,r) \quad (\text{VII.4.17})$$

Nous pouvons écrire :

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} = \sum_{\vec{M}} \frac{y_m^{(n,s)}(r)}{r^{\frac{n+s}{2}}} V_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi}) \quad ; \quad (\text{VII.4.18})$$

si

$$\tilde{V}(r, \vec{\xi}) = V(r) + W(\vec{\xi}), \quad (\text{VII.4.19})$$

les variables r et $\vec{\xi}$ deviennent séparables dans l'équation aux dérivées partielles. Si $W(\vec{\xi}) = 0$, la fonction d'onde $\psi(\vec{X})$ peut se mettre sous la forme

$$\psi(\vec{X}) = \frac{1}{\frac{n+s}{2}} \int_r y_m(r) v_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi}) \quad (\text{VII.4.20})$$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{X}) &= \frac{1}{\frac{n+s}{2}} \int_r y_m^{(n,s)}(r) v_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi}) \\ &+ \frac{1}{\frac{n+s}{2}} \int_r y_m^{SC}(r) v_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{VII.4.21})$$

$$\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{\frac{n+s}{2}} f(\vec{k}, \vec{\xi}) \quad (\text{VII.4.22})$$

où

$$f(\vec{k}, \vec{\xi}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{n+s}{2}} \int_{\vec{M}} (2m+n+s-1) e^{i\delta_m} \sin\left\{\delta_m + \frac{\pi}{4}(n+s-2)\right\} v_{\vec{M}}^{(s)}(\vec{\xi}). \quad (\text{VII.4.23})$$

La fonction $y_m(r)$ doit vérifier l'équation différentielle réduite suivante :

$$\frac{d^2}{dy^2} + \left[k^2 - V(r) - \frac{m(m+n+s-1)}{r^2} + \frac{\left(\frac{n+s}{2}\right)\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}{r^2} \right]_{y=0} \quad (\text{VII.4.24})$$

et doit posséder le comportement asymptotique :

$$y_m(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{G_m}{i2} \left[e^{ikr - (im\pi)/2 + i\delta_m} - e^{-ikr + (im\pi)/2 - i\delta_m} \right] \quad (\text{VII.4.25})$$

où

$$G_m = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i(2m+n+s-2)\frac{\pi}{4}} (2m+n+s-1) \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{n+s}{2}} e^{i\delta_m}. \quad (\text{VII.4.26})$$

La méthode développée au paragraphe précédent s'applique au problème considéré ici. La méthode de Riemann permet d'obtenir les opérateurs de transformation

du type de Marchenko. Les résultats obtenus restent valables avec une valeur de λ appropriée soit $\lambda = m + \frac{n+s}{2} - 1$. La méthode de Riemann peut s'appliquer à l'opérateur de transformation de Gel'fand si λ est un entier. Les résultats relatifs à ce paragraphe ont été publiés dans [COZ 77a].

§ 5. OPERATEURS DE TRANSFORMATION POUR DES EQUATIONS COUPLEES DANS UN ESPACE

A d DIMENSIONS

L'étude des opérateurs de transformation pour la diffusion dans un espace à d dimensions que nous avons considérée dans les paragraphes précédents, peut sembler assez académique lorsque la dimension d de l'espace est supérieure à trois. Il existe cependant des applications de ce problème en physique nucléaire comme le problème à N corps, qui prend la forme d'une équation aux dérivées partielles à d variables. Lorsque nous développons la fonction d'onde sur une base complète de fonctions sturmiennes [ROT 62] ou hypersphériques [FAB 71], l'hamiltonien à N corps est transformé en un ensemble d'équations différentielles couplées du même type que celles rencontrées dans les paragraphes précédents. Le choix approprié de la base et des variables indépendantes dépend des symétries du problème considéré. Ce système d'équations couplées est en général infini mais nous supposons que le problème peut être étudié, dans le domaine d'énergie considéré, à partir d'un système fini, tronqué, de n équations couplées.

Nous développons la fonction d'onde en variables hypersphériques :

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{\nu\alpha} P_{\nu\alpha}(\Omega) R_{\nu}(r) \frac{1}{r^{(d-1)/2}} \quad (\text{VII.5.1})$$

où nous avons utilisé les hypersphériques d'ordre ν et où α représentent les nombres quantiques définissant les différents états. Notant $i \equiv (\nu, \alpha)$, $j \equiv (\mu, \beta)$, les éléments de matrice entre les voies i et j sont définis par les intégrales :

$$V_{ij}(r) = \int P_{\nu\alpha}(\Omega) V(\vec{x}) P_{\mu\beta}(\Omega) d\Omega. \quad (\text{VII.5.2})$$

Appelant

$$\lambda_i = p_i + \frac{d-3}{2}, \quad (\text{VII.5.3})$$

nous sommes amenés à considérer le système d'équations couplées :

$$L_i(x)u_i(x) + V_{ii}(x)u_i(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} + k_i^2 - \frac{\lambda_i(\lambda_i+1)}{x^2} + V_{ii}(x) \right] u_i(x)$$

$$= \sum_{j \neq i} V_{ij}(x)u_j(x) \quad (\text{VII.5.4})$$

où

$$\frac{\hbar^2}{2M} k_i^2 = (E - E_i) ; \quad (\text{VII.5.5})$$

E représente l'énergie incidente et E_i l'énergie de seuil de la voie i .
La fonction de Riemann correspondant à l'équation (VII.5.4) vérifie l'équation :

$$L_i(x)R_{ij}(x, y; s, u) = L_j(y)R_{ij}(x, y; s, u). \quad (\text{VII.5.6})$$

La fonction de Riemann s'écrit dans le cas $k_i = k_j$:

$$R_{ij}^0(x, y; s, u) = P_{\lambda_i}(1-2x_1) - 2x_2 \int_0^1 P_{\lambda_i}(1-2x_1+2x_1 t)$$

$$P_{\lambda'}(1-2x_2 t) dt = P_{\lambda_j}(1-2x_2) - 2x_1 \int_0^1 P_{\lambda_j}(1-2x_2 t) P_{\lambda_i}(1-2x_1+2x_1 t) dt. \quad (\text{VII.5.7})$$

La fonction de Riemann complète vérifie l'équation intégrale :

$$R_{ij}(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) = R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_0, \xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 R_{ij}^0(\eta, \xi; \eta_1, \xi_1)$$

$$\{k_i^2 - k_j^2\} R_{ij}(\eta_1, \xi_1; \eta_0, \xi_0). \quad (\text{VII.5.8})$$

Nous considérons séparément les représentations de Marchenko et de Gel'fand.

A. Représentation de Marchenko

Quelle que soit la dimension d de l'espace, la méthode du chapitre VI, conduit à un ensemble de résultats que nous pouvons résumer dans le théorème suivant : si le système d'équations couplées est fini et si les σ^{λ} intervenant dans les formes ci-après existent, nous obtenons les bornes suivantes :

$$|K_{ij}(x, y)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\lambda_i} \sigma^{\lambda_i} \left(\frac{x+y}{2}\right) \exp [\sigma^{(|\lambda_i - \lambda_j| + 1)}(x)], \quad (\text{VII.5.9})$$

$$||K(x, y)|| \leq \frac{n}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda_{\max}} \sigma^0 \left(\frac{x+y}{2}\right) \exp [\sigma^0(x) \frac{(y-x)}{2}] \quad (\text{VII.5.10})$$

ou

$$||K(x, y)|| \leq \frac{n}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda_{\max}} \sigma^0 \left(\frac{x+y}{2}\right) \exp [\sigma^1(x)]$$

$$\leq \frac{2^{\lambda_{\max} - 1}}{\lambda_{\max} x} n \sigma^{\lambda_{\max}} \left(\frac{x+y}{2}\right) \exp [\sigma^1(x)] \quad (\text{VII.5.11})$$

$$\sigma^{\lambda} \left(\frac{x+y}{2}\right) = \text{Sup}_i \sum_{j=1}^n \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} \eta_0^{\lambda} 4^{\lambda_i} |U_{ij}(\eta_0)| \exp [2\mu_i(\eta_0 - \xi_0)] \quad (\text{VII.5.12})$$

$$\mu_i^2 = \max_j (4^{\lambda_i} |k_i^2 - k_j^2|). \quad (\text{VII.5.13})$$

Nous pouvons également obtenir des bornes pour les dérivées de K , comme dans le cas $d = 3$. Si le nombre d'équations couplées devient infini, il faut imposer que V possède une norme finie

$$||V|| = \text{Sup}_{1 \leq i < \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |v_{ij}| < \infty. \quad (\text{VII.5.14})$$

Il faut également exiger l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \sigma^{(|\lambda_i - \lambda_j| + 1)}(x) \quad (\text{VII.5.15})$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma^{\lambda_i} \left(\frac{x+y}{2}\right). \quad (\text{VII.5.16})$$

B. Représentation de Gel'fand

Pour les mêmes raisons que précédemment, la méthode de Riemann ne peut être utilisée que pour des espaces de dimension impaire. Lorsque d est impair et pour $x_2 = 1$ la fonction de Riemann $R_{ij}(x, y; s, u)$ n'est plus constante et par conséquent, il existe une contribution provenant de l'intégration sur le segment de droite $u+s = x-y$. L'équation intégrale s'écrit :

$$K_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} R_{ij}(x, y; s, s) V_{ij}(s) + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_G} R_{ij}(x, y; s, u) \sum_k V_{ik}(s) K_{kj}(s, u) du ds + \int_{(x-y)/2}^{(x-y)} \frac{d}{ds} R_{ij}(x, y; s, -s+x-y) K_{ij}(s, -s+x-y) ds.$$

(VII.5.17)

Lorsque toutes les voies sont couplées au même moment angulaire λ_i et lorsque toutes les énergies de seuils sont égales, la dernière intégrale dans l'expression (VII.5.17) est nulle et la méthode habituelle des approximations successives nous fournit une borne pour l'opérateur de transformation si le potentiel possède des moments d'ordre zéro et un. Dans le cas général, le dernier terme du membre de droite de l'équation (VII.5.17) ne s'annule pas et il est difficile d'appliquer la méthode des approximations successives. L'équation (VII.5.17) suggère cependant que le noyau $K_{ij}(x, y)$ pourrait exister dans des conditions très générales, indépendantes de λ , car la borne pour R_{ij} est indépendante de λ dans le domaine de Gel'fand.

§ 6. CONCLUSIONS

Nous avons considéré l'existence d'opérateurs de transformation dans un espace à d dimensions ($d > 1$), lorsque le potentiel possède la symétrie hypersphérique $V(\vec{x}) = V(x)$. Le problème de la représentation des solutions régulières (de Gel'fand) est tout à fait différent de celui de la représentation des solutions irrégulières (de Marchenko). La différence essentielle provient du type de domaine utilisé dans les deux représentations : le domaine est borné dans un cas et infini dans l'autre. Si dans le cas scalaire et pour d impair, la méthode de Riemann nous permet de comparer les deux représentations, la comparaison n'est en général plus possible dans le cas matriciel. La parité de la dimension d de l'espace considéré est importante dans le cas de la représentation de Gel'fand : la méthode de Riemann ne marche que si d est impair. Pour la représentation de Marchenko, nous avons obtenu des bornes pour le noyau de transformation dans tous les cas, ces bornes sont similaires à celles obtenues dans le cas $d = 3$ (chapitres V et VI).

CHAPITRE VIII : OPERATEURS DE TRANSFORMATION POUR

DES INTERACTIONS DEPENDANT DES VITESSES

§ 1. INTRODUCTION

Nous étudions dans ce chapitre l'existence d'opérateurs de transformation pour une équation différentielle de Schrödinger qui contient une dérivée première ou un terme linéaire en k . Dans le cas d'une équation contenant une masse effective ou de façon équivalente un potentiel dépendant des vitesses, nous pouvons utiliser la méthode de Riemann que nous avons généralisée au chapitre III et appliquer la méthode des approximations successives. Cette méthode n'est cependant applicable que si la forme explicite de la masse effective est donnée. Nous avons préféré considérer le cas où la masse effective vérifie quelques conditions générales mais n'est pas davantage précisée ; nous avons appliqué à l'équation de Schrödinger deux types différents de transformations.

La première méthode considérée au paragraphe 3, transforme la masse effective donnée en une interaction dépendant de l'énergie. La seconde transformation développée au paragraphe 4, conduit à un potentiel dépendant du moment angulaire. Les avantages respectifs des deux types de transformation sont discutés et une extension de la transformation est proposée pour un système d'équations couplées. Les conditions d'existence d'un opérateur de transformation pour l'équation transformée sont alors recherchées. Cette méthode permet de se ramener à un cas déjà étudié [ROC 79a]. Au paragraphe 5, nous considérons directement l'existence d'un opérateur de transformation pour l'équation de départ sans transformation préliminaire. Cette étude est possible dans un cas simplifié. Au paragraphe 6, nous établissons une équation intégrale pour l'opérateur de transformation correspondant à un potentiel ayant une dépendance linéaire en k . Cette équation intégrale permet l'étude des conditions d'existence d'un opérateur de transformation et se réduit dans un cas particulier à l'équation de Jaulent-Jean [JAU 76]. Le paragraphe 7 contient les conclusions du chapitre.

§ 2. NOTATIONS

Dans l'espace à d dimensions, l'équation de Schrödinger contenant une masse effective s'écrit :

$$(\vec{\nabla}[1+p(r)]\vec{\nabla} - U(r)+E)\psi(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0. \quad (\text{VIII.2.1})$$

Dans l'équation (VIII.2.1), nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right) \quad (\text{VIII.2.2})$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2. \quad (\text{VIII.2.3})$$

Une décomposition en ondes partielles conduit à l'équation radiale suivante :

$$\left[\frac{d}{dr} [1+p(r)] \frac{d}{dr} - [1+p(r)] \frac{v(v+1)}{r^2} - W + k^2 \right] u_m(r) = 0 \quad (\text{VIII.2.4})$$

$$v = m + (d-3)/2 \quad (\text{VIII.2.5})$$

et

$$W(r) = U(r) + \frac{(d-1)}{2} \frac{p'}{r}. \quad (\text{VIII.2.6})$$

Généralement, la fonction $p(r)$ est proportionnelle à la densité $\rho(r)$ du milieu ; nous supposons que :

$$\left[\frac{d}{dr} p(r) \right]_{r=0} = 0 \quad (\text{VIII.2.7})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [e^{\alpha r} p(r)] = 0 \quad (\text{VIII.2.8})$$

$$1 + p(r) > 0 \quad \forall r \in [0, \infty[\quad (\text{VIII.2.9})$$

Avec ces conditions (VIII.2.7-9), la masse effective n'introduit pas de singularité dans l'équation différentielle.

§ 3. PREMIERE METHODE

Le facteur $[1 + p(r)]$ est le wronskien de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (VIII.2.4). Nous effectuons le changement de fonctions :

$$u_m(r) = [1 + p(r)]^{-1/2} v_m(r) \quad (\text{VIII.3.1})$$

qui correspond exactement à la transformation d'un potentiel non-local à son

équivalent local [COZ 70]. L'équation différentielle (VIII.2.4) après ce changement de fonction s'écrit :

$$A v_m(r) = \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} - W(r, k^2) + k^2 \right\} v_m(r) = 0 \quad (\text{VIII.3.2})$$

où

$$\begin{aligned} W(r, k^2) \equiv & -[1 + p(r)]^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} p'' + \frac{1}{4} p'^2 [1 + p(r)]^{-1} \right. \\ & \left. - \frac{(n-1)}{2} \frac{p'}{r} \right\} + [1 + p(r)]^{-1/2} U(r) [1 + p(r)]^{-1/2} \\ & + k^2 p(r) [1 + p(r)]^{-1} \equiv W_0(r) + W_1(r) + k^2 W_2(r). \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.3})$$

Après ces transformations, nous pouvons rechercher les conditions d'existence d'un opérateur de transformation par rapport à l'opérateur de référence A_0 :

$$A_0 \equiv \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} + k^2. \quad (\text{VIII.3.4})$$

Pour simplifier l'étude, nous ne considérons que les solutions de Jost v_{om} et v_m vérifiant les équations :

$$A_0 v_{om}(r) = 0, \quad A v_m(r) = 0 \quad (\text{VIII.3.5})$$

et l'opérateur de transformation $(I+K)$ du type de Marchenko qui permet d'écrire :

$$v_m(x) = v_{om}(x) + \int_x^\infty K(k^2; x, y) v_{om}(y) dy. \quad (\text{VIII.3.6})$$

Le noyau de transformation vérifie les équations :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} - W(x, k^2) \right] K(k^2; x, y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{y^2} \right] K(k^2; x, y), \quad (\text{VIII.3.7})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K(k^2; x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K(k^2; x, y) = 0, \quad (\text{VIII.3.8})$$

$$K(k^2; x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty W(s, k^2) ds. \quad (\text{VIII.3.9})$$

Grâce à la fonction de Riemann R définie plus tôt :

$$R \equiv P_{\nu} (1 - 2x_1 - 2x_2 + 2x_1 x_2), \quad (\text{VIII.3.10})$$

les équations (VIII.3.7-9) peuvent être remplacées par l'équation intégrale équivalente :

$$K(k^2; x, y) = \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} R(x, y; s, x) W(s, k^2) ds \quad (\text{VIII.3.11})$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} R(x, y; s, u) W(s, k^2) K(k^2; s, u) du ds.$$

L'étude que nous avons faite précédemment, permet de conclure qu'il existe un opérateur de transformation si le potentiel $W(x, k^2)$ possède un moment d'ordre ν [COZ 77b]. Comme W_0 et W_2 ne contiennent que le facteur de forme $p(r)$ et ses dérivées, la condition se réduit simplement à imposer que le potentiel de départ $U(r)$ possède un moment d'ordre ν à l'infini. Nous pouvons nous poser la question de savoir si l'opérateur K obtenu est une fonction analytique de l'énergie $\lambda = k^2$. Il suffit pour le voir de considérer la nouvelle fonction

$$L(\lambda, x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} K(x, y; k^2) \quad (\text{VIII.3.12})$$

qui vérifie l'équation intégrale :

$$L(\lambda, x, y) = \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} R(x, y; s, s) p(s) [1+p(s)]^{-1} ds + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} R(x, y; s, u) p(s) [1+p(s)]^{-1} K(\lambda; s, u) ds du + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} R(x, y; s, u) W(s, \lambda) L(\lambda; s, u) ds du. \quad (\text{VIII.3.13})$$

L'équation intégrale (VIII.3.13) peut être résolue par la méthode des approximations successives et la borne :

$$(x)^{\nu} |K(\lambda; x, y)| \leq \frac{1}{2} \sigma_{\nu} \left(\frac{x+y}{2} \right) \exp \sigma_1(x) \quad (\text{VIII.3.14})$$

peut être utilisée pour obtenir une estimation du terme d'ordre zéro :

$$L_0(\lambda, x, y) = \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} ds R(x, y; s, s) p(s) [1+p(s)]^{-1} + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} R(x, y; s, u) p(s) [1+p(s)]^{-1} \times K(\lambda, s, u) du ds. \quad (\text{VIII.3.15})$$

A partir des équations (VIII.3.14) et (VIII.3.15), il est aisé de montrer que la fonction $K(\lambda, x, y)$ est analytique en λ .

La méthode qui vient d'être exposée s'applique aussi à des systèmes d'équations couplées de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [1+p_i(r)] \frac{d}{dr} u_i(r) - [1+p_i(r)] \frac{v_i(v_i+1)}{r^2} u_i(r) \\ - \frac{(d-1)}{2} \frac{p_i'(r)}{r} u_i(r) - \sum_j U_{ij}(r) u_j(r) + k_i^2 u_i(r) = 0, \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.16})$$

où u_i représente une matrice $n \times n$. Nous effectuons le changement de fonction matricielle

$$v_i(x) = [1+p_i(x)]^{-1/2} u_i(x), \quad (\text{VIII.3.17})$$

qui conduit à l'équation :

$$\frac{d^2}{dx^2} v_i(x) - \left[\frac{v_i(v_i+1)}{x^2} + W_i^{(0)}(x) + k_i^2 W_i^{(2)}(x) \right] v_i(x) - \sum_j W_{ij}^{(1)}(x) v_j(x) + k_i^2 v_i(x) = 0 \quad (\text{VIII.3.18})$$

où

$$W_i^{(0)}(x) = [1+p_i(x)]^{-1} \left(-\frac{1}{2} p_i'' + \frac{1}{4} p_i'^2 [1+p_i(x)]^{-1} - \frac{(d-1)}{2} \frac{p_i'(x)}{x} \right) \quad (\text{VIII.3.19})$$

$$W_{ij}^{(1)}(x) = [1+p_i(x)]^{-1/2} U_{ij}(x) [1+p_j(x)]^{-1/2} \quad (\text{VIII.3.20})$$

$$W_i^{(2)}(x) = p_i(x) [1+p_i(x)]^{-1}. \quad (\text{VIII.3.21})$$

Nous définissons les matrices

$$W_{ij}^{(0)}(x) = W_i^{(0)}(x) \delta_{ij}, \quad (\text{VIII.3.22})$$

$$W_{ij}^{(1)}(x) = W_{ij}^{(1)}(x), \quad (\text{VIII.3.23})$$

$$W_{ij}^{(2)}(x) = W_i^{(2)}(x) \delta_{ij}, \quad (\text{VIII.3.24})$$

$$\Lambda_{ij} = v_i(v_i+1) \delta_{ij}, \quad (\text{VIII.3.25})$$

$$k_{ij}^2 = k_i^2 \delta_{ij}. \quad (\text{VIII.3.26})$$

et les deux opérateurs :

$$A_0 = \frac{d^2}{dx^2} + k^2 - \frac{\Lambda}{x^2}, \quad (\text{VIII.3.27})$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + k^2 - \frac{\Lambda}{x^2} + W^{(0)}(x) + k^2 W^{(2)}(x) + W^{(1)}(x). \quad (\text{VIII.3.28})$$

Le noyau de transformation doit vérifier les équations :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 - \frac{\Lambda}{x^2} - W^{(0)}(x) - k^2 W^{(2)}(x) - W^{(1)}(x) \right) K(x, y)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) K(x, y) + K(x, y) \left(k^2 - \frac{\Lambda}{y^2} \right).$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K(x, y) = 0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K(x, y),$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty [W^{(0)}(s) + W^{(1)}(s) + k^2 W^{(2)}(s)] ds.$$

L'existence d'un opérateur de transformation du type de Marchenko peut être étudiée par la méthode de Riemann et des conditions d'existence similaires à celles obtenues au chapitre VII peuvent être démontrées [COZ 77b].

§ 4. DEUXIEME METHODE (TRANSFORMATION DE LIOUVILLE)
 ++++++

Bien que moins générale que la première, la seconde méthode présente l'avantage de ne pas introduire une dépendance vis-à-vis de l'énergie dans l'interaction transformée et par conséquent dans le noyau de transformation. Les limitations de cette méthode viennent, premièrement, du fait qu'il faut imposer la même masse effective dans toutes les voies et deuxièmement, du fait que le potentiel transformé décroît en $\frac{1}{x^3}$ à l'infini.

La seconde méthode possède cependant suffisamment d'intérêt pour être développée pour ses propres mérites. La transformation de Liouville se fait en deux étapes.

La première étape consiste à faire le changement de variable :

$$x = \int_0^x \frac{dt}{[1+p(t)]^{1/2}} \quad (\text{VIII.4.1})$$

qui est biunivoque puisque $1+p(t) > 0$. Comme la fonction $p(t)$ tend vers zéro pour t infini, nous pouvons écrire :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dx}{dr} = \frac{1}{[1+p(r)]^{1/2}} = 1 \quad (\text{VIII.4.2})$$

et aussi

$$x = r + \int_0^r \{ [1+p(t)]^{-1/2} - 1 \} dt, \quad (\text{VIII.4.3})$$

si nous posons

$$\dot{p} = \frac{d}{dx} p[r(x)], \quad (\text{VIII.4.4})$$

nous obtenons :

$$\frac{d}{dr} (1+p) \frac{d}{dr} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+p} \dot{p} \frac{d}{dx}. \quad (\text{VIII.4.5})$$

et l'équation (VIII.2.4) devient :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{p}}{1+p} \frac{d}{dx} - (1+p) \frac{v(v+1)}{r^2(x)} - W(x) + k^2 \right) u_m(x) = 0 \quad (\text{VIII.4.6})$$

où

$$W(x) = U(x) + \frac{(d-1)}{2} \frac{p'}{r} = U(x) + \frac{(d-1)}{2} \frac{\dot{p}}{r} (1+p)^{-1/2}. \quad (\text{VIII.4.7})$$

La seconde étape de la transformation de Liouville est de renormaliser la fonction d'onde radiale afin d'éliminer des équations, la dépendance vis-à-vis des vitesses. Dans ce but, nous définissons la fonction :

$$u_m(x) = (1+p)^{-1/4} v_m(x) \quad (\text{VIII.4.8})$$

et utilisons les relations :

$$\frac{d}{dx} u = (1+p)^{-1/4} \frac{d}{dx} v - \frac{1}{4} \dot{p} (1+p)^{-5/4} v, \quad (\text{VIII.4.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u &= (1+p)^{-1/4} \frac{d^2}{dx^2} v - \frac{1}{2} \dot{p} (1+p)^{-5/4} \frac{d}{dx} v + \frac{5}{16} \dot{p}^2 (1+p)^{-9/4} v \\ &\quad - \frac{1}{4} (1+p)^{-5/4} \ddot{p} v. \end{aligned} \quad (\text{VIII.4.10})$$

L'équation différentielle (VIII.4.6) devient :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - [1+p(x)] \frac{v(v+1)}{r^2(x)} - v + k^2\right) v_m = 0 \quad (\text{VIII.4.11})$$

où

$$v = (1+p)^{1/4} U(x)(1+p)^{-1/4} + \frac{(d-1)}{2} \frac{\dot{p}}{r} (1+p)^{-1/2} - \frac{1}{16} [3\dot{p}^2(1+p)^{-1} - 4\ddot{p}] (1+p)^{-1}. \quad (\text{VIII.4.12})$$

Lorsque x tend vers l'infini, la barrière centrifuge se comporte comme

$$\frac{v(v+1)}{(x+c)^2} \quad (\text{VIII.4.13})$$

où

$$c = \int_0^\infty \{1 - [1+p(t)]^{-1/2}\} dt. \quad (\text{VIII.4.14})$$

De la même façon, un développement de Taylor nous donne pour x voisin de l'origine :

$$r(x) \rightarrow x \left. \frac{dr}{dx} \right|_{x=0} = x[1+p(0)]^{1/2}. \quad (\text{VIII.4.15})$$

La barrière centrifuge à l'origine est donc

$$[1+p(0)] \frac{v(v+1)}{x^2[1+p(0)]} \equiv \frac{v(v+1)}{x^2} \quad (\text{VIII.4.16})$$

et nous pouvons réécrire l'équation (VIII.4.11) sous la forme :

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{v(v+1)}{x^2} - (v + [1+p(x)] \frac{v(v+1)}{r^2(x)} - \frac{v(v+1)}{x^2}) + k^2\right] v_m(x) = 0. \quad (\text{VIII.4.17})$$

Le potentiel $v^{(1)}$ défini par la relation :

$$v^{(1)} = [1+p(x)] \frac{v(v+1)}{r^2(x)} - \frac{v(v+1)}{x^2}, \quad (\text{VIII.4.18})$$

ne possède pas de singularité à l'origine et décroît comme $\frac{1}{x^3}$ à l'infini.

Par conséquent, les singularités du potentiel $v+v^{(1)}$ sont identiques à celles introduites par $U(r)$.

Suivant la procédure habituelle, nous recherchons un opérateur de transformation du type de Marchenko qui relie les deux opérateurs différentiels :

$$A \equiv \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\Lambda}{x^2} - (v^{(1)} + v) + k^2, \quad (\text{VIII.4.19})$$

$$A_0 \equiv \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\Lambda}{x^2} + k^2. \quad (\text{VIII.4.20})$$

La présence de différentes énergies de seuils conduirait à imposer une décroissance exponentielle du potentiel $v^{(1)}+v$; la décroissance en x^{-3} de $v^{(1)}$ impose donc que k^2 soit un scalaire. D'autre part, la borne σ_v pour K et la décroissance en $\frac{1}{x^3}$ du potentiel, obligent les valeurs de v_j à être inférieures ou égales à x^3 . Si U vérifie les conditions décrites dans le chapitre VI, l'existence d'un opérateur de transformation est assurée. Nous pouvons écrire :

$$A v_\Lambda(x) = 0 \quad (\text{VIII.4.21})$$

$$A_0 v_{0\Lambda}(x) = 0 \quad (\text{VIII.4.22})$$

et

$$v_\Lambda(x) = v_{0\Lambda}(x) + \int_x^\infty K(x,y)v_{0\Lambda}(y)dy. \quad (\text{VIII.4.23})$$

Retournant à la variable x , nous obtenons :

$$u_\Lambda(r) = [1+p(r)]^{-1/4} [v_{0\Lambda}(x) + \int_x^\infty K(x,y)v_{0\Lambda}(y)dy] \quad (\text{VIII.4.24})$$

$$u_\Lambda(r) = [1+p(r)]^{-1/4} \{v_{0\Lambda}[x(r)] + \int_x^\infty K[x(r),y(s)] \times v_{0\Lambda}[y(s)] \times [1+p(s)]^{-1/2} ds\}. \quad (\text{VIII.4.25})$$

En conclusion, cette méthode justifie l'existence d'opérateurs de transformation au sens de Marchenko lorsque l'équation de Schrödinger possède une masse effective. Nous avons utilisé deux méthodes qui ont une caractéristique commune : l'équation de Schrödinger est d'abord transformée, puis nous étudions la possibilité de l'existence d'un opérateur de transformation pour la nouvelle équation. On peut se demander si la première étape est nécessaire. La réponse est négative mais les deux méthodes développées ci-dessous permettent de ramener

le problème inverse considéré à un problème que nous avons étudié [ROC 79]. Les deux méthodes précédentes sont aussi faciles à appliquer. Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier l'existence d'un opérateur de transformation sans effectuer de transformation préliminaire sur l'équation.

§ 5. METHODE DIRECTE

Nous considérons les opérateurs

$$L_0 = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_0(x) \frac{d}{dx} + c_0(x), \quad (\text{VIII.5.1})$$

$$L_1 = a_1(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_1(x) \frac{d}{dx} + c_1(x) \quad (\text{VIII.5.2})$$

et étudions directement le problème de l'existence d'opérateurs de transformation U tels que $L_1 U = U L_0$. Cette étude a été faite au chapitre II dans le cas où L_1 et L_0 sont des opérateurs scalaires et où U possède une des deux formes suivantes :

$$U f(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K(x,y) f(y) \quad (\text{VIII.5.3})$$

et

$$U f(x) = F(x) f(x) + \int_{x_0}^x K(x,y) f(y). \quad (\text{VIII.5.4})$$

Nous avons obtenu les équations aux dérivées partielles avec leurs conditions aux limites, satisfaites par les éléments F et K des opérateurs de transformation. Dans le cas matriciel et si U possède la forme (VIII.5.3), l'équation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} [K(x,y) a_0(y)] - \frac{\partial}{\partial y} [K(x,y) b_0(y)] + K(x,y) c_0(y) \\ &= a_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y) + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x} K(x,y) + c_1(x) K(x,y). \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.5})$$

Si nous imposons que U soit un opérateur intégral du type de Volterra, nous obtenons les conditions suivantes :

$$a_1(x) = a_0(x) \quad (\text{VIII.5.6})$$

$$b_1(x) - b_0(x) = -K(x,x)a_0(x) + a_1(x)K(x,x) \quad (\text{VIII.5.7})$$

$$c_1(x) - c_0(x) = -\frac{\partial}{\partial y} [K(x,y)a_0(y)]_{y=x} + K(x,x)b_0(x) - [a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} K(x,y)]_{y=x} - a_1(x) \frac{d}{dx} K(x,x) - b_1(x)K(x,x). \quad (\text{VIII.5.8})$$

Les équations (VIII.5 et 6) et (VIII.5.7) sont vérifiées dans le cas particulier où

$$a_0(x) = a_1(x) = a(x)I \quad (\text{VIII.5.9})$$

$$a(x) = \text{un scalaire} \quad (\text{VIII.5.10})$$

et

$$b_0(x) = b_1(x) = b(x) = \text{une matrice.} \quad (\text{VIII.5.11})$$

Les équations (VIII.5.8) et (VIII.5.5) s'écrivent alors :

$$c_1(x) - c_0(x) = -2a(x) \frac{d}{dx} K(x,x) - \frac{da(x)}{dx} K(x,x) + [K(x,x), b(x)]_-, \quad (\text{VIII.5.12})$$

où le commutateur

$$[K(x,x), b(x)]_- = K(x,x)b(x) - b(x)K(x,x) \quad (\text{VIII.5.13})$$

est nul si $b(x)$ est un scalaire

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} [K(x,y)a(y)] - \frac{\partial}{\partial y} [K(x,y)b(y)] + K(x,y)c_0(y) \\ &= a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y) + b(x) \frac{\partial}{\partial x} K(x,y) + c_1(x)K(x,y). \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.14})$$

Une étude de l'existence d'un opérateur de transformation U borné, défini par les équations aux dérivées partielles et ses conditions aux limites, peut être réalisée directement à partir de la méthode de Riemann que nous avons généralisée au chapitre III. Cependant, pour pouvoir obtenir une borne pour l'opérateur de transformation, nous devons connaître la généralisation de

domaine de Marchenko sur lequel l'équation intégrale pour K est définie. Ce domaine est limité par des courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles. Celles-ci ne sont bien définies que si nous précisons la forme de la masse effective $a(x) > 0$. Les pentes des courbes caractéristiques, qui ne sont plus des droites, sont données par la relation

$$\left[\frac{dy}{dx}\right] = \pm \sqrt{\frac{a(x)}{a(y)}}. \quad (\text{VIII.5.15})$$

L'étude des conditions d'existence d'un noyau de transformation est possible pour chaque cas particulier où la forme de la masse effective $a(x)$ est donnée mais une étude générale dans laquelle la forme de $a(x)$ n'est pas précisée, nous semble difficile.

Nous rappelons enfin que dans le cas scalaire l'introduction de la fonction $F(x)$ dans l'opérateur de transformation est nécessaire pour avoir $b_0(x) \neq b_1(x)$.

Nous considérons le problème simplifié suivant :

$$a(x) = 1 + p(x) \quad (\text{VIII.5.16})$$

$$b(x) = 0 \quad (\text{VIII.5.17})$$

$$c_i(x) = -v_i(x) \quad (\text{VIII.5.18})$$

$$v_1(x) = \frac{\Lambda}{x^2} [1+p(x)] \quad (\text{VIII.5.19})$$

$$v_2(x) = \left[\frac{\Lambda}{x^2} + w_1(x)\right][1+p(x)] \quad (\text{VIII.5.20})$$

$$\Lambda = \lambda_i(\lambda_i+1)\delta_{ij} \quad (\text{VIII.5.21})$$

$$k^2 = k_1^2 = \text{un scalaire.} \quad (\text{VIII.5.22})$$

Nous obtenons les équations suivantes pour le noyau de transformation :

$$\begin{aligned} [1+p(x)] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\Lambda}{x^2} - w_1(x) \right] K(x, y) &= [1+p(y)] \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) - K(x, y) \frac{\Lambda}{y^2} \right] \\ &+ p''(y)K(x, y) + 2p'(y) \frac{\partial}{\partial y} K(x, y), \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.23})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K(x, y) = 0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \quad (\text{VIII.5.24})$$

$$\begin{aligned} - [1+p(x)]^{1/2} W_1(x) &= 2 [1+p(x)]^{1/2} \frac{d}{dx} K(x, x) + \frac{p'(x) K(x, x)}{(1+p)^{1/2}} \\ &= 2 \frac{d}{dx} \{ [1+p(x)]^{1/2} K(x, x) \}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.25})$$

Au lieu d'appliquer directement la méthode de Riemann généralisée, nous pouvons aussi faire le changement de variables :

$$v = \int_0^x [1+p(t)]^{-1/2} dt, \quad w = \int_0^y [1+p(t)]^{-1/2} dt. \quad (\text{VIII.5.26})$$

Avec ces nouvelles variables et en conservant la notation K pour désigner le noyau après la transformation, nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial v^2} - 1/2 \frac{\dot{p}(v)}{[1+p(v)]} \frac{\partial}{\partial v} - [1+p(v)] \left(\frac{\Lambda}{x^2(v)} + W_1(v) \right) \right] K(v, w) \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1/2 \frac{\dot{p}(w)}{1+p(w)} \frac{\partial}{\partial w} \right] K(v, w) - [1+p(w)] K(v, w) \frac{\Lambda}{y^2(w)} + [1+p(w)]^{-1} [\ddot{p}(w) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\dot{p}^2(w)}{1+p(w)}] K(v, w) + 2 \frac{\dot{p}(w)}{[1+p(w)]} \frac{\partial}{\partial w} K(v, w) \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.27})$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} K(v, w) = 0 = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial w} K(v, w) \quad (\text{VIII.5.28})$$

$$2 \frac{d}{dv} \{ [1+p(v)]^{1/2} K(v, v) \} = -[1+p(v)] W_1(v). \quad (\text{VIII.5.29})$$

Si nous voulons éliminer les termes en les dérivées premières, il suffit de faire le changement de fonction

$$K(v, w) = A_1(v) A_2(w) B(v, w) \quad (\text{VIII.5.30})$$

où

$$A_1(v) = \exp \left\{ 1/2 \int_0^v \frac{\dot{p}}{1+p} ds \right\} = \sqrt{1+p(v)} \quad (\text{VIII.5.31})$$

et

$$A_2(w) = \exp \left\{ 3/2 \int_0^w \frac{\dot{p}}{1+p} ds \right\} = [1+p(w)]^{3/2}. \quad (\text{VIII.5.32})$$

Une équation aux dérivées partielles pour $B(v, w)$ peut être obtenue ; celle-ci peut facilement être transformée en une équation intégrale du type de Volterra

en appliquant la méthode de Riemann habituelle. Les conditions d'existence d'un opérateur de transformation borné peuvent alors être étudiées.

§ 6. OPERATEUR DE TRANSFORMATION POUR UN POTENTIEL DEPENDANT LINEAIREMENT DE k

Nous considérons à présent le problème à λ fixé où l'équation différentielle à une voie contient un terme linéaire en k :

$$L_i = a_i \frac{d}{dx^2} + b_i \frac{d}{dx} + c_i + d_i k \quad (i = 0, 1). \quad (\text{VIII.6.1})$$

Les solutions $f_0^\pm(k, x)$ du problème non perturbé vérifient l'équation :

$$p \frac{d}{dx} f_0^\pm(k, x) + q f_0^\pm(k, x) = \pm k f_0^\pm(k, x). \quad (\text{VIII.6.2})$$

Nous avons obtenu au chapitre II, des équations pour les fonctions $F^\pm(x)$ et $K^\pm(x, y)$ qui interviennent dans la définition de l'opérateur de transformation U^\pm :

$$U^\pm f_0^\pm(k, x) = F^\pm(x) f_0^\pm(k, x) + \int_x^\infty K^\pm(x, y) f_0^\pm(k, y) dy. \quad (\text{VIII.6.3})$$

Nous nous limitons au cas particulier

$$a_1(x) = a_0(x) = 1, \quad (\text{VIII.6.4})$$

$$p = i, \quad (\text{VIII.6.5})$$

$$q = \frac{i b}{2}, \quad (\text{VIII.6.6})$$

$$c_0 = \frac{b^2}{4} + \frac{b'}{2}, \quad (\text{VIII.6.7})$$

$$d_0 = 0, \quad (\text{VIII.6.8})$$

$$c_1(x) - c_0(x) = -U(x). \quad (\text{VIII.6.9})$$

Nous supposons que $b_1(x)$ est connu et nous choisissons

$$b_0(x) = b_1(x). \quad (\text{VIII.6.10})$$

Le problème inverse consiste à déterminer $U(x)$ et $d_1(x)$. Nous définissons l'opérateur aux dérivées partielles $A(x,y)$ par la relation :

$$A(x,y) = L_0(x) - L_0^T(y) ; \quad (\text{VIII.6.11})$$

le noyau de l'opérateur de transformation doit vérifier l'équation aux dérivées partielles :

$$A(x,y)K^\pm(x,y) = [U(x) \mp d_1(x)q(y)]K^\pm(x,y) \pm d_1(x) \frac{\partial}{\partial y} [p(y)K^\pm(x,y)]. \quad (\text{VIII.6.12})$$

Nous appelons $r(x,y;x_0,y_0)$ la fonction de Riemann qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$A^T(s,u)r(s,u;x,y) = 0 \quad (\text{VIII.6.13})$$

et les conditions aux limites habituelles, associées à l'opérateur $A^T(x,y)$:

$$r(s,u;x,y) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{(u+s)/2} dt [b_1(t + \frac{x-y}{2}) - b_0(t + \frac{y-x}{2})] \right\} \quad (\text{VIII.6.14})$$

$$\text{sur } u-s = y-x ,$$

$$r(s,u;x,y) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{(y-x)/2}^{(u-s)/2} dt [b_1(\frac{x+y}{2} - t) + b_0(\frac{x+y}{2} + t)] \right\} \quad (\text{VIII.6.15})$$

$$\text{sur } u+s = y+x.$$

L'équation aux dérivées partielles (VIII.6.12) et ses conditions aux limites sont équivalentes à l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} K^\pm(x,y) &= \lim_{s \rightarrow \infty} r(s,s;x,y)K_M^\pm(s,s) + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} r(s,u;x,y) [U(s) \mp d_1(s)q(u)] K^\pm(s,u) ds du \\ &\pm \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} r(s,u;x,y) d_1(s) \frac{\partial}{\partial u} [K^\pm(s,u)p(u)] ds du - \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} r(s,s;x,y) \frac{d}{ds} K^\pm(s,s) ds \\ &- \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{(s+x-y)/2}^{s/2} dt \{ K(t,s-t) \frac{d}{dt} r(t,s-t;x,y) + \frac{1}{2} (b_1(t) + b_0(s-t)) r(t,s-t;x,y) K(t,s-t) \}. \end{aligned}$$

$$(\text{VIII.6.16})$$

Après quelques transformations et en utilisant les conditions aux limites pour K , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 K^\pm(x,y) = & \lim_{s \rightarrow \infty} \{ r(s,s;x,y) K^\pm(s,s) - \int_{(s+x-y)/2}^{s/2} dt [K(t,s-t) \frac{d}{dt} r(t,s-t;x,y) \\
 & + [\frac{b(t)+b(s-t)}{2}] r(t,s-t;x,y) K(t,s-t) \mp \frac{1}{2} r(t,s-t;x,y) d_1(t) p(t) K^\pm(t,s-t)] \} \\
 & + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} ds du \{ r(s,u;x,y) [U(s) \bar{d}_1(s) q(u)] \mp \frac{\partial}{\partial u} r(s,u;x,y) d_1(s) p(u) \} K^\pm(s,u) \\
 & + \int_{(x+y)/2}^{\infty} ds \{ r(s,s;x,y) \frac{1}{2} F^\pm(s) [U(s) \bar{d}_1(s) q(s) \pm \frac{1}{2} b(s) d_1(s) p(s)] \} \\
 & \mp \frac{1}{2} \int_x^{(x+y)/2} ds \exp \{ \frac{1}{2} \int_x^s dz [b(z)+b(x+y-z)] \} d_1(s) p(x+y-s) K^\pm(s,x+y-s) \\
 & \pm \frac{1}{2} \int_x^{\infty} ds \exp \{ \frac{1}{2} \int_x^s dz [b(z)-b(y-x+z)] \} d_1(s) p(y-x+s) K^\pm(s,y-x+s) \\
 & \pm \frac{1}{4} [F^\pm(s) d_1(s) p(s)]_{s=\frac{x+y}{2}}^{s=\infty}. \tag{VIII.6.17}
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier $a_0 = a_1 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = b_1 = 0$, $c_1 = -U$, $d_1 = -2Q$, $p = i$, $q = 0$, $r = 1$, nous retrouvons l'équation intégrale obtenue par Jaulent-Jean [JAU 76] par une méthode différente :

$$\begin{aligned}
 K^\pm(x,y) = & \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_M} U(s) K^\pm(s,u) du ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} ds \frac{1}{2} F^\pm(s) U(s) \pm \frac{1}{2} F^\pm(\frac{x+y}{2}) Q(\frac{x+y}{2}) \\
 & \mp \frac{i}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} F^\pm(s) Q(s) \pm i \int_x^{\frac{x+y}{2}} ds Q(s) K^\pm(s,x+y-s) \mp i \int_x^{\infty} ds Q(s) K^\pm(s,y-x+s). \tag{VIII.6.18}
 \end{aligned}$$

L'étude du cas général (VIII.6.17) doit commencer par l'étude de la fonction de Riemann correspondante. Nous pouvons alors appliquer les méthodes utilisées dans les chapitres précédents. Cette étude ne peut être poursuivie que si l'on précise la forme de b_0 .

§ 7. CONCLUSIONS

L'étude des opérateurs de transformation pour une équation de Schrödinger contenant une masse effective peut se faire de deux façons : la première est de transformer l'équation de départ et de la ramener à une forme étudiée précédemment [ROC 79a]. Nous avons considéré deux types de telles transformations et nous avons étudié les conditions d'existence d'un opérateur de transformation. La seconde façon consiste à étudier directement l'existence d'un opérateur de transformation pour l'équation de départ. Si la forme de la masse effective est précisée, il est possible de faire cette étude à l'aide de la méthode de Riemann que nous avons généralisée. Nous avons considéré un cas simplifié où la masse effective n'est pas précisée mais qu'il est possible de résoudre directement par un changement de variables et un changement de fonction dans les équations vérifiées par le noyau de transformation. Dans le cas d'un potentiel dépendant linéairement de k , nous avons obtenu une équation intégrale pour l'opérateur de transformation qui permet l'étude des conditions d'existence d'opérateur de transformation. Cette équation intégrale est une extension de l'équation de Jaulent-Jean [JAU 76].

CHAPITRE IX : EXTENSION DE L'EQUATION DE MARCHENKO
++++
POUR DES SYSTEMES DIFFERENTIELS NON HERMITIENS
++++

§ 1. INTRODUCTION

Ce chapitre IX est consacré à l'étude du problème inverse pour des systèmes différentiels non hermitiens, incluant des énergies de seuil différentes et des potentiels centrifuges. Dans les chapitres précédents, nous avons démontré l'existence d'opérateurs de transformation pour un très grand nombre de situations (pratiquement toutes les circonstances rencontrées en physique nucléaire). Les conditions d'existence de noyaux de transformation s'expriment en termes d'existence d'intégrales contenant le potentiel perturbatif $U(x)$. Leur forme générale :

$$\int_x^\infty |f(s)| |U(s)| ds < \infty$$

contient la valeur absolue d'une fonction $f(s)$ qui dépend du potentiel de référence et la norme du potentiel perturbatif $U(x)$. Les conditions que nous avons obtenues sont indépendantes du fait que $U(x)$ est hermitien ou non, seules les modules interviennent dans ces conditions. Puisque les noyaux de transformation existent lorsque les conditions, appropriées au choix du potentiel de référence sont vérifiées, nous nous sommes demandés s'il n'est pas possible de faire un pas supplémentaire dans l'étude du problème inverse de la diffusion pour un système non hermitien.

Comme on le sait, le but final du problème inverse est la construction de l'équation différentielle de Schrödinger à partir des données expérimentales et d'une équation de référence. Suivant Marchenko, les étapes de cette construction sont les suivantes :

- a) démontrer l'existence d'un opérateur de transformation
- b) obtenir une "équation fondamentale" du problème inverse
- c) définir les "données de la diffusion" ("Scattering data")
- d) formuler des conditions nécessaires et suffisantes à imposer à l'ensemble de données pour qu'elles soient bien les "données de la diffusion" d'une équation de Schrödinger contenant un potentiel

appartenant à une certaine classe définie dans la première étape.

A ces étapes, Marchenko et Lundina [MAR68], [LUN 69] ont ajouté la discussion de la stabilité de cette construction.

La première étape a été réalisée dans les chapitres précédents. La seconde étape consiste donc à se demander s'il existe une équation fondamentale. Le premier résultat de ce chapitre est la démonstration de son existence dans un cas très général qui étend les résultats des références [AGR 63] et [LJA 67] et qui suggère que la méthode de transformations spéciales de Marchenko (seconde partie de [AGR 63]) peut être évitée dans la solution des problèmes inverses physiques. Notre démonstration de l'équation fondamentale est similaire à celle de Marchenko, c'est-à-dire qu'elle ne postule pas l'existence a priori d'une identité de Parseval. Bien que les forces de Coulomb n'aient pas été introduites lors de l'établissement de l'équation fondamentale, leur introduction dans la première étape du travail est possible et ne crée pas de difficultés essentielles ; malheureusement, il n'en va pas de même pour les autres étapes.

Au cours de cette étude, il est apparu qu'il existe une différence essentielle entre les systèmes hermitiens et non-hermitiens : alors que pour les systèmes hermitiens, l'existence de noyaux de transformation garantit l'existence de l'équation de Marchenko, pour les systèmes non hermitiens, nous devons supposer que l'ensemble des singularités spectrales et des valeurs propres est discret. Les systèmes hermitiens et non hermitiens seront étudiés en parallèle ; des conditions plus fortes seront cependant imposées au potentiel non hermitien. Nous identifions ensuite les données de la diffusion et nous formulons un ensemble de conditions nécessaires (parallèles à celles trouvées par Marchenko) à imposer aux données de la diffusion.

Nous traçons à présent le plan du chapitre. Au paragraphe 2, nous rappelons les notations et définissons une fonction importante $\Delta(k)$. Au paragraphe 3, les zéros de $\Delta(k)$ sont étudiés. Le paragraphe 4 établit l'existence d'une équation fondamentale. Au paragraphe 5, nous étudions les propriétés du noyau de l'équation fondamentale. L'unicité de la solution de l'équation fondamentale et la compacité de son noyau sont démontrées. Les données

de la diffusion sont présentées au paragraphe 6 et nous formulons des conditions nécessaires, auxquelles elles doivent satisfaire. Ce sont d'une part des conditions liées au problème de factorisation d'un problème de Hilbert [MUS 53] et, d'autre part des conditions nécessaires pour que le noyau de l'équation fondamentale possède une borne adéquate.

§ 2. NOTATIONS

Nous considérons le système de n équations différentielles couplées :

$$H = I \frac{d^2}{dx^2} - \frac{L(L+1)}{x^2} + \Lambda^2 - U(x) \quad (0 \leq x \leq \infty) \quad (\text{IX.2.1})$$

où I représente la matrice unité.

Nous rappelons les notations :

$$L_{ij} = \ell_i \delta_{ij} \quad (\text{IX.2.2})$$

$$\Lambda_{ij}^2 = \lambda_i^2 \delta_{ij} \quad (\text{IX.2.3})$$

$$\lambda_i^2 = k^2 - k_i^2 \quad (k_1^2 = 0 ; \lambda_1^2 = k^2) \quad (\text{IX.2.4})$$

où k_i^2 est l'énergie de seuil de la voie i et k^2 est l'énergie totale.

Contrairement aux apparences, l'étude du système (IX.2.1) comprend celle du cas plus général où les masses réduites diffèrent dans chaque voie :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_i} \psi_i'' + \frac{\ell_i(\ell_i+1)}{x^2} \frac{\hbar^2}{2m_i} + \sum_j V_{ij} \psi_j = \mathcal{E}_i \psi_i$$

Cette équation peut en effet se ramener au système (IX.2.1), en faisant les changements de fonctions matricielles suivants :

$$\phi \equiv m^{-1} \psi$$

$$U = 2 \hbar^{-2} m^{1/2} v m^{1/2}$$

$$\lambda^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$$

où $m_{ij} = m_i \delta_{ij}$

Si $V = V^T$, alors $U = U^T$.

Nous considérons le cas général où le potentiel n'est pas nécessairement hermitien

$$U_{ij}^\dagger(x) = U_{ji}^*(x) \neq U_{ij}(x)$$

Au système (IX.2.1), nous associons le système différentiel adjoint \bar{H} :

$$\bar{H} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{L(L+1)}{x^2} + \Lambda^2 - U^\dagger \quad (IX.2.5)$$

Toutes les fonctions associées à l'équation adjointe (IX.2.5) seront surmontées d'une barre (Ainsi $\bar{U} = U^\dagger$). Pour simplifier les notations, nous introduisons les matrices diagonales k^2 et M :

$$k_{ij}^2 = k^2 \delta_{ij} \quad (IX.2.6)$$

$$M_{ij} = k_i^2 \delta_{ij} \quad (IX.2.7)$$

$$k = |E|^{1/2} e^{i \arg(E)/2} \quad (IX.2.8)$$

où $0 \leq \arg E < 2\pi$,

nous supposons que la parité est conservée et nous traitons donc la matrice diagonale $(-)^L$ comme un scalaire.

Le système de référence considéré pour les équations (IX.2.1) et (IX.2.5) s'écrit :

$$\frac{d^2}{dx^2} - \frac{L(L+1)}{x^2} + \Lambda^2 \quad (IX.2.9)$$

Nous supposons que le potentiel U (et par conséquent U^\dagger) vérifie les conditions d'existence d'un noyau de transformation $K(\bar{K})$,

Si k_{\min} , k_{\max} et \tilde{U} sont définis par les relations

$$k_{\min} = \inf_i (k_i) = 0 \quad (\text{IX.2.10})$$

$$k_{\max} = \sup_i (k_i) \quad (\text{IX.2.11})$$

et

$$\tilde{U}(s) = U(s) e^{[2^{\ell_{\max}+1}] \sqrt{k_{\max}^2 - k_{\min}^2}} = U(s) e^{2\mu} \quad (\text{IX.2.12})$$

où

$$\mu = 2^{\ell_{\max}} k_{\max} \quad (\text{IX.2.13})$$

nous avons vu au chapitre VI [ROC 79a] que l'existence d'un opérateur de transformation est assurée si l'intégrale

$$\int_x^\infty s^\alpha ||\tilde{U}(s)|| ds \quad (\text{IX.2.14})$$

existe pour tout x et pour $\alpha = 1$; l'intégrabilité de l'opérateur de transformation est assurée si la même intégrale (IX.2.14) avec $\alpha = \ell_{\max}$ existe.

Si le potentiel est complexe, nous devons imposer en plus qu'il possède un spectre discret fini. Afin d'assurer un spectre discret fini, nous supposons qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\int_x^\infty e^{\epsilon s} ||U(s)|| ds < \infty \quad (\text{IX.2.15})$$

où

$$\epsilon = \epsilon_0 + 2\mu \quad (\text{IX.2.16})$$

(voir chapitre I).

Comme nous l'avons vu au chapitre VI [ROC 79a], l'existence d'un opérateur de transformation assure l'analyticité de la solution de Jost dans la partie supérieure du plan physique k .

Le feuillet physique est défini par les conditions [MAH 69] :

$$\frac{\text{Im } \lambda_i}{\text{Im } k} > 0 \quad , \quad \frac{\text{Re } \lambda_i}{\text{Re } k} > 0 \quad .$$

La condition (IX.2.15) assure l'analyticité de la fonction de Jost dans $\text{Im } \lambda > \frac{-\varepsilon_0}{2}$ (c'est-à-dire dans le domaine du plan physique de k tel que $\text{Inf } (\text{Im } \lambda_i) > \frac{-\varepsilon_0}{2}$) et garantit la non existence de points d'accumulation sur l'axe réel (voir chapitre I) ; dans ces conditions, le spectre discret sera fini.

Nous considérons les solutions de Jost F_+ et \bar{F}_+ associées aux équations (IX.2.1) et (IX.2.5). L'existence d'opérateurs de transformation du type de Marchenko nous permet d'écrire :

$$F_+(\lambda, x) = H_1(\lambda, x) + \int_x^\infty K(x, y) H_1(\lambda, y) dy \quad (\text{IX.2.17})$$

$$\bar{F}_+(\lambda, x) = H_1(\lambda, x) + \int_x^\infty \bar{K}(x, y) H_1(\lambda, y) dy \quad (\text{IX.2.18})$$

où

$$[H_1(\lambda, x)]_{ij} = \delta_{ij} \quad i \lambda_i x \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} h_\ell^1(\lambda_i, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(\lambda_i x - \ell_i \pi/2)} \delta_{ij} \quad (\text{IX.2.19})$$

Dans le cas matriciel, nous préférons cette définition (IX.2.19) à la définition du chapitre I où $f(k, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikx}$; la raison de ce choix est qu'il nous évite de devoir écrire des matrices i^L au milieu de certaines formules. λ représente le vecteur à n composantes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Si nous imposons la condition (IX.2.15), il est aisé de montrer que dans ce cas, $K(x, y) \exp[\frac{\varepsilon_0 y}{2}]$ est borné par la fonction intégrable suivante :

$$\frac{1}{2} (y/x)^{\mathcal{L}} \hat{\sigma}^0(\frac{x+y}{2}) \exp[\hat{\sigma}^1(x)] \leq (\frac{2}{x})^{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \hat{\sigma}^{\mathcal{L}}(\frac{x+y}{2}) \exp[\hat{\sigma}^1(x)] \quad (\text{IX.2.20})$$

où

$$\mathcal{L} = \ell_{\max} \quad (\text{IX.2.21})$$

$$\hat{\sigma}^{\mathcal{L}}(x) = 4^{\mathcal{L}} \int_x^\infty s^{\mathcal{L}} e^{\varepsilon_0 s} e^{2\mu s} ||U(s)|| ds \quad , \quad (\text{IX.2.22})$$

$$\hat{\sigma}^1(x) = 4^{\mathcal{L}} \int_x^\infty s e^{2\mu s} ||U(s)|| ds \quad (\text{IX.2.23})$$

Si $U = U^\dagger$, nous avons :

$$F_+(\lambda, x) = \bar{F}_+(\lambda, x) \quad (\text{IX.2.24})$$

et

$$K(x, y) = \bar{K}(x, y) \quad . \quad (\text{IX.2.25})$$

Si $U = U^T$, nous pouvons écrire :

$$[\bar{F}_+(-\lambda^*, x)]^* = (-)^L F_+(\lambda, x) \quad \text{for } \text{Im}(\lambda) > -\epsilon_0/2 \quad (\text{IX.2.26})$$

et

$$\bar{G}(\lambda^2, x) = [G(\lambda^{2*}, x)]^* \quad (\text{IX.2.27})$$

de sorte que si $U = U^\dagger = U^T$ alors nous obtenons

$$F_+(\lambda, x) = (-)^L [F_+(-\lambda^*, x)]^* \quad \text{for } \text{Im}(\lambda) > -\epsilon_0/2 \quad (\text{IX.2.28})$$

Lorsque U est hermitien, il n'est pas nécessaire d'imposer la condition (IX.2.15), ϵ_0 vaut alors 0 . Considérant le cas général $U \neq U^\dagger$ et $\bar{F}_+(\lambda, x) \neq F_+(\lambda, x)$, établissons à présent un lemme qui généralise le théorème du Wonskien pour des systèmes non-hermitiens. Partant des deux systèmes adjoints :

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 - \frac{L(L+1)}{x^2} - U \right] u(\lambda, x) = 0 \quad (\text{IX.2.29a})$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^{2*} - \frac{L(L+1)}{x^2} - U^\dagger \right] \bar{v}(\lambda^*, x) = 0 \quad , \quad (\text{IX.2.29b})$$

nous obtenons facilement le lemme.

LEMME. Soient $u(\lambda^2, x)$ et $\bar{v}(\lambda^{2*}, x)$ des solutions des équations (IX.2.29 a et b) leur Wronskien

$$\text{Wr}[\bar{v}^\dagger(\lambda^*, x), u(\lambda^2, x)] = \bar{v}^\dagger(\lambda^*, x) \frac{du}{dx}(\lambda^2, x) - \frac{d}{dx} \bar{v}^\dagger(\lambda^*, x) u(\lambda^2, x)$$

est indépendant de x .

Nous introduisons également la solution de Jost $F_-(\lambda, x)$ qui possède le comportement asymptotique

$$F_{-}(\lambda, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-i(\Lambda x - \frac{L\pi}{2})} \quad \text{pour } \text{Im } \lambda < \frac{\epsilon_0}{2} \quad (\text{IX.2.30})$$

Les fonctions $F_{\pm}(\lambda, x)$ forment dans la bande $|\text{Im } \lambda| < \frac{\epsilon_0}{2}$ ($\lambda \neq 0$) un ensemble de deux solutions linéairement indépendantes qui y vérifient la relation

$$F_{\pm}(-\lambda, x) = F_{\mp}(\lambda, x) (-)^L \quad (\text{IX.2.31})$$

(Lorsque U est hermitien, nous n'imposons pas la condition (IX.2.15) et l'équation (IX.2.30) n'est vérifiée que pour $\text{Im } \lambda < 0$).

$$\bar{F}_{\pm}(-\lambda, x) = (-)^L \bar{F}_{\mp}(\lambda, x) \quad (\text{IX.2.32})$$

$$\text{Wr}[\bar{F}^{\dagger}(\pm\lambda^*, x), F(\pm\lambda, x)] = \pm 2i\Lambda \quad (\text{IX.2.33})$$

$$\text{Wr}[\bar{F}^{\dagger}(\bar{+\lambda}^*, x), F(\pm\lambda, x)] = 0 \quad (\text{IX.2.34})$$

Nous voulons à présent définir comme au chapitre I, une solution $F_1(\lambda, x)$ qui pour $|\lambda| \neq 0$, $\text{Im } \lambda \geq 0$ possède le comportement asymptotique

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_1(\lambda, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-i(\Lambda x - \frac{\ell\pi}{2})} \quad (\text{IX.2.35})$$

Dans $0 \leq |\text{Im } \lambda| < \epsilon_0/2$ ($\text{Im } \lambda = 0$ si U est hermitien), nous pouvons écrire

$$F_1(\lambda, x) = F_{-}(\lambda, x) \quad (\text{IX.2.36})$$

Nous définissons $F_1(\lambda, x)$ pour $\text{Im } \lambda > 0$ et pour des valeurs de $x > 0$, suffisamment grandes, comme la solution de l'équation intégrale

$$F_1(\lambda, x) = H_2(\lambda, x) - \frac{H_{-}(\lambda, x)}{2i\Lambda} \int_x^{\infty} dt H_{+}(\lambda, t) U(t) F_1(\lambda, t) - \frac{H_{+}(\lambda, x)}{2i\Lambda} \int_a^x H_{-}(\lambda, t) U(t) F_1(\lambda, t) \quad (\text{IX.2.37})$$

où

$$[H_{\pm}(\lambda, x)]_{ij} = h_{\pm}(\lambda_i x) \delta_{ij} \quad .$$

Nous pouvons montrer l'existence d'une solution à l'Eq. (IX.2.37) si la constante a est choisie de façon telle que

$$\frac{C^2}{2} \|\Lambda^{-1}\| \int_a^{\infty} \|\hat{U}(t)\| dt = q < 1$$

où

$$\hat{U}(t) = \left[\frac{1 + |\Lambda|t}{|\Lambda|t} \right]^L \exp[-\text{Im } \Lambda t] U(t) \exp[\text{Im } \Lambda t] \left[\frac{1 + |\Lambda|t}{|\Lambda|t} \right]^L$$

$$(\text{Im } \Lambda \geq 0, \quad |\Lambda| \neq 0) \quad .$$

Une solution de Jost peut également être définie si $\lambda_j = 0$, $\text{Im } \lambda_i \geq 0$ $i = 1, n$ par une méthode tout à fait similaire à celle du chapitre I. Les conditions que nous avons imposées au potentiel U pour assurer l'existence d'un opérateur de transformation, suffisent pour assurer l'existence de $F_1(\lambda, x)$.

La solution régulière $G(\lambda, x)$ est définie par l'équation intégrale :

$$G(\lambda, x) = \frac{1}{\Lambda^{L+1}} u(\lambda, x) + \int_0^x [u(\lambda, x) H_1(\lambda, y) - u(\lambda, y) H_1(\lambda, x)] \frac{1}{\Lambda} U(y) G(\lambda, y) dy \quad (\text{IX.2.39})$$

où

$$[u(\lambda, x)]_{ij} = \delta_{ij} u_{\ell_i}(\lambda_i, x)$$

(u_{ℓ_i} est la fonction de Riccati-Bessel définie au chapitre I).

Les solutions de Jost $F_+(\lambda, x)$ et $F_-(\lambda, x)$ [$F_+(\lambda, x)$ et $F_1(\lambda, x)$] forment un système de deux solutions linéairement indépendantes dans $|\text{Im } \Lambda| < \frac{\epsilon_0}{2}$, $\det \Lambda \neq 0$ ($\text{Im } k = 0$ si U est hermitien) [$\text{Im } \lambda > \frac{-\epsilon_0}{2}$, ($\text{Im } k > 0$ si U est hermitien)]. Il est donc possible de déterminer des matrices constantes A , B , A_1

et B_1 telles que :

$$G(\lambda, x) = [F(\lambda, x)A + F(-\lambda, x)B] \quad (\text{IX.2.40})$$

dans $|\text{Im } \lambda| \leq \varepsilon_0/2$ si U n'est pas hermitien et dans $\text{Im } k = 0$ si U est hermitien

$$G(\lambda, x) = [F(\lambda, x)A_1 + F_1(\lambda, x)B_1] \quad (\text{IX.2.41})$$

dans $\text{Im } \lambda > 0$.

Comme précédemment, nous utilisons les notations équivalentes :

$$F_+(\lambda, x) = F(\lambda, x) \quad .$$

Définissant les fonctions de Jost dans les domaines de k qui sont ceux des solutions de Jost correspondantes, par les relations :

$$\bar{F}_\pm^\dagger(\lambda^*) = \text{Wr}[\bar{F}^\dagger(\pm\lambda^*, x), G(\lambda, x)]\Lambda^L, \quad (\text{IX.2.42})$$

$$\bar{F}_1^\dagger(\lambda^*) = \text{Wr}[\bar{F}_1^\dagger(\lambda^*, x)(-)^L, G(\lambda, x)]\Lambda^L \quad (\text{IX.2.43})$$

nous obtenons :

$$A = -\frac{i}{2} \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_+^\dagger(\lambda^*)\Lambda^{-L} \quad (\text{IX.2.44})$$

$$B = +\frac{i}{2} \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_-^\dagger(\lambda^*)\Lambda^{-L} \quad (\text{IX.2.45})$$

$$G(\lambda, x) = \frac{i}{2} \left\{ F(-\lambda, x) \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_-^\dagger(\lambda^*) - F(\lambda, x) \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_+^\dagger(\lambda^*) \right\} \frac{1}{\Lambda^L} \quad (\text{IX.2.46})$$

si $|\text{Im } \lambda| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ ($\text{Im } k = 0$ si U est hermitien).

Une relation similaire faisant intervenir F_1 au lieu de F_- peut être écrite pour $\text{Im } \lambda > 0$:

$$G(\lambda, x) = \frac{i}{2} \left\{ F_1(\lambda, x) \frac{(-)^L}{\Lambda} \bar{F}_1^\dagger(\lambda^*) - F(\lambda, x) \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_+^\dagger(\lambda^*) \right\} \frac{1}{\Lambda^L} \quad (\text{IX.2.47})$$

Par symétrie, nous obtenons également les relations :

$$\bar{G}(\lambda, x) = \frac{i}{2} \left\{ \bar{F}(-\lambda, x) \frac{1}{\Lambda} F_-^\dagger(\lambda^*) - \bar{F}(\lambda, x) \frac{1}{\Lambda} F_+^\dagger(\lambda^*) \right\} \frac{1}{\Lambda^L} \quad (\text{IX.2.48})$$

$$F_{+}^{\dagger}(\lambda^{*}) = \text{Wr}[F^{\dagger}(\lambda^{*}, x), \bar{G}(\lambda, x)] \Lambda^L \quad . \quad (\text{IX.2.49})$$

et des relations équivalentes aux Eqs. (IX.2.43, IX.2.47).

Le Wronskien

$$\text{Wr}[\bar{G}^{\dagger}(\lambda^{*2}, x), G(\lambda, x)] = 0 \quad (\text{IX.2.50})$$

permet de relier les deux fonctions de Jost ; nous obtenons dans $|\text{Im } \lambda| < \epsilon_0/2$ (ou $\text{Im } k = 0$ si U est hermitien)

$$F_{-}(\lambda) \Lambda^{-1} \bar{F}_{-}^{\dagger}(\lambda^{*}) = F_{+}(\lambda) \Lambda^{-1} \bar{F}_{+}^{\dagger}(\lambda^{*}) \quad \text{si } \det \Lambda \neq 0 \quad (\text{IX.2.51})$$

et pour $\text{Im } k > 0$

$$F_{1}(\lambda) \Lambda^{-1} \bar{F}_{1}^{\dagger}(\lambda^{*}) = F_{+}(\lambda) \Lambda^{-1} \bar{F}_{+}^{\dagger}(\lambda^{*}) \quad (\text{IX.2.52})$$

La relation (IX.2.51) est essentielle pour démontrer que la matrice S pour un système hermitien est unitaire dans le sous espace des voies ouvertes.

Comme le noyau $K(x, y)$ ne dépend que des énergies des seuils, des différentes voies, nous avons :

$$[F_{\pm}(\lambda, x)]_{ij} = [F_{\pm}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\lambda_m, \dots, \lambda_n, x)]_{ij} \quad \text{pour tout } m \neq j \quad !$$

La fonction de Jost peut s'écrire :

$$F_{+}(\lambda) = -\Lambda^L \text{Wr}[\bar{G}^{\dagger}(\lambda^{*}, x), F_{+}(\lambda, x)]$$

de sorte que si nous posons

$$F'_{\pm}(\lambda) = \Lambda^{-L} F_{\pm} \Lambda^{+L}$$

comme G est une fonction paire en tous les λ_j , nous pouvons écrire

$$[F'_{\pm}(\lambda)]_{ij} = [F'_{\pm}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\lambda_m, \dots, \lambda_n)]_{ij} \quad \text{pour tout } m \neq j \quad .$$

Pour $F_{\pm}(\lambda)$ nous avons :

$$F_{ij}(\lambda) = \left(\frac{\mu_i}{\lambda_i}\right)^{\ell_i} F_{ij}(\mu)$$

où

$$\mu_j = \lambda_j, \quad \mu_{\ell} = \pm \lambda_{\ell} \quad (\ell \neq j)$$

Nous pouvons écrire l'Eq. (IX.2.46) sous la forme :

$$G(\lambda, x) = \frac{-1}{2i} \{F(-\lambda, x) - F(\lambda, x) \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_+^+(\lambda^*) \bar{F}_-^+(\lambda^*)^{-1} \Lambda\} \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_-^+(\lambda^*) \frac{1}{\Lambda^L} \quad (\text{IX.2.53})$$

Comme nous avons

$$F_+(\lambda)^{-1} F_-(\lambda) \frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_+^+(\lambda^*) \bar{F}_-^+(\lambda^*)^{-1},$$

l'expression (IX.2.53) de $G(\lambda, x)$ devient :

$$G(\lambda, x) = \frac{-1}{2i} \{F(-\lambda, x) - F(\lambda, x) F_+(\lambda)^{-1} F_-(\lambda)\} \frac{1}{\Lambda} \bar{F}_-^+(\lambda^*) \frac{1}{\Lambda^L} \quad (\text{IX.2.54})$$

Nous utiliserons plus tard l'expression :

$$G(\lambda, x) \Lambda^L [\bar{F}_-^+(\lambda^*)]^{-1} \Lambda 2i = - \{F(-\lambda, x) - F(\lambda, x) S'(\lambda) (-)^L\} \quad (\text{IX.2.55})$$

où la matrice $S'(\lambda)$ est définie par

$$S'(\lambda) = F^{-1}(\lambda) F(-\lambda) \quad (\text{IX.2.56})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S'(\lambda) = 1 \quad \text{Im } k \geq 0$$

A cause de l'Eq. (IX.2.56), les zéros de $\det F(\lambda)$ dans $\text{Im } \lambda \geq 0$ joueront un rôle important dans la suite.

Nous définissons une matrice ψ :

$$\psi(\lambda, x) = \frac{-1}{2i} [H_1^+(+\lambda^* x) - H_1(\lambda x) S'(\lambda) (-)^L], \quad (\text{IX.2.57})$$

qui nous permet d'écrire la fonction d'onde "physique" ϕ sous la forme :

$$\phi(\lambda, x) = \psi(\lambda, x) + \int_x^{\infty} K(x, y) \psi(\lambda, y) dy \quad , \quad (\text{IX.2.58})$$

Nous définissons les matrices S, \bar{S} par les relations :

$$S(\lambda) = \Lambda^{1/2} S'(\lambda) \Lambda^{-1/2} \quad (\text{IX.2.59})$$

$$S(\lambda) = \Lambda^{1/2} F^{-1}(\lambda) F(-\lambda) \Lambda^{-1/2} \quad (\text{IX.2.60})$$

$$= \Lambda^{-1/2} \bar{F}^+(\lambda^*) [\bar{F}^+(-\lambda^*)]^{-1} \Lambda^{1/2} \quad (\text{IX.2.61})$$

$$\bar{S}(\lambda) = \Lambda^{1/2} \bar{S}'(\lambda) \Lambda^{-1/2} \quad (\text{IX.2.62})$$

$$= \Lambda^{1/2} \bar{F}^{-1}(\lambda) \bar{F}(-\lambda) \Lambda^{-1/2} \quad (\text{IX.2.63})$$

$$= \Lambda^{-1/2} F^+(\lambda^*) [F^+(-\lambda^*)]^{-1} \Lambda^{1/2} \quad (\text{IX.2.64})$$

$$\bar{S}^+(\lambda^*) S(\lambda) = I \quad (\text{IX.2.65})$$

Nous introduisons une nouvelle matrice Σ :

$$\Sigma = \Lambda^{-L} S' \Lambda^L \quad (\text{IX.2.66})$$

Si nous imposons la conservation de la parité, $(-)^L$ peut être considéré comme un scalaire et nous obtenons :

$$\Sigma = [F'(\lambda)]^{-1} [F'(-\lambda)] \quad (\text{IX.2.67})$$

Nous appelons $\Delta'(\lambda) = \Delta(\lambda)$ le déterminant de $F'(\lambda)$ et $XF'(\lambda)$ la matrice transposée de la matrice formée des mineurs de F' .

L'élément $F'_{ij}(\lambda)$ est une fonction paire en λ_l ($l \neq j$) et XF'_{ij} une fonction paire en λ_i . Nous obtenons aisément :

$$\Delta'(\lambda) = \sum_j X F'_{ij}(\lambda) F'_{ji}(\lambda)$$

$$S_{ii}(\lambda) = S'_{ii}(\lambda) = \Sigma_{ii}(\lambda)$$

$$= [\sum_j X F'_{ij}(\lambda) F'_{ji}(-\lambda)] / \Delta'(\lambda)$$

$$= \frac{\Delta'(\mu)}{\Delta'(\lambda)} = \frac{1}{S_{ii}(\mu)} = \frac{1}{S'_{ii}(\mu)} = \frac{1}{\Sigma_{ii}(\mu)} \quad (\text{IX.2.68})$$

où

$$\mu_j = \lambda_j (1 - 2 \delta_{ij}) \quad (\text{IX.2.69})$$

Nous considérons un potentiel matriciel $U = V + iW$ où V et W sont des matrices réelles symétriques. Le potentiel optique, ainsi que ses formes généralisées obtenues par Feshbach [FES 62] et par Fonda-Newton [FON 60] possèdent cette symétrie. Dans le cas d'un système hermitien, la symétrie du potentiel V découle de l'invariance vis-à-vis d'un renversement du temps. (Voir [NEW 60] ou [DIL 68]).

Dans ces conditions, G, F et \bar{G}, \bar{F} ne sont plus des fonctions indépendantes ; nous avons :

$$[\bar{F}(+\lambda^*, x)]^* = F(\pm\lambda, x) (-)^L \quad \text{pour} \quad |\text{Im } \lambda| \leq +\epsilon_0/2 \quad (\text{IX.2.70})$$

et

$$\bar{G}(\lambda^2, x) \equiv [G(\lambda^2, x)]^* \quad (\text{IX.2.71})$$

Si le potentiel est symétrique et si la parité est conservée, la matrice S est symétrique

$$S = \Lambda^{-1/2} F^T(-\lambda) [F^T(\lambda)]^{-1} \Lambda^{1/2} = S^T \quad .$$

Réciproquement, si S est symétrique, on peut montrer que U est symétrique à partir de l'équation fondamentale du problème inverse.

Nous posons

$$E'(\lambda) = X F'(\lambda) F'(-\lambda) \Lambda^{-1} \quad (\text{IX.2.72})$$

Nous pouvons facilement montrer que $E'_{ij}(\lambda)$ est une fonction paire en λ_i et λ_j .

Posant

$$\mu_j(i) = \lambda_j (1 - 2 \delta_{ij}) ,$$

nous évaluons l'expression suivante pour $i \neq j$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ii}(\lambda) \Sigma_{ij}(\mu(i)) &= \frac{\Delta'(\mu(i))}{\Delta'(\lambda)} \frac{E'_{ij}(\mu(i))}{\Delta'(\mu(i))} \lambda_j \\ &= \frac{E'_{ij}(\lambda)}{\Delta'(\lambda)} \lambda_j = \Sigma_{ij}(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{IX.2.73})$$

Nous trouvons de la même façon :

$$\Sigma_{ji}(\lambda) \Sigma_{ii}[\mu(i)] = - \Sigma_{ji}[\mu(i)] \quad (i \neq j) \quad (\text{IX.2.74})$$

Nous pouvons aisément démontrer la formule générale :

$$\begin{aligned} \Sigma(\lambda) P^{(i,j,k,\dots)} \Sigma[\mu(i,j,k,\dots)] \\ = P^{(i,j,k,\dots)} + \Sigma(\lambda) Q^{(i,j,k,\dots)} - Q^{(i,j,k,\dots)} \Sigma[\mu(i,j,k,\dots)] \end{aligned} \quad (\text{IX.2.75})$$

où

$$\mu_\ell(i,j,k,\dots) = \lambda_\ell (1 - 2 \delta_{\ell i} - 2 \delta_{\ell j} - 2 \delta_{\ell k} \dots) \quad (\text{IX.2.76})$$

$$P_{\ell m}^{(i,j,k,\dots)} = \delta_{\ell m} \delta_{\ell i} \delta_{\ell j} \delta_{\ell k} \quad (\text{IX.2.77})$$

$$Q^{(i,j,k,\dots)} = I - P^{(i,j,k,\dots)} \quad (\text{IX.2.78})$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} P^{(i,j,k,\dots)} \Sigma(\lambda) P^{(i,j,k,\dots)} \Sigma(\mu(i,j,k,\dots)) P^{(i,j,k,\dots)} \\ = P^{(i,j,k,\dots)} \end{aligned} \quad (\text{IX.2.79})$$

Dans le cas où U est une matrice hermitienne, cette dernière relation (IX.2.79) permet de démontrer que la sous-matrice de S , correspondant aux voies ouvertes, est unitaire.

En remplaçant dans la relation

$$\Sigma_{ij}(\lambda) \Sigma_{ji}(\mu(j)) = \Sigma_{ii}(\lambda) - \Sigma_{ii}(\mu(j)) ,$$

chaque élément de Σ par son expression respective, nous obtenons

$$S_{ij}^2(\lambda) = S_{ii}(\lambda) S_{jj}(\lambda) - \frac{\Delta[\mu(i,j)]}{\Delta(\lambda)} \quad (i \neq j) \quad (\text{IX.2.80})$$

Les équations (IX.2.68, IX.2.80) permettent de calculer tous les éléments S_{ij} (au signe près) à partir de la connaissance de la fonction $\Delta(\lambda)$ à n variables.

§ 3. ZEROS DE LA FONCTION $\Delta(\lambda) = \det F_+(\lambda)$

On peut montrer [NEW 66, page 516] que la fonction

$$\Delta(\lambda) = \det F_+(\lambda) \quad (\text{IX.3.1})$$

est égale au déterminant de Fredholm associé à l'équation intégrale définissant la fonction d'onde physique ; le développement du déterminant de Fredholm montre que la fonction $\Delta(\lambda)$ est une fonction analytique en tous les λ_i , régulière dans l'intersection de tous les demi-plans supérieurs $\text{Im } \lambda_i \geq 0$ (par conséquent, dans le demi-plan physique supérieur $\text{Im } k \geq 0$). Ce résultat est général et indépendant du potentiel matriciel considéré : ainsi il est très possible que pour certains potentiels la fonction matricielle $F_+(\lambda)$ ne soit pas analytique dans le domaine $\text{Im } \lambda_i \geq 0$ ($i = 1, n$) alors que $\Delta(\lambda) = \det F_+(\lambda)$ y soit régulière. Dans notre cas, le potentiel vérifie les conditions d'existence d'un opérateur de transformation, ce qui assure l'analyticité de $F_+(\lambda)$ dans $\text{Im } \lambda_i > 0$ ($i = 1, n$).

Nous considérons les zéros $k^{(i)}$ de $\Delta(\lambda)$ se trouvant dans le demi-plan physique supérieur $\text{Im } k \geq 0$. Dans ce demi-plan, nous avons la relation :

$$F_+(\lambda, x) = G(\lambda, x) C(\lambda) + F_1(\lambda, x) D(\lambda) \quad (\text{IX.3.2})$$

où C et D sont des matrices indépendantes de x

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= [\text{Wr}[\bar{F}_1^{\dagger}(-\lambda^*, x), G(\lambda, x)]]^{-1} \text{Wr}[\bar{F}_1^{\dagger}(-\lambda^*, x), F_+(\lambda, x)] \quad (\text{IX.3.3}) \\ &= [\text{Wr}[\bar{F}_1^{\dagger}(-\lambda^*, x), G(\lambda, x)]]^{-1} (-)^L 2i\Lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \{\text{Wr}[\bar{G}^{\dagger}(\lambda^*, x), F_1(\lambda, x)]\}^{-1} \text{Wr}[\bar{G}^{\dagger}(\lambda^*, x), F_+(\lambda, x)] \\ &= \{\text{Wr}[\bar{G}^{\dagger}(\lambda^*, x), F_1(\lambda, x)]\}^{-1} \Lambda^{-L} F_+(\lambda) \quad (\text{IX.3.4}) \end{aligned}$$

Si $\Delta(k^{(i)}) = 0$, il existe au moins un vecteur (et au plus n vecteurs), tel que

$$F_+(k^{(i)}) \vec{a} = 0, \quad D(k^{(i)}) \vec{a} = 0$$

et par conséquent

$$F_+(k^{(i)}, x) \vec{a} = G(k^{(i)}, x) C \vec{a} \quad (\text{IX.3.5})$$

Nous avons construit un vecteur solution du système différentiel qui s'annule à l'origine et décroît exponentiellement à l'infini, c'est une fonction vectorielle décrivant un état lié. L'état lié peut être dégénéré c'est-à-dire qu'il peut y avoir ℓ ($1 \leq \ell \leq n$) vecteurs solutions linéairement indépendantes de ce type. Réciproquement, il est évident qu'à un état lié correspond un zéro $k^{(i)}$ de la fonction $\Delta(k)$. Dans le cas hermitien, les pôles de $F^{-1}(\lambda)$ sont simples et en nombre fini. Ils se trouvent sur le segment de l'axe réel $|k| < |k_{\max}|$ et sur le demi-axe imaginaire positif ($\text{Im } k > 0$). Dans le cas non hermitien, ces pôles ne sont plus nécessairement simples et peuvent être en nombre infini. Ils sont situés partout dans le demi-plan physique $\text{Im } k \geq 0$. Il peut également exister des zéros sur l'axe réel $\text{Im } k = 0$. Dans le cas hermitien, les zéros réels $k^{(i)}$ apparaissent par paires symétriques par rapport à l'origine et correspondent à des états liés plongés dans le continu. Lorsque le système est non hermitien, il peut apparaître en plus des zéros réels $k^{(i)}$ qui ne correspondent pas à

des fonctions normalisables ; ces zéros sont alors appelés "singularités spectrales". La position des états liés peut être précisée si nous faisons des hypothèses supplémentaires sur la partie imaginaire W du potentiel. A partir du système différentiel (IX.2.1) nous obtenons

$$\operatorname{Im} k^2 \int \phi^\dagger(x) \phi(x) dx = \int \phi^\dagger(x) W(x) \phi(x) dx \quad (\text{IX.3.6})$$

où ϕ est une fonction d'onde, vectorielle normalisable. Si W est une matrice semi-définie négative [positive] nous avons $\operatorname{Im} k^2 \leq 0$ [≥ 0].

Par conséquent, si nous voulons avoir des états liés à énergies réelles, il faut que la partie imaginaire W change de signe de façon telle que

$$\int_0^\infty \phi^\dagger(x) W(x) \phi(x) dx = 0 \quad . \quad (\text{IX.3.7})$$

Si ϕ_m [ϕ_n] est un état lié correspondant à l'énergie $E^{(m)}$ [$E^{(n)}$], utilisant le fait que le potentiel est symétrique, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \phi_m^\dagger(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad \text{pour } E^{(m)} \neq E^{(n)} \quad (\text{IX.3.8})$$

où

$$E^{(m)} = k^{(m)2} \quad \text{I-M} \quad .$$

Pour des potentiels non hermitiens, la condition (IX.2.15) imposée sur le potentiel, assure que le nombre de zéros et leur ordre sont finis. Les pôles correspondants de $F^{-1}(\lambda)$ ne sont cependant pas nécessairement d'ordre un.

DEFINITION : Nous appelons $L_n^2(\alpha, \beta)$ l'espace de Hilbert de fonctions vecteurs à n composantes $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ de carré sommable

$$\sum_i \int_\alpha^\beta f_i^*(x) f_i(x) dx < \infty \quad (\text{IX.3.9})$$

où le produit scalaire est défini par la relation

$$\langle f, g \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^n f_k(x) g_k(x) dx < \infty \quad (\text{IX.3.10})$$

si $f, g \in L_n^2(\alpha, \beta)$.

§ 4. EQUATION FONDAMENTALE DU PROBLEME INVERSE

Nous démontrons l'existence d'une équation fondamentale du problème inverse pour un système non hermitien en utilisant une méthode similaire à celle utilisée par Marchenko, sans postuler l'existence d'une identité de Parseval. Une autre attitude pourrait être adoptée : elle consisterait à démontrer que pour la classe de potentiels considérés, il existe une identité de Parseval. Lorsque l'identité de Parseval est obtenue, on peut déduire directement une équation fondamentale à partir de l'existence d'un opérateur de transformation.

Nous écrivons l'Eq. (IX.2.55) qui est valable pour $|\text{Im } \lambda| \leq \varepsilon_0/2$ ($\text{Im } k = 0$ pour U hermitien) et qui peut aussi s'écrire pour $\text{Im } \lambda > -\varepsilon_0/2$ ($\text{Im } k > 0$ si U est hermitien), pour x assez grand si nous remplaçons $F_-(\lambda, x)$ par $F_1(\lambda, x)$. (Les fonctions $F_1(\lambda, x)$ et $F_-(\lambda, x)$ sont identiques sur l'intersection de leur domaine de définition). Dans ce qui suit, il faudra remplacer $F(-\lambda, x)$ et $F(-\lambda)$ par $F_1(\lambda, x)$ et $F_1(\lambda)$ lorsque $\text{Im } \lambda \geq \varepsilon_0/2$. Nous obtenons pour un potentiel symétrique la relation :

$$-2i G(\lambda, x) \Lambda^L [F^T(\lambda)]^{-1} \Lambda = +[F(-\lambda, x) (-)^L - F(\lambda, x) S'(\lambda)] \quad (\text{IX.4.1})$$

Nous transformons cette relation en introduisant le noyau de transformation dont l'existence a été démontrée au chapitre VI. Le membre de droite s'écrit alors :

$$H_1(-\lambda, x) (-)^L + \int_0^{\infty} K(x, y) H_1(-\lambda, y) dy (-)^L - H_1(\lambda, x) S'(\lambda) - \int_0^{\infty} K(x, y) H_1(\lambda, y) S'(\lambda) \quad . \quad (\text{IX.4.2})$$

Nous savons que la matrice de diffusion τ est reliée à la matrice S par la relation :

$$S = 1 - 2i \Lambda^{1/2} \tau \Lambda^{1/2} = 1 - \Lambda^{1/2} T(\lambda) \Lambda^{1/2} \quad (\text{IX.4.3})$$

La matrice $1 - S'(\lambda) = T(\lambda)\Lambda$ est introduite et nous obtenons pour le membre de droite

$$\begin{aligned} & H_2(+\lambda, x) - H_1(\lambda, x) + H_1(\lambda, x) T(\lambda)\Lambda \\ & + \int_x^\infty K(x, z) dz [H_2(+\lambda, z) - H_1(\lambda, z)] \\ & + \int_x^\infty K(x, z) H_1(\lambda, z) T(\lambda)\Lambda dz \end{aligned} \quad (\text{IX.4.4})$$

L'équation (IX.4.1) devient :

$$\begin{aligned} -2i [G(\lambda, x) \Lambda^L F^T(\lambda)^{-1} \Lambda - J(\lambda, x)] &= H_1(\lambda, x) T(\lambda)\Lambda - \\ 2i \int_x^\infty K(x, z) J(\lambda, z) dz + \int_x^\infty K(x, z) H_1(\lambda, z) dz & T(\lambda)\Lambda \end{aligned} \quad (\text{IX.4.5})$$

où nous avons défini :

$$J(\lambda, x) = \frac{1}{2i} [H_1(\lambda, x) - H_1^*(\lambda, x)] = u(\lambda, x) \quad (\text{IX.4.6})$$

Pour poursuivre le calcul, nous multiplions à la droite des deux membres de l'Eq. (IX.4.5) par $\Lambda^{-1} H_1(\lambda, y) \lambda_1$. Nous supposons qu'il n'y a pas d'état lié dans le continu, ni de singularité spectrale. Dans ces conditions, le contour d'intégration à considérer est composé des segments $[-L, -k_n - \delta]$, $[-k_n + \delta, -k_{n-1} - \delta], \dots$, $[-k_i + \delta, -k_{i-1} - \delta], \dots$, $[k_2 + \delta, -\delta]$, $[\delta, k_2 - \delta]$, $[k_2 + \delta, k_3 - \delta], \dots$, $[k_i + \delta, k_{i+1} - \delta], \dots$, $[k_n + \delta, L]$, de l'axe réel k , de demi-cercles Γ_i , de rayon δ centrés sur $\pm k_i$ et un cercle Γ centré à l'origine et de rayon L . Si il existe des états liés dans le continu ou des singularités spectrales, la modification du contour est immédiate : les zéros réels de $\Delta(k)$ doivent se trouver sous la courbe d'intégration.

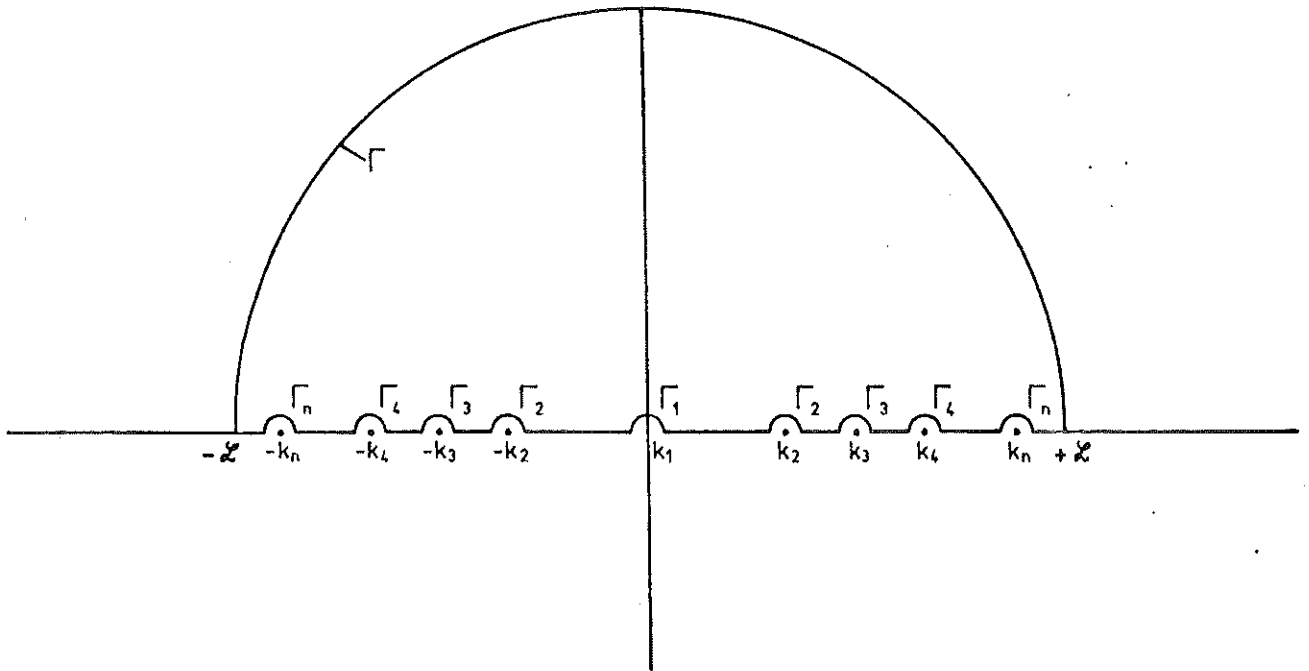


Fig. 1

Nous définissons $F_C(x,y)$ et $F_\Gamma(x,y)$ par les relations :

$$2\pi F_C(x,y) = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left\{ \int_{-L}^{-k_n - \delta} + \int_{-k_n + \delta}^{-k_{n-1} - \delta} + \dots + \int_{k_{n-1} + \delta}^{k_n - \delta} + \int_{k_n + \delta}^L \right\}$$

$$H_1(\lambda, x) T(\lambda) H_1(\lambda, y) \lambda_1 d \lambda_1 \quad (\text{IX.4.7})$$

et

$$\begin{aligned} 2\pi F_\Gamma(x,y) &= \int_{\Gamma} H_1(\lambda, x) T(\lambda) \wedge H_1(\lambda, y) \lambda_1 d \lambda_1 \\ &= \int_{\Gamma} H_1(\lambda, x) T(\lambda) H_1(\lambda, y) \lambda_1 d \lambda_1 \end{aligned} \quad (\text{IX.4.8})$$

Nous remarquons que la symétrie des matrices $U(x)$, $S(\lambda)$ et $T(\lambda)$ entraîne les propriétés $F_C(x,y) = F_C^T(y,x)$ et $F_\Gamma(x,y) = F_\Gamma^T(y,x)$.

Au lieu de considérer F et S comme des fonctions à n variables $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, il est préférable de les considérer comme des fonctions à une variable $k = \lambda_1$ en utilisant la relation de conservation de l'énergie. Rappelons qu'il faut pour cela préciser les fonctions $\lambda_j(k)$ en définissant les coupures choisies [HUM 64], [MAH 69] : toutes les coupures partent des points 0 , $\pm k_j$ ($i = 2, n$) sont parallèles à l'axe imaginaire et tendent vers l'infini. Dans le plan complexe physique des k , les fonctions $\lambda_j = [k^2 - k_j^2]^{1/2}$ sont définies de la façon suivante : Nous considérons les nombres complexes $k - k_j = r_j e^{i\alpha_j}$ et $k + k_j = s_j e^{i\beta_j}$ où α_j et β_j appartiennent à $]-\pi/2 ; 3\pi/2[$ et où $r_j = |k - k_j|$, $s_j = |k + k_j|$, $\lambda_j(k)$ est alors défini par la relation :

$$\lambda_j(k) = \sqrt{r_j s_j} \exp\left[\frac{i}{2} (\alpha_j + \beta_j)\right]$$

$$\lambda_j(e^{i\pi} k^*) = -[\lambda_j(k)]^*$$

Lorsque k est réel, $\lambda_j(k)$ vaut (voir Fig. 2) :

$$\lambda_j = \sqrt{k^2 - k_j^2} \quad \text{pour } k \geq k_j$$

$$\lambda_j = +i \sqrt{k_j^2 - k^2} \quad \text{pour } -k_j \leq k \leq k_j$$

$$\lambda_j = -\sqrt{k^2 - k_j^2} \quad \text{pour } k \leq -k_j$$

Avec notre choix pour la fonction $\lambda_j(k)$, nous pouvons écrire :

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} J(\lambda, x) \Lambda^{-1} J(\lambda, y) \lambda_1 d\lambda_1 \right]_{ij}$$

$$= \delta_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} j_{\ell_i}(\lambda_j x) j_{\ell_i}(\lambda_j y) \frac{\lambda_1}{\lambda_j} d\lambda_1$$

$$= \delta_{ij} \left[\int_{-\infty}^{-k_j} + \int_{k_j}^{\infty} \right] j_{\ell_i}(\lambda_j x) j_{\ell_i}(\lambda_j y) \frac{\lambda_1}{\lambda_j} d\lambda_1$$

$$= \delta_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} j_{\ell_i}(\lambda_j x) j_{\ell_i}(\lambda_j y) d\lambda_j$$

$$= \pi [I \delta(x-y) - (-)^L I \delta(x+y)]_{ij} \quad (\text{IX.4.9})$$

Nous utiliserons également la propriété :

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} J(\lambda x) \Lambda^{-1} N(\lambda y) \lambda_1 d\lambda_1 \right]_{ij} = 0 \quad , \quad (\text{IX.4.10})$$

où

$$N(\lambda y) = -\frac{1}{2} [H_1(\lambda y) + H_1^*(\lambda y)] \quad .$$

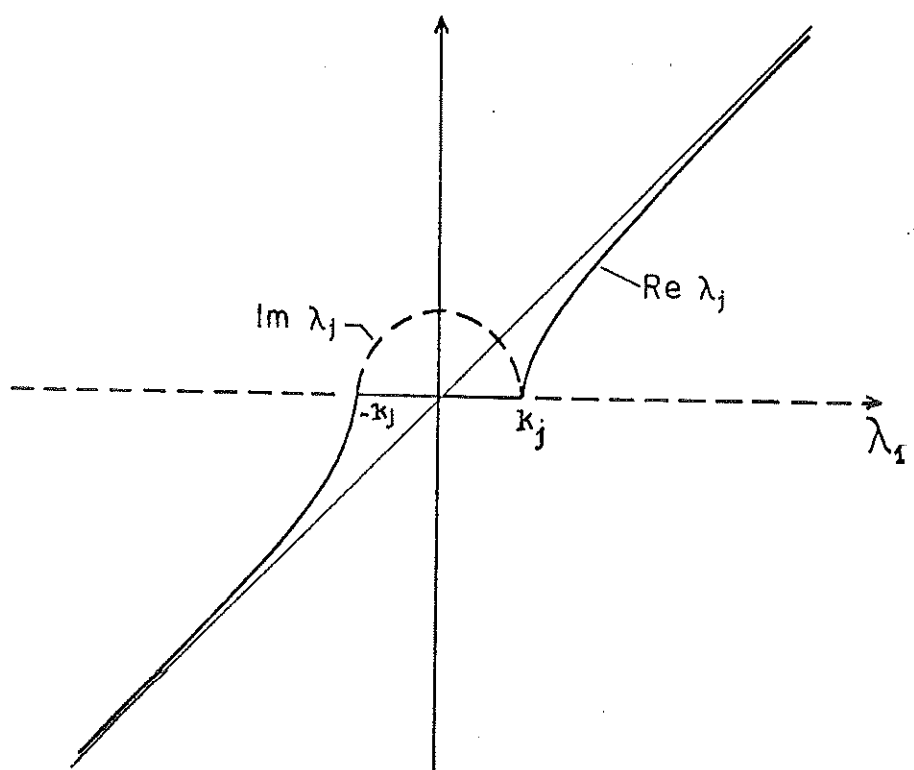


Fig. 2

Nous pouvons écrire l'intégrale du membre de droite de l'Eq. (IX.4.5) sous la forme :

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left[\int_{-L}^L H_1(\lambda x) T(\lambda) H_1(\lambda y) \lambda_1 d\lambda_1 - 2i \int_x^\infty dz K(x, z) \int_{-L}^L d\lambda_1 \right. \\ \left. J(\lambda z) H_1(\lambda y) \Lambda^{-1} \lambda_1 + \int_x^\infty dz K(x, z) \int_{-L}^L d\lambda_1 H_1(\lambda z) T(\lambda) H_1(\lambda y) \lambda_1 \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \{F_C(x,y) + F_T(x,y) + K(x,y) - (-)^L K(x,-y) \\
 &+ \int_x^\infty dz K(x,z) [F_C(z,y) + F_T(z,y)]\} \quad (IX.4.11)
 \end{aligned}$$

Nous montrerons plus tard que F_C est une matrice continue en x, y dans $y \geq x > 0$. Cette continuité conduit à la restriction que la matrice T doit vérifier des conditions plus fortes que celle de posséder une transformée de Fourier comme c'est le cas pour $L = 0$. Nous trouvons dans le cas considéré ici la condition :

$$\begin{aligned}
 |2\pi F_C(x,y)|_{ij} \leq c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\text{Im } \lambda_i x} \left[\frac{|\lambda_i|^{x+1}}{|\lambda_i|^x} \right]^{\ell_i} \\
 |T_{ij}| e^{-\text{Im } \lambda_j y} \left[\frac{|\lambda_j|^{y+1}}{|\lambda_j|^y} \right]^{\ell_j} \lambda_1 d\lambda_1, \quad (IX.4.12)
 \end{aligned}$$

qui limite la classe des matrices T acceptables. Par exemple, pour que l'intégrant se comporte convenablement au voisinage de k_i , $T_{ii}(\lambda) = 1 - S_{\ell}(k)$ doit s'annuler en k_i comme $\lambda_i^{2\ell_i}$ au moins.

Nous considérons à présent l'intégrale du membre de gauche de l'équation (IX.4.5)

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} -2i \left\{ \int_{-L}^L G(\lambda, x) \Lambda^L [F^T(\lambda)^{-1} - 1] H_1(\lambda y) \lambda_1 d\lambda_1 \right. \\
 \left. - \int_{-L}^{+L} [u(\lambda x) - G(\lambda, x) \Lambda^{L+1}] \Lambda^{-1} H_1(\lambda y) \lambda_1 d\lambda_1 \right\} \quad (IX.4.13)
 \end{aligned}$$

L'équation (IX.4.13) peut être obtenue en évaluant l'intégrale le long du contour C et en utilisant le théorème des résidus.

Comme

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |G(\lambda, x) \Lambda^L [F^T(\lambda)^{-1} - 1] H_1(\lambda y) \lambda_1| \rightarrow 0,$$

et

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |u(\lambda, x) - G(\lambda, x) \Lambda^{L+1}| \rightarrow 0 ,$$

l'intégrale le long de la demi-circonférence $|k| = \infty$ dans le demi-plan supérieur physique des k s'annule. Il nous reste à évaluer les contributions des pôles, qui proviennent des zéros de $\Delta(\lambda)$. L'expression (IX.4.13) devient :

$$+4\pi \sum_j \text{Résidus}^{(j)} \text{ de } [\lambda_1 G(\lambda, x) \Lambda^L F^T(\lambda)^{-1} H_1(\lambda, y)] . \quad (\text{IX.4.14})$$

Les pôles de $F^T(\lambda)^{-1}$ ne sont pas nécessairement simples dans le cas où U n'est pas hermitien. Soit $k^{(j)}$ une valeur de $\lambda_1 = k$ telle que $\Delta(\lambda_1) = 0$. Nous appelons $\lambda^{(j)} = a^{(j)} + ib^{(j)}$ le vecteur $\lambda(k^{(j)})$. Nous supposons que $k^{(j)}$ est un zéro d'ordre m_j de $\Delta(\lambda_1)$ et un pôle d'ordre p_j de $[F^T(\lambda)]^{-1}$, nous obtenons la contribution :

$$\begin{aligned} \text{Résidu}^{(j)} &= \frac{1}{(p_j - 1)!} \left(\frac{d}{dk} \right)^{(p_j - 1)} \{ G(\lambda, x) \Lambda^L k \\ & [F^T(\lambda)]^{-1} H_1(\lambda, y) (k - k^{(j)})^{p_j} \}_{(k=k^{(j)})} \quad (\text{IX.4.15}) \\ &= \frac{1}{(p_j - 1)!} \left(\frac{d}{dk} \right)^{(p_j - 1)} \left\{ \frac{1}{2i} F(\lambda, x) S'(\lambda) \frac{k}{\Lambda} \right. \\ & \left. H_1(\lambda, y) (k - k^{(j)})^{p_j} \right\}_{k=k^{(j)}} \end{aligned}$$

S' doit être remplacé par $S'_1 = F^{-1}(\lambda) F_1(\lambda)(-)^L$ dans le cas général où $-k^{(j)}$ n'appartient pas au domaine d'analyticité connecté à l'axe réel dans le plan physique k , de $F_+(\lambda)$.

Nous définissons l'opérateur différentiel d'ordre p_j

$$\mathcal{D}_{p_j}(k) = \left(\frac{d}{dk} \right)^{(p_j - 1)} \frac{1}{(p_j - 1)!} (k - k^{(j)})^{p_j} , \quad (\text{IX.4.16})$$

qui nous permet d'écrire le membre de gauche de l'Eq. (IX.4.14) sous la forme :

$$4\pi \sum_j \mathcal{D}_{p_j}(k) \frac{+1}{2i} [F(\lambda, x) S'_1(\lambda) \frac{k}{\Lambda} H_1(\lambda y)]_{k=k^{(j)}} \quad (\text{IX.4.17})$$

Nous utilisons à présent la représentation intégrale de Marchenko pour $F(\lambda, x)$ et nous obtenons :

$$4\pi \sum_j \{ \mathcal{D}_{p_j}(k) [H_1(\lambda x) \frac{1}{2i} S'_1(\lambda) \frac{k}{\Lambda} H_1(\lambda y)] \}_{k=k^{(j)}} + 4\pi \int_x^\infty dz K(x, z) \sum_j \{ \mathcal{D}_{p_j}(k) [H_1(\lambda z) \frac{1}{2i} S'_1(\lambda) \frac{k}{\Lambda} H_1(\lambda y)] \}_{k=k^{(j)}} \quad (\text{IX.4.18})$$

Un nouveau noyau $F(x, y)$ est défini par la relation :

$$F(x, y) = F_c(x, y) + F_\Gamma(x, y) + i \sum_j \{ \mathcal{D}_{p_j}(k) [H_1(\lambda x) S'_1(\lambda) \frac{k}{\Lambda} H_1(\lambda y)] \}_{k=k^{(j)}} \quad (\text{IX.4.19})$$

où $S'_1(\lambda) = F_+(\lambda)^{-1} F_1(\lambda)$ peut être remplacé par S' dans le cas où l'état lié $-k^{(j)}$ appartient au domaine d'analyticité de $F(k)$. Comme $K(x, y) = 0$ pour $y < 0$, nous obtenons l'équation fondamentale du problème inverse

$$0 = F(x, y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, z) F(z, y) dz \quad (\text{IX.4.20})$$

Cette équation possède la même forme que celle de l'équation obtenue par Agranovich et Marchenko ; elle est valable à la fois pour un système hermitien ou non hermitien avec la possibilité d'énergies de seuils différentes et d'un couplage entre moments angulaires différents. L'équation (IX.4.20) a été obtenue en supposant l'existence d'un opérateur de transformation. Cette hypothèse implique une borne implicite pour $K(x, y)$ qui permettra l'analyse de $F(x, y)$. Lorsque le système est non hermitien, nous avons imposé en plus que le potentiel est tel que le nombre d'états liés est fini et qu'il n'y a pas de singularités spectrales. La présence de singularités spectrales λ_1^r conduirait à une légère modification du contour d'intégration le long de l'axe réel des λ_1 ; elle consisterait à ajouter des demi-arcs de cercle, centrés en $\pm \lambda_1^r$ et passant au-dessus [en-dessous] de λ_1^r [$-\lambda_1^r$].

Nous présentons à présent une remarque qui peut être utilisée comme orientation pour la suite de l'étude. Cette remarque ayant un caractère heuristique, nous supposons que toutes les dérivées sous le signe d'intégration sont permises. Si nous appliquons les opérateurs $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ à l'équation (IX.4.20), nous obtenons, après quelques calculs :

$$H(x,y) + \int_x^\infty H(x,z) F(z,y) dy = 0 \quad , \quad (IX.4.21)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} H(x,y) = 0 \quad , \quad \text{où :}$$

$$H(x,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) K(x,z) - V_0(x) K(x,z) + K(x,z) V_0(z) + 2 \frac{d}{dx} [K(x,x)] K(x,z) \quad (IX.4.22)$$

Si l'équation fondamentale (IX.4.20) possède une solution unique, $H(x,y)$ doit s'annuler et, par conséquent, $K(x,y)$ est solution d'une équation matricielle aux dérivées partielles, qui est une généralisation matricielle à $L \neq 0$ de l'équation scalaire de Chudov. Le potentiel $V(x)$ est obtenu à partir du noyau $K(x,y)$ par la relation

$$V(x) = - \frac{2d}{dx} K(x,x) \quad (IX.4.23)$$

Supposons à présent que le noyau de transformation possède une borne :

$$||K(x,y)|| \leq A f(x) g(y) \quad , \quad 0 < \epsilon \leq x < y \quad (IX.4.24)$$

$$\int_x^\infty |f(t)| dt < \infty \quad (IX.4.25.a)$$

$$\int_x^\infty |g(t)| dt < \infty \quad . \quad (IX.4.25.b)$$

(La séparabilité de la borne n'est pas essentielle pour démontrer ce qui suit, mais nous verrons qu'elle est vérifiée en pratique). Le théorème suivant peut être démontré :

THEOREME 4.1. Si l'équation fondamentale possède une solution $K(x,y)$ telle que la borne (IX.4.24) est vérifiée, cette solution sera unique.

Comme la fonction $F(x,y)$ est construite à partir des données de la diffusion, il faudra imposer aux données de la diffusion des conditions telles que la fonction $F(x,y)$ possède certaines bornes que nous déduirons plus tard, à partir de l'équation fondamentale et des bornes pour $K(x,y)$ (Voir appendice A).

Pour démontrer le théorème, nous considérons l'équation homogène :

$$\phi_x(t) + \int_x^\infty \phi_x(z) F(z,t) dz = 0 \quad (\text{IX.4.26})$$

Nous voulons montrer que la seule solution bornée est la solution triviale. A l'Eq. (IX.4.26), nous associons l'Eq. (IX.4.27) pour $\psi_x(t)$:

$$\phi_x(t) = \psi_x(t) + \int_x^t \psi_x(s) K(s,t) ds \quad s > x \quad (\text{IX.4.27})$$

où $K(x,y)$ est le noyau solution de l'Eq. (IX.4.20). Nous substituons l'Eq. (IX.4.27) dans (IX.4.26) et changeant l'ordre des intégrations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \psi_x(t) + \int_x^t \psi_x(s) K(s,t) ds + \int_x^\infty \psi_x(z) F(z,t) dz \\ + \int_x^\infty ds \psi_x(s) \int_s^\infty K(s,z) F(z,t) dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{IX.4.28})$$

Utilisant l'équation fondamentale (IX.4.20), nous pouvons écrire l'Eq. (IX.4.28) sous la forme :

$$\psi_x(t) = \int_t^\infty ds \psi_x(s) K(s,t) \quad (\text{IX.4.29})$$

qui est une équation intégrale du type de Volterra dont la seule solution bornée est la solution triviale. A partir de l'équation (IX.4.27) nous voyons que $\phi_x(t)$ s'annule et par conséquent le théorème 4.1 est démontré.

§ 5. LE NOYAU DE L'EQUATION FONDAMENTALE

Dans le paragraphe précédent, nous avons démontré l'existence d'une équation fondamentale du problème inverse pour $0 < x < y$. La démonstration est basée sur l'existence d'un opérateur de transformation et sur la propriété que le spectre discret est fini. En vue d'assurer cette dernière propriété, nous avons dû imposer une condition très forte sur le potentiel dans la cas d'un système non hermitien ; cette condition n'est pas nécessaire si le système est hermitien.

La partie diagonale $F(x,x)$ du noyau de l'équation fondamentale, appelé "matrice spectrale", est continue pour x tendant vers zéro, cette continuité se déduit de la continuité de $K(x,x)$ (voir appendice A). Des estimations pour la matrice spectrale et ses dérivées partielles peuvent être déduites de l'équation fondamentale et des bornes obtenues au chapitre VI pour le noyau de transformation et ses dérivées. Dans la recherche de ces estimations pour K , F et leurs dérivées, nous devons faire une séparation très nette entre les cas hermitien et non hermitien : alors que les bornes obtenues dans le premier cas viennent des conditions qu'il faut imposer pour que la théorie puisse être développée, dans le second cas les bornes pour K et ses dérivées sont une conséquence de la condition imposée a priori au potentiel. Les bornes pour K et ses dérivées sont obtenues au chapitre VI dans le cas général où la condition de Naimark n'est pas imposée au potentiel.

Si nous considérons un système non hermitien et si nous imposons la condition de Naimark (IX.2.15), le noyau $K(x,y)$ possèdera une décroissance exponentielle :

$$||K(x,y)|| \leq (A/x_0)^L f(x_0) \exp \left[- \epsilon_0 \frac{(x+y)}{2} \right] \text{ pour } x > x_0 \quad (\text{IX.5.1})$$

En accord avec ce qui précède, nous devons étudier séparément les cas hermitien et non hermitien :

a. Système hermitien

Nous introduisons deux opérateurs différentiels

$$D_+^{\ell} = x^{\ell} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{\ell}} \quad (\text{IX.5.2})$$

et

$$D_-^\ell = \frac{1}{x^\ell} \frac{d}{dx} x^\ell = D_+^{-\ell} \quad (\text{IX.5.3})$$

Lorsqu'ils sont appliqués aux fonctions de Riccati-Hankel $h_1^\ell(kx)$, ils donnent :

$$D_+^\ell h_1^{\ell-1}(kx) = -k h_1^\ell(kx) \quad (\text{IX.5.4})$$

$$D_-^\ell h_1^\ell(kx) = k h_1^{\ell-1}(kx) \quad (\text{IX.5.5})$$

Nous considérons à présent la transformation intégrale :

$$T_1[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1^\ell(k\xi) \phi(\xi) d\xi \quad (\text{IX.5.6})$$

où $\phi(\xi)$ est une fonction se comportant suffisamment bien au voisinage de l'origine et à l'infini : $\phi(\xi) \in L^2(-\infty, \infty)$. L^2 représente le sous-espace dense dans L^2 , qui comprend les éléments s'annulant à l'origine comme $x^{\ell+1}$ et possédant des dérivées jusqu'à l'ordre ℓ appartenant à $L_2(-\infty, \infty)$.
Intégrant par parties, nous obtenons :

$$T_1[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1^{\ell-1}(k\xi) \frac{1}{k} D_-^\ell [\phi(\xi)] d\xi \quad (\text{IX.5.7})$$

Introduisant l'opérateur

$$D_- = D_-^1 D_-^2 \dots D_-^\ell \quad (\text{IX.5.8})$$

nous pouvons écrire les relations :

$$D_- h_1^\ell(kx) = k^\ell e^{ikx} \quad (\text{IX.5.9})$$

$$\begin{aligned} T_1[\phi] &= \frac{1}{k^\ell} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} D_-[\phi(\xi)] d\xi \\ &= \frac{1}{k^{2\ell}} \int_{-\infty}^{\infty} D_-[h^\ell(k\xi)] D_-[\phi(\xi)] d\xi \end{aligned} \quad (\text{IX.5.10})$$

Nous introduisons à présent un opérateur différentiel matriciel \mathcal{D}_- qui possède les éléments :

$$[\mathcal{D}_-]_{ij} = \delta_{ij} D_-^1 D_-^2 \dots D_-^{L_i} \quad (\text{IX.5.11})$$

Si $\psi(x)$ est un vecteur, nous définissons $\vec{\mathcal{D}}_-$ et $\overleftarrow{\mathcal{D}}_-$ par la relation

$$\psi \overleftarrow{\mathcal{D}}_- = [\vec{\mathcal{D}}_- \psi]^T = [\overleftarrow{\mathcal{D}}_- \psi]^T \quad (\text{IX.5.12})$$

Si ϕ représente un vecteur ou une matrice dont tous les éléments appartiennent à $L^2(-\infty, \infty)$, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \phi(\xi) H_1(\lambda, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \phi(\xi) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- \Lambda^{-L} e^{i\Lambda \xi} \quad (\text{IX.5.13a})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- \Lambda^{-2L} \vec{\mathcal{D}}_- H_1(\lambda, \xi) \quad (\text{IX.5.13b})$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi H_1(\lambda, \xi) \phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\Lambda \xi} \Lambda^{-L} \vec{\mathcal{D}}_- \phi(\xi) \quad (\text{IX.5.14a})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi H_1(\lambda, \xi) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- \Lambda^{-2L} \vec{\mathcal{D}}_- \phi(\xi) \quad (\text{IX.5.14b})$$

Nous pouvons à présent aisément transformer l'expression suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) [F_C(x, t) + F_\Gamma(x, t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(x) H_1(\lambda, x) T(\lambda) H_1(\lambda, t) k \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- \Lambda^{-L} e^{i\Lambda x} T(\lambda) k H_1(\lambda, t) \end{aligned} \quad (\text{IX.5.15})$$

$$\begin{aligned}
 y(t) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- \Lambda^{-L} e^{i\Lambda x} T(\lambda) k \Lambda^L e^{i\Lambda t} \\
 &= \phi(-t) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i\Lambda x} \Lambda^{-L} \\
 &\quad S'(\lambda) \frac{k}{\Lambda} \Lambda^L e^{i\Lambda t}
 \end{aligned}
 \tag{IX.5.16}$$

$$\begin{aligned}
 &= \phi(-t) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Lambda x} \\
 &\quad \Sigma(\lambda) e^{i\Lambda t} \frac{k}{\Lambda} dk
 \end{aligned}
 \tag{IX.5.17}$$

Si nous posons

$$\hat{\phi}(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- e^{i\Lambda x} dx
 \tag{IX.5.18}$$

et si $\phi(x) = 0$ pour $x < \epsilon$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 y(t) \overleftarrow{\mathcal{D}}_- &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(-k) \Sigma(k) e^{i\Lambda t} \frac{k}{\Lambda} dk \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(-k) \Sigma(k) e^{i\Lambda t} d\Lambda
 \end{aligned}
 \tag{IX.5.19}$$

Nous venons de montrer que le noyau spectral pour l'équation générale ($L \neq 0$) se ramène au noyau spectral pour $L = 0$. On peut aussi montrer que les constantes de normalisation pour $L > 0$ sont des matrices hermitiennes définies positives. Par le procédé de réduction précédent, l'étude de Marchenko concernant les équations intégrales générées par le noyau spectral [AGR 63, p. 76] pour $L = 0$ peut être étendue au cas hermitien $L \neq 0$. Les conditions nécessaires pour $L \neq 0$ ressemblent aux conditions de Marchenko pour $L = 0$ (voir [COZ 79]).

b. Système non-hermitien

Dans le cas non hermitien, nous laissons ici sans réponse la question de savoir s'il est possible d'adopter une méthode du même type que dans le cas hermitien, si les singularités spectrales et le spectre discret sont finis dans $\text{Im } k \geq 0$. Pour assurer un caractère fini au spectre nous avons imposé la condition (IX.2.15). Ce n'est que pour cette classe de potentiels de courte portée que l'équation fondamentale et la borne (IX.2.20) ont été établies. La borne pour K est telle que le théorème 4.1 peut être appliqué et l'équation fondamentale possèdera une solution unique. Nous considérons à présent l'équation fondamentale comme une équation intégrale pour $F(x,y)$ et nous obtenons, dans l'appendice A, la borne suivante pour $||F(x,y)||$ pour $y \geq x > x_0 > 0$

$$||F(x,y)|| \leq \theta(x,y) \exp \rho(x,y) \quad (\text{IX.5.20})$$

$$\theta(x,y) = C \left(\frac{y}{x}\right)^{\hat{k}_{\max}} \hat{\gamma}_0\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (\text{IX.5.21})$$

$$\rho(x,y) = C \int_x^\infty \hat{\gamma}_0\left(\frac{t}{2}\right) dt \quad (\text{IX.5.22})$$

$$C = \frac{1}{2} \exp[\sigma^1(x_0)] \quad (\text{IX.5.23})$$

Utilisant la condition (IX.2.15), nous obtenons :

$$\theta(x,y) \leq \theta_1(x,y) = C \left(\frac{y}{x}\right)^{\hat{k}_{\max}} \hat{\gamma}_0\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{-\epsilon \frac{x+y}{2}} \quad (\text{IX.5.24})$$

$$\leq \theta_2(x,y) = C \left(\frac{2}{x}\right)^{\hat{k}_{\max}} \hat{\sigma}^{\hat{k}_{\max}}\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{-\epsilon \frac{x+y}{2}}, \quad (\text{IX.5.25})$$

$$\rho(x,y) \leq \rho_1(x,y) = C 2^{\hat{\sigma}^1}\left(\frac{x}{2}\right), \quad (\text{IX.5.26})$$

où nous avons :

$$\hat{\sigma}^{\hat{k}}(x) = \int_x^\infty s^{\hat{k}} e^{\epsilon s} ||U(s)|| ds \quad (\text{IX.5.27})$$

De la borne (IX.5.20) pour F , nous déduisons que $F(x,y)$ est continu pour $0 < x \leq y$ et que sa partie diagonale $F(x,x)$ est continue même en $x = 0$. Comme

$$2\pi F_c(x,y) = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{-L}^{+L} H_1(\lambda x) T(\lambda) H_1(\lambda y) \lambda_1 d\lambda_1 \quad (\text{IX.5.28})$$

les bornes pour F et ses dérivées conduisent à des conditions sur les données de la diffusion. Une borne pour $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ peut être obtenue à partir des bornes pour K et ses dérivées en utilisant l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} K(x,y) + \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x} K(x,z) F(z,y) dz - K(x,x) F(x,y) = 0 \quad (\text{IX.5.29})$$

A partir des bornes pour F et ses dérivées nous trouvons que

$$\int_{x_0}^\infty ||F_c(x,y)|| ds < \infty$$

$$\int_{x_0}^\infty s ||F_c(s,y)||^2 ds < \infty$$

Si nous fixons $x_0 > 0$ et si nous considérons le cas $y \geq x \geq x_0$ comme les fonctions $\theta(x,y)$, $\rho(x,y)$ sont des fonctions décroissantes en x , les équations (IX.5.20-26) restent valables si nous remplaçons x par x_0 dans les membres de droite de ces équations ; nous pouvons donc écrire :

$$||F(x,y)|| \leq \Gamma(x_0) \exp[-\epsilon (\frac{x+y}{2})] \quad (\text{IX.5.30})$$

De façon semblable, nous pouvons montrer que

$$||\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)|| \leq \Gamma_1(x_0) \exp[-\epsilon (\frac{x+y}{2})] \quad (\text{IX.5.31})$$

et

$$||\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)|| \leq \Gamma_2(x_0) \exp[-\epsilon (\frac{x+y}{2})] \quad (\text{IX.5.32})$$

Avec ces propriétés, il est aisé de montrer que les lignes (et par conséquent les colonnes) de $F(x,y)$ sont des éléments de $L_n^p(x_0, \infty)$ ($p = 1, 2$ ou ∞) comme fonction de x . Nous considérons l'opérateur linéaire \underline{F} dans $L_n^p(x_0, \infty)$ ($p = 1, 2$ ou ∞) défini par

$$\eta(y) = \underline{F}[\xi] = \int_{x_0}^{\infty} \xi(x) F(x,y) dx \quad (\text{IX.5.33})$$

Lemme : \underline{F} est une transformation bornée de $L_n^p(x_0, \infty)$ dans $L_n^p(x_0, \infty)$ ($p = 1, 2, \infty$).

Démonstration : La démonstration est essentiellement basée sur la propriété suivante :

$$\sum_i f_i g_i^* \in L_1^1 \quad \text{si} \quad f \in L_n^p \quad \text{et} \quad g \in L_n^q \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Nous avons alors l'inégalité de Hölder

$$\left| \sum_i \int_{\varepsilon}^{\infty} f_i g_i^* dx \right| \leq \|f\|_p^2 \|g\|_q^{\varepsilon}.$$

Comme $F(x,y) \in L_n^p(x_0, \infty)$ pour $p = 1, 2$ et ∞ , si nous supposons que $\xi(x) \in L_n^q(x_0, \infty)$ pour $q = 1, 2$ ou ∞ , nous avons

$$\xi(x) F(x,y) \in L_1^1(x_0, \infty).$$

Nous démontrons le lemme pour $p = 1$. Les démonstrations pour $p = 2$ ou ∞ sont essentiellement les mêmes et sont données en Appendice B.

Dans $L_n^1(x_0, \infty)$, la norme est définie comme :

$$\|\xi\|_1^{(x_0)} = \int_{x_0}^{\infty} \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)| dx \quad (\text{IX.5.34})$$

Nous calculons la norme de η suivant $L_n^1(x_0, \infty)$:

$$\begin{aligned}
 ||\eta||_1^{(x_0)} &= \int_{x_0}^{\infty} \sum_{i=1}^n |\eta_i(y)| dy \\
 &\leq \sum_{i,\ell=1}^n \int_{x_0}^{\infty} dx |\xi_{\ell}(x)| \int_{x_0}^{\infty} dy |F_{\ell i}(x,y)| \\
 &\leq \frac{2n}{\varepsilon} \Gamma(x_0) \sum_{\ell=1}^n e^{-\frac{\varepsilon x_0}{2}} \int_{x_0}^{\infty} dx e^{-\frac{\varepsilon x}{2}} |\xi_{\ell}(x)| \\
 &\leq \frac{2n}{\varepsilon} \Gamma(x_0) e^{-\varepsilon x_0} ||\xi||_1^{(x_0)}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que la norme de \underline{F} vérifie l'inégalité :

$$||\underline{F}||_1^{(x_0)} \leq \frac{2n}{\varepsilon} \Gamma(x_0) e^{-\varepsilon x_0} \tag{IX.5.35}$$

Théorème 5.1 : \underline{F} est un opérateur complètement continu dans L_n^p
 ($p = 1, 2$ ou ∞)

Démonstration : Comme les démonstrations sont similaires pour $p = 1, 2$ ou ∞ , nous démontrons le théorème pour $p = 1$.
 Considérons $\eta(y) = \underline{F}[\xi]$ pour $\xi(x)$ tel que :

$$||\xi||_1^{(x_0)} \leq 1 ;$$

nous obtenons alors :

$$||\eta||_1^{(x_0)} \leq ||\underline{F}|| ||\xi||_1^{(x_0)} \leq ||\underline{F}|| \tag{IX.5.36}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{\infty} |\eta(t+h) - \eta(t)| dt &\leq \int_{x_0}^{\infty} dt \int_{x_0}^{\infty} dx |\xi(x)| |F(x,t+h) - F(x,t)| \\
 &= \int_{x_0}^{\infty} |\xi(x)| dx \int_{x_0}^{\infty} dt |F(x,t+h) - F(x,t)|
 \end{aligned}$$

$$= \int_{x_0}^{\infty} |\xi(x)| dx \int_{x_0}^{\infty} dt \left| \frac{\partial}{\partial t} F(x,t) h \right| \text{ pour } h \text{ suffisamment petit.}$$

Nous avons donc pour tout $\delta > 0$

$$\int_{x_0}^{\infty} |\eta(t+h) - \eta(t)| dt \leq \|\xi\|_1^{(x_0)} |h| \Gamma_2(x_0) \frac{\epsilon}{2} n e^{-\frac{x_0}{\epsilon}} \leq \delta \text{ si } |h| \text{ est suffisamment petit.}$$

(Ce résultat est une conséquence directe du théorème qui dit que si $f \in L_n^1$ ou L_n^2 , $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\| = 0$).

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} |\eta(t)| dt &\leq \int_N^{\infty} dt \int_{\epsilon}^{\infty} |\xi(x)| |F(x,t)| dx \\ &\leq \int_{\epsilon}^{\infty} dx |\xi(x)| \int_N^{\infty} |F(x,t)| dt \\ &\leq \frac{2n}{\epsilon} \Gamma(N) e^{-\epsilon N} \|\xi\|_1^{(x_0)} \leq \delta \end{aligned} \quad (\text{IX.5.38})$$

pour N suffisamment grand puisque $\Gamma(N)$ est une fonction décroissante. A partir des Eqs. (IX.5.36,37,38) l'ensemble des fonctions η est compact dans $L_n^1(x_0, \infty)$ et l'opérateur \underline{F} est complètement continu dans $L_n^1(x_0, \infty)$.

Corollaire : L'équation $a(x) + \lambda \xi(x) + \underline{F}(\xi) = 0$ où $a(x) \in L_n^p(x_0, \infty)$ ($p = 1, 2$ ou ∞) possède une solution unique $\xi(x)$ si l'équation homogène

$$\lambda \xi(x) + \underline{F}(\xi) = 0$$

ne possède pas d'autre solution dans $L_n^p(x_0, \infty)$ que la solution triviale.

Grâce au théorème 5.1, la fonction $F(x,y)$ peut être approchée par un opérateur séparable de rang fini.

§ 6. LES DONNEES DE LA DIFFUSION

Après l'étude de quelques propriétés de la matrice spectrale $F(x,y)$, nous précisons à présent quelque peu ce que sont les données de la diffusion et les conditions de compatibilité qu'elles doivent vérifier. Nous appelons "données de la diffusion" ("Scattering data") les éléments qui sont nécessaires pour permettre la construction de la matrice spectrale $F(x,y)$. Ces éléments sont :

- a) La matrice $S'(\lambda)$ et un ensemble de n énergies de seuils k_i^2 ($i = 1, n$)
- b) Un ensemble fini de nombres complexes $E_i = \alpha_i + i \beta_i$ qui sont les valeurs de $\lambda_1^2 = k^2$ correspondant aux états liés ; à chaque E_i nous devons associer deux nombres entiers positifs m_i et p_i correspondant respectivement à la multiplicité du zéro de $\Delta(\lambda^{(i)})$ et à l'ordre du pôle de $F^{-1}(\lambda_1^{(i)})$
- c) Un ensemble de p_i matrices complexes A_m^i

$$A_m^i = \mathcal{D}_m C(k) \Big|_{k=\lambda_1^{(i)}} = \left(\frac{d}{dk} \right)^{m-1} \left[\frac{1}{(m-1)!} (k - k_j)^m S_1'(k) \right]_{k=\lambda_1^{(i)}} \quad (\text{IX.6.1})$$

$m = 1, p_i$

Les données de la diffusion ne sont pas indépendantes, il existe des relations de compatibilité entre elles, que nous analysons à présent.

Nous rappelons les propriétés bien connues de la matrice S

$$S(\lambda) = \Lambda^{1/2} S' \Lambda^{-1/2} = S^T(\lambda) \quad (\text{IX.6.2})$$

$$S'(\lambda) = F^{-1}(\lambda) F(-\lambda) \quad (\text{IX.6.3})$$

$$F(\lambda) = 1 + O(\lambda_1^{-1}) \quad (\lambda_1 \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda_1 \geq 0) \quad (\text{IX.6.4})$$

Une conséquence directe de cette dernière relation est que dans le cas scalaire $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Im } \delta(k) = 0$, la convention habituelle $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(k) = 0$ peut donc être prise ; dans le cas matriciel un rôle similaire à celui de $\delta(k)$ est joué par

$$\eta(k) = \frac{1}{2i} \ln \det S(k) \quad (\text{IX.6.5})$$

Les équations (IX.6.2-4) conduisent aux relations :

$$S'(\lambda) S'(-\lambda) = I \quad (\text{IX.6.6})$$

$$\det S'(0) = \pm 1 \quad (\text{IX.6.7})$$

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} S'(\lambda) = I + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (\text{Im } k = 0) \quad (\text{IX.6.8})$$

Nous considérons à présent une courbe \mathcal{C} symétrique par rapport à l'origine qui coïncide avec l'axe réel des k de $-\infty$ à $+\infty$, sauf au voisinage des points de branchement k_i et des zéros réels de $\Delta(\lambda)$ et $\Delta(-\lambda)$ où, pour $k > 0$, la courbe passe au-dessus des points de branchement et des zéros de $\Delta(\lambda)$ et en-dessous des zéros de $\Delta(-\lambda)$. Comme les fonctions $\Delta(\lambda)$ et $\Delta(-\lambda)$ sont des fonctions analytiques en k dans $\text{Im } k > 0$ et $\text{Im } k < 0$ respectivement et comme elles sont continues dans $\text{Im } k \geq 0$ et $\text{Im } k \leq 0$ respectivement, la variation de la phase propre $\eta(k)$ (ou l'index de la matrice S [GAK 66] le long de la courbe \mathcal{C} peut être reliée à la somme des multiplicités des zéros de $\Delta(\lambda)$ [$\Delta(-\lambda)$] dans $\text{Im } k > 0$ [$\text{Im } k < 0$] par la méthode habituelle [GAK 66, MUS 63]. Cette méthode nous fournit une généralisation du théorème de Levinson (démontré dans le cas hermitien par Weidenmüller [WEI 64, p. 94] ou aussi [NEW 66]). La phase n'étant pas définie de façon univoque, nous précisons notre choix par les conditions :

$\eta(k)$ est une fonction continue sur $]0, \infty[$

$$\eta(+\infty) = 0 \quad (\text{IX.6.9})$$

$$\eta(-k) = -\eta(k) \quad (\text{IX.6.10})$$

$$(\det S'(0) = \pm 1 \quad \eta(0) = \pi \nu)$$

$$\eta(0_+) \neq \eta(0_-) \text{ en général .}$$

Avec cette définition de la phase, nous obtenons le théorème de Levinson généralisé :

$$\eta(0) - \eta(\infty) = \pi(m + \frac{\sigma}{2}) \quad (\text{IX.6.11})$$

où m représente la somme des multiplicités des zéros de $\Delta(k)$ dans $\text{Im } k > 0$ et σ est la somme des multiplicités des zéros de $\Delta(k)$ sur l'axe réel k . Dans le cas où V est hermitien, les zéros réels (qui sont dans ce cas des états liés du continu) existent par paires symétriques par rapport à l'origine et donnent des contributions semblables aux autres états liés [NEW 66]. (Le théorème de Levinson formulé par Weidenmüller [WEI 64] ne contient pas les contributions des états liés du continu et ses déphasages sont alors discontinus à ces énergies). On pourrait aussi ne pas inclure les singularités spectrales dans la relation (IX.6.11), celles-ci joueraient alors un rôle similaire aux résonances et créeraient une discontinuité de π dans le déphasage. Un problème de factorisation de Hilbert matriciel [MUS 53, GAK 66] pour la matrice $S' = F^{-1}(k) F(-k)$ plutôt que pour le scalaire $\det S' = \Delta(-k)/\Delta(k)$ pourrait être considéré et pourrait fournir des conditions supplémentaires (voir [MUS 53, GAK 66]). Ce problème ne sera pas considéré ici.

Pour terminer, nous remarquons qu'il est difficile d'obtenir dans le cas général, un lien direct entre les différentes quantités suivantes :

m_i = la multiplicité de $k^{(i)}$ comme zéro de $\Delta(k)$

p_i = ordre du pôle $k^{(i)}$ de $F^{-1}(k)$

r_i = la multiplicité algébrique de $[F(k^{(i)}) - \lambda I]$ associée à la valeur propre $\lambda = 0$

ℓ_i = la multiplicité géométrique de cette même valeur propre $\lambda = 0$. L'entier ℓ_i représente aussi l'ordre de dégénérescence de l'état lié $k^{(i)}$

q_i = l'ordre du pôle $\lambda = 0$ de $[F(k^{(i)}) - \lambda I]^{-1}$

= l'ordre de $\lambda = 0$ comme zéro du polynôme minimal associé

à la matrice $F(k^{(i)})$
 (si $F(k^{(i)})$ est diagonalisable, $q_i = 1$)

Si $F(k^{(i)})$ est une matrice normale ($F(k^{(i)}) F^+(k^{(i)}) = F^+(k^{(i)}) F(k^{(i)})$) nous avons les relations $r_i = \ell_i$, $q_i = 1$. Dans le cas scalaire, nous pouvons écrire : $m_i = p_i$ ($r_i = \ell_i = q_i = 1$). Si V est hermitien, nous avons $F(k^{(i)}) = F^+(k^{(i)})$ (car $k^{(i)}$ est imaginaire pure) et par conséquent $q_i = 1$.
 D'autres relations existent aussi dans ce cas :

$$p_i = 1$$

$$m_i = \ell_i = r_i$$

Les pôles de $F^{-1}(k)$ peuvent être caractérisés par le théorème suivant [COZ 79] :

Si $A(z)$ représente une matrice régulière au voisinage de $z = 0$ et si $\det A(0) = 0$, $A^{-1}(z)$ possède un pôle d'ordre j (au plus) si et seulement si il n'existe pas de fonction vectorielle analytique telle que $(\frac{d}{dz})^\ell [Af] = 0$ pour $\ell = 0, j$ ou de façon plus claire ssi il n'existe pas de combinaison linéaire non nulle entre $A(0)$ et ses j premières dérivées à l'origine :

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i z^i$$

$$A^{-1}(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} B_i z^i$$

$$m \leq j \iff \sum_{i=0}^j A_{\ell-i} c_i = 0 \quad \ell = 0, j \quad c_0 = 0$$

Nous formulons à présent le théorème qui précise les conditions nécessaires à imposer aux données de la diffusion pour qu'elles soient bien les données d'un système non hermitien, contenant des moments angulaires et des énergies de seuils différents.

THEOREME 6.1. Afin de pouvoir résoudre le problème inverse, les données de la diffusion définies plus haut doivent vérifier certaines conditions : la matrice $S'-I$ doit posséder une double transformée de Hankel de façon à pouvoir construire la matrice spectrale F . La phase de la matrice S' et le nombre d'états liés avec leur multiplicité doivent former un problème de Hilbert compatible pour la factorisation de $\det S'$: la relation de Levinson généralisée doit par conséquent être vérifiée.

Dans le cas hermitien, la sous-matrice S correspondant aux voies ouvertes doit être unitaire et les matrices de normalisation sont des matrices hermitiennes définies non-négatives de rang égal à la multiplicité m_i (La somme des rangs des matrices de normalisation doit être donc en accord avec le théorème de Levinson).

Dans le cas non-hermitien, la matrice S est une matrice complexe quelconque et à chaque état lié correspondent p_i matrices de normalisation de rangs inférieurs ou égaux à r_i . Afin de rester dans la classe de potentiels de courte portée, précisée par la condition (IX.2.15) et imposée dans le cas non-hermitien pour obtenir l'équation fondamentale, la matrice spectrale F et ses dérivées doivent posséder certaines bornes précisées en Appendice A.

§ 7. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème inverse associé à un système d'équations couplées où le potentiel de référence contient des énergies de seuils et des moments angulaires différents et où le potentiel perturbatif est non-hermitien. Lors de cette étude, des différences essentielles entre les systèmes hermitiens et non-hermitiens sont apparues : Dans le cas d'un système hermitien, les conditions obtenues au Chapitre VI et qu'il faut imposer au potentiel perturbatif pour assurer l'existence d'un opérateur de transformation, suffisent pour obtenir l'équation fondamentale du problème inverse ; dans le cas non-hermitien, il faut imposer en plus la condition (IX.2.15) qui assure un spectre discret

fini. Après avoir obtenu l'équation fondamentale, les propriétés de son noyau (la matrice spectrale) ont été analysées ; l'unicité de sa solution a été prouvée. Nous avons ensuite identifié les données de la diffusion et formulé les conditions qu'elles doivent vérifier.

La théorie que nous venons de développer possède un très grand nombre d'applications en physique nucléaire (détermination du potentiel optique par exemple) et en physique des particules élémentaires. L'étude du système $N\bar{N}$ ou du baryonium en général constitue un exemple idéal d'application du problème inverse pour un potentiel non hermitien. La partie à longue et à moyenne portée du potentiel $N\bar{N}$ est connue et s'obtient à partir du potentiel NN par la règle de la G-parité, la partie à courte portée est complexe et il n'existe pas pour l'instant de modèle théorique qui permette de la déterminer. Il serait intéressant dans ce cas de prendre comme potentiel de référence la partie connue, qui est due aux échanges de mésons et de déterminer la partie complexe inconnue par la méthode inverse. Jusqu'à présent, les tentatives entreprises pour reproduire les données expérimentales à partir d'un potentiel local dont la forme est fixée d'avance et qui contient un certain nombre de paramètres ne sont pas très satisfaisantes ; ces échecs ne permettent cependant pas de conclure que le potentiel n'est pas local, la forme choisie au départ n'étant peut-être pas adéquate. Si on veut appliquer la méthode inverse, il faut d'abord vérifier que les données de la diffusion à l fixé sont compatibles ; si elles le sont, il est possible de construire un potentiel local pour chaque l . Le résultat final sera probablement un potentiel "local" dépendant du moment angulaire l . (Les résultats actuels semblent en effet indiquer une dépendance forte vis-à-vis du moment angulaire [VIN 78]).

Généralement, la méthode numérique la plus utilisée consiste à obtenir le potentiel en ajustant des paramètres de façon à reproduire le mieux possible les résultats expérimentaux (un tel calcul prend quelques minutes pour les cas NN non couplés et de l'ordre d'une heure pour les cas couplés). En utilisant cette méthode, on court le risque de tirer des conclusions fausses sur la forme du potentiel, qui ne sont pas contenues dans les données expérimentales utilisées. La théorie du problème inverse a le mérite de mettre en évidence l'ambiguïté de la définition du poten-

tiel et nous évite de tirer des conclusions fausses. (Ainsi, ce n'est pas parce que les déphasages changent de signe, que le potentiel $N-N$ possède un coeur dur, le coeur dur ne peut être justifié que si nous connaissons les déphasages à l'infini, un coeur infiniment dur conduit à des déphasages continuellement décroissants à l'infini de façon telle qu'il n'est pas possible d'appliquer le théorème de Levinson). Il est possible que la méthode que nous avons développée conduise à d'autres applications semblables à celles du problème inverse à une dimension qui est utilisée pour la résolution d'équations non linéaires et pour déterminer le potentiel de confinement dans les systèmes "quarkonium".

APPENDICE A
+++++

Dans cet appendice A, nous recherchons une borne supérieure pour $||F(x,y)||$ en utilisant l'équation fondamentale comme une équation pour $F(x,y)$ et la borne obtenue pour $K(x,y)$:

$$||F(x,y)|| \leq ||K(x,y)|| + \int_x^\infty ||K(x,t)|| ||F(t,y)|| dt \quad (A.1)$$

$$||K(x,y)|| \leq C \left(\frac{y}{x}\right)^{\ell_{\max}} \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (A.2)$$

où

$$C = 1/2 \exp[\tilde{\sigma}^1(x_0)] \text{ pour } y \geq x \geq x_0 > 0 \quad (A.3)$$

L'éq. (A.1) devient :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\ell_{\max}} ||F(x,y)|| \leq C \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) + C \int_x^\infty \left(\frac{t}{y}\right)^{\ell_{\max}} \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+t}{2}\right) ||F(t,y)|| dt \quad (A.4)$$

Posant

$$P(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\ell_{\max}} ||F(x,y)||$$

et appliquant la méthode des approximations successives, nous obtenons :

$$P^0(x,y) \leq C \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (A.5)$$

$$P^j(x,y) \leq C^{j+1} \int_x^\infty dt_1 \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+t_1}{2}\right) \int_{t_1}^\infty dt_2 \tilde{\sigma}^0\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \dots$$

$$\dots \int_{t_{j-1}}^\infty dt_j \tilde{\sigma}^0\left(\frac{t_j+t_{j-1}}{2}\right) \tilde{\sigma}^0\left(\frac{t_j+y}{2}\right) \quad (A.6)$$

$$\leq C^{j+1} \int_x^\infty dt_1 \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+t_1}{2}\right) \int_{t_1}^\infty dt_2 \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+t_2}{2}\right) \dots$$

$$\dots \int_{t_{j-1}}^{\infty} dt_j \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+t_j}{2}\right) \tilde{\sigma}^0\left(\frac{t_j+y}{2}\right)$$

$$\leq C^{j+1} \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \frac{\left[\int_x^{\infty} dt_1 \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+t_1}{2}\right)\right]^j}{j!} \quad (\text{A.7})$$

et

$$P(x,y) \leq C \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[C \int_x^{\infty} dt_1 \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+t_1}{2}\right) \right]$$

$$\leq C \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[C 2 \tilde{\sigma}^1\left(\frac{x}{2}\right) \right] \quad (\text{A.8})$$

Comme

$$\int_x^{\infty} \tilde{\sigma}^0(t) dt = \int_x^{\infty} ds (s-x) ||\hat{U}(s)||$$

$$\leq \int_x^{\infty} ds s ||\hat{U}(s)|| = \tilde{\sigma}^1(x) \quad (\text{A.9})$$

le résultat final s'écrit :

$$||F(x,y)|| \leq C \left(\frac{y}{x}\right)^{\ell_{\max}} \tilde{\sigma}^0\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp[2C \tilde{\sigma}^1\left(\frac{x}{2}\right)] \quad (\text{A.10})$$

et

$$||F(x,y)|| \leq C \tilde{\sigma}^0(x) \exp [2C \tilde{\sigma}^1\left(\frac{x}{2}\right)] \quad (\text{A.11})$$

APPENDICE B
+++++

Dans cet appendice, nous montrons que l'opérateur \underline{F} est une transformation bornée de $L_n^p(x_0, \infty)$ vers $L_n^p(x_0, \infty)$ ($p = 2$ ou ∞).

Nous considérons une fonction vectorielle appartenant à $L_n^2(x_0, \infty)$. Sa norme dans $L_n^2(x_0, \infty)$ est définie par

$$\| \xi \|_2^{(x_0)} = \left(\int_{x_0}^{\infty} \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \quad (B.1)$$

Si nous calculons la norme de la fonction vectorielle $\eta(y)$

$$\eta_i(y) = \underline{F}_i(\xi) = \sum_{\ell=1}^n \int_{x_0}^{\infty} \xi_{\ell}(x) F_{\ell i}(x, y) dx \quad (B.2)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\| \eta \|_2^{(x_0)})^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{x_0}^{\infty} dy \left| \int_{x_0}^{\infty} dx \sum_{\ell=1}^n \xi_{\ell}(x) F_{\ell i}(x, y) \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_0}^{\infty} dy \left(\int_{x_0}^{\infty} dx \sum_{\ell=1}^n |\xi_{\ell}(x)| |F_{\ell i}(x, y)| \right)^2 \\ &\leq n \int_{x_0}^{\infty} dy \left(\int_{x_0}^{\infty} dx \sum_{\ell=1}^n |\xi_{\ell}(x)| \Gamma(x_0) e^{-\epsilon \frac{x+y}{2}} \right)^2 \\ &\leq \frac{n \Gamma^2(x_0) e^{-\epsilon x_0}}{\epsilon} \left(\int_{x_0}^{\infty} dx \sum_{\ell=1}^n |\xi_{\ell}(x)| e^{-\frac{\epsilon x}{2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (B.3)$$

Comme $|\xi_{\ell}(x)|$ et $e^{-\frac{\epsilon x}{2}}$ appartiennent à $L_1^2(x_0, \infty)$, nous pouvons appliquer l'inégalité de Schwartz :

$$\begin{aligned} (\| \eta \|_2^{(x_0)})^2 &\leq \frac{n \Gamma^2(x_0) e^{-\epsilon x_0}}{\epsilon} n \int_{x_0}^{\infty} dx e^{-\epsilon x} (\| \xi_{\ell} \|_2^{(x_0)})^2 \\ &\leq \frac{n^2 \Gamma^2(x_0) e^{-2\epsilon x_0}}{\epsilon} (\| \xi_{\ell} \|_2^{(x_0)})^2 \end{aligned} \quad (B.4)$$

La norme de l'opérateur \underline{F} possède la borne suivante :

$$\|\underline{F}\|_2^{(x_0)} \leq \frac{n\Gamma(x_0)e^{-\epsilon x_0}}{\epsilon^{1/2}} \quad (\text{B.5})$$

Nous supposons que $\xi(x) \in L_n^\infty(x_0, \infty)$ et obtenons :

$$\|\xi\|_\infty^{(x_0)} = \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_x |\xi_i(x)| < \infty \quad (\text{B.6})$$

et

$$\begin{aligned} \|\eta\|_\infty^{(x_0)} &= \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_y \left| \sum_{\ell=1}^n \int_{x_0}^{\infty} \xi_\ell(x) F_{\ell i}(x, y) dx \right| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_y \sum_{\ell=1}^n \int_{x_0}^{\infty} dx |\xi_\ell(x)| |F_{\ell i}(x, y)| \\ &\leq \Gamma(x_0) e^{-\frac{\epsilon x_0}{2}} \sum_{\ell=1}^n \int_{x_0}^{\infty} dx |\xi_\ell(x)| e^{-\frac{\epsilon x}{2}} \\ &\leq \frac{2n\Gamma(x_0)e^{-\epsilon x_0}}{\epsilon} \|\xi\|_\infty^{(x_0)} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ou

$$\|\underline{F}\|_\infty^{(x_0)} \leq \frac{2n\Gamma(x_0)e^{-\epsilon x_0}}{\epsilon} \quad (\text{B.8})$$

CHAPITRE X : CONCLUSIONS
+++++

Ce mémoire est principalement consacré à l'extension du problème inverse à moment angulaire fixé, en vue de son application à la physique nucléaire. Nous rappelons ici les principaux résultats de chaque chapitre.

Dans le premier chapitre, nous étudions le spectre de l'opérateur non auto-adjoint associé à l'équation de Schrödinger pour un moment angulaire ℓ donné et contenant un potentiel local complexe. Nous constatons la possibilité de la présence de valeurs propres multiples et de singularités spectrales. En présence de valeurs propres multiples, les fonctions propres des spectres continu et discret ne forment plus un ensemble complet. Afin d'établir la généralisation de la relation de complétude, nous devons ajouter aux fonctions propres du spectre discret, des fonctions adjointes, qui sont des dérivées par rapport à l'énergie des fonctions propres du spectre discret. Les singularités sont des zéros réels de la fonction de Jost qui ne correspondent pas à des états liés, mais plutôt à des fonctions d'onde qui ne possèdent pas d'onde entrante ou sortante (suivant le signe de k). En présence d'un potentiel complexe, le spectre discret n'est pas nécessairement fini et nous devons imposer une condition supplémentaire au potentiel pour que le spectre discret soit fini. Nous définissons dans ce cas ce que deviennent les données de la diffusion.

Le chapitre II est consacré à l'étude générale des opérateurs de transformation. Leurs propriétés y sont précisées, tandis qu'un exemple connu d'opérateur de transformation (opérateur d'onde) y est présenté. Nous montrons que si l'existence d'un opérateur de transformation du type de Gel'fand ou de Marchenko a été prouvée, l'équation fondamentale du type de Gel'fand ou de Marchenko, respectivement, à une voie et pour un potentiel réel, peut être démontrée en supposant seulement que les solutions perburgées et non perturbées forment deux ensembles complets. Nous définissons différents types d'opérateurs de transformation utiles pour la résolution du problème inverse et nous déduisons les équations aux dérivées partielles (avec leurs conditions aux limites) que doivent vérifier les noyaux des

opérateurs de transformation. Une formule de composition des opérateurs de transformation est démontrée en Appendice II.A, tandis que l'Appendice II.B présente des principes variationnels équivalents aux équations fondamentales ; ceux-ci peuvent fournir des méthodes numériques nouvelles de résolution du problème inverse.

Au chapitre III, nous étudions les solutions de Riemann utiles pour le problème inverse et permettant de transformer en équations intégrales équivalentes les équations aux dérivées partielles avec leurs conditions aux limites trouvées au chapitre II. Ces équations intégrales facilitent l'étude des propriétés de l'opérateur de transformation. Dans l'Appendice A du chapitre III, nous généralisons la méthode de Riemann en vue de son application à l'équation linéaire et homogène du second ordre, aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, du type hyperbolique ; cette extension de la méthode permettrait l'étude directe d'opérateurs de transformation pour une équation de Schrödinger avec masse effective.

Dans le chapitre IV, nous considérons plus en détail l'équation de Schrödinger pour l'onde partielle $\ell = 0$; celle-ci joue en effet un rôle particulier, différent des cas $\ell \neq 0$, par le fait qu'une condition à l'origine autre que la condition d'annulation habituelle peut être imposée à la fonction d'onde. Cette propriété nous permet de considérer une généralisation des problèmes direct et inverse où les conditions imposées à l'origine peuvent être différentes dans les problèmes perturbé et non perturbé. Nous étendons les définitions de la fonction spectrale, des solutions régulières et de Jost, des solutions physiques et de la fonction de Jost qui correspondent à ce nouvel opérateur de Schrödinger. Nous considérons ensuite le problème inverse et établissons une équation du type de Gel'fand généralisée. Nous recherchons alors des solutions particulières à l'équation fondamentale correspondant à quelques cas simples. Ces exemples nous fournissent des solutions de l'équation non linéaire Korteweg-de Vries lorsqu'on choisit convenablement la dépendance temporelle de certains paramètres. Ce résultat est encourageant, car il nous permet d'espérer que le problème inverse généralisé pour l'équation radiale à moment angulaire nul, peut aussi jouer un rôle dans la résolution de certaines équations non linéaires. Jusqu'à présent seul le problème inverse à une dimen-

sion a été utilisé dans ce but. Etant donnée l'importance en physique (en théorie des circuits, en mécanique des fluides, en élasticité, en théorie des plasmas, en optique quantique,...) des équations non linéaires (Equations non linéaires de Sine-Gordon, de Schrödinger, de Klein-Gordon, de Boussinesq, de Zacharov-Shabat,...) que nous pouvons résoudre par la méthode inverse à une dimension, il serait très utile de généraliser la méthode, à trois dimensions par exemple. Ces équations non linéaires ont parmi leurs solutions, des solutions particulières appelées solitons dont la dépendance temporelle est comparable à celle d'une particule libre [CER 77]. Le soliton, qui constitue déjà un outil important en physique appliquée, pourrait aussi être utile en physique des particules : le soliton peut être considéré comme la première suggestion de la possibilité de construire une théorie classique des particules élémentaires, sans devoir lui donner une structure ponctuelle, réalisant ainsi un souhait si souvent formulé par Einstein. (L'idée d'associer des particules élémentaires aux solitons a été introduite par Skyrme [SKY 61] et a été reprise par Faddeev [FAD 75], dans le cadre d'une théorie quantique des champs [LEE 78], [BAR 75]). Tous ces résultats ont suscité assez récemment un regain d'intérêt pour l'étude du problème inverse de la diffusion quantique.

Dans le chapitre V, nous appliquons la méthode décrite au chapitre III, pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations intégrales. Ces dernières nous permettent de rechercher et de comparer les conditions à imposer au potentiel perturbatif afin d'assurer l'existence des opérateurs de transformation bornés du type de Gel'fand et de Marchenko pour différents potentiels de référence. Nous introduisons dans le potentiel de référence, les parties singulières, rencontrées en physique nucléaire, que sont le potentiel centrifuge et l'interaction coulombienne. Nous constatons que les conditions d'existence d'opérateurs du type de Gel'fand et de Marchenko sont différentes : elles dépendent plus du potentiel de référence dans le cas de Marchenko. Lorsque le potentiel de référence ne contient que le potentiel centrifuge, l'existence d'un opérateur de transformation du type de Marchenko borné et intégrable est assurée si le potentiel perturbatif possède un moment d'ordre ℓ à l'infini, par contre, à l'origine, la théorie admet des potentiels singuliers qui ne sont pas intégrables à l'ori-

gine mais possèdent un moment d'ordre un. Dans le cas de Gel'fand, les conditions à imposer au potentiel sont indépendantes de λ , il faut cependant que le potentiel soit intégrable au voisinage de l'origine. Lorsque le potentiel contient le potentiel centrifuge et l'interaction de Coulomb, nous devons imposer dans le cas de Marchenko que le potentiel décroisse plus rapidement qu'une certaine exponentielle précisée au chapitre V. Dans le cas de Gel'fand, la méthode utilisée ne nous permet pas d'obtenir une borne pour K_G sous une forme analytique, cependant la borne obtenue pour la fonction de Riemann et l'équation intégrale nous permettent de conclure que K_G doit exister sous les conditions habituelles qui sont indépendantes de λ . Les conditions à imposer dans le cas de Marchenko sont généralement plus fortes sauf à l'origine : la méthode de Marchenko admet des potentiels plus singuliers que dans le cas de Gel'fand. Comme les potentiels physiques (par exemple, de Yukawa) sont souvent singuliers à l'origine, ceci constitue un argument supplémentaire pour préférer la théorie de Marchenko dans les applications nucléaires. Nous trouverons dans la suite du travail d'autres arguments pour justifier le fait que dans les chapitres VI et IX nous avons choisi de généraliser la théorie de Marchenko. Une autre raison a cependant été mise en évidence dès le chapitre II où nous avons constaté que la théorie de Marchenko est mieux adaptée au problème inverse de la diffusion que la théorie de Gel'fand. Celle-ci nécessite une étape supplémentaire, à savoir la construction de la fonction de Jost à partir des déphasages.

Dans le chapitre VI, nous considérons le problème de la diffusion à n voies couplées, dont les énergies de seuils sont différentes, tandis que les interactions coulombiennes et les potentiels centrifuges sont pris comme potentiel de référence diagonal. Nous avons étudié plus en détails le comportement au voisinage de l'origine de la solution matricielle régulière. Les conditions d'existence d'un opérateur de transformation matriciel borné dépend à nouveau du potentiel de référence : la partie centrifuge exige que le potentiel perturbatif possède certains moments, tandis que l'interaction coulombienne et les énergies de seuils différentes demandent une décroissance exponentielle du potentiel. Pour un potentiel appartenant à la classe définie ci-dessus, nous avons démontré l'analyticité de la solution de Jost dans le demi-plan physique supérieur.

Au chapitre VII, nous définissons des fonctions d'onde radiales pour le problème de la diffusion dans un espace à $d > 1$ dimensions et pour un potentiel possédant la symétrie hypercentrale. Ce problème possède des applications physiques comme par exemple la description d'un système de N nucléons : omettant le mouvement du centre de masse, l'état nucléaire peut être décrit à l'aide de la méthode des harmoniques hypersphériques par un point dans l'espace à $3(N-1)$ dimensions, dont la position est définie par les coordonnées hypersphériques que sont le rayon r et l'ensemble Ω de $3N-4$ variables angulaires. Lorsque l'interaction entre deux particules est harmonique, le potentiel moyen total est exactement hypercentral. En général, le potentiel total $\sum_{i,j} v(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ n'est pas hypercentral, mais il contient des déformations dans cet hyperespace. Cependant, les données expérimentales permettent de conclure que ces déformations sont faibles [FAB 71]. Dans la méthode des harmoniques hypersphériques, la fonction d'onde est développée sur une base de fonctions harmoniques hypersphériques qui sont les fonctions propres de la partie angulaire de l'opérateur d'énergie cinétique et qui forment un ensemble complet sur la sphère unitaire de dimensions $3N-3$. Nous comparons les conditions d'existence d'opérateurs de transformation du type de Marchenko et de Gel'fand lorsque le potentiel possède la symétrie hypersphérique. Cette comparaison est possible dans le cas scalaire et pour un espace de dimension impaire; il n'en est plus de même dans les autres cas. En fait, la méthode que nous utilisons nous permet d'obtenir des bornes et des conditions d'existence pour les opérateurs de Marchenko à la fois dans le cas scalaire et matriciel et pour une dimension quelconque $d > 1$ de l'espace. Dans le cas de Gel'fand, la méthode habituelle ne marche pas si d est pair. Dans le cas couplé et pour d impair, nous obtenons une équation intégrale pour le noyau de transformation, mais nous n'avons pas obtenu d'expression analytique pour sa borne. Nous avons également traité le cas d'un potentiel à symétrie axiale.

Nous considérons au chapitre VIII l'existence d'opérateurs de transformation lorsque l'équation différentielle de Schrödinger possède une masse effective ou de façon équivalente un potentiel dépendant des vitesses. Pour réaliser cette étude, nous appliquons à l'équation de Schrödinger deux transformations de deux types dif-

férents. La première transforme la masse effective en une interaction dépendant de l'énergie, tandis que la seconde conduit à un potentiel dépendant du moment angulaire. Nous appliquons alors la méthode du chapitre VI à l'équation transformée. Au chapitre VIII nous avons obtenu également une équation intégrale pour l'opérateur de transformation lorsque le potentiel dépend linéairement de k .

Au chapitre IX, nous étendons la théorie de Marchenko à un système non hermitien d'équations couplées, contenant des énergies de seuils et des moments angulaires différents dans chaque voie. A partir de l'existence d'un opérateur de transformation du type de Marchenko, qui a été démontrée au chapitre VI, nous établissons une équation fondamentale du problème inverse. Nous étudions ensuite les propriétés du noyau de l'équation fondamentale et établissons l'unicité de sa solution. Lors de cette étude des différences essentielles entre les systèmes hermitiens et non hermitiens sont apparues. Dans le cas hermitien, l'existence d'un opérateur de transformation suffit pour établir l'existence de l'équation fondamentale, tandis que dans le cas non hermitien nous devons imposer des conditions plus fortes au potentiel pour assurer que le spectre discret soit fini. Nous examinons ensuite ce que sont les données de la diffusion et précisons les conditions auxquelles elles sont soumises.

En résumé, nous avons étendu le problème inverse à un très grand nombre de situations, qui sont rencontrées dans les collisions nucléaires. Le modèle de n équations couplées possède en effet de très nombreuses applications, telles que la diffusion d'une particule possédant un spin, les réactions d'échange de charge, la diffusion par une cible déformée inerte ou par une cible possédant plusieurs états excités discrets.

REFERENCES
+++++

- ABL 74 : M.J. ABLOWITZ, D.J. KAUP, A.C. NEWELL and H. SEGUR :
Stud.Appl.Math. 53(1974)249
- ABL 75 : M.J. ABLOWITZ et H. Segur : J.Math.Phys. 16(1975)1054
- ABR 68 : M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN : Handbook of Mathematical
Functions, Dover Publ., Inc., New York 1968
- AGR 63 : Z.S. AGRANOVITCH and V.A. MARCHENKO : The Inverse Problem
of Scattering Theory, Gordon & Breach 1963
- AKH 63 : N.I. AKHIEZER and I.M. GLAZMAN : Theory of Linear Opera-
tors in Hilbert Space, vol. I & II, Frederick Ungar 1963
- AMR 77 : W.O. AMREIN, J.M. JAUCH and K.B. SINHA : Scattering The-
ory in Quantum Mechanics : Physical Principles and Mathe-
matical Methods, W.A. Benjamin 1977
- BAR 75 : W.A. BARDEEN, M.S. CHANOWITZ, S.D. DRELL, M. WEINSTEIN
and T.M. YAN : Phys.Rev. D11(1975)1094
- BEN 67 : J. BENN and G. SCHARF : Helv.Phys.Acta 40(1967)271
- BEN 69 : J. BENN and G. SCHARF : Nucl.Phys. A134(1969)481
- BEN 72 : J. BENN and G. SCHARF : Nucl.Phys. A183(1972)319
- BET 53 : H.A. BETHE : Scientific American 189(1953)58
- BLA 63 : J.M. BLATT and V.F. WEISSKOPF : Theoretical Nuclear Phy-
sics, J. Wiley 1963
- CER 77 : C. CERCIGNANI : Riv.Nuovo Cimento 7(1977)429
- CHA 39 : T.W. CHAUNDY : Quart.J.Math. 10(1939)237
- CHA 77 : K. CHADAN and P.C. SABATIER : Inverse Problem in Quantum
Scattering Theory, Springer 1977
- CIU 75 : S. CIULLI, C. POMPONIU and I.S. STEFANESCU : Phys.Rep.
C17(1975)134
- COD 55 : E.A. CODDINGTON and N. LEVINSON : Theory of Ordinary Dif-
ferential Equations, McGraw-Hill 1955
- COH 70 : H. COHN : Studies and Essays Presentend to Yu-Why Chen
on his Sixtieth Birthday, National Taiwan University
1970, p. 49
- COR 73 : H. CORNILLE : Il Nuovo Cimento 11A(1973)141
- COU 70 : C. COUDRAY and M. COZ : Ann.Phys. (N.Y.) 6(1970)488
- COZ 70 : M. COZ and A.D. MACKELLAR : Ann.Phys. (N.Y.) 58(1970)504
59(1970)219

- COZ 73 : M. COZ and C. COUDRAY : J.Math.Phys. 14(1973)1574
- COZ 76 : M. COZ and P. ROCHUS : J.Math.Phys. 17(1976)894
Math.Revs. 55(1978)5002
- COZ 77a: M. COZ and P. ROCHUS : J.Math.Phys. 18(1977)2223
- COZ 77b: M. COZ and P. ROCHUS : J.Math.Phys. 18(1977)2232
- COZ 79 : M. COZ and P. ROCHUS : A Fundamental Equation for a Non-Hermitian Differential System : preprint
- DAG 70 : E.A. DAGGIT : J.Math.Anal.Applics. 29(1970)91
- DAR 15 : G. DARBOUX : Théorie générale des surfaces, 2, Paris 1915
- DEL 57 : J. DELSARTE et J.L. LIONS : Comm.Math.Helv. 32(1957)113
- DEL 60 : L.M. DELVES : Nucl.Phys. 20(1960)275
- DIL 68 : G. DILLON and G. PASSATORE : Nucl.Phys. A114(1968)623
- DYS 75 : F.J. DYSON : Journ.Opt.Soc.Am. 65(1975)551
- DYS 76 : F.J. DYSON : Old and New Approaches to the Inverse Scattering Problem - Studies in Mathematical Physics, editor : A.S. Wightman - Essays in Honor of V. Bargmann - 1976
- ERN 75 : D.J. ERNST and G.A. MILLER : Phys.Rev. C12(1975)1962
- FAB 71 : M. FABRE DE LA RIPELLE : résolution du problème à N corps par le formalisme hypersphérique : preprint Orsay IPNO/TH 71-13 (1971)
- FAB 75 : M. FABRE DE LA RIPELLE and J.S. LEVINGER : Il Nuovo Cimento A25(1975)555
- FAD 63 : L.D. FADDEEV : J.Math.Phys. 4(1963)72
- FAD 75 : L.D. FADDEEV : J.E.T.P.Lett. 21(1975)138
- FAD 76 : L.D. FADDEEV : J.Sov.Math. 5(1976)93
- FAR 72 : W.G. FARIS : Helv.Phys.Acta 45(1972)1074
- FES 62 : H. FESHBACH : Ann.Phys. (N.Y.) 19(1962)287
- FON 60 : L. FONDA et R.G. NEWTON : Ann.Phys. (N.Y.) 10(1960)490
- FRI 38 : K.O. FRIEDRICHS : Math.Ann. 115(1938)249
- FRI 48 : K.O. FRIEDRICHS : Commun.Pure Appl.Math. 1(1948)361
- GAK 66 : F.D. GAKHOV : Boundary Value Problems, Pergamon 1966
- GAR 67 : C.S. GARDNER, J.M. GREENE, M.D. KRUSKAL and R.M. MIURA : Phys.Rev.Lett. 19(1967)1095

- GED 77 : R.L. GEDDES and A.G. MACKIE : Appl.Anal. 7(1977)43
- GEL 55 : I.M. GEL'FAND and B.M. LEVITAN : Am.Math.Soc.Transl.Sec.
II - 1(1955)253
- GEO 74 : V. GEORGESCU : Ph.D.Thesis - University of Geneva 1974
- GIL 63 : R.P. GILBERT : Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations : Academic Press 1963
- HAD 52 : J. HADAMARD : Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations : Dover 1952
- HOD 78 : R.J.W. HODGSON : Phys.Rev. C18(1978)1133
- HOO 78 : M.A. HOOSHYAR : J.Math.Phys. 19(1978)253
- HUM 64a: J. HUMBLET : Nucl.Phys. 50(1964)1
- HUM 64b: J. HUMBLET : Nucl.Phys. 57(1964)386
- INC 26 : E.L. INCE : Ordinary Differential Equations : Dover 1926
- JAU 61 : J.M. JAUCH : Dispersion Relation, edited by G.R. Screaton : Oliver & Boyd 1961
- JAU 76 : M. JAULENT and C. JEAN : Ann.Inst.H.Poincaré 25(1976)105
- JEU 76 : J.-P. JEUKENNE, A. LEJEUNE and C. MAHAUX : Phys.Rep. C25(1976)83
- JOS 53 : R. JOST and W. KOHN : Det.Kgl.Danske Videnskab.Selskab. Mat.Fys.Medd. 27(1953)
- KAR 74 : B.R. KARLSSON : Phys.Rev. D10(1974)1985
- KAT 57 : T. KATO : Proc.Jap.Acad. 33(1957)260
- KAT 66 : T. KATO : Mat.Ann. 162(1966)258
- KAT 76 : T. KATO : Perturbation Theory for Linear Operators : Springer 1976
- KAY 55 : I. KAY and H.E. MOSES : Il Nuovo Cimento 2(1955)917
- KAY 56 : I. KAY and H.E. MOSES : Il Nuovo Cimento 3(1956)66
- LAD 77 : J.F. LADIK and S.C. CHIU : J.Math.Phys. 18(1977)701
- LAM 79 : F. LAMBERT : Explicit Solutions of the Korteweg-de Vries Equation without Scattering Data : preprint CERN Ref. Th. 2630, February 1979
- LAV 74 : J.A. LA VITA and J.-P. MARCHAND : Scattering Theory in Mathematical Physics : Reidel 1974
- LEE 78 : T.D. LEE : Com.Nucl.Part.Phys. 7(1978)165

- LEO 74 : J.B. MACLEOD : Spectral Theory and Asymptotics of Differential Equations, Proceedings of the Schieveningen Conference on Differential Equations - Editor : E.M. de Jager : North-Holland 1974
- LEV 60 : B.M. LEVITAN and I.S. SARGSYAN : Rus.Math.Surveys 15(1960)1
- LIE 74 : E.H. LIEB, B. SIMON and A.S. WIGHTMAN (editors) : Studies in Mathematical Physics, Princeton Univ. Press 1976
- LJA 67 : V.E. LJANCE : Amer.Math.Soc.Transl. 60(1967)185
- LOC 78 : M.P. LOCHER and T. MIZUTANI : Phys.Rep. C46(1978)43
- LUN 69 : D.S. LUNDINA and V.A. MARCHENKO : Mat.Sbornik Tom 78(1969)120
- MAH 69 : C. MAHAUX and H.A. WEIDENMULLER : Shell-Model Approach to Nuclear Reactions : North-Holland 1969
- MAR 68 : V.A. MARCHENKO : Mat.Sbornik Tom 77(1968)119
- MEE 64 : K. MEETZ : Il Nuovo Cimento 34(1964)690
- MIK 64 : S.G. MIKLIN : Variational Methods in Mathematical Physics : McMillan 1964
- MOS 59 : H.E. MOSES and S.F. TUAN : Il Nuovo Cimento 13(1959)196
- MOS 76 : H.E. MOSES : J.Math.Phys. 17(1976)73
- MUS 53 : N.I. MUSKHELISHVILI : Singular Integral Equations : Noordhoff 1953
- NAI 60 : M.A. NAIMARK : Amer.Math.Soc.Transl. 16(1960)103
- NEW 55a: R.G. NEWTON and R. JOST : Il Nuovo Cimento 1(1955)505
- NEW 55b: R.G. NEWTON : Phys.Rev. 100(1955)412
- NEW 57 : R.G. NEWTON : Phys.Rev. 107(1957)1025
- NEW 61 : R.G. NEWTON : J.Math.Phys. 2(1961)188
- NEW 66 : R.G. NEWTON : Scattering Theory of Waves and Particles : McGraw-Hill 1966
- NEW 78 : R.G. NEWTON : J.Math.Phys. 19(1978)1068
- PAP 77 : J.S. PAPADAKIS and D.H. WOOD : J.Diff.Equ. 24(1977)397
- PAV 67 : B.S. PAVLOV : Topics in Mathematical Physics, vol. 1 : Editor : M.Sh. Birman : Consultants Bureau N.Y. 1967
- PEA 75 : C. PEARSON : Commun.Math.Phys. 40(1975)125
- PEI 48 : R. PEIERLS : Proc.Cambridge Phil.Soc. 44(1948)242

- PEL 78 : V. PELOSI, R. CIRELLI and C. MARIONI : Il Nuovo Cimento
46A(1978)494
- PIC 72 : H.S. PICKER and J.P. LAVINE : Phys.Rev. C6(1972)1542
- POI 84 : H. POINCARÉ : Acta Math. 4(1884)215
- POV 53 : A.Y. POVZNER : Am.Math.Soc.Transl. 60(1966)1
- RIE 53 : B. RIEMANN : Kön.Ges. des.Wiss. zu Göttingen 8(1860)156
- REE 72 : M. REED and B. SIMON : Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I and II : Academic Press 1972 & 1975
- REE 78 : M. READ and B. SIMON : Methods of Modern Mathematical Physics : Academic Press 1978
- REL 36 : F. RELICH : Math.Ann. 113(1936)600
116(1939)555
- REL 43 : F. RELICH : Jahresber.Deut.Math.Ver. 53(1943)57
- ROC 79a: P. ROCHUS : J.Math.Phys. 20(1979)
- ROC 79b: P. ROCHUS : Properties of the Extended Riemann Method and its Use in the Inverse Problem of Scattering : Preprint 1979
- ROT 62 : M. ROTENBERG : Ann.Phys. (N.Y.) 19(1962)262
- ROS 57 : M. ROSENBLUM : Pac.J.Math. 7(1957)997
- SAB 68 : P.C. SABATIER : J.Math.Phys. 9(1968)1241
- SCA 64 : M. SCADRON, S. WEINBERG and J. WRIGHT : Phys.Rev. 135B
(1964)202
- SIM 71 : B. SIMON : Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms : Princeton Univ. Press 1971
- SKY 61 : T.H.R. SKYRME : Proc.Roy.Soc. A262(1961)237
- SOM 12 : A. SOMMERFELD : Jahresber.Deut.Math.Ver. 21(1912)309
- STO 32 : M.H. STONE : Linear Transformation in Hilbert Space and their Applications to Analysis : American Mathematical Society 1932 - vol. XV
- TAY 72 : J.R. TAYLOR : Scattering Theory : Wiley 1972
- THI 77 : W. THIRRING and P. URBAN (Editors) : The Schrödinger Equation : Springer 1977
- TIT 37 : E.C. TITCHMARSH : Introduction to the Theory of Fourier Integrals : Oxford University Press 1937
- TIT 62 : E.C. TITCHMARSH : Eigenfunction Expansion Associated with Second-Order Differential Equations, Parts I and II : Oxford University Press 1962 & 1958

- VAN 77 : H. VAN HAERINGEN, C.V.M. VAN DER MEE and R. VAN WAGENINGEN : J.Math.Phys. 18(1977)941
- VIA 69 : G.A. VIANO : Il Nuovo Cimento 63A(1969)58
- VIN 78 : R. VINH MAU : The Paris Nucleon-Nucleon Potential : in "Mesons in Nuclei" : edited by M. Rho and D. Wilkinson
- WEB 55 : A.G. WEBSTER : Partial Differential Equations of Mathematical Physics : Dover 1955
- WEI 64 : H.A. WEIDENMULLER : Ann.Phys. (N.Y.) 28(1964)60
- WEY 10 : H. WEYL : Math.Ann. 68(1910)220
- ZAC 69 : B.N. ZACHARIEV, V.V. PUSTOVALOV and V.D. EFROS : Sov.J. Nucl.Phys. 8(1969)234
- ZAK 71 : V.E. ZAKHAROV and A.B. SHABAT : Sov.Phys.J.E.T.P. 34(1972)62
- ZAK 74 : V.E. ZAKHAROV and A.B. SHABAT : Funct.Anal.Appl. 8(1974)226.

