COURS DE MÉTHODES DE FABRICATION

Édition 2010, entièrement refondue

TEXTE

J.F. Debongnie

1er février 2010

Chapitre 1

Choix d'un acier

1.1 Introduction

Les aciers ont toujours eu et conserveront sans doute longtemps un rôle central en construction mécanique en raison de leurs excellentes propriétés mécaniques et de leur faible prix. Dans la pratique industrielle courante, le bureau d'études se contente de spécifier ses exigences quant à l'acier à utiliser : résistance, dureté, ductilité, résilience. C'est alors au bureau de méthodes qu'incombe la tâche du choix effectif d'un acier convenable et aussi économique que possible. Le présent chapitre a pour seul but d'indiquer une voie pratique pour mener le choix d'un acier et de son traitement thermique. A ce titre, il ne fait qu'*utiliser* les résultats connus de métallographie et ne se substitue en rien aux cours spécifiquement consacrés à la science des matériaux.

1.2 Traitements thermiques des aciers

La figure 1 représente le diagramme d'équilibre fer-carbone des aciers, qui sert de base à la discussion qui suit.

1.2.1 Fer pur

Le *fer pur* se présente sous deux formes :

- Le *fer* α ($T < 906°C$) a une structure cristalline *cubique centrée*. Il ne dissout pratiquement pas le carbone et il est doux et malléable.
- Le *fer* γ ($T > 906°C$) a une structure cristalline *cubique à faces centrées*. Il dissout facilement le carbone, dont les atomes trouvent aisément une place au centre des mailles du réseau.

1.2.2 Aciers

Pour les aciers au carbone, on trouve les structures suivantes :

1. A haute température, on retrouve du fer γ, qui peut contenir jusqu'à $2,06\%$ de carbone : c'est l'*austénite*. L'extrémité droite de la zone d'austénite constitue la frontière entre les aciers et les fontes.
2. Lors d'un refroidissement lent à partir de l'austénite, on pourra obtenir

- De la *ferrite*, qui est du fer α contenant peu de carbone. La ferrite a peu de dureté ($HB = 800...1000MPa$) , peu de résistance ($R_m \approx 280MPa$) et une grande ductilité ($A = 35...40\%$).
- De la *cémentite*, qui n'est autre que le carbure de fer Fe_3C. La cémentite est très dure ($HRC \approx 65$), très fragile et contient $6,7\%$ de carbone.
- Un eutectoïde, appelé *perlite*, mélange hétérogène de ferrite et de cémentite, souvent sous forme lamellaire, à $0,8\%$ cde carbone. La perlite est relativement dure, ($HB = 2000...2500MPa$), résistante ($R_m \approx 880MPa$) et assez ductile ($A = 15...20\%$).

1.2.3 Trempe

Le fer γ qui constitue la matrice de l'austénite est caractérisé par un réseau cubique à faces centrées. Le vide laissé au centre de chaque maille constitue un emplacement de choix pour des atomes de carbone. C'est ce qui explique la grande solubilité du carbone dans le fer γ. La situation est toute différente dans le réseau cubique centré du fer α qui, bien que moins dense, ne possède pas de tels interstices : le carbone y est bien moins soluble.

Lors d'un refroidissement lent faisant passer du réseau γ au réseau α, les atomes de carbone situés au centre des mailles γ diffusent hors du réseau pour former ailleurs de la cémentite (*fig. 2*) [23]. Par contre, lors d'un refroidissement *très rapide*, les atomes de carbone n'ont pas le temps de diffuser de la sorte et se placent tant bien que mal dans les maigres espaces laissés sur les faces et les arêtes du réseau α ($f$ig. 3) [23, 5]. Or, ceci n'est possible qu'au prix d'une déformation du réseau. La structure ainsi obtenue est la *martensite*. Pleine de contraintes internes, la martensite est la structure la plus *dure* que l'on puisse obtenir avec des aciers ($HRC \approx 50...65$), mais elle est *très fragile* ($A = 1...5\%$).

Le traitement de *trempe* a précisément pour but de provoquer la réaction martensitique de manière à accroître la dureté. Il consiste à chauffer la pièce jusqu'à obtenir de l'austénite, à maintenir cette température un certain temps pour obtenir une bonne dissolution du carbone, puis à le refroidir brutalement, par exemple en la trempant dans de l'eau ou de l'huile (d'où le nom de *trempe*).

Une trempe est complète si tout le métal a été préalablement austénitisé. Sinon, elle est partielle. Pour les aciers *hypoeutectoïdes*, on pratique la trempe complète, c'est-à-dire que l'on chauffe à $A_3 + 50°C$. En effet, entre A_1 et A_3, il resterait de la ferrite tendre. Par contre, pour les aciers *hypereutectoïdes*, l'austénite correspondante serait trop riche en carbone et on risquerait d'obtenir des tapures de trempe. Aussi se limite-t-on à chauffer à $A_1 + 50°C$, température où apparaissent une austénite pratiquement eutectoïde et de la cémentite. Le produit de la trempe est donc dans ce cas un mélange martensite + cémentite, mais de toute façon, la cémentite est elle-même très dure.

Pour des vitesses de refroidissement moindres, on obtient des structures de dureté intermédiaire, troostite et bainite.

On appelle *vitesse critique inférieure de trempe* la plus petite vitesse de refroidissement pour laquelle la transformation martensitique apparaît. La *vitesse critique supérieure de trempe* est la vitesse de refroidissement à partir de laquelle *toute* l'austénite se transforme en martensite. Lorsque la vitesse de trempe est exagérément rapide, l'acier conserve sa structure austénitique. On dit alors qu'il est *hypertrempé*. (C'est l'état normal des aciers Hadfield).

Un acier est dit d'autant plus *trempable* que la vitesse nécessaire pour le durcir est plus faible. Les aciers très doux ($C < 0,2\%$) ne sont pas du tout trempables. La trempabilité peut être augmentée à l'aide d'éléments d'alliage. Les plus efficaces sont, par ordre décroissant d'influence,

$$C,\ Mo,\ Va,\ Cr,\ Mn,\ Ni,\ Si$$

Comme la vitesse de refroidissement, dans une pièce donnée, est d'autant plus faible que le point considéré est plus distant de la surface en contact avec le milieu trempant, la trempabilité d'un acier se traduit aussi par son aptitude à acquérir par trempe une dureté en profondeur. Un acier très trempant aura donc, après trempe, une dureté à cœur plus proche de sa dureté en surface qu'un acier moins trempant. C'est ce qui justifie l'essai Jominy dont nous parlerons plus loin. On dit qu'un acier est *autotrempant* quand sa dureté après trempe ne dépend pratiquement pas de la vitesse de refroidissement. De tels aciers peuvent se tremper à l'air, et leur dureté à cœur est voisine de leur dureté en surface.

La transformation martensitique s'accompagne d'une augmentation de volume et d'une déformation du réseau cristallin. Il en résulte des déformations plus ou moins notables des pièces, qu'il convient de corriger par rectification. A l'origine, c'est d'ailleurs dans ce but que le procédé de rectification a été développé. Signalons cependant qu'à l'heure actuelle, il est possible de couper les aciers les plus durs avec des outils en nitrure de bore cubique.

1.2.4 Revenu

Pour atténuer l'effet néfaste de fragilisation de la trempe, on pratique le *revenu*, qui consiste à chauffer la pièce à une température très inférieure à A_1, puis à la refroidir. Il faut être bien conscient que cette opération, si elle diminue la fragilité, ce qui est heureux, fait aussi décroître la dureté, ce qui l'est moins, et ce, d'autant plus que la température de revenu est plus élevée.

La température de revenu est généralement choisie entre $500°C$ et $650°C$. Il faut éviter , pour un certain nombre d'aciers alliés, les température situées entre $300°C$ et $500°C$ qui peuvent amener à la *fragilité de revenu* encore appelée *fragilité au bleu.*

Quelle est l'influence de la *durée* du revenu ? L'expérience montre que la dureté diminue rapidement pendant la première demi-heure de traitement, puis n'évolue plus que très lentement. Il existe donc une *durée limite* de revenu, au-delà de laquelle il n'est pas nécessaire de prolonger le traitement. C'est pourquoi on préconise souvent *une heure* comme durée minimale du revenu.

La *vitesse de refroidissement* en fin d'opération n'a en principe pas d'importance, car il ne se produit pas de transformation cristalline en-dessous de A_1. On est donc tenté de refroidir la pièce aussi rapidement que possible en la trempant dans l'eau, de manière à accélérer la production. Il existe une seconde raison de refroidir rapidement la pièce : *éviter de rester trop longtemps dans la zone de fragilité du revenu.* La seule limitation à la vitesse de refroidissement est liée aux contraintes thermiques qui ne doivent pas être destructives. Cette limitation est surtout vraie pour les pièces de forme tourmentée.

Signalons encore que la littérature allemande appelle *améliorés* (vergütet) les aciers trempés et revenus. Nous adopterons cette terminologie et appellerons par la suite *aciers d'amélioration* les aciers conçus pour un traitement thermique de trempe et revenu. Notons enfin qu'en anglais, trempé se dit *quenched* et que dans cette langue, *tempered* signifie revenu et non trempé, comme on pourrait le croire.

1.2.5 Recuit

On appelle généralement *recuit* un traitement consistant à chauffer une pièce à une température assez élevée, maintenir cette température un certain temps, puis procéder à un refroidissement lent.

Recuit complet – Encore appelé recuit tout court, ce traitement est destiné à annuler les effets d'un traitement thermique antérieur. On chauffe donc au-delà de la température d'austénitisation.

Recuit d'homogénéisation – Ce traitement se fait à des températures plus élevées encore. Il est destiné à supprimer l'hétérogénéité chimique. Ce recuit dure plusieurs heures et provoque malheureusement la surchauffe, c'est-à-dire que les grains ont le temps de grossir exagérément. Il faut, par conséquent, faire suivre ce recuit d'un recuit de régénération.

Recuit de régénération – Ce traitement est destiné à affiner et uniformiser le grain des aciers surchauffés. On porte la pièce à $A_3 + 50°C$ pendant le temps juste nécessaire à la chauffe à cœur, puis on refroidit à l'air.

Recuit de détente – Le but est ici d'annuler les contraintes internes des pièces soudées ou moulées, avant de procéder à l'usinage. En effet, lorsque l'on usine une pièce qui est le siège de contraintes résiduelles, on coupe des zones contraintes, ce qui rompt l'équilibre de la pièce. Au moment du débridage, la pièce se relaxe en se déformant, ce qui est très gênant. Le recuit de détente s'effectue aux environs de $600°C$ et dure une heure environ, après quoi on laisse la pièce refroidir à l'air.

Recuit de recristallisation – Ce recuit s'effectue sur les pièces écrouies. La température de traitement est de $600°C$ environ.

1.3 L'essai Jominy

1.3.1 Description de l'essai

Il s'agit d'un essai destiné à caractériser la trempabilité des aciers, c'est-à-dire finalement, leur capacité de se durcir en profondeur lors de la trempe. Le principe est de mesurer l'effet de la trempe à mesure que l'on s'écarte de la surface trempée. On utilise pour cela une éprouvette cylindrique à collet, que l'on chauffe à la température d'austénitisation. Après l'avoir sortie du four, on la place dans le dispositif de la figure 3bis, et on trempe la face d'extrémité à l'aide d'un jet d'eau. On mesure ensuite la dureté Rockwell à différentes distances de la face d'extrémité, sur une génératrice du cylindre. On obtient ainsi une courbe dite courbe de Jominy. Sur la figure 3ter, il s'agit de la courbe notée *brut de trempe*. On peut subséquemment faire subir à l'éprouvette un traitement de revenu à diverses températures, ce qui donne de nouvelles courbes de Jominy relatives à l'état trempé et revenu.

Des aciers assez peu trempants donnent des courbes de Jominy très plongeantes, comme l'illustre la figure 19, relative à la nuance $C25$ contenant $0,25\%$ de carbone. A l'inverse, des aciers autotrempants comme la nuance $36NiCrMo16$ conduisent à des courbes de Jominy pratiquement plates, voir figure 69. L'acier $100Cr6$, utilisé dans les roulements, a une courbe de Jominy dont le sommet est très élevé ($65HRC$), avec une dérivée nulle au départ, ce qui donne encore une très grande dureté en sous-couche, là où les contraintes hertziennes sont les plus grandes (*fig. 91*). Les courbes de Jominy des aciers de la série $CrMo4$, très utilisés comme aciers d'amélioration de prix raisonnable, montrent une dureté maximale raisonnable, et une décroissance relativement lente de la dureté, comme l'illustre la figure 60 pour la nuance $42CrMo4$.

1.3.2 Exploitation pratique

L'essai de Jominy correspond à un barreau circulaire trempé à l'eau à son extrémité. Ceci est assez éloigné des pièces pratiques, où il s'agit le plus souvent de pièces cylindriques trempées à leur périphérie, et pas nécessairement à l'eau. La question est donc de savoir comment appliquer les données des essais de Jominy dans ce cas. A cette fin, on notera d'abord que la dureté obtenue par trempe dépend du temps de refroidissement. Pour fixer les idées, Murry [39] considère le temps nécessaire pour passer de $700°C$ à $300°C$. Ce temps dépend de

- De la diffusivité thermique $a = \lambda/(\rho c)$, paramètre peu variable pour les aciers.
- Des conditions d'échange entre le fluide et le métal, caractérisées par le coefficient d'échange h ou plus exactement, par le rapport entre ce coefficient et la conductivité thermique. La condition à la surface est en effet, en notant θ la température,

  $$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = h(\theta - \theta_f)$$

  ou encore

  $$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 2H(\theta - \theta_f)$$

  en introduisant la *sévérité de trempe*

  $$H = \frac{h}{2\lambda}$$

  qui s'exprime en mm^{-1}.
- De la distance du point considéré à la surface.
- de la taille et de la forme de la pièce.

Soit donc une pièce cylindrique de diamètre D, initialement à la température θ_0. On la trempe dans un fluide de température θ_f et on désire savoir après quel temps Δt_{300}^{700} la température d'un point situé à un diamètre d passe de $\theta_1 = 700°C$ à $\theta_2 = 300°C$. Les variables de ce problème se dénombrent comme suit :

$n°$	VARIABLE	UNITÉ
1	$\theta_1 - \theta_2$	Θ
2	a	L^2/T
3	D	L
4	d	L
5	H	L^{-1}
6	$\theta_0 - \theta_f$	Θ
7	Δt_{300}^{700}	T

soit 7 variables dépendant de 3 unités indépendantes. Il existe donc 4 nombres sans dimension. Une simple inspection mène aux nombres sans dimension suivants :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_0 - \theta_f} \\ \Pi_2 &= \frac{a\Delta t_{300}^{700}}{D^2} \\ \Pi_3 &= HD \\ \Pi_4 &= \frac{d}{D}\end{aligned}$$

La variable Π_1 étant fixée, il existe donc une relation du type

$$\frac{a\Delta t_{300}^{700}}{D^2} = f(HD, \frac{d}{D})$$

Dans l'essai Jominy, les dimensions sont normalisées et peuvent être représentées par une longueur L quelconque de l'éprouvette. Comme le milieu trempant est toujours l'eau, le groupe HL est fixé. On s'intéresse à la dureté à une distance d_J de l'extrémité. Par un raisonnement similaire au précédent, on obtient donc une expression du type

$$\frac{a\Delta t_{300}^{700}}{L^2} = g(\frac{d_J}{L})$$

Nous dirons qu'il y a équivalence entre un point de coordonnée d sur le barreau cylindrique et un point d_J de l'éprouvette de Jominy si le temps de refroidissement Δt_{300}^{700} de ces deux points est identique. Cela revient à dire

$$L^{-2}g(\frac{d_J}{L}) = D^{-2}f(HD, \frac{d}{D})$$

soit

$$d_J = Lg^{-1}\left(\frac{D^2}{L^2}f(HD, \frac{d}{D})\right)$$

Étant donné que L est normalisé, on est donc conduit à une relation de la forme

$$d_J = F(H, D, \frac{d}{D})$$

Des chercheurs du CETIM [48] ont établi des abaques donnant les iso-distances de Jominy en fonction de D et H, pour trois valeurs du rapport $d/D = r/R$:

- A cœur, c'est à dire en $r/R = 0$ (*fig. 12*).

– A mi-rayon, c'est-à-dire en $r/R = 1/2$ (*fig. 13*). La valeur de la dureté à mi-rayon donne une bonne idée de la résistance à la flexion.
– A quart-rayon (en partant de la périphérie !), soit en $r/R = 3/4$ (*fig. 14*). On considère que la dureté à ce niveau est une bonne référence pour la résistance en présence d'accidents de forme comme rainure de clavette, etc.

1.3.3 Valeurs des sévérités de trempe

Pour exploiter ces abaques, il faut bien entendu connaître la valeur de la sévérité de trempe H. Des indications à ce sujet ont été données par Grossmann [39]. Ces valeurs sont répertoriées en figure 11.

1.3.4 Cas des pièces rectangulaires

Une section rectangulaire est caractérisée par sa largeur et son épaisseur. Pour ce type de pièces, on fait usage de la notion de *diamètre déterminant*, qui est le diamètre d'une pièce à section circulaire qui, à cœur, a le même comportement que la pièce rectangulaire considérée. L'abaque de la figure 11 [19] permet d'obtenir ce diamètre.

1.3.5 Courbes en U

Lorsque, pour une pièce cylindrique d'un acier donné, on établit la courbe de dureté en fonction du rayon à l'aide des abaques du CETIM, en y ajoutant la valeur en peau qui correspond à $d_J = 0$, on peut la dessiner dans une section méridienne, ce qui conduit à ce que l'on appelle une *courbe en U* (*fig. 3 quater*). Notons que l'on peut obtenir une valeur de la dureté moyenne par la formule d'intégration numérique suivante où l'argument de la fonction H^* représentant la dureté est le rapport r/R :

$$\bar{H}^* = \frac{1}{45}\left(2H^*(0) + 18H^*(\frac{1}{2}) + 16H^*(\frac{3}{4}) + 9H^*(1)\right)$$

1.4 Méthodologie de sélection d'un acier

Le choix d'un acier ne peut se faire sans l'aide d'une documentation technique sur les principales nuances existant sur le marché. Le lecteur trouvera dans le fascicule de figures un ensemble de documents provenant en bonne partie des normes DIN-EURONORM [19, 20, 21] et de renseignements fournis par l'OTUA (Office technique de l'utilisation de l'acier, Paris) [41]. Parmi ceux-ci, notons

1. Un diagramme de conversion des duretés (*fig. 4*). Cette correspondance n'est qu'approximative, si bien qu'il est prudent de prendre une sécurité.
2. Une table rappelant la désignation des aciers selon EURONORM 10027-1 (*fig. 5*)
3. Un tableau donnant les caractéristiques des aciers d'amélioration normalisés (*fig. 6,7 et 8*) [19]. Ces caractéristiques s'entendent à l'état trempé et revenu. Pour une documentation plus vaste, on pourra se référer au *Stahlschlüssel*, dont il existe une édition de poche [46].

4. Un tableau indiquant le traitement thermique habituel de ces aciers (*fig. 9*) [19]. Pour ceci encore, on trouvera une documentation plus étendue dans [46].
5. Un tableau d'indice de prix (*fig. 10*). Ce tableau est inspiré de [4]. L'acier doux de construction y est pris comme référence, $I.P. = 100$. Un indice de 250 signifie que l'acier considéré est $2,5$ fois plus cher que l'acier de référence. Ce tableau doit être considéré comme un classement indicatif, sans plus. En effet, les prix peuvent être beaucoup plus élevés chez certains aciéristes fournissant des certificats de garantie. Dans un véritable environnement industriel, il convient de faire ce classement soi-même en fonction des prix affichés par les fournisseurs.
6. Des données relatives à la plupart des aciers d'amélioration de la liste normalisée, contenant
   - Un diagramme de revenu permettant d'obtenir les propriétés *moyennes* de la section en fonction de la température de revenu. En feuilletant ces données, on verra d'ailleurs apparaître, pour certains aciers, le phénomène de fragilité de revenu.
   - Des courbes de Jominy à l'état brut de trempe ou à l'état revenu.
7. Des renseignements succincts sur certains aciers d'utilisation particulière : aciers au bore, aciers de cémentation, aciers à roulements, aciers à ressorts, aciers de nitruration, aciers inoxydables, aciers particuliers.

Remarque – Il arrive encore fréquemment que l'on trouve des renseignements ou des exigences en termes de KCU et non de KV, spécialement dans les documents provenant de France. On pourra alors utiliser la corrélation *approximative*

$$\begin{aligned} \frac{KV}{J} &\approx 0,62\frac{KCU}{J/cm^2} + 3 \\ \frac{KCU}{J/cm^2} &\approx 1,61\left(\frac{KV}{J} - 3\right) \end{aligned}$$

1.4.1 Choix simple et choix complexe

La procédure de choix diffère en fonction du cahier des charges.

- Nous parlerons de *choix simple* lorsque les exigences portent seulement sur des caractéristiques moyennes des sections. Dans ce cas, les outils essentiels sont les tableaux d'aciers des figures 6 à 9.
- Nous parlerons de *choix complexe* chaque fois que les exigences portent sur une caractéristique à cœur, à mi-rayon ou à quart-rayon. Dans ce cas, il faut faire usage des courbes de Jominy.

1.4.2 Procédure de choix simple

Choix du matériau

1. Le tableau 1 (*fig 6,7 et 8*) permet de faire un choix d'acier en fonction des caractéristiques données et de la dimension. Cette dernière intervient parce qu'il existe un *effet d'échelle* qui se traduit généralement par une diminution des propriétés de résistance et une augmentation des propriétés de ductilité lorsque la taille de la pièce croît.

2. On note alors les indices de prix des nuances sélectionnées. On choisit en principe la nuance la moins chère, pour autant que la disponibilité et les délais de livraison soient équivalents.

Choix du traitement thermique

Dans le cas où l'acier satisfait à coup sûr aux exigences, on s'en tient au traitement thermique standard donné dans le tableau 2 (*fig.9*). Dans le cas contraire, on choisit une fourchette de températures de revenu plus appropriée, à l'aide des diagrammes de revenu.

Remarque – Pour $R_m < 700MPa$ ou $Re < 365MPa$, on peut se contenter d'un acier de construction sans traitement thermique.

1.4.3 Exemple de choix simple

On demande de choisir l'acier d'une pièce de $28mm$ soumise aux chocs. On désire obtenir les valeurs suivantes :

$$R_m \geq 600MPa,\ KV \geq 40J$$

Choix de l'acier

Il s'agit de toute évidence d'un choix simple. Nous ferons quatre choix dans la liste du tableau 1, parmi ceux qui vérifient les conditions requises, dans les colonnes $16 < \phi \leq 40$.

ACIER	Re/Mpa	KV/J	I.P.	DÉCISION
$25CrMo4$	600	50	182	OK
$34CrMo4$	650	50	182	OK
$36CrNiMo4$	800	40	212	OK
$34CrNiMo6$	900	45	243	OK

Comme chacun de ces aciers convient, le choix sera guidé par l'indice de prix. Sont à égalité, $25CrMo4$ et $34CrMo4$. Le choix final sera guidé par des questions de disponibilité et de délai. Nous supposerons que le choix se porte sur $25CrMo4$.

Traitement thermique

Selon le tableau 2, trempe à l'huile ou à l'eau, $T° = 830...870°C$, revenu à $540...680°C$. On préfère souvent la trempe à l'huile. La solution obtenue est donc

$$25CrMo4,\ TH\ 830...870,\ R\ 540...680$$

1.4.4 Procédure de choix complexe

Cette procédure est à suivre chaque fois que des exigences précises sont imposées quant à la résistance à cœur, à mi-rayon ou à quart rayon. Il est alors nécessaire d'utiliser le diagramme de Jominy. Ce dernier est gradué en dureté Rockwell C. Si la résistance demandée est exprimée en termes de R_m, HV ou

HB, il faut d'abord se ramener à HRC à l'aide du diagramme de conversion de la figure 4.

Cela étant, le principe de la méthode consiste à effectuer d'abord un premier choix menant à un éventail de nuances raisonnables, puis à affiner ce choix à l'aide des diagrammes de Jominy, puis enfin, à trancher sur base des prix.

Choix d'un éventail de nuances raisonnables

Utiliserle tableau 1.

Recherche de la distance de Jominy

1. Pour chaque acier, lire le milieu de refroidissement (tableau 2)
2. En déduire la sévérité de trempe H à l'aide du tableau de la figure 11.
3. A l'aide des abaques des figures 12 à 14, déterminer la distance de Jominy équivalente dans chaque cas.

Détermination des duretés correspondantes

Pour chaque matériau, on détermine les duretés correspondantes à diverses températures de revenu, à l'aide de leurs courbes de Jominy (fiches des matériaux). On élimine les nuances ne donnant pas satisfaction.

Choix final en fonction de l'indice des prix

Rappelons que l'indice des prix est donné en figure 10. Au cas où l'indice des prix ne permet pas de trancher, il est pertinent de choisir la nuance la plus résiliente.

1.4.5 Exemple de choix complexe

On considère un arbre de machine, de diamètre $\phi = 65$. Le calcul à la fatigue mène à exiger $R_m \geq 850MPa$. Cette résistance doit être garantie à cœur.

Il s'agit visiblement d'un choix complexe. D'après le diagramme de conversion des dureté, une résistance de $850MPa$ correspond à une dureté $HB = 2500Mpa$, à laquelle correspond $HRC = 25$. Vu l'imprécision de la correspondance des duretés, nous exigerons $HRC = 30$.

Présélection

Nous sélectionnerons dans le tableau 1 l'échantillon suivant :

ACIER	R_m/Mpa	KV/J
$34CrMo4$	800...950	45
$42CrMo4$	900...1100	35
$51CrV4$	900...1100	30
$34CrNiMo6$	1000...1200	45

Le premier semble un peu tangent, mais nous continuerons de le prendre en compte. Il peut en effet suffire d'un revenu un peu moins intense.

Distances de Jominy

1 Le tableau 2 indique

ACIER	TREMPE	REVENU
$34CrMo4$	TH ou TE 830-870	540-680
$42CrMo4$	TH ou TE 820-860	540-680
$51CrV4$	TH ou TE 820-860	540-680
$34CrNiMo6$	TH 830-860	540-660

2 On suppose que la trempe se fait avec une installation élémentaire : bac de liquide sans agitation. On choisit la trempe à l'huile dans les quatre cas. Le tableau des sévérités de trempe donne dans ce cas $H = 0,010...0,012mm^{-1}$. Nous adopterons la valeur moyenne

$$H = 0,011mm^{-1}$$

3 Pour un diamètre de $65mm$ et $H = 0,011mm^{-1}$, l'abaque relatif au traitement à cœur fournit

$$d_J = 25mm$$

Duretés obtenues

A l'aide des courbes de Jominy de ces différents aciers, où l'on porte $d_J = 25mm$, on peut établir le tableau suivant donnant les duretés pour diverses températures de revenu. En dernière colonne, nous indiquerons la température maximale de revenu garantissant $HRC = 30$:

ACIER	R650	R600	R550	Temp. max.
$34CrMo4$	26,8	28,7	30,5	564
$42CrMo4$	27,0	29,2	31,2	580
$51CrV4$	30,6	32,0	33,3	(677)
$34CrNiMo6$	28,0	34,0	38,0	633

On constate que chacun de ces aciers permet d'obtenir une dureté Rockwell C de 30.

Indice de prix

ACIER	I.P.
$34CrMo4$	182
$42CrMo4$	182
$51CrV4$	183
$34CrNiMo6$	243

Sur base de ce tableau, nous rejetterons $34CrNiMo6$, beaucoup plus cher que les autres. Par contre, les trois autres diffèrent très peu par leur prix. Nous donnerons la préférence à $34CrMo4$, car c'est le plus résilient. Nous le traiterons à $550°C$, ce qui donnera plus qu'il ne faut de dureté. Notre choix définitif est donc

$$34CrMo4,\ TH830-870,\ R550$$

Chapitre 2

Tolérances et états de surface

2.1 États de surface

D'après le mode de mise à forme, on peut obtenir des états de surface dans les plages précisées dans le tableau de la figure 1 [18]. Ce tableau donne des valeurs de la rugosité totale R_t. Comme les plans spécifient le plus souvent la rugosité moyenne arithmétique (CLA) R_a et non R_t, il est utile de connaître les relations approximatives suivantes :

– Pour des surfaces réalisés à l'outil coupant, $R_t \approx 4R_a$.
– Pour des surfaces réalisées par copeau gratté (rectification), $R_t \approx 9R_a$.

D'autre part, il faut bien se rendre compte que la rugosité constitue une erreur systématique sur la cote : la cote réglée à l'outil est celle de sa pointe, soit à fond de rugosité, tandis que la cote mesurée est la cote aux sommets des rugosités. Entre les deux, il y a une différence égale à R_t pour chaque surface palpée, ce qui fait par exemple $2R_t$ sur le diamètre d'un arbre. Une tolérance serrée nécessite donc toujours une rugosité faible.

2.2 Tolérances et ajustements

2.2.1 Rappels

Sans nous étendre sur cette question qui relève du cours de conception mécanique, nous ferons ici quelques rappels et remarques.

Dans le domaine des tolérances, on distingue deux types de cotes, les *cotes de type arbre* et les *cotes de type alésage*. Les premières ont un intervalle de tolérance noté par une lettre minuscule, par exemple $k5$, tandis que les secondes, on utilise une lettre majuscule, par exemple $H8$. En dehors des cas évidents où il s'agit à proprement parler d'un arbre ou d'un alésage, il arrive que l'on se demande dans quelle catégorie une cote donnée doit être classée. La règle est la suivante :

Définition 1 *Une cote de type arbre est une cote dont l'augmentation correspond à un supplément de matière. Une cote de type alésage est une cote dont l'augmentation correspond à une diminution de la quantité de matière.*

Une autre manière de présenter les choses, tout-à-fait équivalente, est la suivante :

Définition 2 *Une cote de type arbre est une cote qui diminue lors de son usinage. Une cote de type alésage est une cote qui augmente lors de son usinage.*

Ainsi, la largeur d'une rainure de clavette est une cote de type alésage, tandis que la largeur de la clavette est une cote de type arbre. La profondeur de la rainure est une cote de type alésage.

Rappelons encore (*fig. 2*) que la zone de tolérance est donnée par l'écart inférieur ei ou EI et l'écart supérieur es ou ES. La différence $ES - EI$ ou $es - ei$ est l'intervalle de tolérance IT ou it. La grandeur de cet intervalle dépend du *degré de tolérance*, anciennement appelé *qualité*, noté par un nombre $(1, 2, ..., 14)$, les plus petits degrés de tolérance donnant les intervalles les plus serrés. La position de l'intervalle de tolérance définit le *type* $(a, ...z$ ou $A, ...Z)$. La croissance de la lettre définissant le type correspond à un accroissement de la quantité de matière. Un *alésage normal* est caractérisé par $EI = 0$. C'est le type H. Un *arbre normal* est tel que es=0. C'est le type h. Dans les deux cas, le maximum de matière correspond à la cote nominale. Par rapport à un alésage normal, les arbres de type a à h sont glissants, tandis que les arbres de type k à z sont serrés. A l'inverse, par rapport à un arbre normal, les alésages de type A à H sont glissants et les alésages de type K à Z sont serrés. L'arbre js donne avec un alésage normal un ajustement incertain, et il en est de même du couple formé d'un arbre normal et d'un alésage JS.

La figure 3 [18] constitue un tableau des écarts et ajustements les plus courants. Il subsiste néanmoins le problème des cotes non tolérancées sur le plan. Dans l'esprit du concepteur, ces cotes ne sont pas fonctionnelles et ne nécessitent donc pas de précision particulière. On peut les interpréter de deux manières :

- Tolérances $JS14$ ou $js14$.
- Tolérances extraites de la seconde partie du tableau de la figure 3.

2.2.2 Chaînes de cotes

Les chaînes de cotes constituent un outil pratique et efficace pour déterminer diverses conditions de maximum et de minimum [11, 22, 2, 3]. Pour illustrer leur application, considérons l'assemblage boulonné de la figure 4. Il faut choisir la longueur ℓ de la tige et sa longueur filetée ℓ_f de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

- La longueur sortie y de la tige doit avoir une valeur comprise entre un minimum y_m garantissant que la tige sort bien de l'écrou, de manière à garantir une prise de la vis sur toute l'épaisseur de l'écrou. On spécifiera par exemple $y_m = p$, p étant le pas de la vis.
- Cette même longueur sortie ne doit pas être excessive, notamment pour des raisons de sécurité. On imposera donc un maximum y_M.
- Il doit exister une *réserve de serrage* $x \geq x_m$ de manière à garantir que les pièces seront serrées avant que l'écrou ne soit engagé à refus dans le filet de la vis. Ici encore, une valeur raisonnable est le $x_m = p$ si les pièces assemblées sont suffisamment rigides.

Il va de soi que ces conditions doivent être vérifiées quelles que soient les valeurs réelles de a, b, ℓ et ℓ_f dans leur intervalle respectif de tolérance. C'est précisément ces intervalles qu'il faut déterminer.

Pour résoudre ce problème, on utilise un diagramme vectoriel où l'on commence par dessiner la *cote-condition* comme un vecteur double, puis on cherche un jeu de vecteurs constitué de cotes *indépendantes*, dont la résultante est la condition. Commençons par la cote y. On trouve (*fig. 5*)

$$y = \ell - a - b - h \tag{2.1}$$

Le maximum y_M s'obtient en maximisant toutes les cotes affectées du signe positif et en minimisant toutes les cotes affectées du signe négatif :

$$y_M = \ell_M - a_m - b_m - h_m \tag{2.2}$$

A l'inverse, le minimum y_m s'obtient en minimisant toutes les cotes affectées du signe positif et en maximisant les autres :

$$y_m = \ell_m - a_M - b_M - h_M \tag{2.3}$$

De ces deux équations, on déduit les valeurs cherchées de ℓ_M et ℓ_m :

$$\begin{aligned} \ell_M &= y_M + a_m + b_m + h_m & (2.4) \\ \ell_m &= y_m + a_M + b_M + h_M & (2.5) \end{aligned}$$

Remarque importante Insistons sur le fait qu'*il n'est pas équivalent* de partir de la relation 2.1 explicitée en fonction de ℓ,

$$\ell = y + a + b + h$$

car y n'est pas une variable indépendante. En fait, on a $y = Y(\ell, a, b, h)$. En particulier,

$$\begin{aligned} \ell_M &\neq y_M + a_M + b_M + h_M \\ \ell_m &\neq y_m + a_m + b_m + h_m \end{aligned}$$

comme on peut s'en rendre compte en comparant avec les relations correctes (2.4) et (2.5). Ceci est une règle générale :

Règle 1 *Le passage au maximum et au minimum terme à terme dans le second membre n'est correct que s'il s'agit de variables indépendantes.*

Passons à la condition portant sur x. On a (*fig. 6*)

$$x = b + a - \ell + \ell_f$$

(Ne pas utiliser la cote y qui n'est pas indépendante!), ce qui implique

$$x_m = b_m + a_m - \ell_M + \ell_{fm}$$

et

$$\ell_{fm} = x_m - b_m - a_m + \ell_M$$

La valeur de x_M ne nous intéresse pas dans ce cas-ci.

2.2.3 Autre présentation et discussion

Revenant à la chaîne de cotes (2.1), on notera qu'elle implique la relation suivante entre les valeurs nominales, que nous surlignerons :

$$\bar{y} = \bar{\ell} - \bar{a} - \bar{b} - \bar{h} \tag{2.6}$$

En soustrayant cette relation des résultats (2.4) et (2.5), on obtient les relations aux écarts supérieurs ES et inférieurs EI que voici :

$$\begin{aligned} ES(y) &= ES(\ell) - EI(a) - EI(b) - EI(h) && (2.7) \\ EI(y) &= EI(\ell) - ES(a) - ES(b) - ES(h) && (2.8) \end{aligned}$$

Dans la suite, nous utiliserons fréquemment ce type de relations plutôt que celles qui donnent les maxima et minima, de manière à traiter des nombres comportant moins de chiffres.

Un point important à noter est que la soustraction des relations (2.7) et (2.8) mène au résultat suivant :

$$IT(y) = IT(\ell) + IT(a) + IT(b) + IT(h) \tag{2.9}$$

Ceci est tout à fait général et peut être exprimé par la règle suivante :

Règle 2 *L'intervalle de tolérance sur la cote-condition est la somme des intervalles de tolérance des cotes composantes.*

Il résulte de la relation (2.9) que

$$IT(\ell) = IT(y) - IT(a) - IT(b) - IT(h)$$

si bien qu'il est possible d'imaginer que l'on trouve $IT(l) \leq 0$, ce qui est inadmissible. Il n'existera donc de solution acceptable que si

$$IT(y) > IT(a) + IT(b) + IT(h)$$

C'est la *condition de compatibilité* du problème posé. Elle exprime le fait suivant :

Règle 3 *Il est impossible d'obtenir une cote-condition précise sans que les cotes composantes soient plus précises qu'elle.*

2.2.4 Autre exemple

L'exemple suivant, qui fera peut-être un peu sourire, est instructif à la fois quant à la fabrication et par son résultat peu commun. On désire fabriquer un suspensoir pour deux rouleaux de papier hygiénique, au moyen de deux barres circulaires de diamètre d_1, placés à une distance ensembliste ℓ et situés sur la même verticale (*fig. 7*). Ils ont un diamètre intérieur d et un diamètre extérieur D. Chacune des cotes d_1, d et D est affectée de tolérances. On demande *quelle est la distance minimale des deux barres pour que les deux rouleaux ne se touchent jamais.*

Remarquons que dans ce cas précis, nous prenons comme cote la distance ensembliste des deux barres et non pas la distance de leurs axes, car nous envisageons le mode de fabrication suivant (*fig. 8*) : après avoir monté la barre 1, on positionne la barre 2 à l'aide d'une entretoise de longueur ℓ. (Une telle entretoise peut d'ailleurs servir de moyen de contrôle).

Le problème posé revient à exiger qu'il existe entre les deux rouleaux en place une distance x, avec $x_m > 0$. Nous établirons donc la chaîne de cotes de x. A ce stade, il convient de distinguer soigneusement les cotes d, d_1 et D de la partie inférieure des cotes d^*, d_1^* et D^* de la partie supérieure. En effet, même si

$$\begin{aligned} d_m &\leq d^* \leq d_M \\ d_{1m} &\leq d_1^* \leq d_{1M} \\ D_m &\leq D^* \leq D_M \end{aligned}$$

il n'en reste pas moins qu'il s'agit de réalisations *différentes* dans les mêmes intervalles de cotes. On déduit de la figure 9

$$x = -\frac{D}{2} + \frac{d}{2} + \ell + d_1^* - \frac{d^*}{2} - \frac{D^*}{2}$$

d'où

$$x_m = -\frac{D_M}{2} + \frac{d_m}{2} + \ell_m + d_{1m}^* - \frac{d_M^*}{2} - \frac{D_M^*}{2}$$

et

$$\ell_m = x_m + \frac{D_M}{2} + \frac{D_M^*}{2} - \frac{d_m}{2} + \frac{d_M*}{2} - d_{1m}^*$$

Notant que

$$D_M^* = D_M \quad d_M^* = d_M \quad d_{1m}^* = d_{1m}$$

on obtient

$$l_m = x_m + D_M + \frac{1}{2}IT(d) - d_{1m}$$

Si l'on avait négligé de distinguer d de d^* dans les calculs, on aurait perdu le terme $IT(d)/2$ dans le résultat final.

2.3 Tolérances géométriques

On appelle *tolérances géométriques* des tolérances portant sur tous les aspects géométriques d'une pièce, hors leurs dimensions qui sont, elles, régies par les tolérances dimensionnelles. Comme toutes les tolérances, leur existence est motivée par des considérations de fonctionnalité du produit. Nous nous bornerons ici à un bref rappel, renvoyant au cours de conception mécanique pour les détails [11, 22, 2, 3]. En particulier, nous n'envisagerons pas ici le cotation au maximum de matière.

2.3.1 Tolérances de forme

Rectitude d'une ligne ou d'un axe

L'erreur de rectitude est définie par l'écart minimal de deux parallèles encadrant la ligne considérée, la direction des parallèles pouvant varier. Dans le cas de la figure 10, cet écart doit être au plus égal à $0,1mm$ sur toute longueur de $200mm$ prise sur la pièce.

Planéité d'une surface

L'erreur de planéité d'une surface est la plus petite valeur de l'écart de deux plans parallèles encadrant la surface, quand on fait varier l'orientation commune de leur normale. Sur la figure 11, cette erreur ne peut pas valoir plus de $0,05mm$.

Circularité

L'erreur de circularité est la valeur minimale de la différence entre les rayons de deux cercles concentriques encadrant la courbe donnée, lorsque l'on fait varier le centre commun des deux cercles. La figure 12 exprime que cette erreur ne peut excéder $0,02mm$.

Cylindricité

L'erreur de cylindricité d'une surface donnée est le minimum de la la différence entre les rayons de deux cylindres coaxiaux encadrant la surface donnée, lorsque l'on fait varier la position de l'axe commun des deux cylindres. La figure 13 exprime que cette erreur ne peut excéder $0,05mm$.

2.3.2 Tolérances d'orientation

Il s'agit toujours d'orientation par rapport à une référence sur la pièce. Celle-ci est marquée par un drapeau portant une inscription, avec hampe centrale et support triangulaire.

Parallélisme

Le dessin de la figure 14 exprime que la ligne considérée doit pouvoir être encadrée par deux droites parallèles à la référence A et distantes de moins de $0,1mm$, dans le plan du dessin.

Perpendicularité

La figure 15 spécifie que l'axe du cylindre doit, dans le plan du dessin, pouvoir être encadré par deux droites perpendiculaires au plan de référence distantes de moins de $0,1mm$

Inclinaison

En figure 16, nous voyons pour la première fois apparaître une *cote encadrée*. Il s'agit d'une cote de référence, autrement dit, idéale, fictive, virtuelle, et non existante sur la pièce. Ce qui est exigé, c'est que l'axe du trou soit, dans le plan du dessin, compris entre deux droites exactement à 60°, distantes de moins de $0,1mm$. La vérification peut se faire à l'aide d'équerres à 60° très précises, c'est-à-dire en pratique, dix fois plus précises que la tolérance à vérifier.

2.3.3 Tolérances de position

Tolérances de position proprement dites

La figure 17 spécifie que, par rapport à la position de référence indiquée par les cotes encadrées, l'axe du trou peut se trouver dans un petit cercle de diamètre $\phi = 0,5mm$

Tolérances de coaxialité

L'axe du cylindre tolérancé en figure 18 doit être contenu dans un cylindre de diamètre $\phi = 0,03mm$ dont l'axe est celui de la référence A.

Tolérances de symétrie

En figure 19, il est spécifié que le plan méridien de la rainure doit être compris entre deux plans parallèles au plan méridien de la référence A, distants de $0,06mm$ *et symétriquement placés par rapport à cette référence.* (On a donc droit à $0,03mm$ de chaque côté du plan méridien de A)

2.3.4 Tolérances de battement

Battement simple radial

En plaçant le corps de la figure 20 sur deux paliers en A et B, on mesure le déplacement radial d'un comparateur lors de la rotation. Ce déplacement, appelé déplacement radial, ne doit pas dépasser $0,02mm$

Battement simple oblique

On place ici le corps de la figure 21 sur un palier long en A, et on mesure le battement perpendiculairement à la surface théorique.

Battement simple axial

Idem, en plaçant le comparateur dans la direction de l'axe (*fig. 21*). Ce battement est parfois appelé *voile.*

Battement total radial

La tolérance de battement total radial représentée en figure 23 peut être schématisée en imaginant que l'on lie au comparateur une barre axiale. On mesure donc sur toute la longueur de la surface en une fois.

Battement total axial

Ce type de tolérance est schématisé en figure 24.

2.4 Tolérances sur les pièces estampées

2.4.1 Introduction

Lorsque le brut est obtenu par estampage, quelles tolérances peut-on espérer ? Ce problème a deux incidences :

- Exigences du client vis-à-vis de l'atelier d'estampage.
- Pour l'usineur, dispersion des cotes primitives avant usinage.

Nous ne traiterons ici que la *qualité normale* désignée par F. Il existe également une qualité serrée, désignée par E, dont on peut trouver les spécifications dans la norme française NF E 82-002 [18].

2.4.2 Facteurs influençant la tolérance

Selon le type de pièce à estamper, la difficulté d'être précis est plus ou moins grande. Il faut donc tenir compte de *paramètres de difficulté*. Ce sont :

La masse de la pièce à estamper. Pour rappel, l'acier a une masse volumique de $7800kg/m^3$.

La forme du joint des matrice. Il est en effet plus facile d'estamper une pièce avec une estampe à joint plan ou symétrique (*fig. 25*) qu'avec une estampe à joint gauche asymétrique (*fig. 26*).

La matière estampée

- On donne l'indice $M1$ (facile) aux aciers tels que

$$[C] < 0,65\% \text{ et } [Mn],\ [Ni],\ [Cr],\ [Mo],\ [V],\ [W] < 5\%$$

- On donne l'indice $M2$ (difficile) aux aciers tels que

$$[C] \geq 0,65\% \text{ ou } [Mn],\ [Ni],\ [Cr],\ [Mo],\ [V],\ [W] \geq 5\%$$

La difficulté de forme. Plus la forme de la pièce est tourmentée, plus son estampage est difficile. On mesure la difficulté de forme comme suit (*fig. 27*). Étant donné le solide à réaliser, dans la position où il sera estampé, on l'enveloppe d'un parallélipipède rectangle dont la surface latérale est parallèle au mouvement du marteau. Le *coefficient de difficulté de forme S* est donné par

$$S = \frac{\text{Volume pièce}}{\text{Volume du pllpp enveloppe}}$$

Plus ce coefficient est faible, plus la pièce est difficile à réaliser. A partir de ce coefficient, on définit quatre classes :

$0 < S \leq 0,16$	Classe $S4$	(très difficile)
$0,16 < S \leq 0,32$	Classe $S3$	(difficile)
$0,32 < S \leq 0,63$	Classe $S2$	(facile)
$0,63 < S \leq 1$	Classe $S1$	(très facile)

2.4.3 Exploitation de ces facteurs

A partir des facteurs définis ci-dessus, on détermine les tolérances à l'aide des tableaux 1, 2 et 3 (*figures 32, 33 et 34*). L'entrée de ces tableaux se fait toujours à partir de la *masse*.

1. Tolérances sur les longueurs et largeurs entre faces *extérieures* : tableau 1.
2. Tolérances sur les longueurs et largeurs entre faces *intérieures* : tableau 1, en changeant les signes.
3. Tolérances sur les longueurs et largeurs *entre un axe et une face* : valeurs du tableau 1 divisées par 3.
4. Tolérances sur le déport (erreur de positionnement relatif des estampes, fig. 28) : tableau 1.
5. Tolérances sur la saillie éventuelle des bavures (*fig. 29*) : tableau 1.
6. Tolérances sur les épaisseurs : tableau 2.
7. Tolérances sur les traces d'éjecteurs : valeurs du tableau 2 divisées par 2.
8. Tolérances de rectitude et de planéité (*fig. 30*) : tableau 3.
9. Tolérances sur les entraxes (*fig. 31*) : tableau 3.

2.5 Tolérances sur les pièces moulées

2.5.1 Préambule

La précision des pièces moulées dépend de la précision de l'outillage. En notant $\mathcal{I}$ l'*imprécision* des procédés, on a la relation générale suivante :

$$\mathcal{I}(\text{modèle en bois}) > \mathcal{I}(\text{modèle métallique}) > \mathcal{I}(\text{moulage en coquille})$$

2.5.2 Types de cotes et de tolérances

Il faut distinguer (*fig. 35*) trois types de cotes [18] :

A : cotes correspondant à une même partie de moule
B : cotes faisant intervenir deux éléments du moule
C : cotes faisant intervenir trois éléments du moule

Il est clair que

$$\mathcal{I}(A) < \mathcal{I}(B) < \mathcal{I}(C)$$

Par ailleurs, les tolérances peuvent être :

soignées (S) : précisées sur le dessin
larges (L) : non précisées sur le dessin

2.5.3 Tableau des tolérances dans le cas du moulage atmosphérique

Moulage en coquille

COTE	S	L
$A\pm$	$0,2mm + 0,0015A$	$0,45mm + 0,0020A$
$B\pm$	$0,3mm + 0,0020B$	$0,55mm + 0,0025B$
$C\pm$	$0,4mm + 0,0025C$	$0,65mm + 0,0030C$

Moulage en sable, modèle en bois

COTE	S	L
$A\pm$	$0,5mm + 0,0020A$	$1,5mm + 0,0022A$
$B\pm$	$0,8mm + 0,0025B$	$2,0mm + 0,0025B$
$C\pm$	$1,0mm + 0,0030C$	$2,2mm + 0,0030C$

Moulage en sable, modèle métallique

COTE	S	L
$A\pm$	$0,4mm + 0,0020A$	$1,0mm + 0,0022A$
$B\pm$	$0,7mm + 0,0025B$	$1,3mm + 0,0025B$
$C\pm$	$0,8mm + 0,0030C$	$1,5mm + 0,0030C$

2.5.4 Tableau des tolérances pour le moulage sous pression des alliages légers

COTE	TOLÉRANCE
$A\pm$	$0,15mm + 0,0008A$
$B\pm$	$0,20mm + 0,0010B$
$C\pm$	$0,30mm + 0,0020C$

2.5.5 Tolérances de planéité

Il est important de pouvoir chiffrer le gauchissement des surfaces planes produites. Pour rappel, cette tolérance mesure l'écart entre deux plans encadrant la surface réelle (*fig. 36*). La tolérance de planéité f dépend de la plus grande diagonale D du plan considéré (*fig. 37*). Les valeurs de ces tolérances sont :

TYPE DE MOULAGE	f
En sable	$0,6mm + 0,0020D$
En coquille	$0,4mm + 0,0015D$
Sous pression, $D \leq 20mm$	$0,1mm$
Sous pression, $D > 20mm$	$0,1 + 0,015(\frac{D-10mm}{D})$défaut

2.5.6 Tolérances de coaxialité et de déport

Ces deux défauts sont illustrés en figure 38. Ici encore, il faut distinguer les cotes des types A, B et C.

COTE	Moulage en coquille	Moulage en sable
$A\pm$	$0,4mm + 0,0030A$	$1,0mm + 0,0040A$
$B\pm$	$0,6mm + 0,0040B$	$1,6mm + 0,0050B$
$C\pm$	$0,8mm + 0,0050C$	$2,0mm + 0,0060C$

Chapitre 3

Cotation de fabrication

3.1 Dispersions dimensionnelles

3.1.1 Généralités

On constate que des pièces réalisées sur une même machine, dans un même montage et avec le même outil, ne sont pas identiques en dimensions. Ce phénomène, que nous allons étudier ci-dessous, porte le nom de *dispersion* [17, 18, 12, 25].

3.1.2 Dispersion systématique et dispersion aléatoire

Imaginons la fabrication en série de N_p pièces. Sur chaque pièce fabriquée, on mesure une certaine cote x. On établit alors un diagramme portant en abscisse le numéro k de la pièce et en ordonnée, sa cote $x(k)$ *(fig. 1)*. On constate deux phénomènes :

- Il y a une dispersion *systématique* δ_s , ici croissante, qui est due à l'usure de l'outil. C'est ce qu'il est convenu d'appeler la *dérive de la cote*. Pour une cote de type arbre, cette dérive est croissante, et varie au cours du temps de 0 à Δ_s. Au contraire, pour une cote de type alésage, cette dérive est décroissante et varie au cours du temps de 0 à $-\Delta_s$.
- Il existe en outre une dispersion *aléatoire* δ_a, positive ou négative, dont la cause essentielle est l'incertitude de mise en position de la pièce sur la machine. Cette dérive varie entre $-\Delta_a$ et $+\Delta_a$.

La dispersion totale est donnée par

$$\delta_t = \delta_a + \delta_s$$

3.1.3 Autres incertitudes

A la dispersion aléatoire s'ajoutent deux autres incertitudes, à savoir,

- Les *erreurs géométriques* δ_g des déplacements relatifs des éléments de la machine. Ces erreurs varient entre $-\Delta_g$ et $+\Delta_g$
- L' *incertitude de réglage* de la cote δ_r, qui varie entre $-\Delta_r$ et $+\Delta_r$.

Voici, à titre indicatif, quelques valeurs de Δ_a [18] :

surface d'appui	Δ_a
moulée en sable	$\geq 0,3mm$
moulée en coquille	$\geq 0,2mm$
moulée sous pression	$\geq 0,05mm$
estampée sans redressage	$\geq 0,2mm$
estampée avec redressage	$\geq 0,1mm$
surface usinée	$0,05mm \leq \Delta_a \leq 0,1mm$

3.2 Classification des cotes de fabrication

3.2.1 Généralités

L'établissement d'un processus d'usinage impose la détermination de *toutes* les cotes effectivement réalisées sur la pièce, même s'il ne s'agit que d'étapes provisoires. C'est ce que l'on appelle les *cotes de fabrication*. Elles sont *toujours* tolérancées.

Pour une prise de pièce donnée, il y a toujours au moins une cote de fabrication qui a pour origine la surface d'appui de la pièce sur la machine. Cette remarque est importante, car l'examen des sources d'incertitudes montre que la dispersion aléatoire Δ_a est souvent grande.

Nous noterons dans la suite U les cotes de fabrication.

3.2.2 Les trois types de cotes de fabrication

En fonction de la remarque précédente, on est amené à distinguer [18, 32, 8, 42] :

Les cotes de machine ou cotes primaires U_p

Ce sont les cotes pour lesquelles l'outil est réglé par rapport aux éléments de mise en position de la pièce *(fig. 2)*. Interviennent ici les dispersions et incertitudes Δ_a, Δ_r,Δ_g,Δ_s.

Les cotes d'appareillage U_a

Ce sont toujours des cotes relatives entre surfaces, définies par l'appareillage ou la commande de la machine, indépendamment de la mise en position de la pièce. Ainsi, sur la figure 3, la cote U_{a_1} ne représente qu'un déplacement de l'outil par rapport à la cote U_{p_2} réalisée au préalable. Pour ces cotes, n'interviendront plus que Δ_r, Δ_g et Δ_s.

Les cotes d'outil U_o

Pour ces cotes, seul Δ_s existe encore. Il s'agit de cotes réalisées à l'aide de deux outils réglés entre eux *(fig. 4)* ou encore de cotes réalisées par la distance des arêtes d'un seul outil, comme dans le cas du creusement d'une rainure de clavette à l'aide d'une fraise à trois tailles, où la largeur de la rainure ne dépend que de la largeur de la fraise et n'évolue qu'en fonction de l'usure de celle-ci.

3.2.3 Premier exemple : perçage avec masque

Dans le montage illustré par la figure 5, la cote U_{p_1} est définie entre la référence d'appui et l'axe du premier trou. C'est donc une cote de machine. La cote U_{a_1} ne dépend que de l'appareillage, en l'occurrence, le masque : c'est une cote d'appareillage. Enfin, les cotes U_{o_1} et U_{o_2} sont définies par les diamètres effectifs des forets : ce sont des cotes d'outil.

3.2.4 Deuxième exemple : introduction de la notion de *référentiel auxiliaire*

L'ébauche de pignon arbré représentée en figure 6 doit être tournée, du côté arbre, par *copiage*. Le principe de ce procédé, illustré par la figure 7, est le suivant : on taille un gabarit plan au profil méridien de la pièce à réaliser ; lors du tournage, un palpeur lié au chariot transversal suit le gabarit et oblige le chariot transversal à se placer convenablement. L'application de ce principe simple nécessite cependant un appareillage perfectionné (en général hydraulique) pour assurer un bon suivi du palpeur. Les tours ainsi équipés sont appelés *tours à copier.*

La fabrication du gabarit fait évidemment partie des frais d'outillage. Ce procédé ne se justifie donc que dans le cas de séries suffisantes, qui permettent de répartir ces frais préalables sur de nombreuses pièces.

Il va de soi que dans ce procédé, toutes les cotes sont définies par le gabarit dès lors que l'on a réglé la position initiale de l'outil par rapport à la référence de la pièce. Celle-ci est définie par le diamètre de la portée de roulement du côté de la tête et la face d'appui arrière du pignon. Ces deux cotes primaires servent en fait de *référence auxiliaire* pour tout l'arbre.

3.2.5 Troisième exemple

Considérons enfin le cas d'une rainure réalisée à l'aide d'une fraise à trois tailles *(fig. 8)*. La largeur de la rainure dépend uniquement des cotes effectives de la fraise : c'est donc une cote d'outil. Par contre, la profondeur de la rainure et la symétrie de sa position sur la pièce se règlent en fonction de la référence de la machine et dépendent de la position effective de la pièce : ce sont des cotes primaires.

3.3 Réglage des cotes

3.3.1 Position du problème

Etant donné une cote de fabrication, par exemple $100 \pm 0,5 mm$, à quelle cote faut-il régler la machine ? Il est clair que c'est à l'intérieur de l'intervalle, mais encore ? Faut-il se placer au centre, à une extrémité ou ailleurs ? Il existe une réponse rationnelle à cette question, fondée sur l'économie du processus. Dans l'établissement de celle-ci, il importe de raisonner rigoureusement et sans a priori, car le résultat est un peu paradoxal.

3.3.2 Fondements théoriques

La cote de fabrication $U^*(t)$ obtenue au temps t résulte *(fig. 9)* [18, 12, 25] de la composition vectorielle de la *cote de réglage* R, des incertitudes δ_a, δ_g et δ_r, ainsi que de la dérive de la cote $\delta_s(t)$:

$$U^*(t) = R + \delta_a + \delta_g + \delta_r + \delta_s(t)$$

La cote de réglage est la consigne donnée à la machine ou à l'opérateur. C'est donc une cote de référence, à valeur unique. Les trois incertitudes ont une dstribution symétrique :

$$\begin{aligned} -\Delta_a \le \delta_a \le \Delta_a \\ -\Delta_g \le \delta_g \le \Delta_g \\ -\Delta_r \le \delta_r \le \Delta_r \end{aligned}$$

Par contre, la dérive de l'outil est progressive et va toujours dans le sens d'un supplément de matière. Si l'on se fixe une dérive maximale Δ_s, on appellera durée de vie (dimensionnelle) de l'outil T le temps de fonctionnement après lequel cette dérive est atteinte. Pour une cote de type arbre,

$$\delta_s(0) = 0 \ , \ \delta_s(t) \uparrow \ , \ \delta_s(T) = \Delta_s$$

Pour une cote de type alésage,

$$\delta_s(0) = 0 \ , \ \delta_s(t) \downarrow \ , \ \delta_s(T) = -\Delta_s$$

Après une durée de vie d'outil, il faut soit modifier son réglage, soit le remplacer. Dans les deux cas, cela implique l'arrêt de la machine et un temps de correction qui est improductif. L'objectif est naturellement de se mettre dans des conditions telles que la durée de vie soit la plus grande possible, ce qui aura lieu si l'on se ménage une capacité de dérive *aussi grande que possible* tout en restant à chaque instant à l'intérieur de l'intervalle de tolérance. Cette dernière condition s'écrit sous forme des deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,T]} U_M^*(t) \le U_M \\ \min_{t\in[0,T]} U_m^*(t) \ge U_m \end{aligned}$$

Comme les cotes d'arbre et les cotes d'alésage ont un comportement à la dérive opposé, il convient de les traiter séparément.

Cas des cotes de type arbre

Pour une cote de type arbre, on doit donc avoir

$$\begin{aligned} U_m &\le \min_t U_m^*(t) = \min_t (R - \Delta_r - \Delta_g - \Delta_a + \delta_s(t)) \\ &\le R - \Delta_r - \Delta_g - \Delta_a + 0 \qquad (3.1) \\ U_M &\ge \max_t U_M^*(t) = \max_t (R + \Delta_r + \Delta_g + \Delta_a + \delta_s(t)) \\ &\ge R + \Delta_r + \Delta_g + \Delta_a + \Delta_s \qquad (3.2) \end{aligned}$$

De la relation (3.2), on déduit, en utilisant la notation $\sum \Delta = \Delta_a + \Delta_g + \Delta_r$,

$$\Delta_s \leq U_M - R - \sum \Delta$$

Ceci signifie que la plus grande dérive admissible sera obtenue pour la plus petite cote de réglage. Celle-ci sera obtenue en remplaçant dans (3.1) l'inégalité par une égalité. Ceci donne

$$R = U_m + \sum \Delta \tag{3.3}$$

C'est donc, aux incertitudes près, au *minimum de matière* qu'il faut régler la cote.

Par ailleurs, le fonctionnement ne sera possible que si $\Delta_s \geq 0$. Or, la soustraction de la condition (3.1) à la condition (3.2) donne

$$\Delta_s + 2 \sum \Delta \leq IT(U)$$

soit la *condition de réalisabilité*

$$IT(U) - 2 \sum \Delta \geq \Delta_s \ > 0 \tag{3.4}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, il est impossible, par les moyens d'usinage envisagés, d'obtenir la précision requise.

Cas des cotes de type alésage

Dans le cas d'une cote de type alésage, les conditions s'écrivent

$$\begin{aligned} U_m &\leq \min_t U_m^*(t) = \min_t (R - \Delta_r - \Delta_g - \Delta_a + \delta_s(t)) \\ &\leq R - \Delta_r - \Delta_g - \Delta_a - \Delta s \qquad (3.5) \\ U_M &\geq \max_t U_M^*(t) = \max_t (R + \Delta_r + \Delta_g + \Delta_a + \delta_s(t)) \\ &\geq R + \Delta_r + \Delta_g + \Delta_a + 0 \qquad (3.6) \end{aligned}$$

La relation (3.5) fournit alors

$$\Delta s \leq R - \sum \Delta - U_m$$

la plus grande dérive possible correspond ici à la plus grande cote de réglage. On obtient celle-ci à partir de la condition (3.6) :

$$R = U_M - \sum \Delta \tag{3.7}$$

On notera du reste que c'est encore, aux incertitudes près, le minimum de matière. On retrouve du reste la condition de réalisabilité (3.4).

Synthèse

Les résultats obtenus peuvent se synthétiser comme suit :

Principe 1 *La cote de réglage rationnelle est située au* minimum de matière *augmenté* en matière *de la somme des incertitudes* $\sum \Delta$.

Principe 2 *La dérive admissible est inférieure ou égale à l'intervalle de tolérance diminué de deux fois la somme des incertitudes* $\sum \Delta$*. Elle n'est* égale *à cette valeur que si le premier principe est respecté.*

3.3.3 Remarques

a) On entend parfois dire qu'il vaut mieux régler l'outil au *maximum* de matière « car il est toujours possible d'enlever la matière excédentaire si besoin est ». Cette conception est erronée, car

- La dérive provoquera rapidement la mise hors cote de la pièce.
- Le supplément de matière indésirable sera souvent trop petit pour être repris à l'outil (copeau minimal) et ne pourra être enlevé que par une opération de rectification lente, coûteuse et difficile à réaliser dans le cas des alésages.

b) On constate que si l'intervalle de tolérance $IT(U)$ est trop étroit, la fabrication sera *impossible* avec les moyens envisagés. On ne peut trop rappeler que le bureau d'études doit prendre pour devise *tout juste assez fin pour le fonctionnement correct, jamais plus !*

c) Il n'en reste pas moins que l'analyse statistique des cotes obtenues mène à une distribution décentrée dans l'intervalle de tolérance, le mode étant plus proche du maximum que du minimum de matière. Ceci est dû au fait que la dérive n'est pas une fonction linéaire du temps. Pendant la période dite de *rodage* de l'outil (usure primaire), l'usure se fait très rapidement, ce qui mène à une première dérive rapide. Par la suite, l'usure devient linéaire et plus faible. Comme cette période d'usure établie dure plus longtemps et qu'elle correspond à une dérive plus faible, il y a plus de pièces près du maximum de matière.

3.3.4 Procédure simplifiée

Il arrive souvent que l'on procède comme suit pour déterminer la cote de réglage [12, 25]. On part de l'*hypothèse* que

$$IT(U) \geq 3 \sum \Delta \tag{3.8}$$

dont on peut vérifier la plausibilité dans des cas précis. Ceci donne une possibilité de dérive égale à $IT/3$. La cote de réglage est alors donnée par

$$R = U_m + IT/3 \tag{3.9}$$

pour une cote d'arbre et

$$R = U_M - IT/3 \tag{3.10}$$

pour une cote d'alésage.

3.4 Cotes de fabrication

3.4.1 Quelques remarques préliminaires

Lors de l'établissement de cotes de fabrication, il faut toujours avoir en tête les principes suivants [18, 8] :

a) Le coût de l'usinage croît avec sa précision *(fig. 10)*

b) Il existe, pour chaque opération, un copeau minimal, en-deçà duquel l'usinage ne peut se faire convenablement. En finition, il est défini par le risque de refus de coupe. En dégrossissage, il faut, dès la première passe, enlever la croûte de la pièce, de manière à ne laisser sur celle-ci que de la matière saine.

c) Les cotes données par le bureau d'études sont normalement définies par des raisons fonctionnelles. Mais ce ne sont pas nécessairement les cotes de fabrication. Ainsi, dans le cas de la figure 11, il peut arriver que la cote $Z^{\pm z}$du bureau d'études soit la résultante des deux cotes de fabrication $X^{\pm x}$ et $Y^{\pm y}$. On dit, dans ce cas, qu'il y a *transfert de cotes*. La question qui se pose alors est l'établissement des tolérances de fabrication x et y permettant de respecter la tolérance z du bureau d'études qui, seule, sera vérifiée à la réception.

d) Enfin, il existe des cotes non définies par le bureau d'études, car elles sont en fait imposées par des impératifs de fabrication. La figure 12 montre deux exemples de telles *cotes des méthodes*

3.4.2 Transfert de cotes

Imaginons *(fig. 13)* une pièce pour laquelle le plan du bureau d'études fixe les cotes U_1, C et U_3, avec tolérances. Supposons en outre que le processus de fabrication utilise en fait les cotes de fabrication U_1, U_2 et U_3. La question consiste à déterminer la valeur de U_2 et ses tolérances de manière à satisfaire aux exigences du bureau d'études quant à la cote C. C'est ce que l'on appelle un *transfert de cotes.*

Pour résoudre ce problème, on établit la chaîne de cotes de C considérée comme condition *(fig.14)*. On trouve

$$C = -U_1 + U_2 - U_3$$

Il en découle d'abord la relation suivante entre les cotes nominales :

$$\bar{C} = -\bar{U}_1 + \bar{U}_2 - \bar{U}_3$$

ce qui implique

$$\bar{U}_2 = \bar{C} + \bar{U}_1 + \bar{U}_3$$

Les intervalles de tolérance vérifient

$$IT(C) = IT(U_1) + IT(U_2) + IT(U_3)$$

donc

$$IT(U_2) = IT(C) - IT(U_1) - IT(U_3) \tag{3.11}$$

Il va de soi que ce résultat n'est admissible que si $IT(U_2)$ est positif et suffisamment grand pour être réalisable. Or, cet intervalle de tolérance est *toujours* inférieur à celui de C. Il se peut donc que l'on arrive à un résultat inacceptable. Nous reviendrons sur ce point.

Supposons d'abord que l'intervalle de tolérance trouvé soit raisonnable. Alors, on peut écrire les relations aux écarts suivantes :

$$\begin{aligned} ES(C) &= -EI(U_1) + ES(U_2) - EI(U_3) \\ EI(C) &= -ES(U_1) + EI(U_2) - ES(U_3) \end{aligned}$$

dont on déduit

$$ES(U_2) = ES(C) + EI(U_1) + EI(U_3)$$
$$EI(U_2) = EI(C) + ES(U_1) + ES(U_3)$$

La cote U_2 est donc déterminée en grandeur et tolérances.

Revenons au cas où la relation (3.11) mène à une valeur aberrante, trop petite ou même négative, de $IT(U_2)$. On peut alors envisager trois solutions [32, 8] :

a) On peut essayer de resserrer les tolérances de U_1 et U_3, ce qui rend le transfert possible au prix d'un coût plus élevé.

b) On peut essayer de modifier le processus d'usinage pour obtenir la cote C comme *cote ditrecte*, ce qui nécessite en général un appareillage spécial ou un outil spécial.

c) En désespoir de cause, on peut examiner avec le bureau d'études la possibilité d'élargir la tolérance sur C. Il arrive en effet que le bureau d'études spécifie des tolérances exagérément fines « pour se couvrir ». Ce genre de problèmes illustre bien le fait qu'une bonne conception ne peut négliger les contraintes de fabrication et qu'un cloisonnement trop rigide entre le bureau d'études et le bureau des méthodes (hypertaylorisme) peut mener à une baisse de la qualité (tolérances non respectées) ou à une production peu économique (tolérances obtenues à tout prix).

3.4.3 Exemples

Exemple 1 [18]

On veut fraiser les faces F_1 et F_2 de la pièce représentée en figure 15, avec la mise en position indiquée. Les cotes de fabrication à déterminer sont U_1 et U_2.

a) Cote U_1 – La chaîne de cotes est représentée en figure 16. Elle donne

$$x = y - U_1$$

Pour les cotes nominales, on a donc

$$\bar{x} = \bar{y} - \bar{U_1}$$

soit

$$\bar{U_1} = \bar{y} - \bar{x} = 100 - 40 = 60$$

Examinons à présent les intervalles de tolérance. On a

$$IT(x) = IT(y) + IT(U_1)$$

soit

$$IT(U_1) = IT(x) - IT(y) = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

Cet intervalle est tout à fait admissible. On peut donc calculer les écarts. Comme

$$ES(x) = ES(y) - EI(U_1)$$
$$EI(x) = EI(y) - ES(U_1)$$

on déduit

$$\begin{aligned} EI(U_1) &= ES(y) - ES(x) = 0,1 - 0 = 0,1 \\ ES(U_1) &= EI(y) - EI(x) = -0,1 - (-0,3) = 0,2 \end{aligned}$$

Le résultat est donc

$$U_1 = 60^{+0,2}_{+0,1}$$

On vérifie, à titre de preuve, que l'intervalle de tolérance est bien égal à $0,1$.

b) Cote U_2 – la chaîne de cotes est représentée en figure 17. Elle donne

$$x = y - U_2$$

Pour les cotes nominales, cela donne

$$\bar{x} = \bar{y} - \bar{U_2}$$

soit

$$\bar{U_2} = \bar{y} - \bar{x} = 60 - 20 = 40$$

Venons-en aux intervalles de tolérances. On a

$$IT(x) = IT(y) + IT(U_2)$$

ce qui donne

$$IT(U_2) = IT(x) - IT(y) = 0,1 - 0,4 = -0,3$$

Le transfert est donc *impossible*. Pour le rendre possible, on pourra par exemple resserrer la tolérance sur y. Il faudra que $IT(y)$ soit inférieur à $0,1$. Posons $IT(y) = 0,05$ (pour autant que l'on juge cette valeur réalisable), tout en restant dans la fourchette donnée par le bureau d'études. On peut conserver le caractère symétrique de la zone de tolérance, ce qui donne

$$y = 60^{\pm 0,025}$$

On peut à présent calculer les écarts de U_2 à partir des relations

$$\begin{aligned} ES(x) &= ES(y) - EI(U_2) \\ EI(x) &= EI(y) - ES(U_2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} EI(U_2) &= ES(y) - ES(x) = 0,025 - 0,1 = -0,075 \\ ES(U_2) &= EI(y) - EI(x) = -0,025 - 0 = -0,025 \end{aligned}$$

soit, finalement,

$$U_2 = 40^{-0,025}_{-0,075}$$

Cette solution est, certes, correcte, mais elle a nécessité de resserrer fortement la tolérance sur la cote y qui, en tant que cote d'encombrement, n'a pas a priori de raison d'être précise. Il va de soi que les coûts de fabrication s'en ressentiront.

Exemple 2 [18]

On veut fraiser la face F_1 de la pièce de la figure 18 sur une fraiseuse verticale, avec la mise en position représentée. La cote de fabrication à déterminer est U.

La chaîne de cotes indique la relation

$$x = y - U$$

La cote nominale s'obtient à partir de

$$\bar{x} = \bar{y} - \bar{U}$$

ce qui donne

$$\bar{U} = \bar{y} - \bar{x} = 75 - 56 = 19$$

Examinons à présent les intervalles de tolérance. De la relation

$$IT(x) = IT(y) + IT(U)$$

on déduit

$$IT(U) = IT(x) - IT(y) = 0,05 - 0,5 = -0,45$$

Le transfert est donc impossible. Pour remédier à cette situation, on peut imaginer trois solutions :

(i) Resserrer la cote y – Il faudra que l'intervalle de tolérance de cette cote soit inférieur à celui de la cote x. On choisira par exemple $IT(y) = 0,025$, en posant $y = 75_0^{+0,025}$. Alors, les relations aux écarts

$$\begin{aligned} ES(x) &= ES(y) - EI(U) \\ EI(x) &= EI(y) - ES(U) \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned} EI(U) &= ES(y) - ES(x) = +0,025 - 0,05 = -0,025 \\ ES(U) &= EI(y) - EI(x) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

soit

$$U = 19^{0}_{-0,025}$$

On constate que le resserrement des tolérances est ici drastique.

(ii) Ramener la cote x à une cote d'outil en accouplant deux fraises sur le même arbre, leur distance étant convenablement réglée par des entretoises *(fig. 19)*.

(iii) Ramener la cote x à une cote d'appareillage en prenant F_2 comme référence auxiliaire et en utilisant une butée s'appuyant sur cette surface lors de l'usinage de F_1 (fig.20).

Il va sans dire que le choix définitif de la solution doit se faire en fonction d'impératifs économiques. Ainsi, la solution (ii) s'applique essentiellement dans le cas d'une fabrication en série, car elle implique la rectification de l'entretoise entre les deux fraises, coût qu'il faudra répartir sur le nombre de pièces à réaliser.

3.5 Transfert de tolérances d'orientation

Dans la mesure où les tolérances de forme leur sont bien inférieures, ce qui est de règle, les tolérances d'orientation peuvent se traiter comme des tolérances angulaires. Nous illustrerons cette procédure sur quelques exemples empruntés à la référence [18].

3.5.1 Réalisation directe

La figure 21 illustre le fraisage associé de deux faces F_1 et F_2 à l'aide d'une fraise à deux tailles. Dans ce cas, la perpendicularité des deux faces est tout simplement une cote d'outil $U_0 = \boxed{\perp |0,05}$.

3.5.2 Transfert d'une tolérance de parallélisme

Pour réaliser l'angle entre les faces F_1 et F_2 de la figure 22, on procède comme suit :

a) Dans une première étape *(fig. 23)*, on réalise la face F_1, d'une longueur de $80mm$. Cette face fait avec la référence un angle α_1 régi par une tolérance de parallélisme $\boxed{F_1| \parallel |U_1| \text{ réf}}$, ce qui signifie que

$$\alpha_1 = 0^{\pm\Delta\alpha_1}$$

avec

$$\Delta\alpha_1 = \frac{U_1}{80}$$

b) Dans une deuxième étape *(fig. 24)*, on réalise la face F_2, qui fait avec la même référence un angle α_2 régi par une tolérance de parallélisme $\boxed{F_2| \parallel |U_2| \text{ réf}}$, ce qui revient à dire

$$\alpha_2 = 0^{\pm\Delta\alpha_2}$$

avec

$$\Delta\alpha_2 = \frac{U_2}{30}$$

Comme le montre la figure 25, l'angle α_{12} entre les deux faces est donné par

$$\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$$

ce qui implique, vu l'indétermination des sens des deux angles du second membre,

$$\Delta\alpha_{12} = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2$$

avec ici,

$$\Delta\alpha_{12} = \frac{\boxed{F_2| \parallel |F_1}}{30} = \frac{0,06}{30} = 0,002$$

Comme la difficulté de réalisation des deux faces est comparable, il est naturel de poser

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta^*$$

ce qui mène à la condition

$$\Delta^* = \frac{1}{2}\Delta\alpha_{12} = \frac{1}{2}.0,002 = 0,001$$

Finalement,

$$U_1 = \Delta^*.80mm = 0,08mm$$

et

$$U_2 = \Delta^*.30mm = 0,03mm$$

3.5.3 Transfert d'une tolérance de perpendicularité

Continuant la fabrication de la pièce précédente, il faut à présent faire un trou, avec une condition de perpendicularité par rapport à F_2 *(fig. 26)*. Cette condition sera à nouveau transférée en une tolérance de perpendicularité U_3 avec la référence *(fig. 27)*. La condition imposée est $\boxed{axe_3| \perp |0,1|F_2}$, ce qui signifie que l'angle α_{23} doit vérifier

$$\alpha_{23} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm\Delta\alpha_{23}}$$

avec

$$\Delta\alpha_{23} = \frac{0,1}{20} = 0,005$$

puisque la longueur du trou est de $20mm$. La figure 28 montre que si α_3 est l'angle entre la face de référence et l'axe du trou, on a la relation

$$\alpha_{23} = \alpha_3 - \alpha_2$$

si bien que

$$\Delta\alpha_{23} = \Delta\alpha_3 + \Delta\alpha_2$$

En se rappelant que l'on avait ci-dessus $\Delta\alpha_2 = 0,001$, on obtient donc

$$\Delta\alpha_3 = \Delta\alpha_{23} - \Delta\alpha_2 = 0,005 - 0,001 = 0,004$$

et, par conséquent,

$$U_3 = 0,004.20mm = 0,08mm$$

Là encore, si le transfert avait été impossible (U_3 trop petit ou même négatif), il aurait fallu resserrer U_2 ou revoir les spécifications avec le bureau d'études.

3.6 Transfert de tolérances de localisation

La figure 29 représente un corps de palier [18]. Les quatre trous sont destinés à faire passer les vis de fixation d'un flasque portant un joint à lèvres. Ce flasque doit évidemment être centré sur l'alésage, ce qui justifie le mode de toléranciation qui est typiquement fonctionnel. Pour la fabrication, ces trous seront pointés à partir des deux références F_1 et F_2, dans un système d'axes cartésiens. Il faut donc effectuer un transfert de cotes, car la zone de tolérance sera ramenée à un *rectangle* choisi de manière à satisfaire aux conditions ci-dessus *(fig. 30)*.

Examinons le problème en détail à l'aide de la figure 31. Par rapport à sa position idéale, le centre du trou aura un déport (x_1, x_2) que l'on peut écrire sous la forme

$$x_1 = 0^{\pm IT(x_1)/2}, \; x_2 = 0^{\pm IT(x_2)/2}$$

Dans tous les cas de réalisation, il faudra que

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ce qui n'est possible que si

$$IT^2(x_1) + IT^2(x_2) = 1 \tag{3.12}$$

Les chaînes de cotes de x_1 et x_2 *(fig. 32 et 33)* donnent

$$x_1 = 15,910 - a_1 + U_1 \tag{3.13}$$
$$x_2 = 15,910 - a_2 + U_2 \tag{3.14}$$

On en déduit d'une part

$$IT(x_1) = IT(a_1) + IT(U_1) = IT(U_1) + 0,4$$

et, d'autre part,

$$IT(x_2) = IT(a_2) + IT(U_2) = IT(U_2) + 0,1$$

A ce stade, nous admettrons, ce qui est plausible, que la machine est aussi précise dans la direction 1 que dans la direction 2, ce qui mène à poser

$$IT(U_1) = IT(U_2) = i$$

Cela donne

$$IT(x_1) = i + 0,4; \; IT(x_2) = i + 0,1$$

L'introduction de ces valeurs dans la condition (3.12) conduit à l'équation

$$1 = (i + 0,4)^2 + (i + 0,1)^2 = 2i^2 + 2i(0,4 + 0,1) + (0,4)^2 + (0,1)^2$$

soit

$$2i^2 + i - 0,83 = 0$$

La seule solution positive de cette équation du second degré est

$$i = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4.2.0,83}}{4} = 0,441$$

On en déduit

$$IT(x_1) = i + 0,4 = 0,841; \; IT(x_2) = i + 0,1 = 0,541$$

ce qui donne, en arrondissant par défaut pour être sûr de respecter les tolérances,

$$x_1 = 0^{\pm 0,420}; \; x_2 = 0^{\pm 0,270} \tag{3.15}$$

Nous sommes à présent en mesure de déterminer U_1 et U_2. Pour U_1, on déduit d'abord de la chaîne de cotes (3.13) la condition suivante sur sa valeur nominale :

$$0 = \bar{x_1} = 15,910 - \bar{a_1} + \bar{U_1}$$

ce qui donne

$$\bar{U_1} = \bar{a_1} - 15,910 = 35 - 15,910 = 19,090$$

On a ensuite les équations aux écarts

$$ES(x_1) = -EI(a_1) + ES(U_1)$$

soit

$$ES(U_1) = EI(a_1) + ES(x_1) = -0,2 + 0,420 = 0,220$$

et

$$EI(x_1) = -ES(a_1) + EI(U_1)$$

soit

$$EI(U_1) = ES(a_1) + EI(x_1) = +0,2 - 0,420 = -0,220$$

Ainsi,

$$U_1 = 19,090^{\pm 0,220}$$

On procède de la même façon pour U_2 à partir de la chaîne de cotes (3.14), ce qui donne d'abord pour la valeur nominale

$$0 = \bar{x_2} = 15,910 - \bar{a_2} + \bar{U_2}$$

c'est-à-dire

$$\bar{U_2} = \bar{a_2} - 15,910 = 27 - 15,910 = 11,090$$

Pour les écarts, on a d'une part

$$ES(x_2) = -EI(a_2) + ES(U_2)$$

ce qui donne

$$ES(U_2) = EI(a_2) + ES(x_2) = -0,05 + 0,270 = 0,220$$

et d'autre part,

$$EI(x_2) = -ES(a_2) + EI(U_2)$$

d'où

$$EI(U_2) = ES(a_2) + EI(x_2) = 0,05 - 0,270 = -0,220$$

Le résultat est donc

$$U_2 = 11,090^{\pm 0,220}$$

3.7 Transfert de tolérances de symétrie

3.7.1 Première possibilité

La pièce représentée en figure 34 [18] peut être réalisée de plusieurs façons. Examinons d'abord le processus décrit en figure 35. Il nécessite d'une part le transfert de la cote $70_0^{+0,3}$ sur U_2 et U_3 et d'autre part le transfert de la tolérance de symétrie. Pour la cote, on a la chaîne suivante *(fig. 36)* :

$$y = 70_0^{+0,3} = U_2 - U_3 \tag{3.16}$$

Quant à la chaîne relative à la condition de symétrie, elle s'écrit *(fig. 37)*

$$x = -\frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}(U_2 + U_3) \tag{3.17}$$

Commençons par déterminer les cotes nominales. On déduit de (3.16)

$$\frac{1}{2}\bar{U_2} - \frac{1}{2}\bar{U_3} = 35$$

et de (3.17)

$$\frac{1}{2}\bar{U_2} + \frac{1}{2}\bar{U_3} = \bar{x} + \frac{1}{2}\bar{U_1} = 0 + 60 = 60$$

La somme de ces deux relations donne

$$\bar{U_2} = 60 + 35 = 95$$

et leur différence,

$$\bar{U_3} = 60 - 35 = 25$$

En ce qui concerne les tolérances, on notera d'abord que la chaîne (3.16) implique

$$IT(y) = 0,3 = IT(U_2) + IT(U_3)$$

tandis que la chaîne (3.17) conduit à

$$IT(x) = 0,6 = \frac{1}{2}IT(U_1) + \frac{1}{2}[IT(U_2) + IT(U_3)]$$

soit

$$IT(U_2) + IT(U_3) = 2IT(x) - IT(U_1) = 1,2 - 0,2 = 1$$

C'est donc le transfert de la cote qui est le plus exigeant, et c'est par lui que nous commencerons. De (3.16), on déduit

$$\begin{aligned} ES(y) &= 0,3 = ES(U_2) - EI(U_3) \\ EI(y) &= EI(U_2) - ES(U_3) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Il est rationnel de donner à des éléments symétriques des zones de tolérance également symétriques. C'est pourquoi nous imposerons

$$\begin{aligned} ES(U_2) &= -EI(U_3) = es \\ EI(U_2) &= -ES(U_3) = ei \end{aligned}$$

ce qui ramène les deux conditions (3.18) à

$$2es = 0,3; \; 2ei = 0$$

soit

$$es = 0,15; \; ei = 0$$

Finalement, le transfert de cotes est correctement réalisé en posant

$$U_2 = 95_0^{+0,15}; \; U_3 = 25_{-0,15}^{0}$$

Vérifions à présent que la condition de symétrie est bien vérifiée. De la chaîne (3.17), on déduit

$$\begin{aligned} ES(x) &= -\frac{1}{2}EI(U_1) + \frac{1}{2}ES(U_2) + \frac{1}{2}ES(U_3) = 0,05 + 0,075 + 0 = 0,125 \\ EI(x) &= -\frac{1}{2}ES(U_1) + \frac{1}{2}EI(U_2) + \frac{1}{2}EI(U_3) = -0,05 + 0 - 0,075 = -0,125 \end{aligned}$$

ce qui, visiblement, est plus que suffisant.

3.7.2 Deuxième possibilité

La méthode précédente a exigé des tolérances relativement fines sur U_2 et U_3 du fait du transfert de cotes. Il en résulte que la condition de symétrie a été obtenue avec une précision superflue. Or, on peut éviter le transfert de cotes en réalisant la cote $70_0^{+0,3}$ comme *cote d'outil*. On y arrive en associant deux fraises comme l'indique la figure 38. La cote $70_0^{+0,3}$, cote de fabrication dans le plan de travail de la figure 39, se règle alors à l'aide d'entretoises calibrées entre les deux fraises. Il en résulte la nouvelle chaîne de cotes de la figure 40, qui donne

$$x = -\frac{1}{2}U_1 + U_3 + \frac{1}{2}U_2$$

où seule, U_3 est à déterminer. Sa valeur nominale se déduit par

$$\bar{x} = 0 = -\frac{1}{2}\bar{U}_1 + \bar{U}_3 + \frac{1}{2}\bar{U}_2$$

ce qui donne

$$\bar{U}_3 = \bar{x} + \frac{1}{2}\bar{U}_1 - \frac{1}{2}\bar{U}_2 = 0 + 60 - 35 = 25$$

Son intervalle de tolérance résulte de la condition

$$IT(x) = 0,6 = \frac{1}{2}IT(U_1) + IT(U_3) + \frac{1}{2}IT(U_2)$$

ce qui donne

$$IT(U_3) = IT(x) - \frac{1}{2}IT(U_1) - \frac{1}{2}IT(U_2) = 0,6 - 0,1 - 0,15 = 0,35$$

c'est-à-dire que l'on peut se contenter d'une tolérance bien moins fine sur U_3. Quant aux écarts, ils sont régis par les conditions

$$\begin{aligned} ES(x) &= -\frac{1}{2}EI(U_1) + ES(U_3) + \frac{1}{2}ES(U_2) \\ EI(x) &= -\frac{1}{2}ES(U_1) + EI(U_3) + \frac{1}{2}EI(U_2) \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} ES(U_3) &= ES(x) + \frac{1}{2}EI(U_1) - \frac{1}{2}ES(U_2) = 0,3 - 0,05 - 0,15 = 0,1 \\ EI(U_3) &= EI(x) + \frac{1}{2}ES(U_1) - \frac{1}{2}EI(U_2) = -0,3 + 0,05 - 0 = -0,25 \end{aligned}$$

Finalement,

$$U_3 = 25^{+0,1}_{-0,25}$$

3.8 Cumul de chaînes de cotes

3.8.1 Chaînes cumulées

Le plus souvent, les différentes conditions de réalisation sont interdépendantes, et il faut combiner plusieurs chaînes de cotes pour obtenir toutes les cotes de fabrication [18]. Partant du brut, on analysera chacune des opérations, jusqu'à obtenir les cotes finales qui sont celles du plan. On effectuera alors une remontée, qui permettra d'obtenir toutes les cotes de fabrication en grandeur et tolérance, ainsi que le *brut minimal*, c'est-à-dire les cotes du brut tout juste capable de contenir la pièce. Pour chaque opération, il faudra faire intervenir deux notions, celle de *copeau minimal* et celle d'*intervalle de tolérance*.

3.8.2 Copeau minimal

Les chaînes de cotes que nous avons rencontrées jusqu'ici ne concernaient que des cotes de finition. Mais lorsqu'on s'intéresse à la succession des différentes passes, allant du dégrossissage à la finition, il faut s'assurer que chacune d'entre elles respecte la condition de *copeau minimal* (Cp_m) [6]. Il s'agit de l'épaisseur minimale de matière à enlever pour assurer

– *La qualité de la surface usinée.* En particulier, si l'on part d'une surface brute, il faut être sûr de mettre à nu, sur toute la surface engendrée, le métal sain. Il ne peut rester aucun reste de la croûte que l'on rencontre sur la plupart des bruts. Il faut d'ailleurs que la pointe de l'outil ne travaille pas dans la croûte, sous peine de la voir se détériorer rapidement, car la croûte est généralement abrasive.
– *La coupe dans de bonnes conditions* lorsque l'on retravaille une surface déjà usinée. Une passe trop petite peut en effet mener au *refus de coupe*, phénomène dans lequel l'outil ne fait que frotter sur la pièce en l'écrouissant.

Pour déterminer la valeur du copeau minimal, on pourra s'inspirer du tableau suivant :

VALEURS INDICATIVES DU COPEAU MINIMAL [18]	
Sur une surface brute	
type de pièce	Cp_m/mm
Pièce en acier moulé $L \pm 250mm$	4...6
Pièce en acier moulé $250mm < L \pm 1000mm$	6...10
Pièce en fonte moulée $L \pm 250mm$	2,5...5
Pièce en fonte moulée $250mm < L \pm 1000mm$	4...8
Pièce en alliage d'Al moulée en sable (selon dimensions et difficulté)	2...6
Pièce en alliage d'Al moulée en coquille par gravité	1...3
Pièce en alliage d'Al moulée en coquille sous pression	0,5...1,5
Pièce soudée ou découpée	1...2
Sur une surface usinée	
type d'opération	Cp_m/mm
Seconde ébauche (ou semi-finition) à l'outil coupant	0,3...0,5
Finition à l'outil coupant	0,1...0,2
Rectification	0,05...0,1

3.8.3 Tolérances des cotes de fabrication

Les principes suivants s'appliquent :

Principe 3 *Les cotes ayant pour référence une surface brute doivent être affectées de tolérances suffisamment larges, pour tenir compte de l'incertitude de positionnement.*

Principe 4 *Les cotes ayant pour référence une surface usinée peuvent être affectées de tolérances plus fines.*

Principe 5 *Les tolérances des cotes de finition doivent (évidemment) respecter les prescriptions du dessin.*

Voici quelques indications à ce sujet :

IT SUR LES COTES DE FABRICATION

a) Cotes dont la référence est une surface brute : Tolérance de $\pm 0,1$ à ± 1 selon la qualité et la correction géométrique de la surface brute.

b) Cotes entre surfaces usinées [18]

Procédé d'usinage	*IT/mm*		
	Ebauche	*Semi-finition*	*Finition*
Fraisage	0,3...0,5	0,1...0,2	Doit respecter l'IT fixé par le plan
Tournage	0,3...0,5	0,1...0,2	
Perçage	0,2...0,5	0,15...0,2	
Alésage au grain	0,2...0,4	0,1...0,2	
Alésage à l'alésoir	0,15...0,2	0,05...0,15	
Rectification	0,1...0,3	0,05...0,1	
Brochage	0,05...0,15	0,02...0,4	

3.8.4 Un exemple simple

Soit à réaliser la cote $30^{0}_{-0,1}$ *entre les deux faces d'une pièce, en effectuant d'abord l'ébauche puis la finition de chacune d'elles. Les hypothèses du bureau des méthodes sont :*

$$Cp_m = \begin{cases} 2,5 & \text{en ébauche} \\ 0,5 & \text{en finition} \end{cases}$$

et

$$IT = \begin{cases} 0,8 & \text{si la référence est brute} \\ 0,5 & \text{si la référence est usinée} \end{cases}$$

On établit successivement et dans l'ordre les chaînes de cotes relatives aux diverses opérations (*fig. 41*).

Ébauche de la face 2

$$\begin{aligned} Cp &= B - U_1 \quad \text{donc} \quad Cp_m = B_m - U_{1M} = 2,5 \\ IT(U_1) &= 0,8 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ébauche de la face 1 L'opération précédente a permis d'obtenir une première surface usinée. On retourne alors la pièce, pour se servir de cette surface usinée comme référence.

$$\begin{aligned} Cp &= U_1 - U_2 \quad \text{donc} \quad Cp_m = U_{1m} - U_{2M} = 2,5 \\ IT(U_2) &= 0,2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Finition de la face 2 Ici, il est prévu de retourner à nouveau la pièce pour finir la face 2. C'est discutable, car on aurait pu garder le même montage pour finir la face 1, puis retourner pour finir la face 2, ce qui épargne un retournement. Nous invitons l'étudiant à établir les chaînes de cotes dans ce cas. Cela étant,

$$\begin{aligned} Cp &= U_2 - U_3 \quad \text{donc} \quad Cp_m = U_{2m} - U_{3M} = 0,5 \\ IT(U_3) &= 0,2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Finition de la face 1 On retourne donc à nouveau la pièce.

$$\begin{aligned} Cp &= U_3 - U_4 \quad \text{donc} \quad Cp_m = U_{3m} - U_{4M} = 0,5 \\ \text{Condition du plan : } U_4 &= 30^{0}_{-0,1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Remontée

$$
\begin{array}{ll}
(3.22): & U_{3m} = U_{4M} + 0,5 = 30 + 0,5 = 30,5 \\
(3.21): & IT(U_3) = 0,2 \\
 & U_3 = 30,5_0^{+0,2} \\
 & \\
(3.21): & U_{2m} = U_{3M} + 0,5 = 30,7 + 0,5 = 31,2 \\
(3.20): & IT(U_2) = 0,2 \\
 & U_2 = 31,2_0^{+0,2} \\
 & \\
(3.20): & U_{1m} = U_{2M} + 2,5 = 31,4 + 2,5 = 33,9 \\
(3.19): & IT(U_1) = 0,8 \\
 & U_1 = 33,9_0^{+0,8} \\
 & \\
(3.19): & B_m = U_{1M} + 2,5 = 34,7 + 2,5 = 37,2 \\
 & B = 37,2min
\end{array}
$$

3.9 Quelques notions sur les gammes d'usinage

3.9.1 Définitions

La description complète de toutes les opérations d'usinage nécessaires pour passer de l'état brut à l'état fini d'une pièce s'appelle sa *gamme d'usinage*. Elle inclut les conditions d'appui de la pièce, la définition de la référence des cotes et les conditions de coupe. Une gamme se décompose en les éléments suivants :

phase C'est l'ensemble du travail réalisé sur une seul poste de travail. Une phase peut comporter plusieurs sous-phases.

sous-phase A l'intérieur d'une phase, une sous-phase est l'ensemble du travail exécuté *sans démontage de la pièce*. Une sous-phase comporte souvent plusieurs opérations, qui sont alors dites *associées*.

opération Tout travail réalisé sans démontage de la pièce, sans changement d'outil, et sans modification des mouvements de l'outil.

3.9.2 Liaisons au brut

Il arrive que le plan spécifie des tolérances par rapport à des surfaces brutes. La figure 42 montre un exemple de ce type. Pour usiner la semelle de ce palier, on peut imaginer d'appuyer la pièce sur la surface 1 ou sur la surface 2. En prenant appui sur la surface 1, la cote a sera réalisée de manière *directe* et les tolérances sur cette cote pourront être respectées pour autant qu'elles soient compatibles avec la précision générale du brut. Si, au contraire, on prend appui sur la surface 2, la cote a sera transférée comme suit :

$$a = -B + U$$

où U est la cote de fabrication, et B une cote de brut, peu précise. On aura donc

$$IT(a) = IT(B) + IT(U)$$

ce qui mènera à

$$IT(U) = IT(a) - IT(B)$$

Comme l'intervalle de tolérance sur B est grand par nature, on aura de fortes chances de ne pas pouvoir obtenir la précision requise sur a. Cet exemple justifie clairement le principe général suivant [32] :

Principe 6 *Le choix des surfaces d'appui doit permettre la réalisation directe des liaisons au brut.*

3.9.3 Surfaces accessibles à l'outil

Il faut bien réaliser que le système d'appui et de serrage de la pièce dans une sous-phase donnée rend une partie de la pièce inaccessible à l'outil. Ainsi, lorsque la pièce de la figure 42 est posée sur sa surface 1, cette dernière et les surfaces situées sous elle sont inaccessibles. Pour pouvoir éventuellement les usiner, il faudra retourner la pièce. On a donc le

Principe 7 *Pour chaque définition d'appui, il faut repérer les surfaces accessibles et les surfaces inaccessibles à l'outil.*

3.9.4 Dégrossissage et finition

Les passes de dégrossissage enlèvent de fortes épaisseurs et sont donc susceptibles de déformer la pièce pendant le travail. Il serait malheureux de détruire la qualité d'une surface finie par une passe de dégrossissage subséquente. C'est pourquoi on énonce encore le

Principe 8 *Il convient, dans la mesure du possible, d'effectuer d'abord le dégrossissage des différentes surfaces avant de procéder à la finition.*

3.10 Simulation d'usinage

3.10.1 Généralités

La *simulation d'usinage* est l'étude consistant à tracer les chaînes de cotes cumulées de toutes les opérations d'usinage d'une pièce. Elle permet

- de déterminer *toutes* les cotes de fabrication, notamment les cotes d'ébauche ;
- de déterminer les exigences dimensionnelles et géométriques sur le brut [18, 8] ;
- de vérifier la validité de la gamme d'usinage adoptée.

Nous présenterons cette méthode à l'aide d'un exemple. Mais il est peut-être utile de préciser que dans le cas de fabrications différentes mais analogues, la simulation d'usinage peut être informatisée. C'est une application de la F.A.O. (fabrication assistée par ordinateur).

3.10.2 Problème

Nous examinerons l'usinage du flasque en fonte $Ft20$ représenté en figure 43 [17, 18]. Il s'agit d'usiner les surfaces planes $F1$, $F2$, $F3$ et $F4$ ainsi que les cylindres ou alésages $D1$, $D2$, $D3$ et $D4$. les surfaces $B1$, $B2$ et $B3$ seront laissées à l'état brut. On tiendra compte des tolérances géométriques indiquées dans le tableau associé à la figure.

3.10.3 Description de la gamme d'usinage

Les tolérances de position incluent une liaison au brut $B1$. En vertu du principe (6), il faudra donc usiner $D1$ en prenant $B1$ comme référence. On usinera alors $D2$ dans le même montage, pour réaliser la concentricité demandée avec $D1$. On usinera également l'alésage $D4$ dans le même montage.

Pour réaliser $D3$, il faudra retourner la pièce, qui devra prendre appui sur $D1$ et $F2$ pour réaliser la tolérance de concentricité.

On adoptera donc la gamme suivante :

Phase 10 - Tournage

Appui plan (3points) sur $B3$.
Centrage court sur $B1$.

10.1 Dressage d'ébauche de $F2$. *La surface $F2$ dégrossie servira de référence auxiliaire dans la suite.*

10.2 Dressage d'ébauche de $F1$.

10.3 Chariotage de $D2$. La tolérance étant large, on ne fera qu'une passe. Cote à respecter : $\emptyset 120_{0}^{+0,4}$.

10.4 Chariotage d'ébauche de $D1$.

10.5 Alésage d'ébauche de $D4$.

10.6 Dressage de finition de $F2$. *La surface $F2$ finie servira de nouvelle référence auxiliaire dans la suite.*

10.7 Dressage de finition de $F1$. Cote à respecter : $4^{\pm 0,1}$

10.8 Chariotage de finition de $D1$. Cote à respecter : $\emptyset 64_{-0,03}^{0}$.

10.9 Alésage de finition de $D4$. Cote à respecter : $\emptyset 40_{0}^{+0,05}$.

Phase 20-Tournage

Appui plan (3 points) sur$F2$.
Centrage court sur $D1$.

20.1 Dressage d'ébauche de $F3$.

20.2 Dressage d'ébauche de $F4$.

20.3 Dressage de finition de $F3$. Cote à respecter : $10_{0}^{+0,1}$.

20.4 Dressage de finition de $F4$. Cote à respecter : $50^{+}0,2_{0}$.

20.5 Chariotage de finition de $D3$. Cote à respecter : $\emptyset 80_{-0,5}^{0}$.

3.10.4 Cotes axiales

les chaînes de cotes et les équations correspondantes sont indiquées en figure 45. On peut en déduire les valeurs suivantes :

$$
\begin{array}{rcl}
U_8 & = & 50_0^{+0,2} \\
U_7 & = & 10_0^{+0,1} \\
U_6 & = & 50,7_0^{+0,2} \\
U_5 & = & 10,6_0^{+0,2} \\
U_4 & = & 4^{\pm 0,1} \\
U_3 & = & 0,5_0^{+0,2} \\
U_2 & = & 4,1_0^{+0,2} \\
(c) \Rightarrow U_{1m} & = & 2 + U_{3M} + U_{5M} = 2 + 0,7 + 10,8 = 13,5 \\
U_1 & = & 13,5_0^{+0,8} \\
(d) \Rightarrow B_{3M} & = & 2 - U_{1m} + U_{3M} + U_{6M} = 2 - 13,5 + 0,7 + 50,9 = 40,1 \\
B_3 & = & 40,1min \\
(b) \Rightarrow B_{2m} & = & 2 + U_{1M} + U_{2M} = 2 + 14,3 + 4,3 = 20,6 \\
B_2 & = & 20,6min \\
(a) \Rightarrow B_{1m} & = & 2 + U1M = 2 + 14,9 = 16,3 \\
B_1 & = & 16,3min
\end{array}
$$

3.10.5 Cotes radiales

L'analyse des cotes radiales appelle quelques commentaires relatifs aux tolérances de position. Le premier point à comprendre est que *toutes les surfaces de révolution engendrées dans un même montage ont* le même *axe*, à savoir, l'axe du tour lors de ce montage. Mais cet axe peut ne pas coïncider avec un axe prédéfini sur la pièce (fig. 46). L'effet d'un excentrement e est que l'outil, placé à un rayon R de l'axe du tour, prendra d'un côté de la pièce de rayon R_p un copeau $Cp_1 = R_p - R - e$ et de l'autre, un copeau $Cp_2 = R_p - R + e$. Pour obtenir un copeau minimal prédéfini Cp_m, il faudra donc que

$$R_p - R - e \geq Cp_m$$

Par ailleurs, les surfaces devant avoir une bonne concentricité ou une orientation relative précise seront avantageusement usinées sans démontage intermédiaire, ou comme on dit encore, *associées*. C'est en vertu de ce principe d'association que nous avons été conduits à aléser $D4$ dans le même montage que $D1$, $D2$ et $F2$: les tolérances de position correspondantes sont en effet serrées.

La condition de centrage de $B1$ su $D1$ résulte de la précision du montage, que l'on peut vérifier en mesurant le battement de la pièce montée à l'aide d'un comparateur (*fig. 48*). C'est la première chaîne de cotes. Dans la suite, toutes les cotes de brut sont prises à partir de l'axe du brut, tandis que les cotes d'usinage sont prises à partir de l'axe du tour.

Il faut encore noter que les chaînes de cotes se calculent *en rayons*, moitiés des diamètres correspondants.

L'ensemble des chaînes de cotes et les calculs correspondants sont consignés dans les figures 49 et 50.

3.10.6 Brut minimal

Le brut minimal est représenté en figure 51. Les zones de tolérances pour le moulage sont à dessiner *juste à l'extérieur* de ce brut minimal, en fonctions des indications du chapitre 3.

Chapitre 4

Contraintes résiduelles

4.1 Introduction

Un certain nombre de pièces brutes sont le siège de contraintes résiduelles, c'est-à-dire d'un champ de contraintes internes auto-équilibrées tant en volume qu'en surface. Lors de l'usinage d'une telle pièce, on rompt l'équilibre des contraintes internes, si bien que la pièce subit des déformations indésirables, pouvant parfois la rendre impropre au service. C'est donc un problème qu'il convient d'étudier.

4.2 Origine des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles prennent naissance lors du processus de fabrication du brut. Voici quelques exemples importants.

4.2.1 Pièces moulées

Le refroidissement d'un point d'une pièce après la coulée est d'autant plus lent que ce point est plus distant de la surface extérieure du moule. Il en résulte que les points les plus extérieurs de la pièce se solidifient plus tôt que les points de son cœur. Cela signifie que lorsque l'extérieur se solidifie, c'est sur base d'un cœur encore plus dilaté que lui. Lorsque le cœur se solidifie, il est donc prisonnier d'une boîte trop grande pour lui, si bien qu'il sera le siège de contraintes de traction, équilibrées par des contraintes de compression dans l'extérieur. Ceci est une règle générale :

Règle 4 *Les parties de la pièce qui se refroidissent le plus tard sont tendues et au contraire, les parties qui se refroidissent les premières sont comprimées.*

C'est ainsi que dans le cas d'une poulie à bras en fonte (*fig. 1a*), le moyeu est le dernier à se refroidir. Il en résulte des contraintes de traction dans le moyeu, qui s'équilibrent avec des contraintes de compression dans la jante à travers les bras. Les bras sont donc tendus et, comme la fonte est fragile, on risque de les voir se briser lors du refroidissement. Un artifice classique pour éviter ce problème consiste à mouler des bras courbes, capables de se déformer sensiblement au prix d'une flexion mineure (*fig. 1b*)

4.2.2 Profilés laminés à chaud

Le même type de phénomène se produit dans les profilés laminés à chaud. Ainsi, dans un profilé en I, c'est la jonction de l'âme aux semelles qui, se refroidissant le dernier, est tendu. Des mesures [37] ont permis d'établir un diagramme de contraintes résiduelles longitudinales ayant l'allure représentée en figure 2 . Il est à noter que les poutres en I obtenues par soudage sont le siège de contraintes σ_z du même type, mais plus prononcées encore [37]. Il va de soi que ces contraintes s'annulent à l'extrémité du profil, pour des raisons d'équilibre.

4.2.3 Plaques laminées

Les plaques laminées sont le siège de contraintes résiduelles dont la distribution a l'aspect représenté en figure 3. Les contraintes de peau sont équilibrées par des contraintes de signe inverse au voisinage du feuillet moyen, de telle sorte que l'on ait sur chaque section un effort normal N et un moment de flexion M nuls.

4.2.4 Pièces obtenues par déformation plastique

Supposons par exemple que partant d'un barreau à section rectangulaire légèrement courbe, on le redresse plastiquement. Lors de cette opération, on donne à la pièce des contraintes plastiques qui, dans le cas d'une plasticité parfaite, aura approximativement la forme bicarrée notée a en figure 4. Le moment plastique de redressement vaut

$$M_p = Re\frac{bh^2}{4}$$

où b est la largeur de la pièce, et h son épaisseur. Lorsque la pièce est relâchée, on assiste à un retour élastique de même moment, ce qui correspond au diagramme b. La contrainte maximale σ_M correspondante est donnée par

$$M_p = \sigma_M\frac{bh^2}{6}$$

ce qui donne

$$\sigma_M = \frac{3}{2}Re$$

Ces contraintes se soustraient aux contraintes de formage, ce qui conduit au diagramme de contraintes résiduelles noté c. Elles valent $\pm Re/2$ sur les peaux et sautent, sur le feuillet moyen, de $+Re$ à $-Re$.

4.3 Effet de l'usinage

L'usinage d'une pièce qui est le siège de contraintes résiduelles a pour effet de rompre l'équilibre de celles-ci. Il en résulte le plus souvent des déformations de la pièce. Considérons pour fixer les idées un barreau à section rectangulaire où règnent, au voisinage de la peau supérieure, des contraintes résiduelles de traction. Si l'on considère une certaine zone A ainsi tendue (*fig. 5a*), le schéma rendu libre de cette zone et du reste de la pièce B s'établit comme en figure 5b. La suppression par usinage de la zone A équivaut donc à ajouter sur le reste B de la pièce des forces ayant la direction indiquée en figure 5c. Dès que la pièce est débridée, elle se fléchit sous l'effet de ces forces, et prend donc une forme concave vers le bas. Ceci est général et peut se résumer ainsi :

Règle 5 *Lorsque l'on coupe une zone tendue d'un côté de la pièce, le reste de la pièce s'allonge de ce côté. Si la zone coupée est le siège de contraintes de compression, la pièce se raccourcit de ce côté.*

4.3.1 Cas d'une plaque laminée

Soit une pièce laminée dans laquelle règnent des contraintes résiduelles suivant le schéma de la figure 3. Si l'on enlève une mince couche sur la face supérieure de la pièce, elle se courbera avec une concavité vers le bas. Si, dans une seconde opération, on enlève une mince couche sur la face inférieure, elle se courbera dans l'autre sens et on peut espérer une certaine compensation de ces deux courbures. Nous y reviendrons.

4.3.2 Cas d'une pièce redressée plastiquement

Dans ce cas, admettons que le diagramme des contraintes résiduelles corresponde à la figure 4. En enlevant une mince couche sur la face supérieure, on provoquera une courbure à concavité vers le haut. L'enlèvement subséquent d'une mince couche sur la face inférieure mènera à une courbure *dans le même sens*, ce qui ne fait qu'empirer les choses.

4.4 Élimination des contraintes résiduelles

On le voit, les contraintes résiduelles peuvent mener à de graves mécomptes. Ne peut-on les éliminer ?

4.4.1 Vieillissement

Lorsque des contraintes résiduelles existent dans une pièce, elles se libèrent petit à petit au cours du temps. C'est le *vieillissement*. Dans le cas de pièces très précises, ce vieillissement, s'il a lieu après usinage des pièces, est néfaste, car il engendre des déformations indésirables de la pièce. Il est donc préférable de provoquer le vieillissement *avant* l'usinage.

Un tel vieillissement s'obtient en exposant les pièces pendant un temps prolongé (plusieurs mois) aux intempéries. Les successions d'ensoleillements et refroidissements provoquent des dilatations et contractions qui atténuent progressivement les contraintes résiduelles. L'inconvénient évident de ce procédé est son coût, car il implique un en-cours des pièces très long.

4.4.2 Traitement thermique

Il existe des traitements thermiques permettant de relaxer les contraintes résiduelles. La limitation est ici la taille de la pièce, car il faut posséder un four suffisamment grand pour contenir la pièce.

4.4.3 Gamme d'usinage bien choisie

Il est possible, en procédant à un certain nombre de passes de dégrossissage bien choisies, de faire diminuer progressivement l'influence des contraintes résiduelles. C'est ce que nous allons illustrer ci-dessous dans le cadre d'un modèle simple.

4.5 Un modèle simple

Nous considérerons le cas d'un barreau à section rectangulaire de hauteur h, provenant de laminage. Nous ferons usage d'un axe y prenant son origine sur la face inférieure de la pièce (*fig. 6*). Les champs de contrainte de la forme $\sigma = Ay + B$ étant les seuls compatibles, tout champ de contraintes résiduelles doit leur être orthogonal, c'est-à-dire vérifier les conditions

$$\int_0^h \sigma dy = 0 \tag{4.1}$$

$$\int_0^h \sigma y dy = 0 \tag{4.2}$$

Le plus simple des champs pouvant avoir cette propriété est de la forme

$$\sigma = Ay^2 + By + C$$

En écrivant les deux conditions (4.1) et (4.2), on obtient, tous calculs faits,

$$\sigma = A(y^2 - hy + \frac{h^2}{6}) \tag{4.3}$$

qui, comme on peut le vérifier, correspond bien au cas de la figure 3. Le maximum de la contrainte sur les peaux vaut

$$\sigma_M = A\left(\frac{h^2}{6}\right) \tag{4.4}$$

Supposons à présent que l'on coupe la pièce, lui laissant une hauteur $k < h$. Tant que la pièce est bridée, on conserve l'expression (4.3) du champ de contrainte. Mais après débridage, ce champ s'orthogonalise aux fonctions $\sigma = 1$ et $\sigma = y$ *sur l'intervalle* $]0, k[$ et devient donc

$$\sigma^* = A(y^2 - ky + \frac{k^2}{6}) \tag{4.5}$$

La différence entre ces deux champs est donnée par

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma &= \sigma^* - \sigma \\
&= A(h-k)y - A\left(\frac{h^2-k^2}{6}\right) \\
&= A(h-k)(y - \frac{k}{2}) + A(h-k)\frac{k}{2} - A\left(\frac{h^2-k^2}{6}\right) \\
&= A(h-k)(y - \frac{k}{2}) + \frac{A}{3}(h-k)(k - \frac{h}{2})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour $A > 0$, il y correspond, si E est le module de Young, une flexion de courbure

$$\chi = \frac{A}{E}(h-k) \tag{4.7}$$

et de concavité tournée vers le bas. Le second terme de (4.6) correspond à un allongement

$$\varepsilon = \frac{A}{3E}(h-k)(h-\frac{k}{2}) \tag{4.8}$$

positif si $k > h/2$ et négatif dans le cas contraire. La contrainte maximale vaut à présent

$$\sigma_M^* = A\left(\frac{k^2}{6}\right) = \sigma_M\left(\frac{k}{h}\right)^2 \tag{4.9}$$

ce qui signifie que la contrainte maximale a diminué.

Imaginons à présent que l'on retourne la pièce et que l'on fasse sur son autre face une nouvelle passe d'usinage qui ramène son épaisseur à $\ell < k$. Comme la constante A n'a pas changé, on obtiendra après débridage une courbure

$$\chi_2 = A(\ell - k) \tag{4.10}$$

en sens inverse de la première et, si $h - k = k - \ell = a$, égale en grandeur. La pièce sera alors redevenue droite. Le champ de contraintes résiduelles aura à présent pour maximum sur la peau

$$\sigma_M^{**} = \sigma_M^*\left(\frac{\ell}{k}\right)^2 = \sigma_M\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 \tag{4.11}$$

De ce modèle, on peut tirer les conclusions suivantes :

1. La courbure est proportionnelle à l'engagement a.
2. Des passes successives de part et d'autre de la pièce permettent une compensation des courbures successives.
3. La contrainte résiduelle au voisinage de la peau décroît progressivement.

4.6 Applications pratiques

4.6.1 Rainures

Lorsque l'on creuse une rainure dans une plaque laminée, les contraintes résiduelles provoquent une déformation dans laquelle la rainure s'ouvre. Ce phénomène est d'autant plus marqué que la rainure est plus profonde. Il faut donc, dans la gamme d'usinage, prévoir de creuser la rainure suffisamment tôt pour pouvoir corriger la forme par après. C'est ce que nous allons voir dans l'exemple ci-dessous.

4.6.2 Un cas réel

Lors de recherches sur les déformations liées aux effort de coupe des outils, il fallait [36] fabriquer une pièce d'essai en duralumin ($AlCu_4Mg_1$) conforme au plan de la figure 7. Cette pièce comporte un plan central qui sert à l'essai, deux ailes amincies de part et d'autre de ce plan central, une rainure en-dessous de celui-ci et quatre trous de fixation sur les ailes. Dans un premier temps, la gamme suivante avait été adoptée :

1. Amincissement des deux ailes
2. Pointage des deux trous de fixation
3. Retournement de la pièce et rainurage
4. Perçage des quatre trous de fixation

L'expérience ayant montré qu'à la suite de l'opération de rainurage, la surface inférieure de la pièce était loin de la planéité, on a été amené à ajouter l'opération suivante :

5. Rectification de la face inférieure de l'éprouvette.

Cette dernière opération était en fait un pis-aller. En effet, elle tendait à à corriger une mauvaise maîtrise des contraintes résiduelles et de plus, elle menait à des épaisseurs d'ailes variables et peu prévisibles.

A titre de remède, on a d'abord essayé d'annuler les contraintes résiduelles par un recuit. Mais l'usinage devenait alors très difficile, le matériau de la pièce ayant une fâcheuse tendance à adhérer à l'outil.

Il a donc été décidé d'expérimenter une nouvelle gamme, conçue dans l'optique de minimiser l'effet des contraintes résiduelles. Elle s'établit comme suit :

1. Rainurage
2. Retournement de la pièce et dressage de la face supérieure
3. Nouveau retournement et dressage de la face inférieure
4. Troisième retournement et dressage des ailes
5. Pointage des trous
6. Perçage des trous

Après fraisage suivant cette procédure, la planéité de la face inférieure a été mesurée, avec pour résultat une erreur de planéité inférieure à $0,01mm$, ce qui rendait superflue toute opération de rectification.

Chapitre 5

Ablocage des pièces

5.1 Introduction

Pour pouvoir usiner correctement une pièce, il faut pouvoir définir correctement et répétitivement sa position sur la machine-outil et, de plus, garantir le maintien de cette position lors de l'usinage, qui implique évidemment des forces de coupe. Il y a donc deux fonctions à assurer, le *positionnement* et le *serrage* de la pièce à usiner. L'ensemble de ces deux fonctions est désigné par le nom d'*ablocage*.

5.2 Les six degrés de liberté

La pièce à usiner, étant un solide, possède six degrés de liberté. (Ici, nous supposons implicitement que la pièce est bien rigide. Le cas des pièces souples réclame un traitement particulier.) Pour supprimer ces six degrés de liberté, il suffit donc de six contacts quasi ponctuels qui, dans la mesure où l'on néglige le frottement, définissent six normales. Bien entendu, celles-ci doivent être indépendantes. Il s'agit de liaisons simples.

La figure 1 illustre une immobilisation par six contacts. La suppression d'un seul de ces contacts rend le corps mobile. On dit que le positionnement est *isostatique*.

Si le corps est immobilisé à l'aide de $\ell > 6$ liaisons, il y en a donc certainement $(\ell - 6)$ superflues ou *hyperstatiques*. Mais cela ne signifie pas que six liaisons simples quelconques suffisent à immobiliser un solide. Ainsi, la pièce représentée en figure 2, bien que reposant sur six appuis simples, possède toujours deux degrés de mobilité, à savoir la translation suivant l'axe x et la rotation autour d'une parallèle à ce même axe. Il n'y a donc en fait que $6 - 2 = 4$ degrés de liberté fixés, ce qui signifie que deux des liaisons sont excédentaires dans la fixation de ces 4 degrés de liberté. Bien que la liaison soit déficiente, il a donc deux liaisons hyperstatiques. Hyperstaticité et mobilité peuvent donc coexister, contrairement aux croyances de certains.

Plus généralement, soit un solide soumis à ℓ liaisons qui lui laissent cependant m degrés de mobilité. Il n'y a donc que $(6-m)$ degrés de liberté réellement fixés, et le même résultat aurait pu être obtenu à l'aide de $(6 - m)$ liaisons simples. Les liaisons restantes sont donc hyperstatiques. Leur nombre h, appelé *indice* *d'hyperstaticité* est donné par

$$h = \ell + m - 6$$

5.3 Avantages et inconvénients de l'hyperstaticité

Tout d'abord, notons que seules, les liaisons isostatiques permettent la libre dilatation de la pièce pendant l'usinage qui, rappelons-le, engendre de la chaleur.

Par ailleurs, une liaison hypertatique peut être impossible à réaliser. Soit par exemple à poser une pièce sur un plan. Cette liaison est d'ordre infini, car chaque point du plan doit être en contact avec la pièce. Si la pièce n'est pas suffisamment plane, ce qui a généralement lieu dans le cas d'une pièce brute, le contact ne pourra pas se faire correctement et, en particulier, si la surface d'appui de la pièce est convexe, la liaison sera incomplète, comme l'illustre la figure 3. Ces problèmes disparaissent dans le cas d'une liaison par trois contacts (*fig. 4*). Si l'on désire une fixation plus rigide, on peut alors ajouter des contacts réglables (*fig. 5*).

D'ailleurs, ceci se retrouve dans l'expérience quotidienne. Ainsi, une table à trois pieds (*fig. 6*) est toujours correctement appuyée sur le sol, car par trois points, on peut toujours faire passer un plan. Une table à quatre pieds est hyperstatique, mais pour autant que l'on puisse régler le quatrième pied (*fig. 7*), elle est plus stable qu'avec trois pieds, car sa base de sustentation est plus grande.(On notera que les machines à laver le linge possèdent trois pieds réglables au moins. Le but ici n'est plus d'assurer sa stabilité, mais son horizontalité.) La véritable règle est donc :

Règle 6 *L'hyperstaticité est toujours synonyme de réalisation difficile. Mais dans bien des cas, elle permet d'assurer une raideur nettement plus grande.*

Ainsi, l'appui plan est irréalisable dans le cas d'une surface brute, surface qui ne pourra s'appuyer correctement qu'en trois points. Cette liaison, nécessairement souple, ne pourra convenir qu'en dégrossissage, où la cote à obtenir n'est pas très précise. Par contre, un plan préalablement dégrossi à l'outil pourra s'appuyer correctement sur une surface plane, ce qui permettra une fixation autrement rigide. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a longtemps utilisé sur les cuisinières à plaques électriques des poêles dont le fond était dégrossi à l'outil (*fig. 8*), ce qui leur permettait de transmettre correctement la chaleur de la plaque chauffante.

5.4 Aspect économique

L'ablocage d'une pièce peut se faire

- A l'aide d'un système de liaisons relevant de l'outillage standard. Dans ce cas, chaque pièce nécessitera un réglage.
- A l'aide d'un système de liaisons spécifiques. Le montage sera alors simplifié, mais il faudra préalablement fabriquer les liaisons spéciales.

L'outillage standard correspond à un investissement minimal, mais nécessite plus de main d'œuvre, ce qui revient à dire que le coût marginal est plus élevé (*fig. 9*). Par conséquent, il convient pour les petites séries. Pour les grandes séries, un système de positionnement spécifique peut se justifier, car le coût de sa fabrication sera étalé sur le nombre de pièces de la série.

5.5 Positionnement des surfaces planes

5.5.1 Bornes d'appui

Les bornes d'appui (*fig. 10*) [17] permettent de poser correctement une surface plane. Il en faut trois pour définir un plan. Lorsque la surface d'appui est déjà usinée, on peut utiliser des bornes planes, ce qui permet d'assez bien répartir la pression. Si la surface d'appui est brute, il faut utiliser des bornes à bout sphérique. Les bornes peuvent être fixes (frettées) ou démontables.

5.5.2 Butées

Les butées (*fig. 11*) [17] sont destinées à définir la position latérale des pièces. La figure 12 bis illustre le positionnement dit « plan-trait-point ». Pour les surfaces brutes, on utilise des butées striées. Il est parfois nécessaire d'utiliser des butées *palonnées*, qui s'orientent sur la surface en répartissant l'effort de manière égale sur les deux contacts, de la même façon que dans une balance. Nous reviendrons plus bas sur la technique de palonnage.

5.5.3 Centreurs

Les centreurs (*fig. 12*) [17] éliminent deux degrés de liberté, en s'enfichant dans la pièce. Il s'agit d'un centrage court. L'utilisation simultanée de deux centreurs (*fig. 13*) est hyperstatique et risque donc de provoquer des difficultés de montage. Il suffit en fait que le second centreur élimine le degré de liberté de rotation autour du centre du premier centreur. A cet effet, on utilise des *centreurs dépincés* encore appelés *locatings* (*fig. 14*).

L'utilisation des centreurs est souvent très pratique en fabrication en série. Cependant, les centreurs ne sont pas, en général, les références naturelles de la pièce, ce qui implique de nombreux transferts de cotes.

5.5.4 Appuis sur palonnier

La figure 22 [17] représente un appui sur palonnier. En général, un *palonnier* est un dispositif destiné à répartir un effort sur plusieurs appuis. Sur deux appuis (*fig. 15*), il suffit d'un simple levier. Mais on peut imaginer des palonnier à trois appuis, quatre appuis, voire plus.

Dans le cas de trois appuis (*fig. 16*), on peut procéder comme suit : on palonne d'abord F_1 et F_2 de manière à les égaliser. On s'arrange alors pour que $F_1 + F_2 = 2F_3$, ce que l'on obtient à l'aide d'un levier décentré pour lequel

$$(F_1 + F_2)\ell_{12} = F_3\ell_3$$

soit

$$\ell_{12} = \frac{F_3}{F_1 + f_2}\ell_3 = \frac{1}{2}\ell_3$$

Dans le cas de quatre appuis, la solution est simple (*fig. 17*). La figure 18 illustre comment palonner 5 appuis. C'est sur ce principe que sont conçus les essuie-glaces des voitures, le but étant de répartir au mieux la pression de la raclette sur le pare-brise.

On peut également réaliser des palonnages hydrauliques ou pneumatiques (*fig. 19*). C'est notamment le cas des roues jumelles de poids lourds, pour lesquelles se pose le problème du bombé de la route (*fig. 20*). Il en découle une usure des pneus bien plus rapide à l'intérieur qu'à l'extérieur. Ce problème peut être résolu en connectant les valves des roues jumelles de manière à égaliser les pressions de leurs pneus (*fig. 21*).

Les palonniers sont souvent utilisés pour appuyer des pièces brutes. Après orientation correcte du palonnier, on peut fixer une de ses tiges. On réalise ainsi un montage hyperstatique correctement réglé, comme par exemple un plan sur quatre appuis (*fig. 23*).

5.5.5 Appui sensitif

L'appui sensitif, c'est-à-dire monté sur ressort (*fig. 24*) [17], est une autre façon de réaliser un appui hyperstatique réussi. Dans le montage de la figure 25, les appuis A, B et C suffisent pour définir la position de la pièce. On appuie donc la pièce sur ces trois appuis, en laissant l'appui sensitif prendre la longueur qui convient. On peut alors le serrer dans cette position. A noter que la vis sans tête représentée sur la figure est destinée à limiter la course de la borne, afin d'éviter que le ressort ne la sorte de son guidage.

5.5.6 Détrompeur

La figure 26 [17] représente un montage de perçage composé d'une butée à droite, d'un canon de perçage, et d'une vis de serrage de la pièce sur la butée. Il convient d'éviter de monter la pièce à l'envers. A cette fin, on utilise une petite butée intérieure appelée *détrompeur*. On notera que le montage représenté est en fait vicieux, car la vis de serrage n'est pas alignée avec la butée, ce qui tend à faire basculer la pièce.

5.5.7 Matériau des bornes, butées, etc.

Il faut remarquer que les bornes et butées, surtout sphériques, subissent des pressions de contact intenses, si ce n'est de type hertzien. Or, leur usure conditionne la précision de positionnement de manière essentielle. Il est donc impératif d'avoir une bonne *dureté*. Les nuances d'acier les plus utilisées dans cette application sont

- XC10 cémenté
- XC48, XC65 améliorés
- 10NC12, 16NC6, 30NC11 améliorés
- 35CD4 amélioré
- 45S8 amélioré
- 100C6, Z200C13 améliorés

5.5.8 Appui plan-trait

Lorsque les surfaces d'appui ont une planéité suffisante, on pourra utiliser des appuis plans (*fig. 27*) si le défaut de planéité est inférieur à $0,05mm$. Une solution un peu moins hyperstatique st l'appui sur réglettes (*fig. 28*).

5.5.9 Prise en étau sur deux réglettes

Signalons encore le montage en étau sur deux réglettes (*fig. 29*), très utilisé en fabrication unitaire. Il faut noter que l'étau représenté dans cette figure est très mauvais, car lors de son serrage, la mâchoire mobile tend à s'incliner en tournant autour du point où elle est pressée par la vis, ce qui provoque la montée de la pièce. Les bons étaux de fraisage ont une vis située en face de la zone de serrage de la pièce, de manière à minimiser cet effet néfaste.

Le couple C à donner à la vis de l'étau pour obtenir une force de serrage F s'obtient aisément à partir du travail à réaliser. Pendant que la vis tourne d'un angle $theta$, la mâchoire avance d'une longueur $\ell = \frac{\theta}{2\pi}p$ où p est le pas de la vis. Le travail utile est donné par

$$\mathcal{T}_{ut} = F\ell$$

et le travail fourni vaut

$$\mathcal{T}_m = C\theta$$

Soit alors η le rendement du système vis-écrou. On a

$$\mathcal{T}_{ut} = \eta\mathcal{T}_m$$

ce qui implique

$$C = \frac{F\ell}{\eta\theta} = \frac{Fp}{2\pi\eta}$$

On admet souvent la valeur $\eta = 0,1$, en raison de la forte irréversibilité du mécanisme de l'étau.

5.6 Positionnement des surfaces circulaires

5.6.1 Montage entre pointes

Le montage entre pointes (*fig. 30*) <citeDietrich88 suppose que l'on ait préalablement percé des trous de centre dans la pièce, avec ou sans dressage des faces finales. La coaxialité de ces trous de centre est une condition indispensable. Le plus souvent, les pointes ont un angle de 60°.

La position axiale de la pièce est déterminée par un *plan de jauge*, dédini comme le plan où la pointe et le trou ont le même diamètre de référence $\boxed{D}$ (*fig. 31*). Il est clair que la position de ce plan par rapport à la face terminale de la pièce dépend de la profondeur d'usinage du centre. Elle est donc entachée d'une incertitude, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'origine précise des cotes axiales.

La *pointe à ressort* (*fig. 32*) [17] supprime cet inconvénient en matérialisant une référence axiale précise. Dans ce cas, il faut bien sûr dresser préalablement la face terminale de la pièce qui s'appuie sur la butée de la pointe à ressort.

Remarque – La *contre-pointe tournante*, très utilisée en tournage, ajoute une imprécision du fait du faux rond de ses roulements. Cette imprécision peut rendre le retournement problématique si la contre-pointe a quelque peu souffert dans sa vie (*fig. 33*).

5.6.2 Centrage long

Le centrage long (*fig. 35*) [17] élimine quatre degrés de liberté. Il doit donc être complété par une butée axiale et une liaison en rotation. Ce centrage privilégie la coaxialité entre la pièce et le centreur, même si la face terminale de la pièce n'est pas perpendiculaire à son axe. En conséquence, il faut limiter la butée à un contact quasi ponctuel.

L'erreur de coaxialité permise par le centreur dépend du jeu j qu'il a dans l'alésage de la pièce. Elle vaut très exactement $j/2$ (*fig. 34*). En termes d'erreur angulaire d'orientation, on a $\Delta\alpha = j/\ell$ où ℓ est la longueur du centreur. Cela signifie que l'alésage de la pièce doit avoir été réalisé préalablement avec précision. Il existe également des *centreurs expansibles*, permettant de limiter l'erreur de positionnement à $0,01...0,02mm$.

On notera enfin que le centreur de la figure 35 est en fait composé de deux centreurs courts, pour éviter les problèmes éventuels liés à la forme de l'alésage. C'est la pratique courante.

5.6.3 Centrage court

Ce dispositif est toujours associé à un plan, souvent matérialisé par trois butées quasi ponctuelles (*fig. 36*) [17]. L'ensemble élimine cinq degrés de liberté (trois pour le plan et deux pour le centrage). C'est le plan qui donnera l'orientation de la pièce, ce qui permet d'obtenir de perpendicularités et des parallélisme par rapport à la face plane d'appui de la pièce, sans se préoccuper de l'orientation de l'alésage.

5.6.4 Prise en mandrin

Les mandrins à serrage concentrique possèdent trois mors qui, via une spirale mue par une vis, progressent simultanément pour serrer la pièce (*fig. 37*). Ils assurent ainsi une concentricité correcte de la pièce, dans des tolérances données en figure 38 [17]. Dans certains cas, notamment pour la reprise de certaines pièces, cette précision est insuffisante. On utilise alors des *mors doux* (*fig. 39*). Ce sont des mors en acier relativement doux, que l'on usine exactement au diamètre de la pièce. Ceci élimine l'erreur d'excenticité due au dispositif de serrage. Cependant, ce procédé ne convient que pour effectuer des passes relativement légères, car les mors doux glissent plus facilement sur la pièce que les mors durs. Ce phénomène, un peu paradoxal, résulte du fait que les mors doux, qui épousent exactement la pièce, ne l'entraînent que par frottement, tandis que les mors durs, qui serrent sur une surface beaucoup plus petite, pénètrent quelque peu dans la pièce, ce qui ajoute un certain effet d'obstacle dans l'entraînement de la pièce.

5.6.5 Montages spéciaux

On peut encore imaginer de nombreux montages spéciaux, sur lesquels nous ne nous étendrons pas.

5.7 Serrage des pièces

5.7.1 Introduction

La pièce étant posée (isostatiquement si possible) sur son support, il faut la maintenir dans cette position malgré les efforts qui la sollicitent (pesanteur et forces de coupe). Ce serrage doit respecter un certain nombre de règles.

5.7.2 Règles générales

Règle 7 *Neutralisation des efforts (fig. 40) [17] : les forces de serrage doivent diriger la pièce contre ses appuis, en empêchant tout mouvement parasite.*

Il faut à tout le moins que la ligne d'action des forces de serrage passe à l'intérieur des appuis, mais comme nous le verrons, cette condition n'est pas toujours suffisante.

Règle 8 *Continuité de la matière (fig. 41) : les efforts de serrage doivent être appliquées en des points très raides pour éviter la déformation des pièces.*

En effet, si le serrage déforme la pièce, on va par exemple usiner un beau plan sur la pièce, mais lors du débridage, celle-ci va reprendre sa forme relaxée, et la surface usinée ne sera plus plane.

Règle 9 *Éviter les pressions de serrage excessives.*

Il faut en effet éviter de marquer la pièce, comme le caricature la figure 44. Les forces de serrage doivent être calculées et limitées.

5.7.3 Règles particulières

Règle 10 *Simplifier et réduire les points de serrage.*

La figure 42 [17] donne un bel exemple de montage permettant de brider deux pièces à la fois à l'aide d'un seul levier de serrage.

Règle 11 *Utiliser le palonnage.*

La figure 43 [17] montre comment on peut monter deux barreaux simultanément et les serrer à l'aide d'un seul bras, grâce à un palonnier. Sans celui-ci, il serait impossible de garantir le serrage des deux barreaux si leur diamètre n'est pas exactement égal à la valeur de référence fixée par la position de l'articulation du bras de serrage.

5.7.4 Serrage par brides

Les brides (*fig. 45*) s'utilisent sur les machines possédant un plateau à rainures pour vis à tête en marteau. Pour les avoir bien horizontales, on les pose sur une cale étagée.

5.7.5 Quelques exemples de réalisation

La figure 46 [17] donne un aperçu de quelques techniques de bridage.

5.7.6 Stabilité du montage

Il peut arriver qu'un montage satisfaisant aux règles ci-dessus soit néanmoins instable. Un exemple de ce type a été donné par Karr [32]. La pièce représentée à la figure 47 est posée sur trois appuis courts A, B et C. On la serre à l'aide de la force F. Observons que les liaisons en A, B et C sont *unilatérales*, c'est-à-dire qu'elle n'empêchent le mouvement que dans un seul sens. Tout déplacement virtuel quittant les appuis dans le sens non empêché est compatible avec ces liaisons. Le principe de stabilité est le suivant :

Principe 9 *Soit un corps posé sur des liaisons unilatérales et soumis à une force F. S'il existe un déplacement virtuel compatible avec les liaisons tel que le travail virtuel de la force et des éventuelles forces de frottement soit positif, alors le système est instable.*

Dans le cas présent, considérons le champ de déplacement virtuel dans lequel le corps maintient son contact avec les appuis A et C, mais quitte l'appui B. La vitesse doit être tangentielle aux appuis A et C, donc il s'agit d'une rotation $\delta\theta$ autour du point O, croisement des normales en A et C. Pendant ce mouvement, on observera en A et C des réactions inclinées de l'angle de frottement φ. Les lignes d'action de ces deux réactions se croisent en un point D par lequel passe nécessairement leur résultante R qui, du fait de l'équilibre de translation, est de même direction que F et de sens contraire. Le travail virtuel vaut alors

$$\delta\mathcal{T} = Fx\delta\theta - Rx'\delta\theta = F(x - x')\delta\theta > 0$$

c'est-à-dire que ce mouvement correspond à une *instabilité*. Le remède consiste à placer l'appui C plus bas, de manière que le point D soit situé en-dessous de la ligne d'action de la force. Nous laissons au lecteur de vérifier qu'alors, le montage est stable par rapport à tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Observons également que le frottement a ici un rôle stabilisateur : sans frottement, la réaction R passerait par le point O, et le travail virtuel serait plus grand encore.

Chapitre 6

Liaison outil-machine

6.1 Généralités

La liaison outil-machine se fait en général par l'intermédiaire d'un porte-outil (*fig. 1*). Il faut donc examiner deux liaisons :
- La liaison de l'outil au porte-outil.
- La liaison du porte-outil à la machine.

6.2 Exigences technologiques

Pour que ces deux liaisons assurent un déroulement correct de l'usinage, elles doivent garantir
- Le maintien de l'outil sous les efforts de coupe.
- Un positionnement de l'outil aussi précis que possible.
- La possibilité de régler cette position.
- La possibilité de changer d'outil.

6.3 Liaison de l'outil au porte-outil

6.3.1 Maintien de l'outil

En fonction de l'intensité et de la direction des efforts de coupe, la liaison peut être assurée par adhérence ou par effet d'obstacle ou encore par apport de matière.

Outils tournants

Comme l'illustre la figure 2, tout dépend des efforts. Lorsque ceux-ci sont faibles, on pourra utiliser une liaison par adhérence sur une surface cylindrique, à l'aide d'une pince fendue que l'on serre à l'aide d'un écrou dans un cône creux (pince *Schaublin*). Lorsque les efforts sont plus grands, on pourra utiliser
- Une liaison par cône irréversible (forets sur foreuses ou sur tours).
- Une liaison par cône réversible et obstacles, comme cela se pratique sur les fraiseuses. Il faut alors empêcher la sortie du cône (tirette ou pince) et entraîner le cône en rotation (dents de loup).

- Une liaison par clavette.
- Une liaison par méplat.

Outils de tour

Les outils en acier rapide sont monoblocs. On parle alors de *corps d'outil* pour la partie non affûtée. Pour les outils en carbure, la plaquette de carbure est maintenue sur le porte-plaquette. la liaison entre ces deux éléments peut se faire de plusieurs manières :

- Par bride (*fig. 3*). C'est une liaison par adhérence.
- Par trou central et bride (*fig. 4*).
- Par trou central seul, quand les efforts tendent nécessairement à appliquer la pièce sur sa base.
- Par vis centrale. Il s'agit d'une vis à tête fraisée.
- Enfin, pour mémoire, la plaquette peut être brasé au bronze Tobin, ce qui ne se fait plus guère pour les outils de tournage, mais reste la règle pour les forets à béton.

6.3.2 Précision de la position des outils tournants

Dans le cas des outils tournants, l'incertitude de positionnement de l'outil dépend à la fois de

- L'incertitude de la position de l'outil sur son porte-outil δ_1.
- L'incertitude de la position du porte-outil sur le mandrin δ_2.

Imaginons par exemple une fraise à rainurer (*fig. 7*). Dans le cas le plus défavorable, les deux erreurs δ_1 et δ_2 sont alignées et s'ajoutent. Il en résulte que la fraise, si elle a un rayon R, découpe une rainure de largeur maximale $2R+\delta_1+\delta_2$. L'état de surface en est également affecté. Dans le cas d'une fraise parfaitement centrée travaillant en roulant, on peut s'attendre à une rugosité

$$R_t \approx \frac{f_Z^2}{8R}$$

où R est le rayon de la fraise et f_Z, l'avance par dent. Mais du fait du décentrage de la fraise, les trajectoires des différentes dents peuvent ne plus se couper. Le profil sera alors engendré par la dent la plus longue, dite dent traçante, et la rugosité vaudra alors (*fig. 9*)

$$R_t \approx \frac{f^2}{8R}$$

soit une valeur Z^2 plus forte, où Z est le nombre de dents.

Pour le cas des porte-outils tournants, on peut admettre les valeurs suivantes de δ_1 [34]

Liaison outil/porte-outil	δ_1/mm
Liaison cylindre/cylindre	
Mandrin de type JACOB	0,04
Mandrin àpince	0,01
Fraise sur arbre	H_7h_6
Liaison cône/cône	
Cône Morse ($\approx 5\%$)	0,01
Cône à 7/24	0,01

6.3.3 Réglage de l'outil

En tournage : la position de la plaquette de coupe n'est pas réglable sur le porte-outil. On règle l'ensemble plaquette + corps d'outil dans le porte-outil. Cette opération peut avoir lieu sur un banc de pré-réglage qui simule la position de l'outil sur la machine (*fig. 10*).

En fraisage : les plaquettes de carbure peuvent être réglées axialement à l'aide d'une languette élastique (emphfig. 11).

En alésage : on utilise des montages spéciaux pour régler la position radiale du grain (*fig. 12*

6.4 Liaison du porte-outil à la machine

6.4.1 Maintien du porte-outil

Le porte-outil peut être maintenu par adhérence, par effet d'obstacle ou par une combinaison des deux.

Perçage

En perçage, la disposition la plus courante est le cône Morse (irréversible), voir fig. 13.

Fraisage

En fraisage, la liaison est assurée par un cône à 7/24 et des tenons (*fig. 14*). La conicité à 7/24 permet

- Une bonne répétitivité de la mise en position.
- Des efforts d'extraction faibles.

Tournage

Deux configurations sont possibles en tournage :

- La *tourelle fixe*, où les outils sont montés sur des porte-outils interchangeables.
- La tourelle évolutive, qui porte plusieurs outils et peut tourner pour mettre ces outils l'un après l'autre au travail. L'axe de rotation de la tourelle évolutive peut être perpendiculaire à l'axe du tour ou parallèle à celui-ci (*fig. 16*).

6.4.2 Mise en position

La qualité de la mise en position dépend des jeux et de la qualité des contacts de la liaison porte-outil à la machine. Nous donnerons deux exemples.

Exemple 1 : opération d'alésage

Les conicités C du cône mâle et du cône femelle sont cotés comme suit **??** :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Cône mâle} & C_m = \left(\frac{7}{24}\right)_0^{+0,02\%} \\ \text{Cône femelle} & C_f = \left(\frac{7}{24}\right)_{-0,02\%}^0 \end{array} \right\}$$

Le cône mâle est donc en moyenne plus conique que le cône femelle , ce qui implique que le contact se fera du côté de la grande base des cônes (*fig. 17*). Dans le plus mauvais cas, on aura un cône mâle de conicité

$$C_m = \frac{7}{24} + 0,0002 = 0,2919$$

et un cône femelle de conicité

$$C_f = \frac{7}{24} - 0,0002 = 0,2915$$

donc à une distance x vers le haut à partir du centre de rotation O, la différence de diamètre sera donnée par

$$D_f - D_m = 0,0004x$$

La différence des rayons étant la moitié de la différence des diamètres, le cône pourra s'incliner d'un angle

$$\Delta\alpha = \frac{\frac{1}{2}(D_f - D_m)}{x} = 0,0002rad$$

Il en résultera, pour une barre d'alésage sortie de longueur sortie L comptée à partir du point O, une erreur de rayon

$$\Delta R = L\Delta\alpha = 2.10^{-4}L$$

soit une erreur sur le diamètre

$$\Delta d = 2\Delta R = 4.10 - 4L$$

Ainsi, à une distance de $100mm$ du point O, on obtient

$$\Delta d = 0,04mm$$

ce qui n'est nullement négligeable.

Exemple 2 : tournage avec tourelle évolutive

On appel *écart d'indexage* l'erreur de position angulaire de la tourelle. A l'heure actuelle, on emploie un indexage par dentures rectifiées à flancs droits HIRTH, ce qui permet d'obtenir un écart de mise en position de $\pm 5\mu m$ sur un diamètre de $200mm$ [34], ce qui revient à dire un écart angulaire

$$\Delta\alpha = \pm\frac{2.10^{-3}}{100} = \pm 2.10^{-5}rad$$

Dans le cas d'une tourelle *à axe perpendiculaire à celui de la broche du tour*, il en résulte un écart de position de l'outil E donné par

$$E = \pm 2.10^{-5} R$$

où R est la distance de la pointe de l'outil au centre de la tourelle (*fig. 18*). Supposons par exemple que l'on alèse à une profondeur de $100mm$ dans la pièce. Si l'outil a un porte-à-faux de $140mm$ et sort de la tourelle à un rayon de $150mm$, on a $R = 290mm$ et

$$E = \pm 2.10^{-5}.290 = \pm 5,8.10^{-3} mm$$

soit une erreur sur le diamètre

$$\Delta D = 2E = \pm 0,0116mm$$

La situation est *bien meilleure* si la tourelle a son axe *parallèle* à celui de la broche. En effet, dans ce cas (*fig. 19*), soit ℓ la distance du nez de l'outil à l'axe de la tourelle, et soit R le rayon que l'outil engendrerait dans sa position théorique. Le rayon réel R^* obtenu sur la pièce vérifie la relation

$$\begin{aligned} R^{*2} &= (R+\ell)^2 + \ell^2 - 2\ell(R+\ell)cos\Delta\alpha \\ &= R^2 + 2R\ell + 2\ell^2 - 2R\ell cos\Delta\alpha - 2\ell^2 cos\Delta\alpha \\ &= R^2 + 2\ell(R+\ell)(1 - cos\Delta\alpha) \end{aligned}$$

On a donc

$$R^{*2} - R^2 = 2\ell(R+\ell)(1 - cos\Delta\alpha)$$

soit, après division par $(R^* + R) \approx 2R$,

$$\begin{aligned} \Delta R = R^* - R &\approx \ell\left(1 + \frac{\ell}{R}\right)(1 - cos\Delta\alpha) \\ &\approx \ell\left(1 + \frac{\ell}{R}\right)\frac{(\Delta\alpha)^2}{2} \end{aligned}$$

Cette erreur est donc *du second ordre* en $\Delta\alpha$ et toujours dans le sens d'un accroissement de rayon. Posons par exemple $\ell = 150mm$ et $R = 100mm$. On obtient, pour $\Delta\alpha = \pm 2.10^{-5}$

$$\Delta R = 150\left(1 + \frac{150}{100}\right)\frac{4.10^{-10}}{2} = 7,5.10^{-8} mm$$

soit

$$\delta D = 1,5.10^{-7} mm$$

ce qui est négligeable

Porte-outil de tour amovible

Les dispersions de remise en place sont en général de l'ordre de $\delta = 0,01mm$ [34].

Chapitre 7

Machines-outils à commande numérique

7.1 Généralités sur la commande numérique des machines-outils

7.1.1 Introduction

Dans les machine-outils traditionnelles, c'est-à-dire purement mécaniques, il existe une transmission liant le mouvement d'avance au mouvement de coupe. Cette transmission, unique, ne peut être branchée que sur *un seul* mouvement d'avance à la fois. On n'aura donc qu'un seul mouvement d'avance automatique. Ainsi, sur un tour parallèle, on a deux possibilités :

- avance automatique du chariot principal, ce qui engendre des cylindres ;
- avance automatique du chariot transversal, ce qui engendre des plans.

Ces deux possibilités sont *exclusives*. Aussi, pour obtenir des formes plus complexes, il faut utiliser des artifices : règle à tourner cône, dispositif de copiage, etc.

Dans les machines-outils à commande numérique, chaque mouvement d'avance possède son moteur propre et, par là même, son indépendance. La commande simultanée de ces mouvements est réalisée par un *directeur de commande numérique*, ordinateur qui exécute un *programme* établi par l'opérateur. Chaque mouvement commandé numériquement est appelé *axe*. En fonction des applications à réaliser, on utilise des machines à 2, 3, 4, 5 axes et parfois plus.

7.1.2 Principe de la commande d'un axe en position

Commande en boucle fermée

La commande en position d'un axe peut être schématisée comme suit [27, 9] (*fig. 1*) : un moteur commande le mouvement du chariot à l'aide d'une vis à billes précontrainte (la précontrainte a pour but d'éliminer les jeux). La position réelle x_r du chariot est mesurée à chaque instant par un capteur de position. La comparaison de cette position réelle avec la valeur de consigne x_c produit un signal qui, convenablement amplifié, est transmis au moteur qui corrigera la position. C'est ce que l'on appelle une *commande en boucle fermée*.

Mesure directe et mesure indirecte

Nous n'entrerons pas dans le détail de la description des différents types de capteurs, analogiques ou numériques, absolus ou incrémentaux. Bien plus importante est la distinction entre mesure directe et mesure indirecte.

- La *mesure directe* consiste à mesurer la position du chariot par rapport au bâti, généralement à partir d'une *règle* pour un mouvement rectiligne. Elle fournit donc indiscutablement la position exacte du chariot.
- La *mesure indirecte* consiste à placer un appareil de mesure appelé *résolveur* sur la vis d'entraînement du chariot. Souvent plus facile à réaliser, cette mesure est entachée d'erreurs liées aux déformations de la liaison entre la vis et le chariot. Ce procédé est donc intrinsèquement *moins précis* que la mesure directe. Cet aspect des choses doit être pris en considération lors de l'achat d'une machine outil, car il conditionnera la précision du travail qu'elle réalisera.

7.1.3 Commande des vitesses

Lorsque l'on combine les mouvements de plusieurs axes pour obtenir une trajectoire dans une direction donnée, la direction de la tangente à la trajectoire est définie par le rapport des vitesses des différents moteurs. Il est donc nécessaire de pouvoir asservir également les *vitesses* des moteurs. A cette fin, on monte en bout de la vis d'entraînement une dynamo tachymétrique dont le signal agit en contre-réaction sur l'alimentation du moteur (à courant continu) [9].

7.1.4 Genres de commandes

Les commandes peuvent être classées en fonction des relations qu'elles permettent de réaliser entre les mouvements selon les divers axes.

Commande point par point (*fig. 2*)

Cette catégorie englobe les machines dont la table se déplace en mouvement rapide d'un point à un autre, la trajectoire étant *sans importance*, car l'usinage n'intervient que lorsque la position prescrite est atteinte. Ce type de commande se rencontre sur les perceuses, machines de soudage point par point, etc.

Commande paraxiale (*fig. 3*)

Outre un fonctionnement identique au précédent, la trajectoire de l'outil peut, *avec une vitesse d'avance donnée*, s'effectuer suivant un mouvement rectiligne et parallèle à l'un des axes de la table X,Y ou Z. Ce type de commande se rencontre sur aléseuses, fraiseuses, tours, etc. , mais ne leur donne en somme que les possibilités d'une machine traditionnelle.

Commande de contournage (*fig. 4*)

Les commandes de ce genre contiennent un système d'interpolation linéaire et circulaire, ce qui nécessite la coordination des vitesses de plusieurs axes. Il est alors possible d'usiner un plan incliné par rapport aux axes, une courbe dans le plan, etc. On trouve ce genre de commandes sur fraiseuses, tours, centres d'usinage, machines d'électro-érosion à fil, etc.

7.1.5 Nombre d'axes commandés

Un second critère de classification des commandes numériques est le nombre d'axes commandés.

Deux axes

C'est la commande classique des tours parallèles, où l'axe Z est le déplacement du chariot principal et l'axe X, le déplacement du chariot transversal.

Deux axes et demi

On rencontre ce système sur certaines machines à trois mouvements d'avance, comme les aléseuses-fraiseuses. L'interpolation ne peut se faire que sur deux axes à la fois, le troisième étant bloqué : interpolation $X-Y$ avec Z bloqué, ou $Y-Z$ avec X bloqué, ou $X-Z$ avec Y bloqué. Le plan d'interpolation est spécifié par le programme.

Ce système permet d'obtenir un grand nombre de pièces par contournages successifs en suivant les lignes de niveau. Il suffit à la plupart des problèmes des moulistes, qui utilisent à cette fin des fraises-boules.

Trois axes

Ici, les trois axes peuvent être déplacés et contrôlés simultanément, grâce à une interpolation dans l'espace. Il est par exemple possible de réaliser une trajectoire hélicoïdale. On trouve ce genre de commandes sur les aléseuses-fraiseuses, les centres d'usinage, etc.

Quatre axes

Sur une aléseuse-fraiseuse, un quatrième axe est par exemple la rotation d'un plateau tournant sur la table.

Cinq axes

Toujours sur une aléseuse-fraiseuse, on ajoutera par exemple le déplacement du fourreau de la broche ou une inclinaison de celle-ci. Les machines d'électro-érosion à fil sont généralement à cinq axes.

Six axes et plus

Les possibilités sont multiples.

Remarque

Il va sans dire que la programmation devient de plus en plus complexe à mesure que le nombre d'axes augmente. Très rapidement, la nécessité d'une *aide informatique à la programmation* se fait sentir. Il existe sur le marché un certain nombre de logiciels de F.A.O. remplissant cet office.

7.1.6 Dénomination des axes

Les mouvements rectilignes de base sont appelés X, Y et Z. Pour toutes les machines-outils à broche tournante, on appelle Z l'axe de la broche. Les mouvements perpendiculaires à Z sont appelés X et Y. Parmi ceux-ci, X désigne normalement le mouvement ayant la plus grande amplitude (en fraisage, c'est selon la longueur de la table). Les rotations autour des axes X, Y et Z sont nommées A, B et C respectivement. Enfin, il existe parfois des mouvements *secondaires* parallèles à X, Y et Z, que l'on nomme alors U, V, W respectivement.

Les sens positifs sont généralement définis par rapport à la pièce et, souvent, leur orientation est rappelée sur le pupitre de commande de la machine-outil. Ces dispositions sont illustrées par les figures 5, 6 et 7 [27].

7.2 Eléments de programmation

7.2.1 Introduction

Nous nous limiterons dans cet exposé aux premiers rudiments de la programmation ISO en deux axes et demi sur une aléseuse-fraiseuse. Il faut noter que de nombreuses autres possibilités existent. Pour celles-ci, nous renvoyons le lecteur à la littérature spécialisée [50, 35, 28, 29, 30, 31, 44]. En outre, les différentes commandes du marché offrent des possibilités supplémentaires qui leur sont propres et ne sont dons pas portables.

La figure 7 représente une aléseuse-fraiseuse universelle à trois axes (sans ses capots) et fournit la direction des axes.

7.2.2 Géométrie

Un point d'une pièce est repérée par trois axes X, Y, Z (*fig. 8*). Pendant le travail, on choisit une origine quelconque sur la pièce. C'est ce que l'on appelle le *zéro programmé* (ZP). Il peut être choisi n'importe où sur la pièce. Mais il existe des choix plus opportuns que d'autres. La règle est évidemment de faire un choix rendant les choses simples, c'est-à-dire permettant de réaliser un maximum de cotes du dessin en cotes directes, de manière à éviter les transferts de cotes qui resserrent toujours les tolérances. On note le zéro programmé sur le dessin par le symbole représenté en figure 9.

Le zéro programmé peut être donné par palpage d'un angle de la pièce, par exemple, à l'aide d'un capteur *Renishaw*. Ce capteur permet également de prendre référence au centre d'un alésage.

7.2.3 Choix de l'origine et définition des coordonnées

Le premier travail consiste à repérer les coordonnée définissant la pièce. Nous illustrerons cette étape à l'aide d'exemples.

Exemple 1

Dans le cas de la pièce représentée en figure 10, toutes les coordonnées du dessin sont données à partir du bord inférieur gauche. Il est donc naturel de prendre ce point comme origine. Le lecteur vérifie aisément que les axes des trois trous ont les coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned} P1 &: X = 15,\ Y = 55 \\ P2 &: X = 45,\ Y = 12 \\ P3 &: X = 75,\ Y = 50 \end{aligned}$$

Exemple 2

On demande les cotes des points $P1$ et $P2$ de la figure 11, dans le système d'axes représenté. On a

$$\begin{aligned} P1 &: X = 35,\ Y = 30,\ Z = 0 \\ P2 &: X = 70,\ Y = 0,\ Z = -30 + 15 = -15 \end{aligned}$$

Exemple 3

On demande, pour la pièce représentée en figure 12,
- de choisir l'origine ;
- de coter les points a à h.

Il est facile de voir que l'origine la plus opportune est le point b. Les coordonnées X et Y des différents points sont :

$$\begin{aligned} a &: X = -100,50;\ Y = 0 \\ b &: X = 0;\ Y = 0 \\ c &: X = 0;\ Y = 55 \\ d &: X = -100,50;\ Y = 55 \\ e &: X = -85,63;\ Y = 5,20 \\ f &: X = -10;\ Y = 5,20 \\ g &: X = -10;\ Y = 50,75 \\ h &: X = -40,75;\ Y = 50,75 \end{aligned}$$

Exemple 4

On demande, pour la pièce représentée en figure 13,
- de choisir l'origine ;
- de coter les points a à i.

Ici, le choix le plus opportun de l'origine est le point du côté ab situé sur la hauteur abaissée du point h. Les coordonnées X et Y des différents points sont alors :

$$\begin{array}{lcl}
a & : & X = -50;\ Y = 0 \\
b & : & X = 50;\ Y = 0 \\
c & : & X = 50;\ Y = 50 \\
d & : & X = -50;\ Y = 50 \\
e & : & X = -40;\ Y = 10 \\
f & : & X = 40;\ Y = 10 \\
g & : & X = 40;\ Y = 30 \\
h & : & X = 0;\ Y = 45 \\
i & : & X = -40;\ Y = 30
\end{array}$$

7.2.4 Changement d'origine

Il est possible de déplacer le zéro programmé en cours d'usinage. Cette possibilité facilite, par exemple, la répétition d'un motif donné en deux endroits de la pièce (*fig. 14*).

7.2.5 Cotation absolue et cotation relative

Lorsque l'outil se trouve en une position donnée, il est possible de lui définir une nouvelle position de deux manières. On parle de cotation absolue ou de cotation relative.

- Dans la *cotation absolue*, on définit la position du point d'arrivée par rapport au zéro programmé (*fig. 15*). Pour spécifier ce type de cotation, on emploie l'ordre $\boxed{G90}$.
- Dans la *cotation relative* (ou *incrémentale*), on définit les composantes du déplacement faisant passer du point de départ au point d'arrivée (*fig. 16*). Pour spécifier ce type de cotation, on utilise l'ordre $\boxed{G91}$.

A titre d'illustration, considérons en figure 17 le passage du point A au point B. En cotation absolue, on écrira

$$G90\ X - 10\ Y + 30$$

tandis qu'en cotation relative, on écrira

$$G91\ X + 30\ Y + 30$$

7.2.6 Ordres modaux et ordres séquentiels

Un certain nombre d'ordres constituant un programme restent valables tant qu'on ne les modifie pas explicitement. C'est ce que l'on appelle des ordres *modaux*. Au rang de ceux-ci se trouve par exemple la fréquence de rotation de la broche S.

D'autres ordres varient systématiquement d'une instruction (ligne de programme) à l'autre. On parle alors d'ordres *séquentiels*. C'est notamment le cas des coordonnées.

7.2.7 Étapes de la programmation

L'établissement d'un programme passe par les étapes suivantes :

1. Fixer l'origine et les axes.
2. Déterminer les coordonnées.
3. Établir la *gamme opératoire* :
   - Définir les déplacements.
   - Définir pour chacun de ceux-ci la vitesse d'avance F et la vitesse de rotation de la broche S.
   - Choisir les outils.
   - Définir les conditions de travail, arrosage, etc.
4. Traduire la gamme en instructions.
5. Introduire le programme dans la machine.
6. Tester le programme (simulation à l'écran ou pièce d'essai en matériau tendre, genre *uréol*)
7. Exécution du programme.

7.2.8 Les déplacements

Le type de déplacements est défini par une instruction $\boxed{G}$. Nous retiendrons

1. Les déplacements en ligne droite : $\boxed{G01}$. Cet ordre est *modal* et en outre, il s'agit de l'option par défaut. En d'autres termes, ne rien dire équivaut à dire $G01$.
2. Les déplacements circulaires,
   - dans le sens des aiguilles d'une montre, $\boxed{G02}$.
   - dans le sens trigonométrique, $\boxed{G03}$.

   Dans les deux cas, il s'agit d'un ordre *séquentiel.*
3. Les positionnements rapides, $\boxed{G00}$. Ici, la machine va se positionner à l'endroit spécifié aussi vite que possible. On ne peut donc pas spécifier de vitesse d'avance et, par ailleurs, la vitesse de rotation de la broche peut être nulle.

En outre, on peut spécifier le type de cotation, par les ordre suivants :
- Cotation absolue : $\boxed{\text{G90}}$. C'est l'option standard.
- Cotation relative : $\boxed{G91}$.

Ces ordres sont *modaux.*

Pour l'exemple de la figure 18, on pourra procéder ainsi :

ISN1 :	Avance rapide jusqu'en $P1$. Mettre la broche en rotation
ISN2 :	Aller en ligne droite vers $P2$. Vitesse d'avance donnée
ISN3 :	Aller de $P2$ en $P3$, selon un cercle de centre $C1$. v_f donnée
ISN4 :	Aller de $P3$ à $P4$ en ligne droite. Vitesse d'avance donnée.
ISN4 :	Aller de $P4$ en $P1$ en ligne droite. Vitesse d'avance donnée.
ISN5 :	Retour rapide à l'origine. Arrêt de la rotation de broche.

Nous verrons plus loin comment programmer effectivement des étapes de ce genre.

7.2.9 Fréquence de rotation de la broche

La fréquence de rotation de la broche se note $\boxed{S}$. Il s'agit d'un ordre *modal*. Selon la machine, la gamme des fréquences de rotation peut être continue ou discrète. Elle s'exprime toujours en *tr/min*. Comme l'illustre la figure 19, la fréquence de rotation est positive dans le sens du tire-bouchon, selon l'axe allant du pied de l'outil à sa tête. Elle est négative dans le sens contraire.

7.2.10 Vitesse d'avance

La vitesse d'avance s'exprime par $\boxed{F}$. Elle s'exprime en *mm/min*. C'est un ordre *modal*. Cette spécification ne vaut que si $S \neq 0$.

7.2.11 Changement d'outil

L'instruction $\boxed{Tnn}$ demande le passage à l'outil numéro nn . Sur un centre d'usinage, ce changement est automatique. Sur une machine sans changement automatique, cette instruction provoque l'arrêt de la machine avec un message demandant à l'opérateur de placer l'outil nn. *Attention : cette opération efface les valeurs de F et S.*

7.2.12 Fonctions de commande

Il s'agit d'ordres régissant le mode de fonctionnement de la machine. Ils s'expriment par $\boxed{\mathrm{M}}$. Citons les principaux :

M08 :	Arrosage	*modal*
M09 :	Arrêt de l'arrosage	*modal*
M02 :	Fin de programme	(*arrête F et S*)
M30 :	Idem, avec retour en début de programme	

7.2.13 Exemple d'interpolation linéaire

Pour illustrer l'interpolation linéaire, considérons l'exemple simple suivant : il s'agit de creuser une rainure selon le plan de la figure 20. L'origine est le point A, à ras du haut de la pièce. On procédera comme suit :

1. Relever l'outil $2mm$ au-dessus de la pièce, en mettant la broche en rotation.
2. Amener le centre de la fraise au-dessus du point B.
3. Plonger
4. Aller de B en C
5. Sortir de la pièce et revenir au point de départ.

Voyons d'abord comment programmer ce travail en cotation absolue. On écrira

N0001	$G00$	$Z+2$	$S+500$	(*On se place plus haut que la pièce, en rapide*)
N0002	$G00$	$X+30$	$Y+15$	(*On se place au-dessus de B*)
N0003	$(G01)$	$Z-5$	$F100$	(*Plongée à $100mm/min$*)
N0004	$X+80$	$Y+60$	$F200$	(*Rainurage à $200mm/min$*)
N0005	$G00$	$Z+2$		(*Dégagement de l'outil*)
N0006	$M30$			

Écrivons à présent la même séquence en relatif, avec arrosage

N0001	$G00$	$Z+2$	$S+500$		
N0002	$G00$	$X+30$	$Y+15$		
N0003	$G91$	$\mathbf{Z-7}$	$F100$	**M08**	
					($\textit{relatif et arrosage}$)
N0004	$\mathbf{X+50}$	$\mathbf{Y+45}$	$F200$		
N0005	$G90$				(*retour en absolu*)
N0006	$G00$	$Z+2$	**M09**		(*fin arrosage*)
N0007	$M30$				

7.2.14 Interpolation circulaire

Rappelons que l'interpolation circulaire se commande par $\boxed{\text{G02}}$ pour une rotation horlogique et par $\boxed{\text{G03}}$ pour une rotation anti-horlogique. Il y a deux façons de programmer cette interpolation.

Par le centre et le point final

Supposons (*fig. 21*) que l'on se trouve au point $A = (50;100)$. On veut aller au point $B = (150;100)$ en suivant un cercle de centre $C = (100;100)$. Il faut, évidemment, que les longueurs CA et CB soient égales. Les coordonnées du centre sont notées (I,J,K). mais attention, selon les commandes, l'option standard est d'exprimer ces coordonnées en absolu ou en relatif par rapport à A. Le plus sûr est de spécifier le système choisi. On écrira par exemple

$$G90\ I+100\ J+100\ G02\ X+150\ Y+100\ F150$$

Si le point final n'est pas défini, la machine exécutera un cercle complet. En relatif, on écrira

$$G02\ X+150\ Y+100\ G91\ I+50\ J+0\ F150$$

Par le point final et le rayon

On obtiendra le même arc de cercle en écrivant

$$G02\ X+150\ Y+100\ R+50\ F150$$

Ici, bien entendu, il faut que la distance de A à B soit inférieure ou égale à $2R$.

7.2.15 Corrections d'outil

Correction de longueur

Il se peut que le programme ait été écrit en supposant que l'outil avait une longueur donnée, mais que l'on utilise un outil de longueur différente (*fig. 22*). On peut spécifier au programme que l'outil a un supplément de longueur L.

Correction de rayon

En contournage, le centre d'un outil de rayon R doit suivre une trajectoire constamment à une distance R du profil à réaliser. Cette trajectoire est du reste arrondie au passage d'un angle saillant (*fig. 23*). (Notons au passage qu'il est impossible de réaliser un angle rentrant vif : il aura toujours le rayon de la fraise.) Programmer directement une telle trajectoire corrigée serait fastidieux. Heureusement, les commandes de contournage sont capable de réaliser ces corrections de trajectoire, à condition que l'on donne le rayon de l'outil.

Définition de l'outil

Pour pouvoir établir ces deux corrections, il faut définir l'outil à l'aide de l'ordre $\boxed{G99}$. On écrit

$G99$	$T1$	$L+10$	$R+20$
	numéro outil	*correction longueur*	*rayon*

Correction de trajectoire

Il y a en fait (*fig. 24*) deux façons de corriger la trajectoire, selon que l'outil est à gauche de la pièce ou à sa droite. Les ordres correspondants sont

$G41$	pour une correction avec l'outil à gauche
$G42$	pour une correction avec l'outil à droite
$G40$	pour annuler la correction

Ces ordres sont *modaux*.

7.2.16 Problème de l'accostage

Lorsqu'il faut réaliser le contournage d'un profil, l'outil part nécessairement d'un point extérieur au profil et plus ou moins éloigné de celui-ci. La tendance naturelle serait de rejoindre le profil par le chemin le plus court (trajectoire OA, *fig. 25*). Mais dans cette procédure, l'outil est obligé au point A de s'arrêter contre le profil, ce qui est impossible de manière instantanée, en raison des inerties. Il en résulte immanquablement une surcoupe (en anglais : *overcut*) qui endommage le profil. Pour éviter cela, il convient de réaliser ce que l'on appelle un *accostage tangentiel*, c'est-à-dire de suivre une trajectoire circulaire qui se raccorde tangentiellement au profil (*fig. 26*). Un certain nombre de commandes numériques contiennent des instructions permettant de simplifier la programmation de cet accostage [44].

Chapitre 8

Sciage et brochage

8.1 Remarque préliminaire

Si nous groupons dans ce chapitre le sciage et le brochage, c'est qu'au-delà de différences bien nettes, la scie et la broche ont en commun d'être constituées d'une succession d'outils élémentaires, dont plusieurs coupent en même temps dans un même espace confiné à l'intérieur de la pièce. Il en résulte que ces deux procédés sont fortement conditionnés par le problème de l'*évacuation des copeaux*.

8.2 Sciage

8.2.1 Sciage alternatif et sciage continu

Comme le montre la figure 1, le mouvement de coupe de la scie est le mouvement tangentiel à l'enveloppe de la denture, et le mouvement d'avance lui est perpendiculaire. La scie découpe dans la pièce un *trait de scie* de largeur e. La denture de la scie a un pas p.

Le sciage alternatif est celui où la scie coupe dans un sens, puis revient. Toutes les scies manuelles relèvent de cette catégorie. Lors de la course aller, chaque dent de la scie découpe un copeau, qui reste stocké devant elle tant qu'elle ne sort pas de la pièce. Ce n'est qu'à ce moment que ce petit copeau peut être évacué. En conséquence, la longueur L de la scie doit au moins valoir le double de la largeur ℓ de la pièce à couper, sans quoi elle ne pourra se décharger de ses copeaux (*fig. 2*). Quant à la course retour, elle doit se faire sans appliquer d'effort d'avance, pour ne pas user inutilement la denture.

Le sciage continu se rencontre sur les scies à ruban, où un ruban fermé s'enroule sur deux poulies au moins, et sur les scies circulaires. Dans cette configuration, l'évacuation des copeaux se fait lors de la sortie de chaque dent de la pièce.

8.2.2 Règle des deux dents

Dans le cas où la pièce a une largeur ℓ inférieure au pas, elle s'engrène dans la denture, et tend à être entraînée par la scie. Pour éviter ce phénomène, il faut qu'à la sortie d'une dent, la dent suivante soit déjà dans la pièce. C'est la règle des deux dents :

Règle 12 *Il faut toujours que l'on puisse avoir deux dents en prise. En d'autres mots, on doit avoir*

$$p < \ell$$

8.2.3 Temps minimum de sciage

La présence des copeaux dans les intervalles entre les dents pendant que la scie se trouve dans la pièce conditionne essentiellement le temps de sciage. Nous examinerons le cas de la scie à ruban. Soit (*fig. 3*) S la surface de l'intervalle entre deux dents. Elle détermine la quantité de copeaux que la scie peut stocker sur la longueur d'un pas :

$$V_{Cp,p} = \frac{Se}{R}$$

où e est la largeur du trait de scie et R, le coefficient d'encombrement du copeau, rapport entre le volume qu'il occupe et son volume propre. Le temps pour que la scie avance d'un pas est donné par

$$t_p = \frac{p}{v_c}$$

Donc le débit maximal de copeau est donné par

$$Q_M = \frac{V_{Cp,p}}{t_p} = \frac{v_c Se}{pR}$$

Or, si ℓ est la longueur engagée de la scie, le débit vaut visiblement

$$Q = \ell e v_f$$

On en déduit la relation

$$Q_M = \ell e v_{fM} = \frac{v_c Se}{pR}$$

ce qui fournit la vitesse maximale d'avance

$$v_{fM} = \frac{v_c S}{pR\ell}$$

Soit alors à couper une pièce de section Ω définie par une distribution de largeur $\ell(x)$, $x \in [0, h]$, h étant la hauteur de la pièce dans la direction de l'avance (*fig.3*). Le temps nécessaire pour avancer d'une hauteur dx est donné par

$$dt_{um} = \frac{dx}{v_{fM}(x)} = \frac{pR\ell(x)}{v_c S}$$

si bien que le temps minimum de découpage de la section est donné par

$$t_{um} = \frac{pR}{v_c S} \int_0^h \ell(x)dx = \frac{R\Omega}{v_c} \frac{p}{S}$$

Ce temps est proportionnel à la section à couper, au coefficient d'encombrement du copeau et à l'inverse de la vitesse de coupe, ce qui n'a rien d'étonnant. Mais il est aussi inversement proportionnel à la *hauteur moyenne des espaces entre dents*

$$H = \frac{S}{p}$$

notion illustrée en figure 5. C'est la raison pour laquelle les scies à bois des bûcherons ont une denture très évidée. Mais on ne peut avoir des dentures aussi évidées pour couper les métaux, car les dents seraient insuffisamment résistantes. Les scies à métaux ont donc des dents plus petites.

8.2.4 Voie

Pour éviter le pincement de la scie dans la pièce à couper, il faut que le trait de scie soit plus large que la lame. On obtient ce résultat en *avoyant* la scie, ou comme on dit encore, en lui donnant une *voie*. Ceci se fait soit en inclinant les dents alternativement de part et d'autre de la lame, soit en donnant à la partie active de la lame une ondulation sinusoïdale (*fig. 6*) – pratique courante dans le cas de petites dents.

De toute manière, les *conditions d'appui* doivent être prévues pour éviter le pincement de la scie par fermeture des lèvres de la coupure. En particulier, il faut toujours scier en porte-à-faux sur les appuis (*fig. 7*).

8.2.5 Vitesses de coupe

Selon [49], on peut adopter les vitesses de coupe suivantes pour une scie à ruban :

Vitesses de coupe, m/min	
Matériau	vitesse
E295, C15-C22	40...50
E295-E335, C35-C45	40...45
E360, C60	20...30
16MnCr5, 30Mn5	30...35
Fonte	25...40
CuZn37, CuZn30	80...120
Alliages alu, 9-13% Si	60...70

8.3 Brochage

8.3.1 Généralités

Le brochage consiste à faire passer une *broche*, outil multiple, à l'intérieur ou contre une pièce (*fig. 8*). Dans le cas du brochage intérieur, la pièce traverse la pièce. Pour pouvoir enfiler la broche, il faut donc réaliser au préalable un trou débouchant dans la pièce.

Une rotation relative entre la broche et la pièce, combinée avec le mouvement axial, permet d'obtenir des surfaces hélicoïdales, avec un angle d'hélice pouvant aller jusqu'à 45°.

La broche est un outil complexe, dont il faut confier la réalisation à un spécialiste. C'est toujours un outil *coûteux*. On ne peut donc envisager le brochage que pour des travaux en série ou des opérations très difficiles, comme le découpage des rainures en pied de sapin des turbines. Pour des réalisations unitaires, un procédé alternatif est l'électro-érosion à fil.

8.3.2 La broche

Chaque dent de la broche rentre un peu plus dans la matière que la précédente. Cette *progression* e d'une dent à l'autre (*fig. 10*) prendra des valeurs de l'ordre de celles que préconise le tableau ci-dessous [12] :

EXEMPLES DE PROGRESSION e/mm			
Matériau	Ebauche	1/2 finition	Finition
Ac, $R_m < 700$ MPa	0,06	0,04	0,02
Fonte	0,2	0,08	0,02
Bz, laiton	0,3	0,16	0,02

Comme la broche fait généralement à la fois l'ébauche et la finition, la progression varie de la tête à la queue de la broche. Il arrive même que l'on place en queue de broche des *étages de brunissage* (*fig. 9*) dont le seul rôle est de repousser les rugosités pour améliorer l'état de surface.

Il faut, dans la conception de la broche, songer au *stockage du copeau* (*fig. 10*). La surface S du vide entre deux dents doit surpasser celle du copeau, à savoir, $Re\ell$, où R est le coefficient d'encombrement du copeau, e, la progression de la dent et ℓ, la longueur de prise dans la pièce. Le bourrage éventuel des copeaux endommage la pièce et risque même d'entraîner la *rupture de la broche*.

8.3.3 Broches standard

Il existe des broches standard permettant d'obtenir

- Des rainures de clavettes.
- Des moyeux hexagonaux et carrés.
- Des cannelures à flancs parallèles.
- Des cannelures à flancs en développante de cercle.
- Des dentures rectilignes.

8.3.4 Résistance de la broche

La force de traction sur la tête de la broche est donnée par

$$F = k_c \sum_{\text{étages en prise}} bh$$

où

$$\begin{aligned} b &= \text{largeur du tranchant} \\ h &= \text{épaisseur de coupe} \end{aligned}$$

Cette force permet de déterminer la section Ω de la tête de broche par la formule

$$\Omega = \frac{F}{\sigma_{adm}}$$

Le même calcul doit être réalisé à chaque étage, en fonction des étages suivants en prise lorsque cet étage sort de la pièce.

8.3.5 Vitesses de coupe

Pour une broche en acier rapide, les vitesses de coupe peuvent être estimées comme suit [12] :

Estimation des vitesses de coupe $v_c/(m/min)$		
MATIÈRE	Brochage intérieur	Brochage extérieur
Ac, $R_m \leq 600$ Mpa	2...4	4...6
Ac, $R_m \leq 900$ Mpa	1,5...3	2...5
Alliages Alu	4...6	6...10
Ft20	2...4	5...8
Bronze, laiton	3...6	6...10

Chapitre 9

Taillage des roues dentées

9.1 Rappels sur les engrenages

Un engrenage extérieur est formé de deux roues dentées, dont la plus petite est appelée *pignon* et la plus grande, *roue*. On appelle *cercles primitifs* les cercles de ces deux roues qui roulent sans glisser en leur point commun I. C'est le diamètre du cercle primitif qui sert de référence.

En termes de cinématique, le point I susnommé est le centre instantané de rotation du mouvement relatif des deux roues. Considérons alors un couple de dents qui s'engrènent (*fig. 1*). Elles doivent tout d'abord être tangentes l'une à l'autre en leur point de contact. En ce point, le seul mouvement relatif des dents est évidemment dirigé selon leur tangente commune. Pour que ce mouvement soit possible, il faut vérifier la condition suivante :

Théorème 1 *Chaque fois que deux dents sont en prise, la normale commune en leur point de contact, dite* ligne de pression*, passe par le centre instantané de rotation I.*

La ligne de presssion est donc une droite passant par le point I et faisant avec la tangente commune des deux cercles primitifs un angle α dit *angle de pression*. Selon le type de denture envisagé, cet angle peut varier d'une position à l'autre.

- La denture en cycloïde, largement utilisée jadis, donne un angle de pression variable. Il en résulte que la force de séparation des roues varie dans le temps, ce qui tend à engendrer des vibrations d'autant plus fortes que l'effort transmis est plus grand. Elle nécessite en outre un entraxe très précis, ce qui rend la réalisation coûteuse. Enfin, le taillage de ces dents est compliqué. C'est pourquoi, ce genre de dentures a complètement disparu en mécanique de puissance et ne subsiste qu'en horlogerie, où les efforts transmis sont très faibles et où le bon rendement de ce genre de dentures est apprécié.
- En mécanique de puissance, on utilise exclusivement la denture en *développante de cercle*, qui est caractérisée par un angle de pression constant, qui s'accommode d'un entraxe imprécis au prix d'une petite modification de l'angle de pression et qui, nous le verrons, peut être taillée à l'aide d'une crémaillère à dents droites facile à réaliser. Nous ne nous occuperons ici que de ce type de denture.

9.2 Denture en développante

9.2.1 Définition

L'angle de pression α est actuellement normalisé à la valeur $\alpha = 20°$, bien qu'on trouve encore parfois des engrenages à 15° (anciens engrenages allemands) ou à $14,5°$ (pays anglo-saxons). Notons D le diamètre primitif de la roue et d le diamètre primitif du pignon. On appelle *cercles de base* les cercles concentriques aux précédents, et de diamètres $D_b = D\cos\alpha$ et $d_b = d\cos\alpha$. Imaginons que l'on enroule une ficelle autour des deux cercles de base, et passant par le point de contact I des deux cercles primitifs (*fig. 2*). Cette ficelle matérialise la ligne de pression et, en vertu du théorème 1, les dents doivent toujours avoir cette ligne comme normale. Cette condition est vérifiée si le profil de la dent est la courbe obtenue en déroulant la ficelle d'une des roues (*fig. 3*). Cette courbe porte le nom de *développante de cercle*. Elle n'est évidemment définie que pour des rayons supérieurs au rayon du cercle de base.

9.2.2 Notion de module

Pour pouvoir engrener correctement, il faut évidemment que la roue et le pignon aient, sur les cercles primitifs, le même pas. Celui-ci est donné par

$$p = \frac{\pi D}{Z}$$

où Z est le nombre de dents. Il s'agit malheureusement d'un nombre irrationnel, si bien que l'on introduit la notion de module m, définie par

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{D}{Z}$$

Ce sont les modules qui sont normalisés. La dent s'étend de part et d'autre du cercle primitif, la partie saillante, dite *addendum* ayant une hauteur égale à m et la partie en creux, dite *dedendum*, une hauteur égale à $1,25m$. La hauteur totale de la dent est donc de $2,25m$.

9.2.3 Crémaillère

Supposons que le diamètre de la roue croisse indéfiniment. Sa circonférence deviendra donc rectiligne, et le point B de la figure 2 s'éloignera indéfiniment du point I, ce qui signifie que les dents de la crémaillère seront rectilignes. C'est là une propriété importante des dentures en développante de cercle :

Théorème 2 *Un pignon ayant des dents en développante de cercle s'engrène correctement sur une crémaillère à dents droites (fig. 4).*

C'est du reste cette propriété qui a fait introduire la denture en développante, car la crémaillère est facile à réaliser et peut servir d'outil de taillage.

9.3 Taillage par génération

Le taillage par génération consiste à utiliser des outils simulant les conditions d'engrènement. On peut distinguer (*fig. 4*) [24, 51] l'outil crémaillère, l'outil pignon et la fraise-mère.

9.3.1 Outil crémaillère

Le principe de l'engrènement avec une crémaillère conduit naturellement à l'idée du taillage avec un outil crémaillère. Dans ce procédé, l'outil va et vient selon un mouvement de rabotage, creusant une position des dents. On fait alors tourner la roue d'un petit angle $\Delta\alpha$ et déplacer latéralement la crémaillère d'une longueur $\frac{D}{2}\Delta\alpha$, et l'outil opère un nouveau va-et-vient.

Pour une denture hélicoïdale, la crémaillère est oblique et son mouvement de va-et-vient se fait dans la direction de la denture (*fig. 6*).

Interférence de taillage

Si le nombre de dents de la roue à tailler est strictement inférieur à une certaine valeur Z_m dépendant de l'angle de pression α, les sommets des dents de la crémaillère recoupent la racine des dents de la roue, ce qui fausse le profil et affaiblit la dent (*fig. 7*). C'est ce que l'on appelle l'*interférence de taillage*. Le nombre de dents Z_m est donné par le tableau suivant :

angle de pression	Z_m
$20°$	17
$14°30'$	32

9.3.2 Outil pignon

A la plce d'une crémaillère, on peut utiliser comme outil un pignon. Ce procédé permet en outre de tailler les dentures internes, ce que ne permet évidemment pas une crémaillère.

9.3.3 Fraise-mère (*hob*)

Le principe de la fraise-mère est l'engrènement d'une vis tangente (*fig. 9*). La fraise-mère est en quelque sorte une vis découpée en secteurs (*fig. 8*). En faisant tourner la fraise-mère à une fréquence de rotation N_f, on dessine sur la roue une empreinte en forme de cuvette, comme celle de la roue d'une vis tangente. Cela suppose naturellement (*fig. 10*), si p est le pas de la vis, une rotation simultanée de la roue à une vitesse

$$v = N_f p \cos\beta$$

soit à une fréquence

$$N_r = \frac{v}{\pi d} = \frac{N_f p \cos\beta}{\pi D} = N_f \frac{m}{D} cos\beta = \frac{N_f}{Z}\cos\beta$$

L'angle d'hélice obtenu sur la roue vaut $(\gamma - \beta)$ où γ est l'angle d'hélice de la fraise-mère. Un mouvement secondaire d'avance de la fraise-mère selon la direction de la denture de la roue permet d'obtenir une denture complète sur la roue.

9.4 Taillage à l'outil de forme

9.4.1 Fraise au module

On appelle *fraise au module* une fraise ayant la forme de l'espace entre deux dents (*fig. 11*). En principe, pour un module donné, il faut une fraise différente pour chaque nombre de dents, car le profil dépend de Z. En pratique, on dispose d'un jeu de huit fraises au module permettant dans tous les cas un taillage suffisamment approché :

fraise numéro	nombres de dents
1	12-13
2	14-16
3	17-20
4	21-25
5	26-34
6	35-65
7	55-134
8	135 - ∞

9.4.2 Fraise-doigt

Ce type de fraise s'utilise pour tailler les engrenages à chevrons (*fig. 12 et 13*). Après l'opération de taillage, le sommet du chevron est pointu et il faut évidemment l'arrondir. C'est le but de l'opération d'*échanfrinement* réalisée après taillage, opération pour laquelle la Société des Engrenages Citroën a inventé un dispositif ingénieux [26]. L'engrenage à chevrons est, depuis, devenu l'emblème de la société Citroën.

Chapitre 10

Filetage au tour

10.1 Généralités

Le filetage au tour nécessite une avance par tour *précisément* égale au pas p du filet à réaliser. A cette fin, on utilise généralement la *vis-mère* du tour, qui est une vis *très précise* de pas p_{VM}. On réserve la vis-mère à ce seul usage, de manière à l'user le moins possible. En effet, l'usure de la vis-mère, généralement non uniforme, peut être une cause d'*ivresse* du pas réalisé.

La liaison entre la broche et la vis-mère doit être *positive*, c'est-à-dire fondée sur le mouvement et non sur l'effort. Les courroies sont donc proscrites, de même que toute espèce de transmission à friction, et on recourt à des engrenages. Pour pouvoir monter n'importe quelle combinaison de roues, on utilise le dispositif dit *tête de cheval* ou encore *lyre*, qui est représenté en figure 1. Les roues dentées sont montées sur la tête de cheval à l'aide de *cavaliers*, qui se fixent en un point donné d'une des fentes de la tête de cheval. Le montage est représenté en figure 2. Nous conseillons au lecteur d'examiner cette figure avec attention pour bien situer les jeux et serrages fonctionnels. La figure 3 illustre un dispositif à 4 roues monté sur un tour classique.

On utilise en pratique

- Le dispositif à *deux roues*, dispositif plan dans lequel l'ajout éventuel d'une roue intermédiaire. quelconque ne fait qu'inverser le sens de rotation (filet droit ou filet gauche).
- Le dispositif à *quatre roues*, sur deux plans.
- Le dispositif à *six roues*, également sur deux plans, avec deux cavaliers.

Il est rare d'utiliser plus de six roues.

10.2 Rapport de démultiplication

L'engrenage liant la vis-mère à la broche est conçu de manière à assurer qu'à un tour de la vis corresponde un nombre i de tours de la vis-mère, c'est-à-dire que

$$n_{VM} = i \cdot n_{broche}$$

Ce nombre i, fractionnaire, est ce que l'on appelle le *rapport de démultiplication*. La valeur qu'il faut lui donner s'établit comme suit : pour un tour de la broche, le chariot doit se déplacer du pas p de la vis à tailler. Or, pendant ce temps, la vis-mère tourne de i tours, ce qui correspond à une avance du chariot de $i \cdot p_{VM}$. L'égalité de ces deux mouvements d'avance s'exprime par la relation

$$p = i \cdot p_{VM}$$

ce qui donne la relation fondamentale

$$i = \frac{p}{p_{VM}} \tag{10.1}$$

Soit un engrenage à deux roues. La roue menante (côté broche) possède Z_1 dents, et la roue menée, Z_2 dents. Les deux roues ont la même vitesse tangentielle sur leur cercle primitif,

$$v = N_1 \pi d_1 = N_2 \pi d_2$$

Le diamètre de chaque roue est égal au produit de son nombre de dents Z par le module commun m. On a donc

$$N_1 \pi Z_1 m = N_2 \pi Z_2 m$$

soit

$$N_1 Z_1 = N_2 Z_2 \tag{10.2}$$

Donc

$$i = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \tag{10.3}$$

Dans le cas de quatre roues, la roue 2 et la roue 3 sont calées sur le même arbre, donc $N_2 = N_3$. Alors,

$$i = \frac{N_4}{N_1} = \frac{N_4}{N_3}\frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{Z_3}{Z_4} \tag{10.4}$$

Enfin, dans le cas de six roues, on aura $N_2 = N_3$ et $N_4 = N_5$ donc

$$i = \frac{N_6}{N_1} = \frac{N_6}{N_5}\frac{N_4}{N_3}\frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{Z_3}{Z_4}\frac{Z_5}{Z_6} \tag{10.5}$$

Tout ceci est simple en principe. La difficulté essentielle consiste à obtenir le rapport de démultiplication voulu *à partir des roues du jeu standard du tour.*

10.3 Série de roues complète

Une série de roues complète comprend

– Toutes les roues de 20 à 29 dents, dent par dent (*10 roues*)

– Les roues de 30 à 90 dents, par sauts de 5 dents (*13 roues*)

– Les roues de 100, 110 et 120 dents (*3 roues*)

– La roue de 127 dents, indispensable pour les filets en pouces (*1 roue*)

soit au total, 27 roues.

10.4 Exemple 1

Il s'agit de réaliser **un pas de** $0,5mm$ **avec une vis-mère dont le pas vaut** $10mm$. On a

$$i = \frac{0,5}{10} = \frac{5}{100}$$

On ne possède pas de couple de roues avec des nombres de dents dans un rapport de 100 à 5. Il n'est donc pas possible de s'en sortir avec seulement deux roues. Commençons par réduire la fraction i à sa plus simple expression, puis décomposons en facteurs plus petits :

$$i = \frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5}$$

et essayons de réaliser ce rapport comme un produit de rapports de nombres de dents standard :

$$i = \frac{25}{100} \cdot \frac{24}{120} \quad \text{ou} \quad i = \frac{20}{80} \cdot \frac{24}{120}$$

Il faut noter qu'il n'est pas possible d'utiliser deux fois la même roue. Ainsi, on ne pourrait pas écrire

$$i = \frac{20}{80} \cdot \frac{20}{100}$$

car on ne possède qu'*une* roue à 20 dents.

10.5 Exemple 2

On veut réaliser **un pas de** $0,765mm$ **avec une vis-mère dont le pas vaut** $10mm$. Ici,

$$i = \frac{0,765}{10} = \frac{765}{10000}$$

On commence par réduire la fraction i à sa plus simple expression en divisant son numérateur et son dénominateur par leur pgcd que l'on obtient comme suit (voir annexe) :

	13	13	1	10
10 000	765	55	20	5
9 945	715	50	50	
55	50	5	0	

Le pgcd vaut donc 5, ce qui ramène la fraction à

$$i = \frac{153}{2000}$$

Décomposons les deux termes de la fraction en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad 153 = 3^2 \cdot 17$$

et

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 2 \\ 1000 & 2 \\ 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 2000 = 2^4 \cdot 5^3$$

La fraction se ramène donc à

$$\begin{aligned} i &= \frac{3^2 \cdot 17}{2^4 \cdot 5^3} = \frac{9 \cdot 17}{16 \cdot 125} = \frac{9 \cdot 17}{80 \cdot 25} \\ &= \frac{27 \cdot 85}{80 \cdot 75 \cdot 5} = \frac{27 \cdot 85 \cdot 20}{80 \cdot 75 \cdot 100} \end{aligned}$$

Ceci nécessite un montage à six roues. Apreès ces calculs, il est prudent de faire la *preuve*, c'est-à-dire de vérifier que le rapport obtenu vaut bien 0,0765.

10.6 Pas en pouces

Les machines anglo-saxonnes utilisent des pas en pouces. Rappelons que le pouce vaut $25,4mm$ et se divise en douze *lignes*. Soit par exemple à **réaliser un pas d'une ligne avec une vis-mère de** $10mm$ **de pas**. On a

$$i = \frac{25,4}{12 \cdot 10} = \frac{254}{120 \cdot 10} = \frac{127}{120 \cdot 5} = \frac{127 \cdot 20}{120 \cdot 100}$$

On notera que le nombre 127 est premier, ce qui nécessite d'avoir une roue à 127 dents dans le jeu standard.

10.7 Pas bâtard

Supposons que l'on veuille **réaliser un pas de** $1,64mm$ **avec une vis-mère dont le pas vaut** $10mm$. Le rapport de démultiplication vaut donc

$$i = \frac{1,64}{10} = \frac{164}{1000} = \frac{41}{250} = \frac{41}{25}\frac{1}{10}$$

Le numérateur contient le nombre premier 41 et, aucun multiple de ce nombre n'existe dans le jeu de roues. Ce pas est donc irréalisable de manière exacte, sauf à tailler spécialement une roue à 41 dents. Excluant cette solution coûteuse, on est obligé de remplacer le rapport de démultiplication par une *approximation*. C'est ce que l'on appelle réaliser un pas *bâtard* ou *approché*. La méthode généralement utilisée consiste à développer la fraction 41/25 en fraction continue (voir annexe). On calcule d'abord le pgcd :

	1	1	1	1	3	2
41	25	16	9	7	2	1
25	16	9	7	6	2	
16	9	7	2	1	0	

On en déduit

$$\frac{41}{25} = (1,1,1,1,3,2)$$

Le calcul des réduites successives se fait à l'aide du tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6
q	-	1	1	1	1	3	2
N	1	1	2	3	5	18	41
D	0	1	1	2	3	11	25
$erreur^{-1}$	-	1	2	6	33	265	0

On constate que la réduite d'ordre 5, 18/11, conduit à une erreur inférieure à 1/265, soit une erreur relative inférieure à

$$\frac{1}{265}\frac{25}{41} = 2,301 \cdot 10^{-3}$$

On peut donc adopter ce rapport approché, ce qui donne

$$i_{\text{bâtard}} = \frac{18}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{18}{55} \cdot \frac{1}{2} = \frac{18}{55} \cdot \frac{20}{40}$$

par exemple.

10.8 Pas au module

Dans les mécanismes à vis tangente, la vis s'engage sur une roue dentée. Cette roue a un diamètre rationnel, par exemple, $d = 100mm$, et un nombre de dents Z. Le *module apparent*, rapport du diamètre au nombre de dents, est donc un nombre rationnel, généralement simple et d'ailleurs choisi dans une série normalisée. Pare contre, le pas p, rapport entre la circonférence et le nombre de dents, est donné par

$$p = \frac{\pi d}{Z} = \pi m$$

C'est donc un multiple de π. C'est ce que l'on appelle un *pas au module*. La difficulté, dans ce cas, réside dans le fait que π est irrationnel, c'est-à-dire non représentable exactement par une fraction. Ici encore, on fait appel aux fractions continues pour trouver une réduite suffisamment approchée. Le calcul des premières réduites de π est donné en annexe. Nous retiendrons :

– La réduite d'ordre 2,

$$\text{Rapport d'Archimède} = \frac{22}{7}$$

dont l'erreur relative est inférieure à

$$\frac{1}{742\pi} \approx 4,3 \cdot 10^{-4}$$

– La réduite d'ordre 4,

$$\text{Rapport de Métius} = \frac{355}{113}$$

dont l'erreur relative est inférieure à

$$\frac{1}{3740526\pi} \approx 8,5 \cdot 10^{-8}$$

Dans la plupart des cas, le rapport d'Archimède suffit aux besoins. Il a pour lui que

$$\frac{22}{7} = \frac{11 \cdot 2}{7}$$

et qu'il existe dans le jeu standard les roues à 55 et 110 dents qui sont multiples de 11, les roues de 21, 28, 35 et 70 dents comme multiples de 7 et de nombreuses roues multiples de 2. Une possibilité est par exemple

$$\frac{22}{7} = \frac{55 \cdot 40}{35 \cdot 20}$$

Ce n'est que dans le cas où l'engrènement se fait sur un grand nombre de dents (petit module ou très grande roue) que le rapport de Métius s'impose. Comme

$$\frac{355}{113} = \frac{5 \cdot 71}{113}$$

l'utilisation de ce rapport nécessite l'emploi de roues spéciales, de 71 et 113 dents, qu'il faut acheter ou tailler pour la cause.

10.9 Le problème de la retombée dans le filet

Les vis se font en plusieurs passes de profondeur croissante. Après une passe, le problème qui se pose est de retomber dans le filet pour la passe suivante. Voici deux procédés pour y arriver :

1. Après avoir fait une passe, on dégage l'outil et on fait tourner la machine à l'envers jusqu'au point de départ *en maintenant la vis-mère embrayée* (éventuellement à la main).
2. Si l'on débraye la vis-mère, il faut reculer d'une distance qui soit à la fois multiple du pas p de la vis et de celui de la vis-mère, p_{VM}. On calcule à cette fin le *plus petit commun multiple* (ppcm) des deux pas. On peut alors ré-embrayer la vis-mère après avoir reculé d'une longueur multiple de ce ppcm. Ainsi, si la vis a un pas $p = 1,6mm$ et la vis-mère, un pas $p_{VM} = 10mm$, on a

$$\mathrm{ppcm}(1,6;10) = \frac{\mathrm{ppcm}(16;100)}{10}.$$

   Rappelons que le ppcm de deux nombres entiers est le produit de tous leurs facteurs premiers, chacun pris à sa plus grande puissance. On décompose donc 16 et 100 simultanément comme suit :

$$\begin{array}{rr|l} 16 & 100 & 2 \\ 8 & 50 & 2 \\ 4 & 25 & 2 \\ 2 & 25 & 2 \\ 1 & 25 & 5 \\ & 5 & 5 \\ & 1 & \end{array}$$

   On a donc

$$\mathrm{ppcm}(16;100) = 2^4 \cdot 5^2 = 15 \cdot 25 = 400$$

d'où finalement,

$$\mathrm{ppcm}(1,6;10) = \frac{400}{10} = 40$$

On pourra donc embrayer à nouveau la vis-mère après avoir reculé de tout multiple de $40mm$, soit 40, 80, 120, 160,... mm. Ceci peut être systématisé en réglant deux butées pour le chariot, une pour la fin de course et l'autre, pour le début de celle-ci.

10.10 Questions pratiques

10.10.1 Géométrie du creux

Nous nous occuperons uniquement du filetage métrique normalisé. Comme le montre la figure 4,

$$\begin{aligned}
AB &= \frac{H}{4} \\
BC &= AB\,\mathrm{tg}(30°) = \frac{H}{4}\,\mathrm{tg}(30°) = 0,1443H \\
BD &= BC\,\mathrm{tg}(30°) = \frac{H}{4}\,\mathrm{tg}^2(30°) = 0,08333H \\
r &= DC = \frac{BC}{\cos(30°)} = \frac{H}{4}\frac{\mathrm{tg}(30°)}{\cos(30°)} = 0,1667H \\
BE &= DE - BD = r - BD \\
&= \frac{H}{4}\,\mathrm{tg}(30°)\left(\frac{1}{\cos(30°} - \mathrm{tg}(30°)\right) = 0,08333H \\
H^* &= H - \frac{H}{8} + BE = H\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 0,08333\right) = 0,7083H
\end{aligned}$$

10.10.2 Type de pénétration

Le filetage se fait en plusieurs passes à l'aide d'un outil de forme dont le bec fait un angle de 60°. La pénétration peut être radiale ou oblique, comme l'illustre la figure 5. Dans ce dernier cas, on déplace l'outil selon une trajectoire tangente au filet. L'avantage est que la section de coupe croît moins d'une passe à l'autre qu'en pénétration radiale. La pénétration oblique fait partie de la bonne pratique. On peut d'ailleurs, dans les dernières passes, diminuer la pénétration pour réduire la section de coupe et, par là même, les efforts, ce qui améliore la forme obtenue.

10.10.3 Risque de talonnage

Comme l'illustre la figure 6, l'angle de dépouille latéral dit *effectif* est donné par

$$\alpha_{f,eff} = \alpha_f - \beta$$

où

$$\beta = \text{angle d'hélice} = \frac{p}{\pi d}$$

Cet angle est la réserve de jeu pour se préserver du talonnage. Lorsque le pas est grand, il peut arriver que $\alpha_{f,eff}$ soit inférieur à zéro, ce qui signifie qu'il y a talonnage. Pour éviter ce phénomène destructeur de l'outil, il faut alors incliner l'outil d'un angle β.

10.10.4 Sortie d'outil

Pour ne pas interrompre le filet en pleine matière, il convient de ménager sur la pièce un dégagement (*fig. 7*).

Chapitre 11

Appareil diviseur

11.1 Introduction

L'appareil diviseur est un des accessoires les plus importants des fraiseuses classiques. Il permet d'obtenir sur la circonférence d'une pièce des divisions régulièrement espacées. Cette faculté est mise à profit dans la réalisation des roues dentées, des cannelures, des méplats à angle bien défini, des hexagones, etc.

La figure 1 [40] représente un appareil diviseur et ses accessoires, monté sur la table d'une fraiseuse. Le principe de base est simple : la rotation de la manivelle *alidade* 9 provoque une rotation fortement démultipliée de la broche qui porte ici un entraîne-toc. Le rapport de démultiplication K vaut généralement 40, parfois 60. Derrière la manivelle se trouve un plateau perforé sur des cercles concentriques. Entre deux trous d'un même cercle, il y a toujours le même écart angulaire, fraction d'un tour. Supposons que le pointeau de l'alidade soit engagé dans un des trous du cercle qui en comporte 33. En dégageant le pointeau et en faisant tourner la manivelle jusqu'au trou suivant, on opère une rotation de 1/33 de tour, à laquelle correspond, si $K = 40$, une rotation de la broche de $\frac{1}{33 \cdot 40} = \frac{1}{1320}$ de tour de la broche. On peut donc, de proche en proche, obtenir 1320 indexations différentes de la broche.

Supposons que l'on veuille tailler à la fraise au module une roue dont le nombre de dents est un sous-multiple de 1320, par exemple, $88 = \frac{1320}{15}$. Il suffira, pour passer d'une dent à l'autre, de se déplacer de 15 trous sur le cercle à 33 trous.

Cet exemple simple fait bien sentir la puissance du dispositif diviseur. Cependant, nous verrons qu l'obtention de divisions suffisamment nombreuses nécessite des perfectionnements du dispositif et de la procédure suivie.

11.2 Structure de l'appareil diviseur

La figure 2 [40] donne le plan d'un appareil diviseur. Le mouvement de la manivelle est transmis à la broche par l'intermédiaire du réducteur à vis tangente 5. Tout le système est orientable, de manière à pouvoir présenter la pièce dans une position oblique par rapport à la table de la fraiseuse, ce qui permet par exemple de réaliser des pyramides. Dans un premier temps, nous ne nous préoccuperons pas de la roue 6 et nous supposerons que le plateau, monté fou par rapport à l'arbre de la manivelle, est immobilisé par le pointeau arrière 8.

11.3 Division simple

11.3.1 Principe

Le principe de la division simple est le suivant. Soit à exécuter une division en Z parties égales correspondant chacune à $1/Z$ tour de la broche. Si le rapport de démultiplication est K (le plus souvent, $K = 40$, mais il existe des appareils diviseurs pour lesquels $K = 60$), la manivelle doit donc, pour une division, exécuter un nombre de tours

$$n_{man} = \frac{K}{Z}$$

On réduit d'abord cette fraction à sa plus simple expression,

$$n_{man} = \frac{p}{q}$$

On cherche alors un plateau portant sur un de ses cercles un nombre de trous multiple de q, soit $Q = kq$, ce qui permet d'écrire

$$n_{man} = \frac{kp}{kq} = \frac{P}{Q}$$

P est alors le nombre de trous dont la manivelle doit tourner sur le cercle ayant Q trous.

11.3.2 Exemple 1

Supposons que l'on possède les trois plateaux suivants :

Plateau	Nombres de trous					
1	17	21	25	31	37	43
2	19	23	27	33	39	45
3	20	24	29	35	41	47

et que le rapport de démultiplication de l'appareil diviseur soit $K = 40$. On désire réaliser une division en **28 parties égales**.

On a

$$n_{man} = \frac{40}{28} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

Il faudra donc exécuter à la manivelle 1 tour + $\frac{3}{7}$ de tour. Pour cette dernière fraction, on notera que le plateau $n°1$ possède un cercle de $21 = 3 \cdot 7$ trous. Comme

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{9}{21}$$

on aura à effectuer une rotation de la manivelle d' **un tour plus neuf trous sur le cercle ayant 21 trous**.

Pour faciliter cette opération, le disque est équipé de deux fourchettes montées légèrement dures (on parle encore du *compas*) qui permettent de repérer les trous sans erreur (*fig. 3*). On procède comme suit :

1. On place le pointeau dans une position de départ sur le cercle à 21 trous.
2. Dans la position de départ, on amène la fourchette gauche en contact avec le pointeau.
3. On place la fourchette droite 9 trous plus loin sur le cercle à 21 trous.
4. On effectue alors 1 tour, puis on place le pointeau en contact avec la fourchette droite.

11.3.3 Exemple 2

On veut réaliser deux perçages successifs distants d'un angle de 96°, avec le même appareil diviseur et les mêmes plateaux que dans l'exemple 1.

L'angle de 96° correspond à un nombre de divisions

$$Z = \frac{360}{96} = \frac{15}{4}$$

Le nombre de tours correspondant à la manivelle est donc donné par

$$n_{man} = \frac{40}{Z} = \frac{40 \cdot 4}{15} = \frac{32}{3} = 10 + \frac{2}{3}$$

Le plateau 1 comporte un cercle de $21 = 7 \cdot 3$ trous. On a donc

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$$

En conséquence, on effectuera **10 tours plus 14 trous sur le cercle à 21 trous**.

11.4 Division composée

11.4.1 Principe

Le tableau 1, dans le fascicule de figures, donne les divisions réalisables entre 1 et 420 à l'aide d'un appareil diviseur de rapport $K = 40$ équipé des trois disques de l'exemple 1 [40]. On constate qu'il existe de nombreuses divisions entières irréalisables, par exemple, 51. Ceci résulte du fait que la fraction $\frac{40}{51}$ est irréductible et qu'aucun des plateaux ne contient un cercle dont le nombre de trous est multiple de 51. On peut cependant réaliser cette division de la façon suivante : on écrit

$$\frac{40}{51} = \frac{40}{3 \cdot 7} = \frac{x}{3} + \frac{y}{17}, \text{ avec } x \text{ et } y \text{ entiers}$$

Pour déterminer x et y, on ramène cette équation à

$$17x + 3y = 40$$

Il se fait qu'en l'occurrence, une solution entière évidente de cette équation est

$$x = 2, \ y = 2$$

Parmi les plateaux de l'exemple 1, le plateau 1 possède un cercle de 17 trous et un cercle de $21 = 3 \cdot 7$ trous. Les deux rapports

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21} \text{ et } \frac{2}{17}$$

sont donc réalisables. Mais *comment les additionner ?*

1. Dans un premier temps ,on libère le pointeau arrière et on fait tourner la manivelle *fixée au plateau* de 14 trous sur le cercle à 21 trous.
2. On fixe alors le plateau dans cette position avec le pointeau arrière.
3. Enfin, on libère la manivelle du plateau et on la tourne alors de deux trous sur le plateau à 17 trous.

C'est ce que l'on appelle la *division composée*. Elle permet d'élargir notablement le champ des divisions réalisables.

11.4.2 Fonctionnement avec deux plateaux

Sur certains appareils diviseurs, il est possible de fixer *deux* plateaux. Le pointeau arrière s'engage alors dans le plateau arrière, et le pointeau de la manivelle, dans le plateau avant. Ceci élargit évidemment les possibilités. Un tel dispositif est illustré par la figure 6 [40]. Cet appareil diviseur, réalisé par la firme *Gambin* comporte des plateaux assez riches, allant jusqu'à 127 trous, avec un rapport de démultiplication $K = 60$.

11.4.3 Analyse indéterminée

Introduction

La division composée conduit toujours à la recherche de solutions entières ($\in \mathbf{Z}$) d'une équation du type

$$ax + by = c, \text{ avec } a,\ b \text{ et } c \in \mathbf{Z} \tag{11.1}$$

La question est de savoir dans quelles conditions une telle équation admet des solutions entières et, s'il en existe, comment les trouver. Ce problème est connu en algèbre sous le nom d'*analyse indéterminée.*

Remarquons d'abord que, quitte à diviser a, b et c par leur p.g.c.d, on peut supposer que ces trois nombres sont *premiers entre eux.* Nous établirons d'abord un théorème relatif aux cas d'inexistence d'une solution, puis un théorème d'existence dans les autres cas [45].

Théorèmes d'existence des solutions

Théorème 3 ***Cas d'inexistence de solutions*** - *Si a et b ne sont pas premiers entre eux, l'équation 11.1 n'admet pas de solution*

En effet, soit d un diviseur commun de a et b : on a

$$a = mb,\ b = nd, \text{ avec } m \text{ et } n \text{ entiers}$$

Alors, s'il existe une solution entière (x, y) de l'équation 11.1, on a

$$mdx + ndy = c$$

donc c est multiple de d, ce qui contredit l'hypothèse disant que a, b et c sont premiers entre eux.

Théorème 4 ***Cas d'existence de solutions*** - *Si a et b sont premiers entre eux, l'équation 11.1 admet toujours au moins une solution.*

On notera tout d'abord que l'on peut limiter l'analyse au cas où a, b et c sont positifs. En effet, $ax + by = c$ équivaut à

$$\begin{aligned}
-a(-x) + by &= c \\
ax - b(-y) &= c \\
-a(-x) - b(-y) &= c \\
a(-x) + b(-y) &= -c \\
-ax + b(-y) &= -c \\
a(-x) - by &= = -c \\
-ax - by &= -c
\end{aligned}$$

Cela étant, on peut, sans restriction de la généralité, supposer que a est le plus petit des deux coefficients a et b. L'équation 11.1 équivaut à

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Il est clair que pour y quelconque, la division ci-dessus n'est pas exacte, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{c - by}{a} = q + \frac{r}{a}$$

où q est le quotient entier et r, le reste de la division. Ce dernier vérifie évidemment

$$0 \leq r < a$$

c'est-à-dire qu'il peut avoir une des a valeurs $0,\ 1,\ 2,\ ...,\ (a-1)$. Posons successivement

$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ ...,\ y_{a-1} = a - 1$$

Il y correspond les restes

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{a-1}$$

Deux de ces restes ne peuvent jamais être égaux, car à supposer que

$$c - by_k = aq_k + r \quad \text{et} \quad c - by_\ell = aq_\ell + r$$

on en déduirait par soustraction que

$$b(y_\ell - y_k) = a(q_k - q_\ell)$$

ce qui signifie que a diviserait $b(y_\ell - y_k)$. Or, ceci est impossible, car a ne peut diviser ni $(y_\ell - y_k) < a$ ni b qui est premier avec lui. Ainsi, tous les restes sont différents. Comme ils sont en nombre a et tous compris entre 0 et $(a - 1)$, l'un d'entre eux doit être nul, ce qui correspond à une solution de l'équation 11.1.

Remarque - Cette démonstration fournit un procédé de recherche d'une solution particulière de l'équation 11.1. Néanmoins, si a est grand, ce procédé n'est pas le plus efficace. Nous en montrerons un autre dans les applications.

Solution générale de l'équation 11.1

Supposons que l'on ait trouvé une solution entière (X, Y) de l'équation 11.1. Toute autre solution entière (x, y) de cette équation vérifie donc

$$a(x - X) = b(y - Y) = 0$$

soit

$$(x - X) = -\frac{b}{a}(y - Y)$$

Pour que le premier membre soit entier, il faut et il suffit que le second le soit aussi, c'est-à-dire que $b(y - Y)$ soit multiple de a. comme b est premier avec a, ce sera le cas si et seulement si $(y - Y)$ est multiple de a,

$$y - Y = ka, \ k \text{ entier}$$

Mais alors,

$$x - X = -\frac{b}{a}(y - Y) = -\frac{b}{a}ka = -kb$$

On a donc

$$\begin{aligned} x &= X - kb \\ y &= Y + ka \end{aligned}$$

avec k entier. *C'est la forme générale des solutions entières de l'équation 11.1.*

11.4.4 Réalisation de 1001 divisions à l'aide de l'appareil diviseur de la figure 6.

Ce diviseur a un rapport de démultiplication $K = 60$. On a

$$n_{man} = \frac{K}{Z} = \frac{60}{1001} = \frac{60}{11 \cdot 91}$$

Les facteurs 11 et 91 étant premiers entre eux, on peut écrire

$$\frac{60}{11 \cdot 91} = \frac{x}{11} + \frac{y}{91}$$

soit

$$91x + 11y = 60$$

Ceci revient à dire

$$y = \frac{60 - 91x}{11} = \frac{55 + 5 - 88x - 3x}{11} = 5 - 8x + \frac{5 - 3x}{11}$$

Il est clair que le quotient

$$t = \frac{5 - 3x}{11}$$

doit être un nombre entier. Nous écrirons donc

$$y = 5 - 8x + t$$

avec

$$11t + 3x = 5$$

Ceci mène à

$$x = \frac{5-11t}{3} = \frac{3+2-9t-2t}{3} = 1-3t+\frac{2-2t}{3}$$

Une solution évidente est $t=1$. Remontant, on trouve successivement

$$x = 1-3t = 1-3 = -2$$

et

$$y = 5-8x+t = 5+16+1 = 22$$

On obtient ainsi

$$\frac{60}{1001} = -\frac{2}{11}+\frac{22}{91}$$

Or, le disque 1 de la figure 6 comporte un cercle de 91 trous et un cercle de 66 trous. On peut donc, avec ce seul disque, obtenir la division demandée par

$$\frac{60}{1001} = -\frac{12}{66}+\frac{22}{91}$$

soit **22 trous dans le sens horlogique sur le cercle à 91 trous, puis 12 trous dans le sens antihorlogique sur le cercle à 66 trous** (voir fig. 5). On notera que la procédure suivie pour obtenir une solution particulière, fondée sur l'extraction des parties entières des expressions de y et x, a permis d'éviter les onze essais de x qu'aurait impliqué la méthode du théorème d'existence. Cet algorithme a été introduit par *Pilatte* [10].

11.4.5 Deuxième exemple

Soit à réaliser une division en 376 parties égales, avec l'appareil diviseur de la figure 6. On a

$$n_{man} = \frac{K}{Z} = \frac{60}{376} = \frac{15}{94} = \frac{15}{2\cdot 47}$$

On tombe donc sur le nombre premier 47 qui est réalisable sur le plateau 3. Le facteur 2 est quant à lui réalisable de nombreuses façons. Nous écrirons donc

$$\frac{15}{94} = \frac{x}{2}+\frac{y}{47}$$

ce qui mène à l'équation

$$2y+47x = 15$$

Pour en trouver une solution entière, écrivons

$$y = \frac{15-47x}{2} = \frac{14-46x+1-x}{2} = 7-23x+\frac{1-x}{2}$$

Une solution évidente est $x=1$. On en déduit

$$y = 7-23x = -16$$

Ainsi,

$$\frac{15}{94} = \frac{1}{2}-\frac{16}{47}$$

La division 1/2 peut être obtenue sur le plateau 1, par exemple sur le cercle à 84 trous :

$$\frac{15}{94} = \frac{42}{84} - \frac{16}{47}$$

Finalement, la division cherchée s'obtient **en avançant de 42 tous sur le cercle à 84 tous du plateau 1, puis en reculant de 16 tous sur le cercle à 47 trous du plateau 3**.

11.5 Division décimale approchée

11.5.1 Introduction

La division composée telle que nous l'avons vue ne permet pas de résoudre les cas où le nombre de divisions est un grand nombre premier. Ainsi, pour $Z = 277$, il faudrait réaliser

$$n_{man} = \frac{K}{277}$$

avec $k = 40$ ou $K = 60$ suivant le cas. Il n'existe malheureusement pas de roue comportant un cercle à 277 trous et 277, nombre premier, n'est pas décomposable. La division décimale approchée est fondée sur une *approximation du développement décimal de n_{man}, exacte jusqu'au quatrième chiffre après la virgule.*

11.5.2 Principe

Le diviseur possède une roue ayant un cercle à 100 trous et un cercle à 99 trous. On remplace alors n_{man} par la valeur approchée

$$\tilde{n}_{man} = \frac{x}{100} + \frac{y}{99}$$

L'idée de base de la substitution est que si c et$d$ sont deux chiffres, on a

$$\frac{cd}{99} = 0, cdcdcdcdcd.....$$

Cette propriété est du reste facile à vérifier : on a

$$0, cdcdcdcdcd... = cd \cdot 10^{-2} + cd \cdot 10^{-4} + ...$$

soit le somme d'une progression géométrique dont le premier terme est $cd \cdot 10^{-2}$et la raison, 10^{-2}. La somme de cette série est donc

$$\frac{cd \cdot 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{cd}{10^2 - 1} = \frac{cd}{99}$$

Soit donc un nombre décimal

$$n_{man} = x, abcdef...$$

où x est un nombre entier, et a, b, c, ... des chiffres. On l'approche par

$$\tilde{n}_{man} = x, abcdcdcdcd....$$

Or, ceci est facile à réaliser :comme

$$0, cdcdcdcd... = \frac{cd}{99}$$

on a

$$\tilde{n}_{man} - \frac{cd}{99} = x + \frac{ab - cd}{100}$$

soit

$$\tilde{n}_{man} = x + \frac{ab - cd}{100} + \frac{cd}{99}$$

La division approchée s'obtient donc en ajoutant

1. x tours de la manivelle.
2. $(ab - cd)$ trous sur le cercle à 100 trous (attention au signe de $(ab - cd)$!).
3. cd trous sur le cercle à 99 trous.

Remarque - Il peut se faire que l'approximation

$$\tilde{n}^*_{man} = x, abc(d-1)c(d-1)c(d-1)...$$

soit plus proche de n_{man} que $x, abcdcdcdcd...$, comme nous le verrons dans l'exemple suivant.

11.5.3 Premier exemple

Soit à réaliser $Z = 277$. On a, pour $K = 60$,

$$n_{man} = \frac{60}{277} = 0,216606498...$$

Posons d'abord

$$\tilde{n}_{man} = 0,21666666666.... = 0 + \frac{21 - 66}{100} + \frac{66}{99} = -\frac{45}{100} + \frac{66}{99}$$

c'est-à-dire que l'on tourne de 45 trous en arrière sur le cercle à 10 trous, puis de 66 trous en avant sur le cercle à 99 trous.

L'erreur absolue sur la division est d'environ $6 \cdot 10^{-5}$, et l'erreur relative, d'environ

$$\frac{6 \cdot 10^{-5}}{n_{man}} = 6 \cdot 10 - 5 \cdot \frac{277}{60} = 2,77 \cdot 10^{-4}$$

Cela signifie qu'après avoir taillé 277 dents successives, on aura une erreur de positionnement égale à

$$277 \cdot 2,77 \cdot 10^{-4} = 0,08 pas$$

En fait, il aurait été plus précis de remplacer n_{man} par

$$\tilde{n}^*_{man} = 0,2165656565... = 0 + \frac{21 - 65}{100} + \frac{65}{99}$$

car l'erreur absolue correspondante n'est que de $(-4 \cdot 10^{-5})$, soit les deux tiers de la précédente, en sens inverse. En général, le bon choix de l'approximation, $\tilde{n}_{man}$ ou $\tilde{n}^*_{man}$, conduit à une erreur absolue inférieure ou égale en valeur absolue à $5 \cdot 10^{-5}$.

11.5.4 Division par chevauchement

Le procédé d'approximation décrit ci-dessus, si l'on fait le bon choix de l'approximation, garantit en fa it une erreur *absolue* inférieure ou égale en module à $5 \cdot 10^{-5}$. L'erreur *relative* est d'autant plus faible que n_{man} est plus grand. Or, pour tailler une roue dentée, il n'est pas obligatoire de tailler d'abord la première dent, puis la deuxième et ainsi de suite. On peut également tailler la première, puis la sixième, puis la onzième, etc. Ceci s'appelle procéder par *chevauchement*. Il faut évidemment que le nombre de dents de chaque saut soit premier avec le nombre total de dents si l'on veut arriver ainsi à tailler toutes les dents.

Traitons l'exemple précédent en supposant que l'on effectue chaque fois un intervalle de 5 dents. On a alors

$$n_{man} = \frac{5 \cdot 60}{277} = 1,083032491...$$

On le remplace par la valeur approchée

$$\tilde{n}_{man} = 1,0830303030... = 1 + \frac{8-30}{100} + \frac{30}{99} = 1 - \frac{22}{100} + \frac{30}{99}$$

ce qui correspond à 1 tour de manivelle, puis 22 tous en arrière sur le cercle à 100 trous, et enfin 30 trous en avant sur le cercle à 99 trous. L'erreur absolue vaut ici $(-2 \cdot 10^{-6})$ (c'est un cas favorable) et l'erreur relative est du même ordre, puisque $n_{man} \approx 1$. Après avoir taillé 277 dents, l'erreur cumulée sera de l'ordre de

$$-277 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = -5,6 \cdot 10^{-4} pas$$

soit une erreur très faible.

11.5.5 Réalisation d'un angle d'un radian

Proposons-nous de réaliser un angle d'un radian. Cela revient à dire

$$Z = \frac{1}{2\pi}$$

et, pour $K = 60$,

$$n_{man} = \frac{K}{Z} = \frac{60}{2\pi} = 9,549296586....$$

On l'approche par

$$\tilde{n}_{man} = 9,5492929292...$$

ce qui mène à une erreur relative de $33,8 \cdot 10^{-7}$ par défaut. On a

$$\tilde{n}_{man} = 9 + \frac{54-92}{100} + \frac{92}{99} = 9 - \frac{38}{100} + \frac{92}{99}$$

soit 9 tours de la manivelle, puis 38 trous en arrière sur le cercle à 100 trous, puis enfin 92 trous en avant sur le cercle à 99 trous.

Il faut noter que la division décimale approchée est le *seul* procédé permettant d'approcher ainsi une division irrationnelle.

11.6 Division différentielle

11.6.1 Introduction

La division composée classique tombe en échec dans le cas d'un nombre de divisions premier et grand. Ainsi, pour tailler la roue à 127 dents dont on a besoin sur le tour pour réaliser des filetages en pouces (1" $= 25,4mm = \frac{2}{10} \cdot 127mm$), il est nécessaire de posséder un disque ayant un cercle à 127 trous, ce qui est relativement exceptionnel. La division décimale approchée ne permet de résoudre ce problème qu'approximativement, comme nous l'avons vu, et pour éviter une trop grande propagation des erreurs, force est de recourir au chevauchement. La division différentielle permet en principe de résoudre tous les problèmes de division rationnelle.

11.6.2 Principe

L'idée fondamentale est de coupler au mouvement de la manivelle un mouvement lent du plateau. Un tel système est représenté en figure 8. La manivelle fait tourner la broche dans le rapport

$$n_{broche} = \frac{n_{man}}{K}$$

La broche elle-même provoque une rotation du plateau, à l'aide d'un système d'engrenages de rapport i, c'est-à-dire que

$$\frac{n_{plateau}}{n_{broche}} = i$$

Les roues de cette transmission sont placées sur une tête de cheval comparable à celle d'un tour. En intercalant une roue quelconque, on peut toujours changer le *signe* du rapport i.

Soit donc à réaliser un nombre de divisions Z inaccessible avec les plateaux dont on dispose. On choisit arbitrairement un nombre de divisions Z', proche de Z et *réalisable*. Le nombre de tours de la manivelle à réaliser est

$$n_{man} = \frac{K}{Z}$$

on l'obtiendra en superposant une rotation *relative au plateau*

$$n_{man/plateau} = \frac{K}{Z'}$$

à la rotation du plateau

$$n_{plateau} = in_{broche} = \frac{i}{Z}$$

Donc,

$$n_{man} = \frac{K}{Z} = n_{man/plateau} + n_{plateau} = \frac{K}{Z'} + \frac{i}{Z}$$

ce qui fournit le rapport de démultiplication à obtenir par la relation

$$\frac{i}{Z} = \frac{K}{Z} - \frac{K}{Z'}$$

soit

$$i = KZ\frac{Z' - Z}{ZZ'} = K\frac{Z' - Z}{Z'}$$

C'est la relation fondamentale de la division différentielle. L'arrangement effectif dépend de l'appareil. On change le sens du mouvement du plateau en intercalant une roue quelconque.

11.6.3 Exemple 1

Soit à réaliser une roue de 127 dents. On dispose de l'appareil diviseur du premier exemple de ce chapitre. On a donc $Z = 127$. On pose $Z' = 130$. Comme $K = 40$, la division à 130 dents s'obtient par

$$\frac{K}{Z} = \frac{40}{130} = \frac{4}{13} = \frac{12}{39}$$

soit 12 trous sur le cercle à 39 dents du plateau 2. Le rapport i à réaliser est

$$i = K\frac{Z' - Z}{Z'} = 40\frac{130 - 127}{130} = \frac{120}{130} = \frac{60}{65}$$

Si l'on possède, comme c'est souvent le cas, des roues de 5 en 5 dents, il suffit, avec deux roues, de placer une roue de 60 dents sur la broche et une roue de 65 dents du côté du plateau.

11.6.4 Exemple 2

Nous empruntons à [40] le problème suivant :

Problème 1 *Quel plateau à trous et quelles roues doit-on monter sur un appareil diviseur au 1/40 permettant la division différentielle, pour tailler une roue à denture droite de 89 dents ? Quel nombre de tours et de fractions de tour de manivelle faut-il faire entre chaque dent ? On possède les trois plateaux suivants :*

Plateau	*Nombres de trous*					
1	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
2	*21*	*23*	*25*	*27*	*29*	*31*
3	*37*	*39*	*41*	*43*	*47*	*49*

et

- *des roues de 5 en 5 dents de 20 à 70 dents ;*
- *des roues de 10 en 10 dents de 70 à 150 dents.*

Solution - On a donc $Z = 89$. On pose $Z' = 80$, ce qui donne

$$n_{man/plateau} = \frac{40}{Z'} = \frac{1}{2}$$

Ceci peut se réaliser à l'aide du plateau 1, en avançant de 10 tous sur le cercle à 20 trous. Pour les roues,

$$i = K\frac{Z' - Z}{Z'} = 40\frac{80 - 89}{80} = -\frac{9}{2}$$

Il suffit donc de placer la roue de 90 dents sur l'axe de la broche et celle de 90 dents du côté du plateau, avec éventuellement une roue intermédiaire quelconque, de manière que le plateau tourne en sens inverse de la manivelle.

Chapitre 12

Optimisation en chariotage

12.1 Introduction

Après la révolution apportée par la commande numérique, qui a permis de diminuer les temps morts d'usinage, ceux-ci ont à ce point décru que le vieux problème de la diminution du temps d'usinage proprement dit est revenu à l'honneur, car il reprend à l'heure actuelle une part significative des coûts [38].

Les premières recherches relatives à l'optimisation de l'usinage remontent à Taylor [47], qui s'efforçait de minimiser le temps de production d'une pièce. Dans la même lignée, on a également déterminé les conditions de coût unitaire minimal, et il est bien connu que ces deux repères, coût unitaire minimal et production maximale, fixent la frontière du domaine d'usinage productif [15].

Malheureusement, des considérations de ce genre font fi de la plus forte limitation en dégrossissage, à savoir, *la puissance de la machine.* Cette limitation se fait sentir de plus en plus sévèrement à mesure que les vitesses admises par les outils s'accroissent, car en augmentant la vitesse de coupe, on consomme immanquablement plus de puissance. Il en résulte que les résultats optimisés par la voie taylorienne sont fréquemment situées au-delà des possibilités de la machine et, bien souvent, on se trouve obligé de se ramener à des vitesses plus faibles que prévu, sans trop savoir comment les choisir.

Le problème a, certes, été déjà traité de manière fort complète, notamment par *Pinte et Du Mong* [43]. Mais leur algorithme fondé sur les multiplicateurs lagrangiens n'est guère parlant. Nous présentons ici une méthode élémentaire fondée sur une inversion de la démarche habituelle : au lieu de chercher d'abord un optimum absolu, puis à le corriger tant bien que mal en fonction des possibilités de la machine, il nous semble plus efficace d'explorer *d'abord* ces possibilités, *puis* de corriger éventuellement les résultats obtenus pour tenir compte des caractéristiques de durée de vie de l'outil. Ce procédé, que l'on peut qualifier de *méthode de la puissance disponible*, sera exposé ici dans le cadre du chariotage. Il peut du reste être étendu au cas du dressage, que nous omettrons dans ce texte, mais pour lequel on pourra consulter la référence [14].

12.2 Principes de l'optimisation du chariotage

Tout algorithme d'optimisation suppose l'existence, d'une part, d'un certain nombre de *données* intangibles et, d'autre part, de *paramètres* qu'il s'agit d'ajuster de manière à obtenir le résultat *le plus satisfaisant*. Sous cette dernière expression se cache la notion de *critère d'optimisation* sur laquelle nous reviendrons. En outre, les divers paramètres sont généralement soumis à un certain nombre de *restrictions* qui limitent leur *domaine d'admissibilité*.

Pour les problèmes de chariotage,nous considérerons comme *donnés*

- La machine
- L'outil à utiliser, qui est supposé choisi tant pour sa composition que pour sa géométrie, y compris les angles de coupe
- Le diamètre à réaliser, noté d.

Sont *ajustables*, les trois paramètres normalement utilisés sur un tour, à savoir

- L'avance (par tour) f
- L'engagement ou profondeur de passe a
- La fréquence de rotation N

C"est donc le triplet (f, a, N) que nous cherchons à ajuster au mieux., en tenant compte des diverses restrictions liées au processus de coupe et à la machine. Mais avant de rentrer dans le vif du sujet, il est nécessaire de rappeler un certain nombre de caractéristiques de l'opération d'usinage envisagée.

12.3 Paramètres d'usinage fondamentaux

Tout d'abord, il y a lieu de remarquer que les paramètres fondamentaux du processus d'usinage ne sont pas f, a et N, mais des grandeurs qui leur sont liées. Il s'agit de

- L'*épaisseur de coupe* h, mesurée perpendiculairement à l'arête principale de coupe, à savoir
$$h = f \sin \kappa_r \tag{12.1}$$
- La *largeur de coupe* b, mesurée le long de l'arête principale de coupe,
$$b = \frac{a}{\sin \kappa_r} \tag{12.2}$$
- La *vitesse de coupe* v, liée à la fréquence de rotation et au diamètre par la relation
$$v = \pi d N \tag{12.3}$$

Précisons une fois pour toutes que nous travaillons dans un système d'unités *cohérent*, bannissant ainsi dans nos formules tout facteur correctif d'unités.

La *section de coupe* S est donnée par

$$S = af = bh \tag{12.4}$$

Le *débit de coupe* Q est le volume de copeaux engendré par unité de temps. Il vaut

$$Q = Sv = afv = bhv \tag{12.5}$$

12.4 Énergie spécifique de coupe. Force de coupe

On appelle *énergie spécifique de coupe* k_c le rapport entre la puissance de coupe P et le débit :

$$k_c = \frac{P_c}{Q} \tag{12.6}$$

(Il serait plus correct de parler d'énergie *volumique* de coupe,mais l'usage est consacré.) Tenant compte du fait que la puissance de coupe est le produit de la force de coupe F_c par la vitesse de coupe, on a encore

$$k_c = \frac{F_c v}{Sv} = F_c S$$

soit

$$F_c = k_c S \tag{12.7}$$

ce qui justifie que k_c soit encore appelé *pression (nominale) de coupe.*

L'énergie spécifique de coupe dépend essentiellement de l'angle de coupe normal γ_n, ici supposé donné, et de l'épaisseur de coupe. Nous utiliserons ici la loi de *Kienzle*

$$k_c = k_{c11} h^{-m_c} \tag{12.8}$$

Généralement, l'exposant m_c prend des valeurs comprises entre 0,2 et 0,3. La force de coupe se calcule donc par

$$F_c = k_{c11} h^{1-m_c}$$

Mais nos paramètres pratiques étant f et a, nous préférons écrire

$$F_c = k_{c11}^* a f^{1-m_c} \tag{12.9}$$

en introduisant la grandeur

$$k_{c11}^* = \frac{k_{c11}}{\sin^{m_c} \kappa_r} \tag{12.10}$$

Le *couple de coupe* est alors donné par

$$C_c = F_c \frac{d}{2} = k_{c11}^* a f^{1-m_c} \frac{d}{2} \tag{12.11}$$

12.5 Durée de vie de l'outil

L'outil s'usant, il est nécessaire de le remplacer ou de le réaffûter de temps à autre. L'usure de l'outil est mesurée soit par l'usure VB de sa face en dépouille, soit par la profondeur KT du cratère qui s'est formé sur sa face de coupe, soit encore par la dérive de la cote [7, 15]. On définit *a priori* une valeur limite de cette usure, et on convient de déclarer l'outil *hors service* lorsque cette valeur est atteinte. On appelle conventionnellement *durée de vie de l'outil* T le temps d'usinage qui, à conditions de coupe constantes, mène à la mise hors service.

Nous admettrons que l'outil utilisé vérifie une loi de *Taylor* généralisée de la forme

$$vT^n h^p b^q = K \tag{12.12}$$

K étant une constante. Ceci peut encore être écrit

$$vT^n f^p a^q = K^* \tag{12.13}$$

avec

$$K^* = K \sin^{p-q} \kappa_r \tag{12.14}$$

Au cours de sa vie, l'outil enlèvera un volume de copeaux égal à

$$V = QT$$

Ce volume enlevé, il faut changer d'outil, ce qui suppose l'arrêt de l'usinage pendant un temps t_o appelé *temps de changement d'outil*. Le temps total nécessaire pour réduire le volume V en copeaux est donc en fait $(T + t_o)$, ce qui signifie que l'on ne peut compter que sur un *débit moyen*

$$Q_{moy} = \frac{V}{T + t_o} = \frac{Q}{1 + \left(\frac{t_o}{T}\right)} \tag{12.15}$$

dont le dénominateur dépend, par le biais de la loi de Taylor 12.12, des trois paramètres de coupe. La recherche du plus grand débit moyen constitue du reste un des deux critères tayloriens d'optimisation.

12.6 Coût variable de l'usinage

La partie variable du coût d'usinage s'établit comme suit [15]. Tout d'abord, si une pièce requiert l'enlèvement d'un volume V_p de copeaux, le temps d'usinage vaudra

$$t_u = \frac{V_p}{Q} \tag{12.16}$$

où Q est le débit de coupe. A ce temps, il faut ajouter le temps de changement d'outil. Le nombre (fractionnaire) d'outils correspondant à une pièce est donné par le rapport du temps d'usinage à la durée de vie de l'outil :

$$N_o = \frac{t_u}{T} \tag{12.17}$$

si bien que l'usinage d'une pièce prend en fait un temps moyen $(t_u + N_o t_o)$. Le coût variable d'une pièce est alors égal au coût de ce temps, augmenté du coût des N_o outils. En notant M le coût de l'unité de temps et C_o le coût d'un outil, on obtient ainsi un coût unitaire variable

$$C_1 = M(t_u + N_o t_o) + N_o C_o$$

soit

$$C_1 = M\frac{V_p}{Q}\left(1 + \frac{t_o + \frac{C_o}{M}}{T}\right) \tag{12.18}$$

La minimisation de ce coût unitaire variable constitue le second critère classique d'optimisation taylorienne.

12.7 Restrictions relatives à la géométrie de coupe

Les paramètres géométriques a et f de la coupe sont limités par les conditions suivantes :

12.7.1 Copeau minimal

Il n'est pas possible d'usiner des épaisseurs de copeau arbitrairement faibles. Il existe donc une épaisseur de coupe minimale h_m. Selon König [33],

$$h_m = 2...3 \cdot r_n$$

où r_n est le rayon du tranchant de l'outil. Malheureusement, cette valeur est rarement renseignée par les carburiers. Aussi, nous adopterons la valeur

$$h_m \approx 0,05mm \tag{12.19}$$

12.7.2 Épaisseur de coupe maximale

Pour éviter de couper avec l'arête secondaire de coupe, on limite l'épaisseur de coupe à une valeur inférieure au rayon r_ϵ du bec de l'outil. König [33] propose la valeur

$$h_M = 0,8r_\epsilon \tag{12.20}$$

Les deux conditions (12.19) et (12.20) se traduisent comme suit en termes des avances :

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{h_m}{\sin\kappa_r} = \frac{0,05mm}{\sin\kappa_r} \\ f_{M1} &= \frac{h_M}{\sin\kappa_r} = \frac{0,8r_\epsilon}{\sin\kappa_r} \end{aligned} \tag{12.21}$$

12.7.3 Largeur de coupe minimale

Il convient d'éviter que l'outil ne coupe que sur une partie de sa pointe. C'est pourquoi on impose $b \geq b_m$ avec

$$b_m = r_\epsilon \tag{12.22}$$

12.7.4 Largeur de coupe maximale

La largeur maximale de coupe dépend de la largeur ℓ de l'arête coupante. Nous écrirons donc $b \leq b_M$ avec, selon König [33]

$$\begin{aligned} b_M &= \frac{3}{4}\ell(\text{ plaquettes carrées ou losanges à grand angle aigu}) \\ &= \frac{1}{2}\ell(\text{ plaquettes triangulaires ou losanges à faible angle aigu}) \end{aligned} \tag{12.23}$$

Les conditions (12.22) et (12.23) limitent en fait l'engagement,

$$\begin{aligned} a_m &= b_m \sin\kappa_r \\ a_M &= b_M \sin\kappa_r \end{aligned} \tag{12.24}$$

12.7.5 Élancement de la coupe

On appelle *élancement de la coupe* le rapport

$$\sigma = \frac{b}{h} = \frac{f}{a \sin^2 \kappa_r} \tag{12.25}$$

Un élancement trop faible mène à une coupe concentrée sur la pointe de l'outil, ce qui conduit à une usure prématurée. Lorsqu'au contraire, l'élancement est trop grand, les copeaux ont une forme de ruban dangereux. Il faut donc limiter l'élancement dans les deux sens, $\sigma_m \leq \sigma \leq \sigma_M$. pour fixer les idées, on peut admettre pour les aciers les valeurs suivantes :

$$\sigma_m = 3 \tag{12.26}$$
$$\sigma_M = 15 \tag{12.27}$$

12.7.6 État de surface désiré

En finition, on désire généralement obtenir une certaine qualité de surface, caractérisée par une valeur maximale de la rugosité moyenne arithmétique R_a. Rappelons que l'état de surface théorique est donné par la formule

$$R_a = 0,032 \frac{f^2}{r_\epsilon}$$

Il en résulte donc une restriction supplémentaire à l'avance

$$\begin{aligned} f_{M2} &= \sqrt{\frac{R_a r_\epsilon}{0,032}} \text{ en finition} \\ f_{M2} &= \infty \text{ sinon} \end{aligned} \tag{12.28}$$

La valeur à adopter comme avance maximale est donc

$$f_M = \min(f_{M1}, f_{M2}) \tag{12.29}$$

12.8 Limitation de l'effort de coupe

L'effort de coupe doit être limité, essentiellement pour éviter des vibrations. Selon *Pinte et Du Mong* [43], il est raisonnable d'imposer que la flèche de l'outil sous l'effort de coupe soit inférieure à

$$\delta = 0,065mm$$

Si le corps d'outil a une section d'inertie I et un porte-à-faux x, on a, pour un module de Young E

$$\delta = \frac{F_c x^3}{3EI}$$

ce qui fixe la condition

$$F_{cM\delta} = \frac{3EI\delta}{x^3} \tag{12.30}$$

12.9 Limitations liées à la machine

12.9.1 Gamme de fréquences de rotation

Que la machine ait une gamme continue ou discontinue de fréquences de rotation, il existe de toute manière une fréquence de rotation minimale et une fréquence de rotation maximale et force sera de choisir N dans l'intervalle

$$N_m \leq N \leq N_M \tag{12.31}$$

12.9.2 Puissance disponible

Il est clair que la machine devra être capable de fournir la puissance nécessaire à la coupe. En fait, en-deçà d'une fréquence de rotation N_{nom} dite fréquence *nominale* de rotation, c'est le *couple* qui est limité ; au-delà de cette fréquence de rotation, c'est la *puissance* qui est limitée. On a donc, *au moteur*

$$\begin{aligned} P &= 2\pi N C_M \ \text{pour} N \leq N_{nom} \\ P &= P_{nom} \ ; \ \text{pour} N \geq N_{nom} \end{aligned} \tag{12.32}$$

A cette puissance, il faut retrancher les pertes dans la machine. Un modèle assez satisfaisant consiste à écrire qu'*à l'outil*, la puissance disponible est donnée par

$$P_{disp} = \eta_{eff}(P - P_v) \tag{12.33}$$

où η_{eff} est le *rendement effectif* et P_v, la *puissance à vide*. Cette dernière est une fonction croissante de la fréquence de rotation, légèrement convexe. Il est généralement suffisant (*fig. 1*) de l'approcher par une interpolation linéaire de la forme

$$P_v = 2\pi N C_v \tag{12.34}$$

où C_v peut être interprété comme le couple à vide. Au total, on a donc

$$\begin{aligned} P_{disp} &= \eta_f 2\pi N(C_M - C_v) \ \text{ pour } N \leq N_{nom} \\ P_{disp} &= \eta_f (P_{nom} = 2\pi N C_v) \ \text{ pour } N \geq N_{nom} \end{aligned} \tag{12.35}$$

situation qui est représentée en figure 2 par la courbe OAB. Il est commode dans les raisonnements d'y adjoindre le segment vertical BD au droit de N_M. On définit ainsi un ensemble fermé se puissances disponibles limité par le polygone $OABDO$.

12.10 Détermination de la géométrie de coupe

12.10.1 Problème fondamental

Un premier problème consiste à choisir les dimensions a et f de la coupe *en supposant l'effort de coupe limité*. On détermine d'abord les limites de variation de a et f à partir des relations (12.21), (12.24),(12.28) et (12.29). On porte ces limites sur un diagramme ayant l'engagement pour abscisse et l'avance pour ordonnée (*fig. 3*). Sur le même diagramme, on peut encore porter la courbe d'équation

$$F_{cM} = k^*_{c11} a f^{1-m_c}$$

En omettant provisoirement les contraintes liées à l'élancement de la coupe, la région admissible pour les paramètres a et f est la zone hachurée de la figure 3. Le choix du couple (a, f) dans cette zone peut être guidé par la remarque suivante. Si l'on impose la durée de vie T de l'outil, la vitesse dépendra de a et f par la relation

$$v = K^* T^{-n} a^{-q} f^{-p}$$

directement issue de la loi de Taylor. Cette valeur conduit au débit

$$Q = afv = (K^* T^{-n}) a^{1-q} f^{1-p} \tag{12.36}$$

Le débit moyen

$$Q_{moy} = \frac{Q}{1 + \frac{t_o}{T}}$$

varie, dans ces conditions, comme Q. Étant donné que q et p sont normalement inférieurs à l'unité, le débit croît visiblement avec l'avance et l'engagement. Les solutions productives sont donc situées dans la portion $ABCD$ de la frontière de l'ensemble admissible (*fig. 3*). Bien plus, de A à B, le débit augmente, puisque l'engagement croît ; il en est de même de D à C, puisque l'avance croît sur ce tronçon. Sur la courbe BC, on a constamment

$$F_{cM} = k^*_{c11} a f^{1-m_c}$$

ce qui implique

$$\frac{da}{a} = -(1 - m_c)\frac{df}{f}$$

Dès lors, par (12.36),

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{Q} &= (1-q)\frac{da}{a} + (1-p)\frac{df}{f} \\ &= [(1-p) - (1-q)(1-m_c)]\frac{df}{f} \end{aligned} \tag{12.37}$$

Des valeurs typiques des exposants apparaissant dans cette formule sont

$$p = 0,4 \ ; \ q = 0,1 \ ; \ m_c = 0,2$$

ce qui donne

$$(1-p) - (1-q)(1-m_c) = 0,6 - 0,9 \cdot 0,8 = -0,12$$

Toutes les données courantes d'usinage donnent ainsi à la grandeur entre crochets de (12.37) une valeur *négative*. Par conséquent, sur la courbe $F_c = F_M$, on augmente le débit en diminuant l'avance ou, ce qui revient au même, en augmentant l'engagement. L'optimum est donc obtenu au point C de la figure 3, pour autant qu'il satisfasse aux exigences d'élancement.

Pratiquement, la manière la plus simple d'opérer un choix est d'établir un tableau donnant, pour des valeurs de l'engagement régulièrement espacées entre a_m et a_M, les valeurs extrêmes permises pour l'avance, $f_{min}(a)$ et $f_{max}(a)$ correspondant au diagramme de la figure 3, ainsi que la valeur minimale de l'élancement, $[b/h_{max}]_a$. Le choix normal, si l'élancement est convenable, est le couple $(a_M, f_{max}(a_M))$.

12.10.2 Découpage en passes successives

Dans maints problèmes de dégrossissage, la question se pose autrement. On part d'un diamètre initial d_1 pour arriver à un diamètre final d_2. Il faut donc enlever une surépaisseur radiale

$$s = \frac{d_1 - d_2}{2} \tag{12.38}$$

La procédure courante pour y arriver est de subdiviser cette surépaisseur en un certain nombre de passes égales et faisables avec l'outil considéré. Le nombre minimal de passes à réaliser est donné par

$$n_m = \left(\frac{s}{a_M}\right)_{\text{excès}}$$

Pour calculer ce quotient par excès entre nombre *réels*, on procède comme suit : on calcule d'abord le quotient par défaut

$$q = \text{ent}\left(\frac{s}{a_M}\right)$$

le symbole 'ent ' désignant la partie entière d'un nombre. Alors,

– Si
$$|\frac{s}{a_M} - q| \leq \varepsilon$$
ε étant un nombre mesurant la précision des calculs de la machine (ordinateur, calculette) sur des réels, par exemple, $\varepsilon = 10^{-16}$, on adopte q comme valeur du quotient par excès.
– Dans le cas contraire, on adopte la valeur $(q + 1)$.

L'approximation d'ordre relatif ε ainsi consentie est sans conséquence marquante sur la suite. On établit alors un tableau des avances admissibles en fonction de l'engagement comme dans le problème fondamental, mais en ne considérant que les valeurs suivantes de l'engagement :

$$\frac{s}{n_m},\ \frac{s}{n_m+1},\ \frac{s}{n_m+2},\ \text{etc.}$$

jusqu'à obtenir une fraction de s inférieure à a_m, valeur qu'il ne faut évidemment pas prendre en considération.

12.10.3 Cas de la finition

Pour les passes de finition, le problème se pose dans l'autre sens : *étant donné le diamètre à obtenir, quelle surépaisseur faut-il prévoir pour la finition ?* Cette surépaisseur doit être choisie dans l'intervalle admissible pour l'engagement et aussi petite que possible pour diminuer au maximum les efforts de coupe. La condition relative à la rugosité limite souvent les avances de manière sévère. Pour le reste, on procède comme dans le cas du problème fondamental.

Remarque - Il convient de préciser que les passes de finition doivent être déterminées *en premier lieu*, car ce sont elles qui définissent le diamètre d_2 de fin de dégrossissage.

12.11 L'usinage faible

12.11.1 Définitions

Les dimensions de la coupe étant définies, il reste à déterminer la vitesse de coupe. A ce stade, la puissance de la machine peut être une limitation importante. En effet, la force de coupe est à présent connue, et la puissance de coupe

$$P_c = F_c v$$

croît linéairement avec la vitesse.

Nous parlerons d'*usinage faible* dans le cas où la puissance de la machine est suffisamment grande pour ne pas constituer un obstacle. Dans le cas contraire, nous dirons qu'il s'agit d'un *usinage fort*. Cette classification dépend *essentiellement* de la machine choisie. Ainsi, une même opération, indépendamment du fait qu'il s'agisse de dégrossissage ou de finition, pourra être faible ou forte selon que la machine est elle-même plus ou moins puissante.

Dans le cas de l'usinage faible, on n'a donc pas à se soucier de la puissance de la machine, et on peut déterminer des optima *absolus*. Au contraire, en usinage fort, la machine est essentiellement dimensionnante et les optima que l'on peut obtenir sont *relatifs à la machine*. C'est dire que le choix d'une machine plus puissante permettrait alors d'obtenir de meilleures conditions de coupe, *pour autant que cette machine soit disponible*. En fait, l'usinage fort est le cadre naturel du dégrossissage dont la stratégie générale est d'enlever, par unité de temps, autant de matière que la machine le permet.

12.11.2 Optimisation taylorienne

Les résultats classiques d'optimisation de l'usinage faible sont bien connus. En 1907, *Taylor* [47] a choisi comme critère d'optimisation le *maximum du débit moyen*

$$Q_{moy} = \frac{afv}{1 + \frac{t_o}{T}}$$

Notant que pour a et f donnés, la loi de Taylor (12.12) prend la forme

$$v = K^{**} T^{-n} \tag{12.39}$$

on obtient

$$Q_{moy} = \frac{afK^{**}}{T^n \left(1 + \frac{t_o}{T}\right)} \tag{12.40}$$

expression qui admet un maximum pour une durée de vie égale à

$$T_{PM} = \frac{1-n}{n} t_o \tag{12.41}$$

On en déduit la vitesse de production maximale v_{PM} par (12.39).

Un autre critère d'optimisation classique est le *minimum du coût unitaire variable* (12.18)

$$C_1 = M \frac{V_p}{Q} \left(1 + \frac{t_o + \frac{C_o}{M}}{T}\right)$$

qui, en vertu de (12.39), se transforme en

$$C_1 = M \frac{V_p}{afK^{**}} T^n \left(1 + \frac{t_o + \frac{C_o}{M}}{T}\right) \tag{12.42}$$

On retrouve au numérateur de cette expression le dénominateur de (12.40), sauf à remplacer t_o par $(t_o + C_o/M)$. En conséquence, le minimum est obtenu pour la durée de vie

$$T_{cm} = \frac{1-n}{n}\left(t_o + \frac{C_o}{M}\right) \tag{12.43}$$

qui est supérieure à T_{PM}. Ici encore, on déduit la vitesse correspondante de (12.39).

Une étude approfondie de la question [15] conduit aux conclusions suivantes :

- L'utilisation d'une vitesse de coupe supérieure à v_{PM} est toujours anti-économique : le débit moyen décroît et le coût unitaire augmente simultanément.
- Il en est de même pour les vitesses de coupe inférieures à v_{cm}.
- Dans une situation de *concurrence parfaite*, le gain par unité de temps est maximal pour une certaine vitesse située entre v_{cm} et v_{PM}. C'est pourquoi l'intervalle $[v_{cm},\ v_{PM}]$ est appelé *intervalle de productivité.*
- Le cas d'un producteur important, confronté à une courbe de demande décroissante, est plus complexe. Disons simplement que dans ce cas, l'optimum se déplace en direction du coût minimal [13].

12.11.3 Algorithme d'optimisation de l'usinage faible

La première remarque à faire est que les deux limites de durée de vie T_{cm} et T_{PM} sont indépendantes des paramètres géométriques a et f. On peut donc choisir *a priori* une durée de vie dans l'intervalle de productivité. On détermine alors a et f par la méthode décrite en section 12.10, puis on calcule la vitesse par

$$v = \frac{K^*}{T^n f^p a^q} \tag{12.44}$$

La fréquence de rotation s'en déduit par

$$N = \frac{v}{\pi d} \tag{12.45}$$

Dans le cas d'une machine à gamme discrète de fréquences de rotation, on choisit pour N la valeur de la gamme juste inférieure à la fréquence de rotation calculée, de manière à assurer au moins la durée de vie souhaitée.

12.12 Choix de la vitesse en usinage fort

En usinage faible, la limitation de puissance se trouve au-delà des deux vitesses de référence v_{cm} et v_{PM}. Elle est représentée en figure 6 par la verticale P_f. En usinage fort, au contraire, la limite de puissance P_F est située à gauche de l'une au moins de ces vitesses. Supposons-la d'abord à gauche de v_{cm}. comme on peut le constater sur la figure, c'est alors la vitesse de pleine puissance qui permet alors d'obtenir à la fois le coût unitaire minimal et le débit moyen maximal. Le cas intermédiaire d'une limitation P'_F située entre les deux vitesses de référence est un peu plus complexe, puisqu'en fonction de la durée de vie choisie, la vitesse optimale en usinage faible peut ou non se situer dans le domaine réalisable sur la machine. La manière la plus simple de procéder consiste à raisonner dans le diagramme (P, N) (*fig. 7*) dans lequel on a préalablement tracé les frontières du domaine de puissance. Pour a et f donnés, on peut calculer la force de coupe

$$F_c = k^*_{c11} a f^{1-m_c}$$

et le couple de coupe

$$C_c = F_c \frac{d}{2}$$

qui est indépendant de la vitesse. Le lieu géométrique des différents points de fonctionnement possibles est la droite d'équation

$$P_c = 2\pi N C_c$$

représentée par la marque C en figure 7.

Choisissant comme en usinage faible une durée de vie T, on peut déduire une vitesse v et une fréquence de rotation N par les formules (12.44) et (12.45). Ceci détermine un point sur la demi-droite C. A ce stade, quatre cas sont possibles :

1. Le point figuratif X' du fonctionnement est situé dans la zone des puissances disponibles. Il s'agit alors d'un usinage faible et X' est l'optimum recherché.
2. Le point figuratif X" du fonctionnement se trouve en dehors de la zone des puissances disponibles. Dans ce cas, l'usinage est fort, et il faut diminuer la fréquence de rotation en se maintenant sur la demi-droite C, jusqu'à trouver son point d'intersection X avec la frontière de la zone de puissance disponible. Une telle intersection n'existe que si la demi-droite C a un coefficient angulaire inférieur à celui du segment OA, soit si

$$C_c \leq \eta_{eff}(C_M - C_v) \tag{12.46}$$

   On détermine alors analytiquement l'intersection de la demi-droite C avec la droite AB , ce qui mène à la condition

$$2\pi N C_c = \eta_{eff}(P_{nom} - 2\pi N C_v)$$

   dont la solution est

$$N = \frac{\eta_{eff} P_{nom}}{2\pi(C_c + \eta_{eff} C_v)} \tag{12.47}$$

   Dans le cas où cette formule mène à une valeur de N supérieure à N_M, l'intersection se trouve en fait sur la branche BD de la frontière et il faut poser

$$N = N_M \tag{12.48}$$

3. Il peut encore arriver que le point X''' soit situé en-deçà de la fréquence de rotation minimale de la machine. Dans ce cas, la durée de vie de référence ne peut être atteinte et il faut soit modifier l'outil, soit diminuer a et f.
4. Enfin, il peut se faire que la condition (12.46) soit violée. Il faut alors diminuer a et f.

Ainsi présentée, cette méthode peut être considérée comme une correction de l'optimisation taylorienne. Nous préférons, quant à nous, adopter la démarche inverse, que l'on peut qualifier de *méthode de la puissance disponible.*

La première étape consiste toujours à choisir une durée de vie optimale , que nous considérerons comme un *minimum* et que nous noterons en conséquence T_m.

Dans une seconde étape, on détermine directement la fréquence de rotation de pleine puissance N_{pp} par les formules (12.47) et (12.48). On en déduit la vitesse à pleine puissance

$$v_{pp} = \pi d N \tag{12.49}$$

Dans une troisième étape, on calcule la durée de vie correspondante

$$T_{pp} = \left[\frac{K*}{v_{pp} a^q f^p}\right]^{1/n} \tag{12.50}$$

et on la compare à T_m. Si T_{pp} est supérieur à T_m, la solution que l'on vient de calculer est la bonne et il s'agit en fait d'un usinage fort. Dans le cas contraire, on est en présence d'un usinage faible, et il faut se ramener à la durée de vie T_m en posant

$$v = \frac{K*}{T_m^n a^q f^p} = v_{pp}\left(\frac{T_{pp}}{T_m}\right)^n \tag{12.51}$$

et

$$N = \frac{v}{\pi d} \tag{12.52}$$

Il reste le cas exceptionnel où $N < N_m$, pour lequel il faut modifier l'outil, a ou f.

Comme on peut le constater, la méthode de la puissance disponible revient en fait à considérer l'usinage faible comme l'exception et non le contraire. A l'inverse des méthodes classiques, *c'est ici la* machine *qui sert de point de départ.*

Le lecteur aura sans doute remarqué que nous n'avons plus envisagé le cas d'impossibilité (4) évoqué ci-dessus. C'est que, précisément, *on peut construire dans le cadre de notre méthode un algorithme de choix des dimensions de la coupe qui élimine* automatiquement *ce problème.*

12.13 Choix des dimensions de la coupe à partir de la puissance disponible

Nous savons donc qu'en usinage fort, la solution se trouve sur la portion ABD de la frontière de la zone des puissances disponibles (*fig. 7*). On se déplace sur cette courbe en modifiant les paramètres a et f de la coupe. Proposons-nous de chercher le point de débit maximal, après avoir fixé une fois pour toutes l'élancement

$$\sigma = \frac{b}{h}$$

ou ce qui revient au même, le rapport

$$\tau = \frac{a}{f} \tag{12.53}$$

La puissance de coupe peut s'exprimer en termes de la section S et du rapport τ par la formule

$$P_c = k^*_{c11} S^{1 - (m_c/2)} \tau^{m_c/2} \cdot v \tag{12.54}$$

On en déduit

$$\frac{dP_c}{P_c} = (1 - \frac{m_c}{2})\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v}$$

ce qui implique

$$\frac{dS}{S} = \frac{1}{1 - \frac{m_c}{2}} \left[\frac{dP_c}{P_c} - \frac{dv}{v}\right]$$

Il en découle

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = \frac{1}{1 - \frac{m_c}{2}} \left[\frac{dP_c}{P_c} - \frac{m_c}{2}\frac{dv}{v}\right] \tag{12.55}$$

Lors du passage du point D au point B de la frontière, la vitesse reste invariable (à diamètre constant) et comme la puissance augmente, il en est de même du débit. De B à A, on assiste simultanément à une augmentation de la puissance et à une diminution de la vitesse, si bien que le débit augmente encore. *C'est donc le point A, à la fréquence nominale de rotation, qui correspond au maximum de débit.*

C'est à partir de ce point, correspondant du reste à la force de coupe maximale, qu'il convient de faire le choix de a et f. On suit pour cela la procédure indiquée en section 12.10, avec une force maximale définie par

$$F_{cM} = \min(F_{cMP}, F_{cM\delta}) \tag{12.56}$$

où $F_{cM\delta}$ est la force maximale définie par les problèmes de déformation de l'outil (section 12.8) et F_{cMP}, la force disponible au point A, à savoir,

$$\begin{aligned} F_{cMP} &= \frac{P_A}{v_A} \\ &= \frac{\eta_{eff} 2\pi N_{nom}(C_M - C_v)}{\pi d N_{nom}} \\ &= \frac{2\eta_{eff}(C_M - C_v)}{d} \end{aligned} \tag{12.57}$$

Il ne faudrait pas en conclure que tous les usinages doivent de faire à la fréquence nominale. En effet, le choix particulier de a et f mènera souvent à une force de coupe F_c inférieure àF_{MP}. C'est d'ailleurs toujours le cas lorsque $F_{cM\delta} < F_{cMP}$. Le point représentatif de cette force à la fréquence de rotation N_{nom} est donc un point A' situé en-dessous de A et correspondant à un couple C'_A (*fig. 8*). L'optimum en usinage fort est alors le point X, que l'on obtiendra comme en section 12.12.

Il est aisé de s' assurer que la méthode indiquée ci-dessus garantit automatiquement la vérification de la condition (12.46) : *le cas d'impossibilité 4 de la section précédente disparaît donc de l'analyse.*

Annexe A

Quelques rappels d'arithmétique

A.1 Nombres premiers

On sait qu'un nombre a est premier s'il n'admet aucun diviseur *strict*, nous entendons par là différent de lui-même et de l'unité. Il existe dans la littérature des tables de nombres premiers (en [1], tous les nombres premiers entre 1 et 100 000). Si l'on ne dispose pas d'une telle table, on vérifie le caractère premier d'un nombre en essayant de le diviser par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc.

Théorème 5 *Dans cette recherche, il est inutile d'essayer un diviseur premier de a supérieur à $\sqrt{a}$*

En effet, si a possède des diviseurs stricts, l'un d'entre eux, soit b, est le plus petit. Alors,

$$a = bq$$

q est également un diviseur strict de a et comme, par hypothèse, b est le plus petit d'entre eux, on doit avoir $q \geq b$, ce qui implique

$$a \geq b^2$$

Cette remarque permet d'économiser un grand nombre d'essais inutiles.

Exemple - Vérifier que 127 est premier - On constate que

$$\begin{aligned} 127/2 &\neq \text{entier} \\ 127/3 &\neq \text{entier} \\ 127/5 &\neq \text{entier} \\ 127/7 &\neq \text{entier} \\ 127/11 &\neq \text{entier} \end{aligned}$$

et

$$13^2 = 169 > 127$$

La recherche de diviseurs potentiels s'arrête là.

A.2 Le pgcd

Le Plus Grand Commun Diviseur, **pgcd**, de deux nombres a et b s'obtient aisément par l'algorithme d'Euclide, dont le principe est le suivant : si d est un diviseur commun de a et b, avec $a > b$, on a donc

$$a = mb, \ b = nd, \ m \text{ et } n \text{ entiers et } m > n$$

La division de a par b conduit à un quotient entier q et un reste r,

$$a = qb + r$$

ce qui implique

$$r = a - qb = d(m - qn) = \mathcal{M}(d)$$

où le symbole $\mathcal{M}(d)$ signifie *multiple de d*. Donc, *le reste de la division de a par b est multiple de tout diviseur commun de a et b, et en particulier de leur pgcd.* On peut recommencer le raisonnement avec b et r et ainsi de suite, jusqu'à obtenir comme reste le pgcd cherché. Pratiquement, les calculs se mènent comme suit. Soit par exemple à trouver le pgcd de 1602 et 445. On établit le tableau suivant :

QUOTIENTS →		3	1	1	2
NOMBRES →	1602	445	267	178	89
DIVISEURS * QUOTIENTS →	1335	267	178	178	
RESTES →	267	178	89	0	

Le dernier reste, 89, divise le précédent. C'est le pgcd.

A.3 Du pgcd aux fractions continues

Examinons la suite des calculs menant au pgcd. En posant $x = \frac{a}{b}$, on écrit successivement

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{Q_2} \\ Q_2 &= \frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{Q_3} \end{aligned}$$

et ainsi de suite, ce qui conduit à la forme suivante du rapport a/b :

$$x = \frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + ...}}}$$

C'est ce que l'on appelle une **fraction continue**. Les nombres entiers q_1, q_2, q_3, ... sont appelés *quotients partiels* et les nombres réels Q_1, Q_2, Q_3, ... sont appelés *quotients complets*. Pour simplifier les écritures, on note la fraction continue sous la forme

$$x = (q_1, q_2, q_3, q_4, ...)$$

On a évidemment

$$\begin{array}{ll} x = Q_1 & \\ x = (q_1, Q_2) & Q_2 = (q_2, q_3, ...) \\ x = (q_1, q_2, Q_3) & Q_3 = (q_3, q_4, ...) \end{array}$$

etc. La fraction continue correspondant à un nombre rationnel (fraction) comporte un nombre fini de quotients partiels, car le pgcd du numérateur et du dénominateur s'obtient en un nombre fini d'opérations. Mais on peut imaginer des fractions continues illimitées. Nous verrons qu'elles permettent de représenter les nombres irrationnels.

A.4 Réduites d'une fraction continue

A.4.1 Définition

Étant donné une fraction continue $(q_1, q_2, q_3, q_4, ...)$, on appelle *réduites* de cette fraction les fractions continues limitées

$$\begin{aligned} R_1 &= (q_1) = q_1 \\ R_2 &= (q_1, q_2) \\ R_3 &= (q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

etc. On y ajoute conventionnellement, suivant en cela *Euler* [16], la réduite formelle d'ordre 0,

$$R_0 = \frac{1}{0}$$

Chaque réduite est une fraction du type

$$R_k = \frac{N_k}{D_k}$$

A.4.2 Loi de formation des réduites

Théorème 6 *Les réduites successives se calculent comme suit :*

$$\begin{array}{ll} N_0 = 1 & D_0 = 0 \\ N_1 = q_1 & D_1 = 1 \end{array}$$

Pour $k \geq 2$,

$$N_k = q_k N_{k-1} + N_{k-2} \quad D_k = q_k D_{k-1} + D_{k-2}$$

Cette loi est vraie pour $k = 2$, car elle donne

$$N_2 = q_2 q_1 + 1 \ \text{ et } \ D_2 = q_2 \cdot 1 + 0 = q_2$$

soit

$$R_2 = \frac{N_2}{D_2} = q_1 + \frac{1}{q_2}$$

ce qui est bien correct. Si elle est vraie pour R_{k-1}, c'est-à-dire si

$$N_{k-1} = q_{k-1} N_{k-2} + N_{k-3} \ \text{ et } \ D_{k-1} = q_{k-1} D_{k-2} + D_{k-3}$$

il est clair que l'on obtient R_k en remplaçant dans ces expressions q_{k-1} par $q_{k-1} + \frac{1}{q_k}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{(q_{k-1} + \frac{1}{q_k})N_{k-2} + N_{k-3}}{(q_{k-1} + \frac{1}{q_k})D_{k-2} + D_{k-3}} \\ &= \frac{q_k(q_{k-1}N_{k-2} + N_{k-3}) + N_{k-2}}{q_k(q_{k-1}D_{k-2} + D_{k-3}) + D_{k-2}} \\ &= \frac{q_k N_{k-1} + N_{k-2}}{q_k D_{k-1} + D_{k-2}} \end{aligned}$$

comme annoncé.

A.4.3 Remarque

Pour

$$x = (q_1, ..., q_k, q_{k+1}, ...) = (q_1, ..., q_k, Q_{k+1})$$

où Q_{k+1} est le $(k+1)^e$ quotient complet, on obtient par le même raisonnement

$$x = \frac{Q_{k+1}N_k + N_{k-1}}{Q_{k+1}D_k + D_{k-1}} \tag{A.1}$$

relation qui nous servira plus loin.

A.4.4 Une propriété des réduites successives

Calculons la différence

$$\mathcal{D}_k = N_k D_{k-1} - N_{k-1} D_k$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k &= (q_k N_{k-1} + N_{k-2})D_{k-1} - N_{k-1}(q_k D_{k-1} + D_{k-2}) \\ &= -(N_{k-1}D_{k-2} - N_{k-2}D_{k-1}) = -\mathcal{D}_{k-1} \end{aligned}$$

Les $\mathcal{D}_k$ successifs sont donc de même grandeur, mais opposés en signe. Comme

$$\mathcal{D}_1 = N_1 D_0 - N_0 D_1 = q_1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

on déduit

$$\mathcal{D}_k = (-1)^k \tag{A.2}$$

A.4.5 Différence entre deux réduites successives

La différence entre deux réduites successives vaut

$$R_{k+1} - R_k = \frac{N_{k+1}}{D_{k+1}} - \frac{N_k}{D_k} = \frac{N_{k+1}D_k - N_k D_{k+1}}{D_k Dk + 1} = \frac{\mathcal{D}_{k+1}}{D_k D_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{D_k D_{k+1}}$$

Elle est donc alternativement positive et négative.

A.4.6 Différence entre deux réduites successives de même parité

Calculons

$$\begin{aligned} R_{k+2} - R_k &= (R_{k+2} - R_{k+1}) + (R_{k+1} - R_k) \\ &= \frac{(-1)^{k+2}}{D_{k+1}D_{k+2}} + \frac{(-1)^{k+1}}{D_k D_{k+1}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{D_{k+2} - D_k}{D_k D_{k+1} D_{k+2}} \end{aligned}$$

Comme la loi de formation des réduites implique que $D_{k+2} \geq D_k$, la différence entre deux réduites *paires* successives est négative, et la différence entre deux réduites *impaires* successives est positive. En d'autres mots, *les réduites paires forment une suite décroissante, et les réduites impaires forment une suite croissante.* (Pour le retenir, noter que $R_0 = \infty$, donc les réduites paires doivent être plus petites).

A.5 Valeur d'une fraction continue illimitée

A.5.1 Définition

On appelle valeur d'une fraction continue illimitée la limite de la suite de ses réduites. Cette définition n'a évidemment de sens que si l'on démontre que cette suite est convergente.

A.5.2 Convergence des réduites

Partons du développement télescopique

$$R_n = R_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (R_{k-1} - R_k)$$

Il s'agit d'une série dont le terme général

$$R_{k+1} - R_k = \frac{(-1)^{k+1}}{D_k D_{k+1}}$$

est alterné et converge vers zéro en vertu de la croissance des dénominateurs des réduites. Donc, en vertu du critère classique de *Leibnitz*, la convergence est assurée et, qui plus est, l'erreur de troncature est toujours inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé, c'est-à-dire que

$$\mid R_n - \text{limite} \mid \leq \mid R_{n+1} - R_n \mid = \frac{1}{D_n D_{n+1}}$$

Les sous-suites $\{R_{2k}\}$ et $\{R_{2k+1}\}$ convergent évidemment vers la même limite, la première en décroissant et la deuxième en croissant.

A.5.3 Décroissance constante de l'erreur

On a même le résultat suivant :

Théorème 7 *Chaque réduite est plus proche de la valeur de la fraction continue que la réduite précédente.*

Soit en effet une fraction continue

$$(q_1, q_2, ..., q_k, q_{k+1}, ...) = (q_1, q_2, ..., q_k, Q_{k+1})$$

En vertu de (A.1), sa valeur x est donnée par

$$x = \frac{Q_{k+1}N_k + N_{k-1}}{Q_{k+1}D_k + D_{k+1}}$$

On a donc

$$\begin{aligned} erreur(k) &= x - \frac{N_k}{D_k} \\ &= \frac{(Q_{k+1}N_k + N_{k-1})D_k - N_k(Q_{k+1}D_k + D_{k-1})}{D_k(Q_{k+1}D_k + D_{k-1})} \\ &= \frac{-\mathcal{D}_k}{D_k(Q_{k+1}D_k + D_{k-1})} \end{aligned} \tag{A.3}$$

et

$$\begin{aligned} erreur(k-1) &= x - \frac{N_{k-1}}{D_{k-1}} \\ &= \frac{(Q_{k+1}N_k + N_{k-1})D_{k-1} - N_{k-1}(Q_{k+1}D_k + D_{k-1})}{D_{k-1}(Q_{k+1}D_k + D_{k-1})} \\ &= \frac{Q_{k+1}\mathcal{D}_k}{D_{k-1}(Q_{k+1}D_k + D_{k-1})} \end{aligned} \tag{A.4}$$

En divisant les résultats (A.3) et (A.4), on obtient

$$\left|\frac{erreur(k)}{erreur(k-1)}\right| = \frac{1}{Q_{k+1}}\frac{D_{k-1}}{D_k} < 1$$

car $Q_{k+1} \geq 1$ et $D_{k-1} < D_k$.

A.6 Détermination des quotients incomplets d'un nombre irrationnel

Soit un nombre irrationnel x. pour trouver ses quotients incomplets, on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Q_1 &= x \\ q_1 &= \text{ent}(Q_1) \quad (\text{ent} = \text{partie entière}) \\ Q_1 &= \text{frac}(Q_1) \quad (\text{frac} = \text{partie fractionnaire}) \\ \text{frac}(Q_1) &= \tfrac{1}{Q_2} \end{aligned}$$

et de même,

$$Q_2 = q_2 + \frac{1}{Q_3}$$

et ainsi de suite.

A.7 Exemple : réduites de π

$$\begin{aligned}
\pi &= 3,1415926539 = Q_1 = 3 + \frac{1}{Q_2} \\
Q_2 &= 7,06251330592 = 7 + \frac{1}{Q_3} \\
Q_3 &= 15,9965944095 = 15 + \frac{1}{Q_4} \\
Q_4 &= 1,00341722818 = 1 + \frac{1}{Q_5} \\
Q_5 &= 292,63483365 = 292 + \frac{1}{Q6} \\
Q_6 &= 1,57521580653 = 1 + \frac{1}{Q_7}
\end{aligned}$$

etc. Donc,

$$\pi = (3, 7, 15, 1, 292, 1, ...)$$

Pour calculer ses réduites, il est commode d'utiliser le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6
q	-	3	7	15	1	292	1
N	1	3	22	333	355	103993	104348
D	0	1	7	106	113	33102	33215
$erreur^{-1}$	-	7	742	11978	3740526	$1,099 \cdot 10^9$	?

Le rapport 22/7 est dû à Archimède. Son erreur est inférieure à 1/742.
Le rapport 333/106 est dû à Rivard. Son erreur est inférieure à 1/11978.
Le rapport 355/113, est dû à Métius. diffère de peu du précédent, mais son erreur est inférieure à 1/3740526. Ce rapport très précis a en outre l'avantage de s'écrire encore

$$\frac{355}{113} = \frac{71 \cdot 5}{113}$$

ce qui permet de le réaliser avec des roues spéciales, certes, mais à nombre de dents raisonnable.

A.8 Approximation d'une fraction par ses réduites

Lorsqu'il faut réaliser mécaniquement une fraction irréductible dont le numérateur et le dénominateur sont grands, il est souvent nécessaire d'approcher la fraction pour pouvoir utiliser des roues dentées à nombre raisonnable de dents. Soit par exemple la fraction 3512/431. On recherche d'abord le pgcd des deux termes de la fraction :

	8	6	1	2	1	3	1
3512	431	64	47	17	13	4	1
3448	384	47	34	13	12	4	
64	47	17	13	4	1	0	

Le pgcd des deux nombre étant égal à 1, la fraction est irréductible. On peut la mettre sous la forme de la fraction continue

$$\frac{3512}{431} = (8, 6, 1, 2, 1, 3, 1)$$

dont nous allons calculer les réduites successives à l'aide du tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
q	-	8	6	1	2	1	3	1
N	1	8	49	57	163	220	823	3512
D	0	1	6	7	20	27	101	431
$erreur^{-1}$	-	6	12	140	540	2727	45531	?

La fraction 823/101 est correcte à 1/45531 près, mais elle est composée de nombres premiers grands. La fraction 220/27, correcte à 1/2727 près, soit une erreur relative de $4,5 \cdot 10^{-5}$, est facilement réalisable à l'aide de quatre roues, car

$$\frac{220}{27} = \frac{11 \cdot 20}{27} = \frac{110 \cdot 2}{27} = \frac{110 \cdot 40}{27 \cdot 20}$$

A.9 Pourquoi utiliser les fractions continues ?

On peut légitimement se demander s'il est judicieux d'utiliser les fractions continues plutôt qu'un autre moyen d'approcher un nombre par une fraction. La réponse est donné par le théorème suivant :

Théorème 8 *Lorsqu'une fraction irréductible s'approche plus de la valeur d'une fraction continue qu'une réduite R_k déterminée, son numérateur et son dénominateur sont supérieurs à ceux de R_k*

Soit en effet a/b une fraction irréductible qui s'approche plus que la réduite R_k de la valeur x d'une fraction continue. On a donc

$$\mid \frac{a}{b} - x \mid < \mid R_k - x \mid < \mid R_{k-1} - x \mid$$

Parmi ces deux réduites, l'une est d'ordre pair et sera notée p/q et l'autre, d'ordre impair, sera notée m/n. On a

$$\frac{m}{n} < x, \;\; \frac{p}{q} > x$$

et

$$\frac{a}{b} < x + (\frac{p}{q} - x) = \frac{p}{q} \;\text{ et }\; \frac{a}{b} > x - (x - \frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$$

soit

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{p}{q} \tag{A.5}$$

Toute la démonstration repose sur le fait que, par (A.2),

$$pn - mq = \mid \mathcal{D}_k \mid = 1 \tag{A.6}$$

1. *b est supérieur à q.* En effet,
$$\frac{p}{q} - \frac{m}{n} > \frac{a}{b} - \frac{m}{n} > 0$$
soit
$$\frac{pn - mq}{nq} = \frac{1}{nq} > \frac{an - bm}{bn}$$
ce qui implique
$$b > q(an - bm) = \mathcal{M}(q)$$
et *a fortiori*, $b > q$.
2. *b est supérieur à n.* En effet,
$$\frac{p}{q} - \frac{m}{n} > \frac{p}{q} - \frac{a}{b} > 0$$
soit
$$\frac{pn - mq}{nq} = \frac{1}{nq} > \frac{pb - qa}{bq}$$
ce qui entraîne
$$b > n(pb - aq) = \mathcal{M}(n) > n$$
3. *a est supérieur à m.* Pour le montrer, partons de (A.5) modifiée en
$$\frac{q}{p} < \frac{b}{a} < \frac{n}{m} \tag{A.7}$$
On a donc
$$\frac{n}{m} - \frac{q}{p} > \frac{b}{a} - \frac{q}{p} > 0$$
soit
$$\frac{pn - mq}{mp} = \frac{1}{mp} > \frac{bp - aq}{ap}$$
ce qui donne
$$a > m(bp - aq) = \mathcal{M}(m)$$
4. *a est supérieur à p.* En effet, il découle encore de (A.7) que
$$\frac{n}{m} - \frac{q}{p} > \frac{n}{m} - \frac{b}{a} > 0$$
c'est-à-dire
$$\frac{pn - mq}{mp} = \frac{1}{mp} > \frac{an - mb}{am}$$
d'où
$$a > p(an - mb) = \mathcal{M}(p) > p$$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun (éds.) – *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1965.

[2] R. Astier, J. Bresciani, R. Coste, L. Jourdan, P. Neveu, P. Perrone et G. Rey – *Construction industrielle*, Dunod, Paris, 1982.

[3] C. Barlier et R. Bourgeois – *Mémotech Productique. Conception et dessin*, Casteilla, Paris, 1988.

[4] C. Barlier et L. Girardin – *Memotech Productique. Matériaux et usinage*, Casteilla, Paris, 1986.

[5] J. Barralis et G. Maeder – *Précis métallurgie*, AFNOR NATHAN, Paris, 1997.

[6] M. Bonte, R. Bourgeois et R. Gognet – *Mémotech productique mécanique*, Casteilla, Paris, 1997.

[7] G. Boothroid – *Fundamentals of metal machining and machine tools*, Mc Graw Hill, Singapore, 1981.

[8] G. Branger – *Guide du bureau des méthodes*, Desforges, Paris, 1977.

[9] M. Cardon et R. Pauriol – *La commande numérique pour tous*, recueil d'articles de la revue Machine-Outil, 1982.

[10] E. Catalan – « Note sur l'analyse indéterminée du premier degré », *Nouvelles annales de mathématiques* **3** (1844), p. 97–101.

[11] A. Chevalier – *Guide du dessinateur industriel*, 2004 éd., Hachette technique, Paris, 2004.

[12] A. Chevalier et J. Bohan – *Guide du technicien en productique*, 91-92 éd., Hachette Technique, Paris, 1991.

[13] J.-F. Debongnie – « Considérations économiques relatives à l'usinage léger », Rapport LMF D29, Université de Liège, Liège, 1993.

[14] — , « Optimalisation des opérations de tournage : la méthode de la puissance disponible », Rapport LMF D31, Université de Liège, Liège, juilllet 1993.

[15] — , *Usinage*, CEFAL, Liège, 2006.

[16] B. Demidovitch et I. Maron – *Eléments de calcul numérique*, Mir, Moscou, 1973.

[17] R. Dietrich, G. Facy, E. Hugonnaud, M. Pompidou et J.-P. Trotttignon – *Précis de construction mécanique*, 7e éd., vol. 2 - Méthodes, fabrication et normalisation, AFNOR NATHAN, Paris, 1988.

[18] R. Dietrich, D. Garsaud, S. Gentillon et M. Nicolas – *Précis de méthodes d'usinage*, 5e éd., AFNOR NATHAN, Paris, 1989.

[19] DIN (éd.) – *Vergütunsstähle, Teil 1, Edelstähle*, no. EN 10083-1, Beuth, Berlin, 1996.

[20] — (éd.) – *Vergütunsstähle, Teil 2,Unlegierte Qalitätstähle*, no. EN 10083-2, Beuth, Berlin, 1996.

[21] — (éd.) – *Vergütunsstähle, Teil 3, Borstähle*, no. EN 10083-3, Beuth, Berlin, 1996.

[22] J.-L. Fanchon – *Guide des sciences et technologies industrielles*, Nathan, Paris, 1994.

[23] U. Fischer (éd.) – *Fachkunde Metall*, 50 éd., Verlag Europa Lehrmittel, Haan-Gruiten, 1990.

[24] H. Gerling – *Les machines-outils*, Eyrolles, Paris, 1978.

[25] M. Gondran et R. Staron – *Les dispersions*, Casteilla, Paris, 1986.

[26] G. Henriot – *Traité théorique et pratique des engrenages*, 5 éd., vol. 2, Dunod, Paris, 1983.

[27] K. Hug – *Brève introduction à la programmation des machines-outils*, Technische Runsdschau Hallwag, Berne, 1984.

[28] IFAO (éd.) – *CNC-Ausbildung*, 2 éd., vol. 1, Grundlagen, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1986.

[29] — (éd.) – *CNC-Ausbildung*, 2 éd., vol. 2, Uebungen, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1988.

[30] — (éd.) – *CNC-Ausbildung*, vol. 3a, Drehen mit Komplettbearbeitung, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1989.

[31] — (éd.) – *CNC-Ausbildung*, 2 éd., vol. 4, Fräsen, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1990.

[32] J. Karr – *Gammes d'usinage et analyse de phases*, Dunod, Paris, 1971.

[33] W. König – *Fertigungsverfahren*, 3 éd., vol. 1 - Drehen, Fräsen, Bohren, VDI Verlag, Düsseldorf, 1990.

[34] H. Longeot et L. Jourdan (éds.) – *Fabrication industielle*, Bordas, Paris, 1985.

[35] R. Magnin et J.-P. Urso – *Mémotech commande numérique*, Casteilla, Paris, 1991.

[36] L. Masset et J.-F. Debongnie – « Simulation numérique de l'usinage - Essais de fraisage », 1998.

[37] C. Massonnet – *Résistance des matériaux*, vol. 2, Dunod, Paris, 1965.

[38] M. E. Merchant – « Some observations on the past and present research on machining and grinding », *Applied Mechanical Reviews* **46** (1993), no. 3.

[39] G. Murry – *Méthode pratique de prévision de la réponse d'un acier aux traitements thaermiques*, OTUA, 5bis rue de Madrid, 75739 Paris CEDEX08, 1984.

[40] R. Nadreau – *Le tour et la fraiseuse*, 2 éd., Chez l'auteur, Paris, 1961.

[41] OTUA (éd.) – *Propriété d'emploi des aciers (nombreux rapports techniques)*, OTUA, 5bis rue de Madrid, 75739 Paris CEDEX 08.

[42] M. Paoletti – *Etudes de fabrication*, Desforges, Paris, 1983.

[43] J. Pinte et W. Du Mong – « Technologie de l'usinage : choix optimal des conditions de coupe en tournage », Tech. Report MC70, CRIF, Bruxelles, 1981.

[44] P. Reinaers – *Programmation CNC - Simulateur Deckel*, Université de Liège, 1988.

[45] N.-J. Schons – *Compléments d'arithmétique et d'algèbre*, 3 éd., Duculot, Gembloux, 1940.

[46] Stahlschlüssel (éd.) – *Stahlschlüssel Taschenbuch*, 18 éd., Marbach a. N., 1998.

[47] F. W. Taylor – « On the art of cutting metals », *Transactions A.S.M.E.* **28** (1907), no. paper 119.

[48] G. Tournier, F. Lecroisey et R. Sechaud – CETIM Informations, 1975.

[49] H. Tschätsch – *Praxis der Zerspantechnik*, 7 éd., Vieweg, Wiesbaden, 2005.

[50] J. Vergnas – *Exploitation des machines-outils à commande numérique*, Pyc Edition, Paris, 1985.

[51] M. Weck – *Werkzeugmaschinen*, 3 éd., vol. 1, VDI Verlag, Düsseldorf, 1988.

Table des matières