

---

# Modélisation numérique de couplages multiphysiques et de la localisation des déformations dans les géomatériaux

**F. Collin<sup>1</sup>, P. Kotronis<sup>2</sup>, B. Pardoën<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Département ArGEnCo, Université de Liège, Belgique ;*

<sup>2</sup>*Institut GeM, Ecole Centrale de Nantes, France ;*

<sup>3</sup>*Institut iMMC, Université catholique de Louvain, Belgique.*

---

*La rupture des géomatériaux est souvent précédée par une localisation des déformations au sein de bandes minces. La localisation des déformations est donc un processus important, qui a été étudié à la fois expérimentalement et théoriquement. Cet article résume les principales observations sur les phénomènes localisés et propose des outils numériques pour caractériser les processus de localisation. Pour gérer les interactions se produisant entre les différentes phases des milieux poreux, une technique de régularisation basée sur le modèle second gradient a été étendue aux couplages multiphysiques.*

## 1 Introduction

Le comportement et la rupture des géomatériaux sont importants pour la conception de travaux géotechniques pour lesquels les matériaux peuvent être soumis à de fortes sollicitations. Dès lors, les déformations et la rupture de ces matériaux sont largement étudiées dans le domaine de la géomécanique. Des observations expérimentales sur les géomatériaux indiquent clairement l'apparition de ruptures localisées [Des84]. Théoriquement, le concept de surface de rupture est l'un des plus anciens cas de rupture localisée. Ce concept était déjà utilisé dans la conception d'ouvrages et de structures il y a plusieurs siècles [Cou73]. Dans certains cas, un mode de rupture diffus peut également être observé et correspond à une rupture homogène visible par des essais en laboratoire [KGDL06]. De nos jours, il est communément admis que, dans de nombreuses situations, des déformations et de l'endommagement peuvent apparaître de façon localisée dans les matériaux avant la rupture. Dans les matériaux rocheux, une

redistribution des contraintes peut engendrer de l'endommagement pouvant d'abord être diffus puis localisé. Une fois le seuil d'endommagement atteint, des microfissures apparaissent, se développent, s'accumulent et se propagent dans le matériau. S'il y a coalescence des microfissures, l'endommagement diffus peut conduire à la localisation de déformations dans des zones restreintes, voire à l'initiation de fractures interconnectées [Die03]. Ces dernières correspondent à l'apparition de macrofissures qui peuvent conduire à une rupture matérielle soudaine [Die03].

Le processus de fracturation provoque des discontinuités dans le matériau qui peuvent être représentées théoriquement et numériquement par différentes approches. Deux catégories principales existent : les descriptions continues et discrètes de la fracture. Les descriptions continues incluent l'endommagement matériel et la localisation des déformations, tandis que les descriptions discrètes représentent explicitement les fissures. En mécanique de la rupture, les différents modes de fractures sont : traction ou ouverture (mode I), cisaillement plan (mode II), cisaillement hors plan (mode III), et mixte traction-cisaillement (mode I-II, [JS88]). La modélisation de la localisation des déformations est une approche continue qui ne reproduit pas explicitement les fractures et leurs discontinuités. Néanmoins, elle induit généralement une distribution non uniforme des déformations. Celle-ci peut engendrer une discontinuité de déplacement entre le matériau situé de part et d'autre d'une bande de cisaillement.

Par ailleurs, les sols et les roches sont des matériaux poreux, dont le volume poreux est rempli d'un ou plusieurs fluides (eau, gaz, huile ...). Le comportement global du milieu dépend non seulement de la réponse du squelette solide (phase solide) à un chemin de chargement donné, mais aussi des interactions intervenant entre les différentes phases du milieu. Les effets capillaires, les variations de température ou encore les réactions chimiques induisent des comportements spécifiques qui doivent être modélisés par des lois de comportement multiphysiques. Les outils numériques de modélisation des problèmes de localisation de déformations doivent donc être étendus à ce contexte multiphysique. Ceci est nécessaire pour traiter des applications liées, par exemple, à l'enfouissement des déchets nucléaires et au comportement du béton sous forte charge. Ensuite, de nouvelles questions se posent concernant les interactions entre processus de localisation et processus physique (comme la diffusion liquide par exemple). Les réponses à ces nouvelles questions ne peuvent être données qu'en s'appuyant sur des preuves expérimentales.

La section 2 de cet article résume les principales observations sur le phénomène de localisation, issues de résultats expérimentaux. La section 3 décrit les méthodes de régularisation utilisées pour modéliser correctement le processus de localisation des déformations. La section 4 est la description du modèle couplé second gradient en conditions saturées. Un essai de compression biaxiale est modélisé afin de montrer la capacité du modèle second gradient à représenter correctement le comportement post-pic. Dans la section 5, le modèle second gradient est étendu aux conditions non saturées. L'exemple d'une excavation de galerie est proposé dans la section 6 pour mettre en évidence l'influence des couplages hydromécaniques en conditions saturées et non saturées sur le processus de localisation des déformations. Finalement, des

conclusions viennent clore l'article.

## 2 Preuves expérimentales de la localisation des déformations

La localisation des déformations est fréquemment observée avant la rupture des matériaux. Partant d'un état de déformation homogène, la localisation des déformations consiste en une accumulation de déformations dans une zone restreinte pouvant engendrer des fissures et la rupture matérielle (lignes de rupture). Dans les géomatériaux tels que les sols et les roches, elle est souvent considérée comme une accumulation de déformations de cisaillement en bande [Des05]. Néanmoins, le type de localisation peut être de nature différente pour d'autres matériaux.

Les géomatériaux ont une faible résistance à la traction, ce qui rend difficile la caractérisation de ce mode de rupture. D'autre part, de nombreux essais de compression en laboratoire, à petite échelle, sont dédiés à la localisation des déformations [VGG78, HD93, FHMV96, FHMV97, ABS03]. Ils permettent de caractériser le comportement sous compression des matériaux jusqu'à la rupture. Ces essais sont généralement réalisés sur des appareils de compression triaxiale axisymétrique ou de compression biaxiale à déformation plane. Ils comportent des techniques spéciales pour étudier l'évolution du processus de localisation des déformations. Parmi ces techniques, citons entre-autre la stéréophotogrammétrie [Des84, DV04], la microtomographie à rayons X et la corrélation d'images numériques tridimensionnelles [LBD<sup>+</sup>07]. L'avantage des expériences de compression biaxiale est que le processus de localisation est clairement mis en évidence, alors qu'il peut rester caché à l'intérieur de l'échantillon lors des essais de compression triaxiale.

Sous compression, la rupture des sols et des roches est essentiellement dominée par la rupture en cisaillement. Par rapport à celle-ci, les études expérimentales mettent généralement en évidence la localisation des déformations en bandes de cisaillement [Des05]. Il est communément admis que l'établissement d'une bande de cisaillement correspond à une contrainte maximale dans la courbe de réponse globale contrainte-déformation de l'échantillon [MD99, Des05]. Le comportement post-pic adoucissant du matériau dépend dès lors de l'apparition de bandes de cisaillement, voire de fissures.

Les études expérimentales sur la localisation des déformations analysent principalement le comportement des sables et seules quelques-unes sont dédiées aux roches [BDR00]. L'analyse de la formation des fractures et des bandes de localisation des déformations dans les roches est un réel défi en raison de leur résistance élevée et de leur comportement fragile (matériau quasi-fragile). Il est donc nécessaire de développer des équipements appropriés afin d'analyser le comportement de ce type de matériau [DV04].

### 3 Méthodes de régularisation

L'étape suivante consiste à définir une méthode appropriée et robuste permettant de modéliser correctement la localisation de la déformation en bandes de cisaillement par la méthode des éléments finis, conduisant finalement à la rupture en mode localisé. La modélisation de la rupture par des approches locales avec la méthode des éléments finis classiques n'est pas pertinente pour la reproduction de la localisation de la déformation car elle présente une dépendance au maillage (à la taille et à l'orientation du maillage), comme indiqué par [PM81], [ZPV01b], [CLC09], et [WW10]. Ce problème pathologique est dû aux propriétés du problème mathématique sous-jacent.

Cette dépendance à la discrétisation des éléments finis peut être résolue en employant une technique de régularisation appropriée. Une telle méthode doit introduire une longueur interne dans le problème pour modéliser correctement le comportement de post-localisation. Deux catégories principales de modèles améliorés existent: l'une consiste en l'enrichissement de la loi de comportement avec par exemple des lois non locales [BBC84, PCB87, PdBB<sup>+</sup>96, GSH12] ou la plasticité à gradient [Aif84, dBM92, PdBBdV96]. La seconde catégorie propose l'enrichissement de la cinématique du continuum avec des effets de microstructure. Pour cette dernière, la micro-cinématique est définie à l'échelle microscopique en plus de la macro-cinématique classique [CC09, Tou62, Min64, Ger73]. Toutefois, ces modèles enrichis restaurent l'objectivité au maillage mais non l'unicité de la solution.

#### 3.1 Enrichissement de la loi constitutive

Dans cette approche, une longueur interne est introduite au niveau du modèle constitutif. Des analyses avancées des phénomènes de localisation ont montré que les équations constitutives avec une longueur interne sont une des solutions pour modéliser correctement les bandes localisées de déformation.

La longueur interne est introduite en développant une définition non locale des variables internes impliquées dans le comportement du matériau. La variable non-locale  $\hat{v}$  à un point matériel  $x_i$  peut être définie comme une valeur de moyenne de la variable locale  $v$  dans un volume considéré  $\Omega$  près de ce point [PCB87, PGdBB01], comme illustré à la Fig. 1.

La méthode non-locale intrégrale définit:

$$\hat{v}(x_i) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \Psi v(y_i) d\Omega \quad (1)$$

$$V = \int_{\Omega} \Psi d\Omega \quad (2)$$

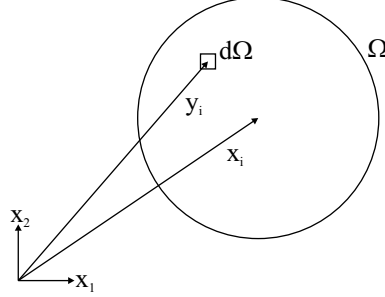


Figure 1: Approche non-locale sur un volume représentatif du matériau.

où  $x_i$  est le vecteur des coordonnées du point matériel où la variable non locale est considérée,  $\Omega$  est un volume représentatif centré sur  $x_i$ ,  $y_i$  est le vecteur des coordonnées du volume infinitésimal  $d\Omega$  et  $\Psi$  est la fonction de pondération définissant  $\hat{v}$  à  $\hat{v} = v$  pour une distribution homogène de la variable. Elle est généralement définie avec une distribution gaussienne:

$$\Psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l_c^3} \exp\left(-\frac{\|x_i - y_i\|^2}{2 l_c^2}\right) \quad (3)$$

qui dépend de la distance  $\|x_i - y_i\|$  et de la longueur caractéristique  $l_c$ . Ce paramètre de longueur, ou longueur interne, définit le volume du matériau qui contribue significativement à la variable non-locale et est en conséquence relié à la microstructure.

La variable régularisée peut également être définie explicitement à partir de la variable locale  $v(x_i)$  et de son gradient. Dans ses travaux de pionier, [Aif84] a introduit un tel gradient dans son équation constitutive. La formulation du gradient explicite est:

$$\hat{v} = v + \bar{l} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4)$$

où la dépendance de  $v$  et  $\hat{v}$  vis-à-vis du vecteur de coordonnées  $x_i$  est négligée pour des raisons de simplicité et que  $\bar{l}$  a la dimension d'une longueur au carré afin que  $\sqrt{\bar{l}}$  puisse être reliée à la longueur interne  $l_c$  introduite pour régulariser le modèle. Étant donné que le terme de gradient est une quantité locale, l'interaction spatiale des points matériels situés au voisinage de  $\hat{v}$  est infinitésimale et le modèle de gradient explicite est donc local. Ceci est une différence principale avec la formulation intégrale non locale de l'Eq. 1 où la distance d'interaction est finie et liée à la fonction de pondération. De plus, la formulation de gradient explicite peut être dérivée de la formulation intégrale non locale en introduisant le gradient de la variable interne, en développant la variable locale  $v(y_i)$  en série de Taylor [BBC84, LB88, PdBBdV96], en utilisant la définition de la fonction de pondération de l'Eq. 3, et en négligeant les termes au-dessus du second ordre (approximation).

La définition de l'Eq. 4 est moins appropriée dans le cadre d'analyses numériques, comme la méthode des éléments finis, à cause de la dépendance explicite de  $\hat{v}$  avec son (second) gradient local. Cette dépendance conduit à une exigence de continuité pour la variable interne qui doit être une fonction continuellement différentiable (fonction  $C^1$  dont la dérivée est continue). Pour éviter cet inconvénient, une formulation alternative à gradient implicite, introduisant une approximation de l'Eq. 1 similaire à l'Eq. 4, peut être exprimée comme suit [PdBBdV96, PGdBB01]:

$$\hat{v} - \bar{l} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x_i \partial x_i} = v \quad (5)$$

et permet une définition continue de  $v$  (fonction  $C^0$ ). Pour le modèle de gradient implicite, la variable interne non locale est une inconnue supplémentaire qui est la solution de l'équation différentielle de Helmholtz (Eq. 5). La solution de cette équation ne peut être trouvée que si une condition de limite supplémentaire sur  $\hat{v}$  est spécifiée. La condition suivante est généralement supposée [LB88]:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i} n_i = 0 \quad (6)$$

où  $n_i$  est le vecteur normal à la limite externe. Cette condition permet la solution  $\hat{v} = v$  pour une distribution homogène. Contrairement à la formulation explicite, la variable non locale  $\hat{v}$  est implicitement donnée comme la solution des équations 5 et 6, ainsi que l'interaction spatiale se produit sur une distance finie qui implique un caractère non local. La solution est de la même forme que l'équation non-locale 1 avec  $\Psi = Gr$  et  $V = 1$ ,  $Gr$  étant la fonction de Green [Zau89]:

$$\hat{v}(x_i) = \int_{\Omega} Gr v(y_i) d\Omega \quad (7)$$

$$Gr = \frac{1}{4\pi \bar{l} \|x_i - y_i\|} \exp\left(-\frac{\|x_i - y_i\|}{\sqrt{\bar{l}}}\right) \quad (8)$$

Le modèle à gradient implicite est donc un cas particulier du modèle non-local.

Les quantités non locales ainsi que le gradient des variables internes peuvent enfin être introduits dans les modèles constitutifs. Parmi d'autres auteurs, Bazant, Pijaudier-Cabot et ses collaborateurs [BBC84, PCB87] ont proposé une famille de modèles constitutifs dérivés de la théorie de l'endommagement non local dans laquelle une variable interne non locale est utilisée à la place de la variable locale. Par exemple, un taux de dissipation d'énergie d'endommagement non local obtenu par l'équation 1 est introduit dans la fonction de chargement des dommages. D'autres variables telles que la déformation équivalente non locale sont généralement utilisées dans le modèle d'endommagement [PGdBB01].

## 3.2 Enrichissement de la cinématique

Les approches précédentes (enrichissement de la loi de comportement) introduisent l'effet de la microstructure avec des termes non-locaux ou des termes de gradient, mais la microstructure elle-même n'est pas explicitement définie. Pour ce faire, la cinématique classique d'un milieu continu peut être enrichie par une description supplémentaire de la cinématique de la microstructure, conduisant à un milieu continu de microstructure également appelé milieu enrichi.

Pour un milieu continu classique, une particule matérielle de volume  $\Omega$  est définie à l'échelle macroscopique par son champ (macro) de déplacement  $u_i$ . Les champs cinématiques classiques sont le champ macro-déformation

$$F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

correspondant au gradient du champ de déplacement, le champ de macro-déformation:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}) \quad (10)$$

correspondant à la partie symétrique de  $F_{ij}$ , et le champ de macro-rotation:

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji}) \quad (11)$$

correspondant à la partie antisymétrique de  $F_{ij}$ . Leurs taux de vitesse sont aussi couramment utilisés; le champ de gradient de vitesse:

$$L_{ij} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \quad (12)$$

le champ de vitesse de déformation:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}) \quad (13)$$

et le champ de vitesse de rotation:

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} - L_{ji}) \quad (14)$$

Le premier et le plus célèbre modèle enrichi a été développé par les frères Cosserat [CC09] qui ont introduit les degrés de liberté de rotation locaux  $r_i^c$  en plus des déplacements des milieux continus classiques  $u_i$  (Fig. 2). La théorie du continuum élastique de Cosserat (ou micropolaire) convient principalement à la description cinématique des matériaux granulaires. En conséquence, des champs cinématiques supplémentaires sont introduits [VS95]. La déformation due à la rotation des particules, également appelée micro-rotation (tenseur antisymétrique), devient:

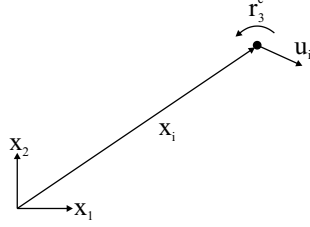


Figure 2: Degrés de liberté cinématique de la théorie des milieux de Cosserat.

$$r_{ij}^c = e_{ijk} r_k^c \quad (15)$$

où  $e_{ijk}$  est le tenseur de permutation, et le gradient de la rotation de la particule, appelée également courbure:

$$K_{ij}^c = \frac{\partial r_i^c}{\partial x_j} \quad (16)$$

Une déformation relative est déduite de la différence entre la macro-déformation et la micro-rotation:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = F_{ij} - r_{ij}^c \quad (17)$$

dont la partie symétrique coïncide avec la macro-déformation  $\varepsilon_{ij}$  et sa partie anti-symétrique avec la différence entre la macro et la micro-rotation  $r_{ij} - r_{ij}^c$ . Cette dernière caractérise la rotation relative d'un point matériel par rapport à la rotation de son voisinage. Un couple de torsion associé aux rotations est ainsi ajouté en introduisant une flexion et une torsion au point du matériau. Il en résulte une équation d'équilibre des moments impliquant le couple de contraintes qui vient s'ajouter à l'équation d'équilibre classique (locale) impliquant le champ de contraintes  $\sigma_{ij}$ . De plus, les constantes élastiques supplémentaires sont prises en compte dans les équations constitutives qui consistent en des paramètres de longueur interne liés à la microstructure [VS95].

Dans les années 1960, [Tou62] et [Min64] ont défini des matériaux à microstructure. Un macro-volume  $\Omega$  est composé de particules microscopiques plus petites pouvant être représentées par un micro-volume  $\Omega^m$ , incorporé dans le volume matériel  $\Omega$  (Fig. 3). Un champ de micro-déplacement  $u_i^m$  est défini indépendamment du macro-déplacement  $u_i$  et son gradient permet de définir un champ de micro-déformation:

$$\nu_{ij} = \frac{\partial u_i^m}{\partial x_j} \quad (18)$$

qui est homogène dans le micro-volume  $\Omega^m$  mais non-homogène dans le macro-volume  $\Omega$ .



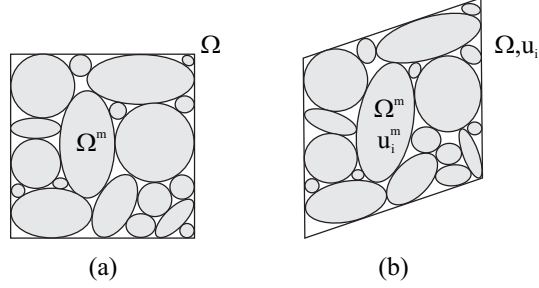


Figure 3: Cinématique du milieu à microstructure: (a) configuration initiale et (b) configuration après une sollicitation externe avec un déplacement relatif de la microstructure.

Les parties symétrique et antisymétrique de  $v_{ij}$  correspondent à la micro-déformation et la micro-rotation:

$$\varepsilon_{ij}^m = \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{ji}) \quad (19)$$

$$r_{ij}^m = \frac{1}{2} (v_{ij} - v_{ji}) \quad (20)$$

avec la micro-rotation correspondant aux composantes de rotation du modèle de Cosserat  $r_{ij}^m = r_{ij}^c$  (Eq. 15). Le modèle de Cosserat est en fait un cas particulier d'un milieu à microstructure. De plus, le micro second gradient est défini comme suit:

$$h_{ijk} = \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i^m}{\partial x_j \partial x_k} \quad (21)$$

La déformation relative de la microstructure est définie comme la différence entre les champs de macro et de micro-déformation:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = F_{ij} - v_{ij} \quad (22)$$

dont la partie symétrique coïncide avec la différence entre la macro et la micro-déformation  $\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^m$  et sa partie antisymétrique à la différence entre la macro et la micro-rotation  $r_{ij} - r_{ij}^m$ . De manière similaire à la description du milieu de Cosserat, des contraintes supplémentaires sont introduites: le micro-contrainte, un champ de contrainte associé à la microstructure et la double contrainte.

Plus tard, [Ger73] a introduit le principe de la puissance virtuelle pour définir un cadre global pour la formulation d'un milieu continu à microstructure. Ce principe stipule que, par équilibre, la puissance virtuelle de toutes les forces agissant sur un système mécanique est nulle. Dans ce qui suit, les matériaux dont la microstructure est définie par [Min64] et [Ger73] seront considérés.

Un large panel de modèles existe dans la littérature pour des milieux à microstructure. Parmi eux, le modèle à second gradient introduit et développé à Grenoble

[CCH98, CCM01] sera plus particulièrement présenté ci-après. Cependant, les conclusions suivantes peuvent être généralisées à d'autres techniques de régularisation.

## 4 Modèle second gradient local couplé pour les milieux à microstructure saturés

Le modèle couplé de second gradient local est développé pour des milieux continus enrichis comprenant des effets de microstructure [CCM01]. Ce modèle a été étendu à des milieux poreux monophasiques à biphasiques (phase solide et fluide) par [CCC06] pour mettre en évidence les interactions possibles du fluide (eau liquide) avec le processus de localisation de la déformation et la longueur interne introduite par le modèle. Les développements proposés par [CCC06] sont rappelés dans cette section. Ils considèrent un milieu avec des grains solides incompressibles, dans des conditions saturées et isothermes. Les phases solide et fluide sont considérées comme non miscibles et les changements de phase, comme l'évaporation et la dissolution, ne sont donc pas pris en compte.

Comme pour un milieu continu classique, le matériau est considéré comme un milieu poreux et les équations d'équilibre sont basées sur des théories de mélange. Les inconnues du problème couplé sont le macro-déplacement  $u_i$ , le champ de micro-déformation  $v_{ij}$  (ou le champ de micro-déplacement  $u_i^m$  par l'Eq. 18), et la pression de l'eau interstitielle  $p_w$ . Un champ d'inconnues supplémentaire, des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{ij}$ , sera ajouté pour l'implémentation numérique dans un code aux éléments finis.

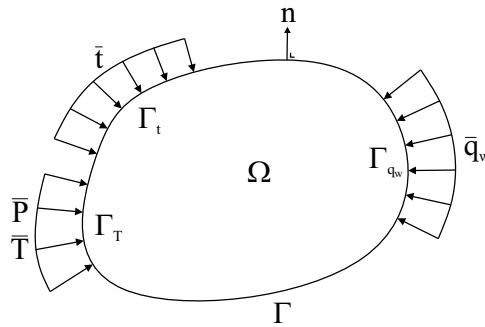


Figure 4: Référentiel matériel en configuration actuelle  $\Omega$  et conditions aux limites pour le modèle de second gradient.

## 4.1 Equations d'équilibre pour les milieux poreux à microstructure

### 4.1.1 Modèle de second gradient local pour des milieux monophasiques

La classe de cinématique virtuelle introduite dans le principe des travaux virtuels pour la théorie cinématique classique peut être étendue dans le cadre d'une théorie de milieu continu à microstructure, en ajoutant une description de la cinématique de la microstructure au champ de déplacement classique. D'après l'Eq. 18, la cinématique à l'échelle microscopique est décrite par un champ de gradient microkinématique  $\mathbf{v}_{ij}$ . En ce qui concerne la mécanique classique du continuum, des termes supplémentaires sont ajoutés dans le travail virtuel interne d'un corps donné [Ger73]. L'expression suivante est valable pour toutes quantités virtuelles:

$$W_{int}^* = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{ij} F_{ij}^* - \boldsymbol{\tau}_{ij} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^* + \Sigma_{ijk} h_{ijk}^*) d\Omega \quad (23)$$

où  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^*$  est la déformation relative virtuelle de la microstructure:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^* = F_{ij}^* - \mathbf{v}_{ij}^* \quad (24)$$

$\boldsymbol{\tau}_{ij}$  est une contrainte supplémentaire associée à la microstructure appelée aussi micro-contrainte,  $h_{ijk}^* = \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k}$  est le micro second gradient virtuel, et  $\Sigma_{ijk}$  est la double contrainte duale à  $h_{ijk}^*$ , qui nécessite une loi de comportement supplémentaire introduisant la longueur interne. Le travail virtuel externe peut être défini comme suit:

$$W_{ext}^* = \int_{\Omega} \rho g_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{t}_i u_i^* + \bar{P}_{ij} v_{ij}^*) d\Gamma \quad (25)$$

où  $\bar{P}_{ij}$  est une traction externe double supplémentaire agissant sur une partie  $\Gamma_T$  du contour  $\Gamma$  (Fig. 4) et  $\Gamma_{\sigma} = \{\Gamma_t \cup \Gamma_T\}$  regroupe les sollicitations externes classiques et supplémentaires. Le principe des travaux virtuels suppose l'égalité entre les travaux virtuels internes et externes et conduit à la forme faible de l'équation d'équilibre:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{ij} F_{ij}^* - \boldsymbol{\tau}_{ij} (F_{ij}^* - \mathbf{v}_{ij}^*) + \Sigma_{ijk} h_{ijk}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \rho g_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{t}_i u_i^* + \bar{P}_{ij} v_{ij}^*) d\Gamma \quad (26)$$

Les équations d'équilibre locale sont formulées pour les grandeurs macro et micro:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_{ij} - \boldsymbol{\tau}_{ij})}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Sigma_{ijk}}{\partial x_k} - \tau_{ij} = 0 \quad (28)$$

les conditions aux limites sont:

$$\bar{t}_i = (\sigma_{ij} - \tau_{ij}) n_j \quad (29)$$

$$\bar{P}_{ij} = \Sigma_{ijk} n_k \quad (30)$$

Les conditions aux limites du mélange sont également enrichies par des effets de microstructure qui conduisent à des conditions aux limites non classiques.

Dans le cas spécifique du modèle de second gradient local utilisé ci-après [CCH98, CCM01], une contrainte cinématique est ajoutée afin d'obtenir un milieu continu second gradient local. Aucune déformation relative de la microstructure n'est supposée  $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$ , ce qui signifie que le gradient microcinématique est égal à la macro-déformation:

$$v_{ij} = F_{ij} \quad (31)$$

En conséquence:

$$v_{ij}^* = F_{ij}^* \quad (32)$$

pour les champs virtuels. Par conséquent, le principe des travaux virtuels peut être réécrit comme suit:

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho g_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{t}_i u_i^* + \bar{T}_i D u_i^*) d\Gamma \quad (33)$$

où  $\bar{T}_i$  est la double force externe supplémentaire par unité de surface sur  $\Gamma_T$  (Fig. 4) et la quantité  $Da$  désigne la dérivée normale de toute quantité  $a$ :

$$Da = \frac{\partial a}{\partial x_i} n_i \quad (34)$$

avec:

$$D u_i^* = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} n_j = F_{ij}^* n_j = v_{ij}^* n_j \quad (35)$$

L'équation d'équilibre local s'écrit:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \Sigma_{ijk}}{\partial x_j \partial x_k} + \rho g_i = 0 \quad (36)$$

et les conditions aux limites sont:

$$\bar{t}_i = \sigma_{ij} n_j - n_k n_j D \Sigma_{ijk} - \frac{D \Sigma_{ijk}}{D x_k} n_j - \frac{D \Sigma_{ijk}}{D x_j} n_k + \frac{D n_l}{D x_l} \Sigma_{ijk} n_j n_k - \frac{D n_j}{D x_k} \Sigma_{ijk} \quad (37)$$

$$\bar{T}_i = \bar{P}_{ij} n_j = \Sigma_{ijk} n_j n_k \quad (38)$$

où  $\frac{Da}{Dx_i}$  est la dérivée tangentielle de toute quantité  $a$ :

$$\frac{Da}{Dx_i} = \frac{\partial a}{\partial x_i} - \frac{\partial a}{\partial x_j} n_j n_i \quad (39)$$

Le second gradient local présente l'avantage que les équations constitutives restent locales, les champs de contraintes  $\sigma_{ij}$  et  $\Sigma_{ijk}$  étant des quantités locales. Une extension au second gradient peut dès lors être formulée pour toute loi de comportement classique de la mécanique des milieux continus.

#### 4.1.2 Equation constitutive d'un milieu second gradient

De même que pour les milieux classiques pour lesquels une équation constitutive lie la contrainte à la cinématique, une loi de comportement additionnelle doit être définie entre la double contrainte et la microcinématique. Dans ce chapitre cette dernière est supposée découplée de la partie premier gradient (une étude numérique 1D considérant les deux lois couplées est présentée dans [Kot08]). Peu d'informations expérimentales sont disponibles sur la relation existant entre la double contrainte et la micro-déformation. Pour des raisons de simplicité, une loi mécanique élastique est ci-dessous choisie dans le but d'introduire le moins de paramètres supplémentaires possibles. Elle consiste en une relation linéaire isotrope impliquant cinq paramètres indépendants dérivés de [Min65]:

$$\tilde{\Sigma}_{ijk} = D_{ijklmn} \frac{\partial \dot{\nu}_{lm}}{\partial x_n} \quad (40)$$

sachant que la vitesse de double stress de Jaumann s'écrit:

$$\tilde{\Sigma}_{ijk} = \dot{\Sigma}_{ijk} + \Sigma_{ljk} \omega_{li} + \Sigma_{imk} \omega_{mj} + \Sigma_{ijp} \omega_{pk} \quad (41)$$

en fonction du micro second gradient de la vitesse  $\dot{h}_{ijk}$ . Comme la signification physique des paramètres matériels composant  $D_{ijklmn}$  n'est pas bien établie, une version simplifiée introduisant un seul paramètre a été proposée [MCC02]. Pour les problèmes bidimensionnels, on peut lire:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{111} \\ \tilde{\Sigma}_{112} \\ \tilde{\Sigma}_{121} \\ \tilde{\Sigma}_{122} \\ \tilde{\Sigma}_{211} \\ \tilde{\Sigma}_{212} \\ \tilde{\Sigma}_{221} \\ \tilde{\Sigma}_{222} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_{21}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_{21}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_{22}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Le paramètre élastique constitutif  $D$  représente l'effet de la microstructure. Il est lié à la longueur interne et par conséquent à la largeur de bande de cisaillement [CCH98, KCMC05, KCB<sup>+</sup>07, KHBC08, Kot08, CCC09, SJKC18].

#### 4.1.3 Modèle couplé de second gradient local

La théorie du second gradient a été étendue du milieu monophasique au milieu biphasique par [CCC06]. Comme pour un milieu monophasique, les effets de microstructure doivent être introduits dans les équations d'équilibre de la poromécanique classique.

L'équation d'équilibre est identique à l'Eq. 33:

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho g_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{t}_i u_i^* + \bar{T}_i D u_i^*) d\Gamma \quad (43)$$

L'équation du bilan de masse d'eau est écrite, sous une forme faible, de la même manière que l'équation d'équilibre. Un champ de pression d'eau interstitielle virtuelle cinématiquement admissible  $p_w^*$  est considéré et est impliqué, ainsi que sa dérivée première, dans les quantités virtuelles internes et externes. L'équation du bilan massique de l'eau se lit comme suit:

$$\int_{\Omega} \left( \dot{M}_w p_w^* - f_{w,i} \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} Q_w p_w^* d\Omega - \int_{\Gamma_{q_w}} \bar{q}_w p_w^* d\Gamma \quad (44)$$

où  $M_w$  est la masse d'eau à l'intérieur de  $\Omega$ ,  $f_{w,i}$  est le débit massique de l'eau,  $Q_w$  est le terme de source de masse d'eau et  $\bar{q}_w$  est la masse d'eau d'entrée (positive pour une injection) par unité de surface sur une partie  $\Gamma_{q_w}$  de  $\Gamma$  (Fig. 4).

Selon les hypothèses précédentes, l'équation d'équilibre (Eq. 33) reste valide à condition que  $\rho$  et  $\sigma_{ij}$  soient définis, sachant que le milieu est un mélange d'une phase solide et fluide.

La masse volumique homogénéisée du mélange est donnée par:

$$\rho = \rho_s (1 - \Phi) + \rho_w \Phi \quad (45)$$

et la contrainte effective est définie selon le postulat de Terzaghi:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p_w \delta_{ij} \quad (46)$$

En outre, on suppose que le fluide poreux n'a pas d'influence à l'échelle microscopique; par conséquent, les variations de pression de l'eau interstitielle ne génèrent pas de gradients microcinématiques. Une telle hypothèse supplémentaire a été formulée par Ehlers [EV98] sur un modèle de Cosserat pour un milieu biphasique. Les effets du second gradient n'impactent que la phase solide et l'équation du bilan massique de l'eau (Eq. 44) de la poromécanique classique est conservée. Les équations qui régissent le problème couplé sont donc les Eqs. 33 et 44.

Comme nous l'avons déjà mentionné pour la poromécanique classique, l'effet de l'eau sur la contrainte totale est défini en fonction de la définition de la contrainte effective (Eq. 46), tandis que la double contrainte  $\Sigma_{ijk}$  est indépendante de la pression de l'eau interstitielle. La double contrainte est uniquement liée à la phase solide.

La masse d'eau  $M_w$  à l'intérieur de  $\Omega$  et le débit massique de l'eau  $f_{w,i}$  sont définis par les équations suivantes:

$$M_w = \rho_w \Phi \Omega \quad (47)$$

$$f_{w,i} = -\rho_w \frac{k_w}{\mu_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial x_i} + \rho_w g_i \right) \quad (48)$$

Les définitions de variations des masse volumiques des deux phases et de la porosité sont:

$$\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} = \frac{\dot{p}_w}{\chi_w} \quad (49)$$

$$\dot{\rho}_s = 0 \quad (50)$$

$$\dot{\Phi} = (1 - \Phi) \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (51)$$

Cette dernière conduit à la dérivée temporelle de la masse d'eau par unité de volume du mélange:

$$\dot{M}_w = \rho_w \left( \frac{\dot{p}_w}{\chi_w} \Phi + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \quad (52)$$

## 4.2 Formulation de l'élément fini couplé

### 4.2.1 Implémentation numérique

La formulation de travail virtuel permet d'implémenter les modèles de second gradient dans un code d'éléments finis. Pour implémenter l'équation d'équilibre Eq. 33, le champ de déplacement doit être une fonction continuellement différentiable car les dérivées de second ordre du champ de déplacement sont impliquées [ZPV01b]. Pour éviter l'utilisation de fonction C1, les restrictions cinématiques  $v_{ij} = F_{ij}$  et  $v_{ij}^* = F_{ij}^*$  sont introduites dans l'équation d'équilibre à travers un champ de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{ij}$  liés à une forme faible de cette restriction [CCH98] (voir [SJKC18] pour certains problèmes numériques liés avec ce choix). Les équations de champ du problème numérique couplé sont:

$$\int_{\Omega^t} \left( \sigma_{ij}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t} + \Sigma_{ijk}^t \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^t} \right) d\Omega^t - \int_{\Omega^t} \lambda_{ij}^t \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t} - v_{ij}^* \right) d\Omega^t = \int_{\Omega^t} \rho^t g_i u_i^* d\Omega^t + \int_{\Gamma_\sigma^t} \left( \bar{t}_i^t u_i^* + \bar{T}_i^t v_{ik}^* n_k^t \right) d\Gamma^t \quad (53)$$

$$\int_{\Omega^t} \lambda_{ij}^* \left( \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j^t} - v_{ij}^t \right) d\Omega^t = 0 \quad (54)$$

$$\int_{\Omega^t} \left( \dot{M}_w^t p_w^* - f_{w,i}^t \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i^t} \right) d\Omega^t = \int_{\Omega^t} Q_w^t p_w^* d\Omega^t - \int_{\Gamma_{q_w}^t} \bar{q}_w^t p_w^* d\Gamma^t \quad (55)$$

où la notation  $a^t$  correspond à la valeur actuelle de toute quantité  $a$  à un instant donné  $t$ . Pour les problèmes aux limites, les quantités virtuelles incluses dans les équations ci-dessus dépendent de l'historique des conditions aux limites. Ainsi, les équations de bilan et les équations constitutives doivent être valides à tout instant  $t$ .

### 4.2.2 Linéarisation des équations de champ

Trouver la solution d'un problème aux limites consiste à déterminer les champs inconnus  $u_i$ ,  $v_{ij}$ ,  $\lambda_{ij}$  et  $p_w$  pour lesquels les Eqs. 53, 54, et 55 sont valides. Puisque ce système d'équations non linéaires est *a priori* non vérifié pour tout instant  $t$ , le problème est résolu numériquement par une procédure itérative. Il s'agit d'une discrétisation temporelle sur des pas de temps finis  $\Delta t$ :

$$\tau = t + \Delta t \quad (56)$$

et un schéma implicite de différences finies pour la vitesse de toute quantité  $a$ :

$$\dot{a}^\tau = \frac{a^\tau - a^t}{\Delta t} \quad (57)$$



Une méthode de Newton-Raphson complète est utilisée pour trouver une solution pour les nouveaux champs  $u_i$ ,  $v_{ij}$ ,  $\lambda_{ij}$  et  $p_w$  à la fin de chaque pas de temps qui vérifient les conditions aux limites.

Suivant l'approche de [BA95], la méthode vise à définir un problème auxiliaire linéaire découlant du problème continu. Une première configuration  $\Omega^t$  en équilibre avec les conditions aux limites à un instant donné  $t$  est supposée connue et une autre configuration  $\Omega^\tau$  en équilibre à la fin du pas de temps  $\tau = t + \Delta t$  doit être trouvée. Le but de la procédure numérique itérative est de déterminer cette nouvelle configuration à la fin du pas de temps. Tout d'abord, une configuration proche de la solution mais non à l'équilibre est supposée et notée  $\Omega^{\tau_1}$ . Les deux configurations en  $t$  et  $\tau_1$  sont supposées connues et les forces hors-équilibre pour les trois équations considérées, à savoir les résidus  $\Delta_1^{\tau_1}$ ,  $\Delta_2^{\tau_1}$  et  $\Delta_3^{\tau_1}$  sont définis. L'objectif est de trouver une autre configuration  $\Omega^{\tau_2}$  proche de  $\Omega^{\tau_1}$  pour laquelle les forces hors-équilibre disparaissent. Pour obtenir le problème auxiliaire linéaire, les équations de champ pour  $\Omega^{\tau_2}$  sont soustraites des équations du champ dans la configuration  $\Omega^{\tau_1}$  après avoir été réécrites dans la configuration  $\Omega^{\tau_1}$  en utilisant la matrice jacobienne de la transformation entre les deux configurations:

$$\bar{F}_{ij} = \frac{\partial x_i^{\tau_2}}{\partial x_j^{\tau_1}} \quad (58)$$

et le déterminant du Jacobien:

$$\det(F) = \left| \frac{\partial x_i^{\tau_2}}{\partial x_j^{\tau_1}} \right| \quad (59)$$

En supposant que  $g_i$ ,  $\bar{t}_i$ ,  $\bar{q}_w$  et  $Q_w$  sont indépendants des différents champs inconnus (déplacement et pression d'eau interstitielle), et que  $\bar{T}_i$  disparaît, on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{\tau_1}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_l^{\tau_1}} \left( \sigma_{ij}^{\tau_2} \frac{\partial x_l^{\tau_1}}{\partial x_j^{\tau_2}} \det(F) - \sigma_{il}^{\tau_1} \right) + \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_l^{\tau_1}} \left( \Sigma_{ijk}^{\tau_2} \frac{\partial x_l^{\tau_1}}{\partial x_k^{\tau_2}} \det(F) - \Sigma_{ijl}^{\tau_1} \right) d\Omega^{\tau_1} \\ & - \int_{\Omega^{\tau_1}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_l^{\tau_1}} \left( \lambda_{ij}^{\tau_2} \frac{\partial x_l^{\tau_1}}{\partial x_j^{\tau_2}} \det(F) - \lambda_{il}^{\tau_1} \right) - v_{ij}^* (\lambda_{ij}^{\tau_2} \det(F) - \lambda_{ij}^{\tau_1}) d\Omega^{\tau_1} \\ & - \int_{\Omega^{\tau_1}} u_i^* (\rho^{\tau_2} \det(F) - \rho^{\tau_1}) g_i d\Omega^{\tau_1} = -\Delta_1^{\tau_1} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\int_{\Omega^{\tau_1}} \lambda_{ij}^* \left( \left( \frac{\partial u_i^{\tau_2}}{\partial x_k^{\tau_1}} \frac{\partial x_k^{\tau_1}}{\partial x_j^{\tau_2}} \det(F) - \frac{\partial u_i^{\tau_1}}{\partial x_j^{\tau_1}} \right) - (v_{ij}^{\tau_2} \det(F) - v_{ij}^{\tau_1}) \right) d\Omega^{\tau_1} = -\Delta_2^{\tau_1} \quad (61)$$

$$\int_{\Omega^{\tau_1}} p_w^* (M_w^{\tau_2} \det(F) - M_w^{\tau_1}) - \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i^{\tau_1}} \left( f_{w,i}^{\tau_2} \frac{\partial x_i^{\tau_1}}{\partial x_i^{\tau_2}} \det(F) - f_{w,i}^{\tau_1} \right) d\Omega^{\tau_1} = -\Delta_3^{\tau_1} \quad (62)$$

En faisant tendre les deux configurations, les variations entre elles peuvent être définies pour toute quantité  $a$  comme:

$$da^{\tau_1} = a^{\tau_2} - a^{\tau_1} \quad (63)$$

Les équations d'équilibre sont réécrites en tenant compte de ces variations. Le développement complet de la linéarisation du système d'équation de champ et du problème auxiliaire linéaire résultant est exposé dans [CCC06].

### 4.2.3 Discrétisation spatiale

Dans la méthode des éléments finis, chaque corps continu est discrétisé par des éléments finis et les équations du champ ci-dessus sont discrétisées spatialement. Pour le modèle de second gradient, la discrétisation est réalisée par des éléments finis isoparamétriques à déformation plane à deux dimensions. Ces éléments sont composés de huit nœuds pour le champ de déplacement  $u_i$  et la pression d'eau interstitielle  $p_w$ , quatre nœuds pour le champ de gradient microcinématique  $v_{ij}$  et un nœud pour le champ de multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{ij}$  (Fig. 5). Les fonctions de forme de Serendipity quadratique [ZT00] sont utilisées pour les interpolations de  $u_i$  et  $p_w$ , les fonctions de forme linéaire pour  $v_{ij}$ , alors que  $\lambda_{ij}$  est supposé constant dans un élément.

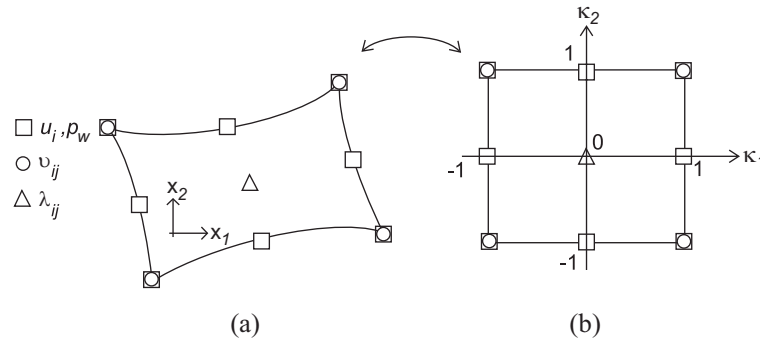


Figure 5: Élément fini utilisé pour la discrétisation spatiale du modèle couplé second gradient local: (a) élément 2D courant et (b) élément parent [CCC06].

Les équations d'équilibre du problème des éléments finis couplés (problème auxiliaire linéaire) doivent être réécrites sous forme matricielle pour définir la matrice de rigidité d'un élément:

$$\int_{\Omega^{\tau^1}} \left[ U_{(x_1, x_2)}^{*, \tau^1} \right]^T [E^{\tau^1}] \left[ dU_{(x_1, x_2)}^{\tau^1} \right] d\Omega^{\tau^1} = -\Delta_1^{\tau^1} - \Delta_2^{\tau^1} - \Delta_3^{\tau^1} \quad (64)$$

où  $\left[ dU_{(x_1, x_2)}^{\tau^1} \right]$  est le vecteur des incréments inconnus des variables nodales dans la configuration courante de l'élément:

$$\left[ dU_{(x_1, x_2)}^{\tau^1} \right]_{25 \times 1} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial du_1^{\tau^1}}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial du_1^{\tau^1}}{\partial x_2^{\tau^1}} \frac{\partial du_2^{\tau^1}}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial du_2^{\tau^1}}{\partial x_2^{\tau^1}} du_1^{\tau^1} du_2^{\tau^1} \frac{\partial dp_w^{\tau^1}}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial dp_w^{\tau^1}}{\partial x_2^{\tau^1}} dp_w^{\tau^1} \frac{\partial dv_{11}^{\tau^1}}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial dv_{11}^{\tau^1}}{\partial x_2^{\tau^1}} \\ \frac{\partial dv_{12}^{\tau^1}}{\partial x_1^{\tau^1}} \dots \frac{\partial dv_{22}^{\tau^1}}{\partial x_2^{\tau^1}} dv_{11}^{\tau^1} dv_{12}^{\tau^1} dv_{21}^{\tau^1} dv_{22}^{\tau^1} d\lambda_{11}^{\tau^1} d\lambda_{12}^{\tau^1} d\lambda_{21}^{\tau^1} d\lambda_{22}^{\tau^1} \end{array} \right]^T \quad (65)$$

$\left[ U_{(x_1, x_2)}^{*, \tau^1} \right]$  est un vecteur ayant la même structure avec les quantités virtuelles correspondantes:

$$\left[ U_{(x_1, x_2)}^{*, \tau^1} \right]_{1 \times 25} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^{\tau^1}} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^{\tau^1}} u_1^* u_2^* \frac{\partial p_w^*}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial p_w^*}{\partial x_2^{\tau^1}} p_w^* \frac{\partial v_{11}^*}{\partial x_1^{\tau^1}} \frac{\partial v_{11}^*}{\partial x_2^{\tau^1}} \\ \frac{\partial v_{12}^*}{\partial x_1^{\tau^1}} \dots \frac{\partial v_{22}^*}{\partial x_2^{\tau^1}} v_{11}^* v_{12}^* v_{21}^* v_{22}^* \lambda_{11}^* \lambda_{12}^* \lambda_{21}^* \lambda_{22}^* \end{array} \right] \quad (66)$$

et  $[E^{\tau^1}]$  est la matrice (tangente) de raideur élémentaire définie comme suit:

$$[E^{\tau^1}]_{25 \times 25} = \begin{bmatrix} E_{14 \times 4}^{\tau^1} & 0_{4 \times 2} & K_{WM}^{\tau^1} & 0_{4 \times 8} & 0_{4 \times 4} & -I_{4 \times 4} \\ G_{12 \times 4}^{\tau^1} & 0_{2 \times 2} & G_{22 \times 3}^{\tau^1} & 0_{2 \times 8} & 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 4} \\ K_{MW}^{\tau^1} & 0_{3 \times 2} & K_{WW}^{\tau^1} & 0_{3 \times 8} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 4} \\ E_{28 \times 4}^{\tau^1} & 0_{8 \times 2} & 0_{8 \times 3} & D_{8 \times 8}^{\tau^1} & 0_{8 \times 4} & 0_{8 \times 4} \\ E_{34 \times 4}^{\tau^1} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 8} & 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ E_{44 \times 4}^{\tau^1} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 8} & -I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Les matrices  $[E_1^{\tau^1}]$ ,  $[E_2^{\tau^1}]$ ,  $[E_3^{\tau^1}]$ ,  $[E_4^{\tau^1}]$ , et  $[D^{\tau^1}]$  sont les mêmes que celles utilisées dans le modèle second gradient local pour un milieu monophasique par [CM04] ( $[D^{\tau^1}] = D_{ijklmn}$  dans les Eqs. 40 and 42).  $[K_{WW}^{\tau^1}]$  est la matrice de raideur classique d'un problème d'écoulement,  $[K_{MW}^{\tau^1}]$  et  $[K_{WM}^{\tau^1}]$  sont des matrices de couplages entre l'écoulement et le problème mécanique détaillées par [CCC06]. De plus,  $[G_1^{\tau^1}]$  et  $[G_2^{\tau^1}]$  correspondent à la contribution des forces de volume gravitaires.

La discrétisation spatiale par éléments finis du problème auxiliaire linéaire est introduite dans l'Eq. 64 en utilisant les matrices de transformation  $[T^{\tau^1}]$  et  $[B]$  qui relient le vecteur inconnus de l'élément courant  $\left[ dU_{(x_1, x_2)}^{\tau^1} \right]$  à celui de l'élément parent

$[dU_{(\kappa_1, \kappa_2)}^{\tau 1}]$  et aux variables nodales  $[dU_{Node}^{\tau 1}]$ :

$$[dU_{(x_1, x_2)}^{\tau 1}] = [T^{\tau 1}] [dU_{(\kappa_1, \kappa_2)}^{\tau 1}] = [T^{\tau 1}] [B] [dU_{Node}^{\tau 1}] \quad (68)$$

Les matrices  $[B]$  et  $[T^{\tau 1}]$  contiennent les fonctions d'interpolation et leurs dérivées. De plus, le vecteur  $[U_{(x_1, x_2)}^{*, \tau 1}]$  est relié à  $[U_{Node}^{*, \tau 1}]$  de la même manière.

L'intégration dans l'Eq. 64 peut être exprimée pour chaque élément parent comme suit:

$$\int_{\Omega^{\tau 1}} [U_{(x_1, x_2)}^{*, \tau 1}]^T [E^{\tau 1}] [dU_{(x_1, x_2)}^{\tau 1}] d\Omega^{\tau 1} = [U_{Node}^{*, \tau 1}]^T [k^{\tau 1}] [dU_{Node}^{\tau 1}] \quad (69)$$

où  $[k^{\tau 1}]$  est la matrice de raideur élémentaire :

$$[k^{\tau 1}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [T^{\tau 1}]^T [E^{\tau 1}] [T^{\tau 1}] [B] det(J^{\tau 1}) d\kappa_1 d\kappa_2 \quad (70)$$

avec  $det(J^{\tau 1})$  le déterminant de la matrice Jacobienne de la transformation entre l'élément parent  $(\kappa_1, \kappa_2)$  et courant  $(x_1, x_2)$  :

$$det(J^{\tau 1}) = \left| \frac{\partial x_i^{\tau 1}}{\partial \kappa_j} \right| \quad (71)$$

Les termes résiduels sont également calculés localement pour chaque élément et définissent le vecteur de force élémentaire hors-équilibre  $[f_{OB}^{\tau 1}]$ :

$$-\Delta_1^{\tau 1} - \Delta_2^{\tau 1} - \Delta_3^{\tau 1} = [U_{Node}^{*, \tau 1}]^T [f_{OB}^{\tau 1}] \quad (72)$$

#### 4.2.4 Solution globale

Une fois les matrices de rigidité élémentaires et les vecteurs de force hors-équilibre calculés, ils sont assemblés pour obtenir la matrice de rigidité globale  $[K^{\tau 1}]$  et le vecteur de force global hors-équilibre  $[F_{OB}^{\tau 1}]$  du continuum entier. Le système auxiliaire linéaire est résolu par calcul:

$$[K^{\tau 1}] [\delta U_{Node}^{\tau 1}] = - [F_{OB}^{\tau 1}] \quad (73)$$

où  $[\delta U_{Node}^{\tau 1}]$  est le vecteur de correction globale des degrés de liberté nodaux. La configuration actuelle est actualisée en ajoutant les corrections à leurs valeurs actuelles respectives. La nouvelle configuration actuelle est plus proche de la configuration bien équilibrée et son équilibre est vérifié, conduisant à une nouvelle itération ou à la fin de l'étape de chargement de la procédure itérative.

### 4.3 Echantillon bi-dimensionnel soumis à compression

Une modélisation par éléments finis d'essais de compression bidimensionnelle en déformation plane est d'abord envisagée. Ces tests ont été largement reproduits sur des spécimens à petite échelle pour souligner les effets de la localisation.

Parmi divers auteurs, les résultats obtenus par [CLC09] pour une compression uniaxiale sont principalement développés ci-après. Un schéma du problème aux limites dans un état de déformation plane est illustré à la Fig. 6. Le déplacement vertical  $u_a$  de la surface supérieure de l'échantillon (frontière lisse et rigide) est progressivement augmenté au cours de l'essai avec une vitesse de déformation constante pour modéliser la compression verticale. Le déplacement vertical de la surface inférieure est bloqué (frontière rigide) et le déplacement du nœud central est bloqué dans les deux directions pour éviter un déplacement rigide du corps.

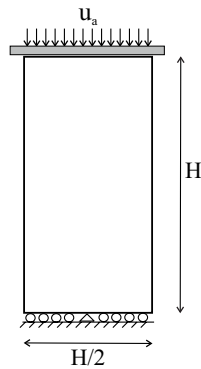


Figure 6: Schéma du test de compression en déformation plane.

#### 4.3.1 Milieu classique

Une première modélisation mécanique pour un milieu classique (sans méthode de régularisation) est présentée ci-après. La loi de comportement (premier gradient) est un modèle élastoplastique avec adoucissement dans un cadre de plasticité associée ( $\varphi = \psi$ ,  $F^p = G^p$ ): un critère de plasticité de Drucker-Prager est considéré sans écoulement de l'angle de frottement mais avec une fonction adoucissante de la cohésion [CLC09].

Une réponse homogène de l'échantillon est d'abord étudiée. La réponse globale est détaillée dans la Fig. 7 (a) où l'on peut observer un comportement élastique linéaire, puis un comportement plastique non linéaire (comprenant l'adoucissement de la cohésion) avant la contrainte de pic, et enfin un comportement plastique avec diminution de la réaction globale.

En ce qui concerne l'orientation de la bande de cisaillement, le critère de Rice donne l'orientation de la première occurrence possible de la bande de cisaillement [RR75], [Ric76]. Ce critère peut être utilisé pour un modèle élastoplastique à mécanisme unique tel que le problème étudié. L'évolution du critère de Rice  $det(\Lambda_{jk})$  avec un chargement croissant est présenté à la Fig. 7 (b) en fonction de  $\tan\Theta$ , où  $\Lambda_{jk}$  est le tenseur acoustique et  $\Theta$  l'orientation de la bande de cisaillement normale par rapport à l'axe vertical de chargement, c'est-à-dire l'orientation de la bande de cisaillement par rapport à la direction horizontale. Le critère est positif ( $det(\Lambda_{jk}) > 0$ ) tant que le comportement est élastique et même pour un chargement élastoplastique jusqu'à ce que la première bifurcation soit prédite ( $det(\Lambda_{jk}) = 0$ ). Pour un certain niveau de charge, le critère de bifurcation est satisfait à chaque point matériel et deux directions de bifurcation symétriques (conjuguées) sont prédites avec une orientation de  $\Theta = \pm 60^\circ$ . Ce point de bifurcation correspond à la contrainte maximale sur la courbe de réponse globale et au début de la réduction de la réponse de charge en la plasticité associée. Une gamme d'orientations possibles est prévue pour une charge croissante correspondant à une multitude de solutions possibles ( $det(\Lambda_{jk}) \leq 0$ ).

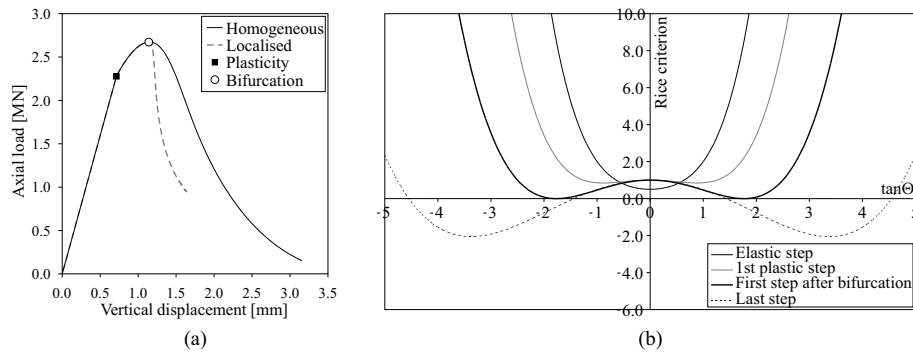


Figure 7: Compression uniaxiale: (a) courbes de réponse globale de l'échantillon et (b) Critère de Rice à différents pas de chargements pour une solution homogène [CLC09].

Pour un échantillon parfait, bien que la plasticité radoucissante soit prise en compte, la localisation de la déformation n'est pas automatiquement déclenchée et la solution numérique peut rester homogène même après avoir satisfait au critère de bifurcation. En réalité, le processus de localisation est généré car les géomatériaux présentent des hétérogénéités. Différentes procédures numériques sont disponibles pour forcer la localisation des déformations. La plus utilisée est l'introduction d'une imperfection, telle que la force perturbatrice, l'imperfection du matériau ou le défaut géométrique [CRB97, MCC02, ZSS01]. La modification des paramètres numériques, tels que le pas de temps et les séquences, peut également être effectuée [MSC14, SaHC09]. Une troisième méthode qui sera discutée plus tard est une initialisation aléatoire des variables [CCC01].

Parmi ces procédures, [CLC09] a introduit une imperfection matérielle dans l'élément fini inférieur gauche de l'échantillon sous compression. Initialement, le champ de contrainte dans l'échantillon est homogène. Une fois le critère de bifurcation atteint, l'imperfection déclenche le développement d'une bande de cisaillement à travers l'échantillon. La localisation de la déformation ainsi que sa dépendance à la taille du maillage sont illustrées dans la Fig. 8 pour un milieu classique. La solution localisée est donc non homogène, la bande de cisaillement est sous charge plastique et le matériau à l'extérieur est en déchargement élastique. La réponse globale de l'échantillon est détaillée dans la Fig. 7 (a) où une diminution rapide de la réaction globale est observée une fois la bande de cisaillement établie. L'apparition de la bande de cisaillement correspond donc à la charge maximale de la courbe (ou contrainte maximale), comme le montrent les observations de laboratoire dans la section 2. Ces dernières indiquent également qu'une inclusion matérielle peut agir comme un attracteur de localisation de la déformation, ce qui est confirmé par les résultats numériques.

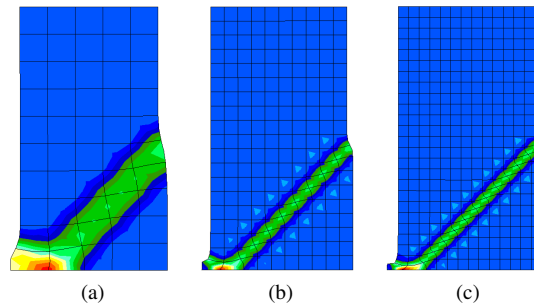


Figure 8: Motifs de localisation représentés par la déformation déviatorique pour un milieu classique: maillage éléments finis de (a) 50, (b) 190, et (c) 325 éléments.

#### 4.3.2 Milieu enrichi par la microstructure

Pour résoudre la sensibilité pathologique au maillage, un milieu enrichi de microstructure est utilisé ci-dessous. Plus précisément, le milieu de second gradient local est adopté, avec la loi de comportement du second gradient donnée par l'Eq. 42. Le schéma de localisation des déformations induit par l'imperfection est illustré sur la Fig. 9 où les points d'intégration de Gauss en charge plastique adoucissante sont représentés par des carrés rouges. Cette représentation permet de mesurer la largeur de la bande de cisaillement et de noter qu'elle reste constante quelle que soit la taille de l'élément, ce qui implique que la localisation de la déformation de cisaillement est indépendante du maillage. Ainsi, la localisation de la déformation est correctement régularisée grâce à la longueur interne introduite par le modèle de second gradient. C'est également le cas pour un maillage non structuré [BCC06] et pour un milieu poreux biphasique dans des conditions saturées, en utilisant le modèle couplé de second gradient local [CCC06].

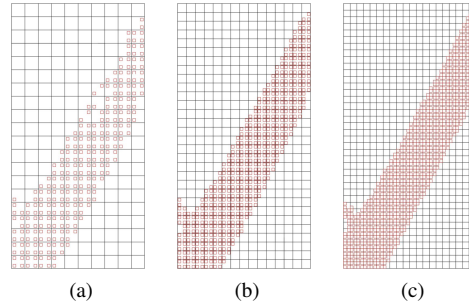


Figure 9: Motifs de localisation représentés par les points en charge plastique pour un milieu second gradient: maillage éléments finis de (a) 200, (b) 450, et (c) 800 éléments.

Cependant, la régularisation du processus de localisation des déformations est satisfaisante à condition que le module d'élasticité du second gradient  $D$  soit correctement calibré pour représenter les bandes de cisaillement. Comme déjà mentionné, la longueur interne inhérente à la loi mécanique du second gradient est liée à ce paramètre constitutif. La valeur de  $D$  devrait donc être évaluée sur la base de mesures expérimentales de l'épaisseur de bande de cisaillement pour le matériau considéré. Du point de vue de la modélisation, une meilleure prédiction numérique du comportement plastique post-localisation au sein des bandes est obtenue si au moins trois éléments composent la largeur de la bande de cisaillement [BCC06]. Cette remarque est valable pour toute technique de régularisation incluant le modèle de second gradient mais aussi la plasticité à gradient et les modèles non locaux.

#### 4.3.3 Non-unicité de la solution

La non-unicité de la solution post-pic d'un problème aux limites peut être étudiée en utilisant des techniques numériques spéciales. En effet, au lieu d'utiliser une imperfection matérielle, des solutions localisées peuvent être trouvées pour un matériau homogène en utilisant une initialisation aléatoire du champ de vitesse de déformation (vitesses nodales) ou des caractéristiques du matériau au début de la procédure itérative. Cette technique a été principalement proposée par Chambon et ses collaborateurs [CCC01] qui ont développé un algorithme pour rechercher plusieurs solutions localisées possibles par initialisation aléatoire. Cet algorithme a été adapté aux modèles de second gradient par [CM04].

La modélisation numérique de tests de compression effectués avec le modèle de second gradient illustre la non-unicité des solutions localisées d'un même problème aux limites [BCC06]. L'initialisation aléatoire est adoptée pour l'incrément des quantités nodales  $[dU_{Node}^{\tau 1}]$  (Eq. 68) par rapport aux valeurs obtenues aux pas de temps précédents. Les solutions non homogènes obtenues sont détaillées dans la Fig. 10 (a)



où les différentes solutions présentent une à trois bandes avec une réflexion possible sur les faces supérieure et inférieure de l'échantillon en raison du déplacement vertical imposé. Les résultats indiquent que l'épaisseur de bande est reproductible même si le modèle de localisation est différent en termes de position et de nombre de bandes.

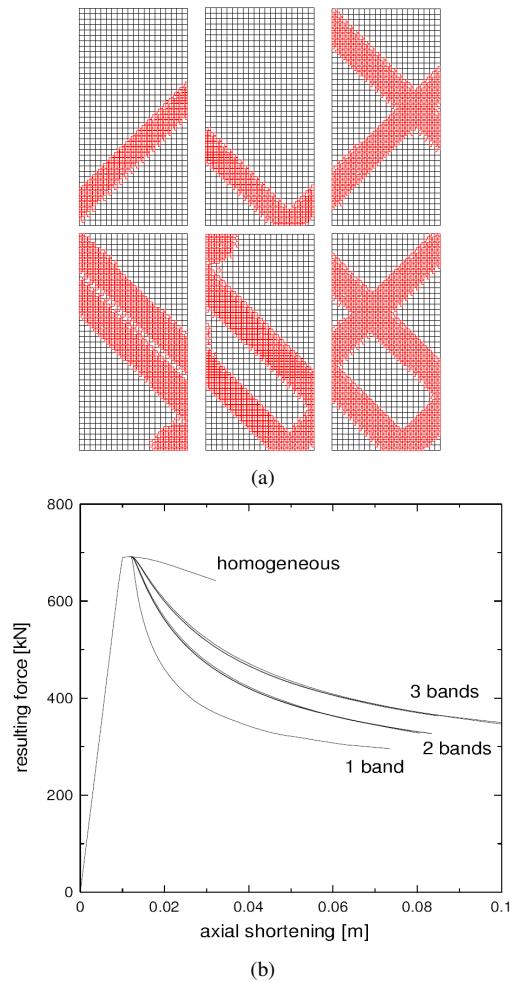


Figure 10: Exemple de solutions localisées pour un test de compression obtenues après une initialisation aléatoire: (a) points plastiques et (b) courbe de réponse globale [BCC06].

Comme précédemment, la localisation de la déformation se produisant au point de bifurcation est due au comportement adoucissant et à un éventuel déchargement élastique. Fig. 10 (b) illustre les courbes de réponse globales différentes de celles de la Fig. 7. Ces courbes sont regroupées en paquets caractérisés par le nombre de bandes de

déformation. Il est évident que plus le nombre de bandes est élevé, plus les courbes sont proches du cas plastique homogène. Une conclusion similaire a été tirée pour des problèmes 1D (e.g. barre en traction) par [CCH98], [KHBC08], [JKC14]).

#### 4.3.4 Critère de bifurcation pour les milieux second gradient

Une analyse de bifurcation appliquée au modèle de second gradient est proposée par [BCC06]. Les auteurs indiquent que le critère de bifurcation du modèle de second gradient est, comme pour un milieu classique, une condition nécessaire mais non suffisante pour le début de la localisation et qu'il est satisfait après vérification du critère de bifurcation du milieu classique. L'analyse de bifurcation se réduit donc à une analyse de la partie classique du modèle constitutif.

## 5 Modèle second gradient local couplé pour milieux non-saturés

La procédure pour étendre le modèle de second gradient local en conditions saturées à d'autres contextes multi-physiques est plus ou moins la même: des équations d'équilibre supplémentaires doivent être considérées pour modéliser les processus supplémentaires. Le problème principal n'est pas par conséquent numérique mais physique. Quelles sont les interactions possibles entre le modèle de second gradient et la diffusion thermique, la succion ou des réactions chimiques? Ces questions devraient d'abord être abordées par des campagnes expérimentales.

La longueur interne introduite par le modèle de second gradient est calculé en fonction de rapport de deux modules constitutifs: celui lié à la loi de comportement du second gradient et celui lié à la loi classique [CCH98]. Considérant que les modules constitutifs classiques sont influencés par les différents processus (chimique, thermique, succion...), la longueur interne doit être modifiée par ces derniers processus (à condition que la loi du second gradient ne soit pas influencée par les processus). Cela devrait encore être confirmé par des observations expérimentales!

Le modèle couplé de second gradient local développé par [CCC06] pour un milieu poreux biphasique peut être étendu aux matériaux insaturés avec des grains solides compressibles. Dans la suite, les conditions non saturées sont prises en compte et la compressibilité des grains solides est introduite par le coefficient de Biot. De plus, l'anisotropie de perméabilité est incorporée dans le modèle pour mieux représenter les transferts d'eau, même si le comportement mécanique reste isotrope.

## 5.1 Condition de saturation partielle

Pour des conditions non saturées, la masse d'eau à l'intérieur d'un volume de matériau poreux  $\Omega$  correspond à:

$$M_w = \rho_w \Phi S_{r,w} \Omega \quad (74)$$

et sa dérivée temporelle a l'expression suivante:

$$\dot{M}_w = \dot{\rho}_w \Phi S_{r,w} \Omega + \rho_w \dot{\Phi} S_{r,w} \Omega + \rho_w \Phi \dot{S}_{r,w} \Omega + \rho_w \Phi S_{r,w} \dot{\Omega} \quad (75)$$

Cette quantité d'eau, qui dépend du degré de saturation en eau  $S_{r,w}$ , conduit à la masse volumique homogénéisée suivante du mélange :

$$\rho = \rho_s (1 - \Phi) + S_{r,w} \rho_w \Phi \quad (76)$$

et la loi de Darcy donne le flux d'advection d'eau pour une perméabilité hydraulique anisotrope:

$$f_{w,i} = -\rho_w \frac{k_{w,ij} k_{r,w}}{\mu_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial x_j} + \rho_w g_j \right) \quad (77)$$

où  $k_{r,w}$  est la perméabilité relative à l'eau.

La masse de fluide et les écoulements de fluide sont principalement régis par les propriétés de rétention d'eau du matériau et par sa perméabilité hydraulique. Les deux sont liés à la saturation partielle en eau et un coefficient de perméabilité relative est introduit dans la loi de Darcy généralisée. Parmi les diverses expressions analytiques possibles, les courbes de rétention d'eau et de perméabilité relative sont données par les modèles de van Genuchten et de Mualem [Mua76, vG80]:

$$S_{r,w} = S_{res} + (S_{max} - S_{res}) \left( 1 + \left( \frac{p_c}{P_r} \right)^{\frac{1}{1-\mathcal{M}}} \right)^{-\mathcal{M}} \quad (78)$$

$$k_{r,w} = \sqrt{S_{r,w}} \left( 1 - \left( 1 - S_{r,w}^{\frac{1}{\mathcal{M}}} \right)^{\mathcal{M}} \right)^2 \quad (79)$$

où  $P_r$  est la pression d'entrée d'air,  $S_{max}$  et  $S_{res}$  sont les degrés de saturation en eau maximum et résiduel,  $\mathcal{M}$  est un paramètre du modèle, et  $p_c$  est la pression capillaire.

## 5.2 Anisotropie de la perméabilité intrinsèque

L'écoulement d'eau advectif (Eq. 77) dépend des caractéristiques anisotropes du matériau par le tenseur de perméabilité intrinsèque anisotrope. Pour les matériaux anisotropes et par symétrie du tenseur, le tenseur de perméabilité intrinsèque  $k_{w,ij}$  nécessite six composantes pour décrire les caractéristiques d'écoulement. Cependant, les matériaux présentent généralement des formes d'anisotropie limitées et les géomatériaux stratifiés ne requièrent que deux paramètres pour la description des flux d'eau. Pour

une stratification horizontale dans le plan  $(x_1, x_3)$ , le tenseur de perméabilité hydraulique intrinsèque est défini avec les perméabilités horizontale et verticale,  $k_{w,h}$  et  $k_{w,v}$ , comme suit :

$$k_{w,ij} = \begin{bmatrix} k_{w,h} & 0 & 0 \\ 0 & k_{w,v} & 0 \\ 0 & 0 & k_{w,h} \end{bmatrix} \quad (80)$$

### 5.3 Compressibilité des grains solides

La compressibilité du matériau est définie dans le cadre de la poroélasticité [DC93] et est basée sur les différentes compressibilités d'un matériau poreux. Ce sont la compressibilité du squelette solide  $C$ , la compressibilité des pores  $C_p$  et la compressibilité de la phase solide  $C_s$  (grains solides) avec  $C_s < C$ . Les différents types de compressibilité induisent des comportements différents de la matrice rocheuse et du matériau poreux. Ils peuvent se déformer différemment et le matériau poreux peut entrer dans un état plastique alors que les grains solides restent élastiques. Dans le cadre général de l'approche de Biot [Bio41], le coefficient de Biot est exprimé par:

$$b = \frac{\Phi C_p}{C} = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (81)$$

en fonction du module de raideur drainé du matériau  $K$  et du module de raideur de la phase solide  $K_s$ . Ce coefficient représente la déformabilité relative des grains solides par rapport au squelette solide [Bio41, BW57, Ske60]. Biot a proposé que la définition de contrainte effective utilise  $b$  comme facteur d'échelle réduisant l'effet de la pression d'eau  $p_w$  sur la contrainte totale  $\sigma_{ij}$  en raison d'une réduction de la compressibilité des pores. La définition de la contrainte de Biot peut être formulée dans des conditions non saturées en supposant que les hypothèses sur la compressibilité se maintiennent dans ces conditions [NL08]:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - b S_{r,w} p_w \delta_{ij} \quad (82)$$

Cette dernière expression inclut l'effet de la saturation partielle sur le champ de contrainte effective (la convention de signe considère une contrainte de traction positive).

Pour le comportement en phase solide, la variation isotrope de densité solide est liée aux variations de la pression d'eau interstitielle et de la contrainte effective moyenne par [DC93, Cou04]:

$$\frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} = \frac{(b - \Phi) S_{r,w} \dot{p}_w - \dot{\sigma}'}{(1 - \Phi) K_s} \quad (83)$$

La dérivée temporelle de la porosité est obtenue par la conservation de la masse solide  $\dot{M}_s = 0$  et se lit comme suit:

$$\dot{\Phi} = (1 - \Phi) \left( \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) = (1 - \Phi) \left( \frac{(b - \Phi) S_{r,w} \dot{p}_w - \dot{\sigma}'}{(1 - \Phi) K_s} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \quad (84)$$

De plus, la dérivée temporelle de la masse d'eau dans l'équation Eq. 75 devient en incluant la compressibilité du fluide, la variation de la porosité et en considérant un volume de mélange unitaire:

$$\dot{M}_w = \rho_w \left( \frac{\dot{p}_w}{\chi_w} \Phi S_{r,w} + \frac{\dot{p}_w}{K_s} (b - \Phi) S_{r,w}^2 + \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{\sigma}'}{K_s} \right) S_{r,w} + \Phi \dot{S}_{r,w} \right) \quad (85)$$

Les expressions ci-dessus peuvent être réécrites sous l'hypothèse de la poroélasticité:

$$\dot{\sigma}' = K \dot{\epsilon}_v = K \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (86)$$

et en utilisant l'expression du coefficient de Biot de l'Eq. 81. Les équations deviennent alors:

$$\frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} = \frac{(b - \Phi) S_{r,w} \dot{p}_w - K \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}}{(1 - \Phi) K_s} \quad (87)$$

$$\dot{\Phi} = (b - \Phi) \left( \frac{S_{r,w}}{K_s} \dot{p}_w + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \quad (88)$$

$$\dot{M}_w = \rho_w \left( \frac{\dot{p}_w}{\chi_w} \Phi S_{r,w} + \frac{\dot{p}_w}{K_s} (b - \Phi) S_{r,w}^2 + b \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} S_{r,w} + \Phi \dot{S}_{r,w} \right) \quad (89)$$

La théorie de Biot et les équations de la poroélasticité ne sont valables que pour un comportement élastique. L'extension de ces équations à la poroplasticité [Cou95] avec des modifications permanentes de la teneur en masse fluide et de la porosité nécessite d'inclure le comportement du matériau plastique, ce qui est complexe à mettre en œuvre et n'est pas inclus dans ce chapitre.

Selon les hypothèses précédentes, l'équation d'équilibre Eq. 33 et l'équation de conservation de la masse d'eau Eq. 44 restent valables, à condition que les différentes variables présentes dans ces deux équations soient adaptées aux conditions non saturées ( $\rho$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\dot{M}_w$  ...).

## 6 Modélisation de l'excavation d'une galerie

Le forage souterrain et la localisation des déformations de cisaillement induite dans la roche autour des galeries sont étudiés à grande échelle. [PV92] ont été les premiers à présenter une analyse numérique de la localisation progressive autour d'une cavité excavée dans une roche disposant d'une microstructure de type Cosserat. Ci-après, une excavation de galerie est considérée dans une roche argileuse. Dans la masse rocheuse, la structure fracturée autour des galeries se développe préférentiellement dans la direction horizontale ou verticale en fonction des anisotropies de l'état de contrainte et des propriétés du matériau [ALN<sup>+</sup>14]. Comme première approche à grande

échelle et incluant la localisation des déformations, un modèle mécanique isotrope est utilisé dans le but d'analyser si l'apparition de fractures pendant le forage des galeries est régie par l'anisotropie de l'état de contrainte *in situ* [PLC15]. Jusqu'à présent, la modélisation numérique de forages souterrains avec le modèle second gradient a déjà mis en évidence l'apparition de la localisation des déformations dans la roche. Cependant, les modélisations réalisées étaient essentiellement limitées à des analyses mécaniques avec un état de contrainte initial isotrope [Fer09, SaHC09].

De plus, pendant les phases opérationnelles des ouvertures souterraines, une ventilation d'air est effectuée à l'intérieur des galeries pour contrôler l'humidité relative et la température de l'air. Cette ventilation induit des transferts de fluides et une désaturation de la roche qui doivent être pris en compte dans le modèle second gradient couplé.

De nombreuses études ont été réalisées avec des modèles mécaniques isotropes bidimensionnels. Notre objectif est d'étudier si ce type de modèle peut reproduire les observations et mesures *in situ* en incorporant la modélisation des fractures par localisation des déformations. La zone qui se développe autour de la galerie est appelée zone fracturée d'excavation. Elle est le lieu de modifications irréversibles de propriétés hydromécaniques.

Il convient de souligner que des techniques de régularisation ont déjà été utilisées pour ce type de problème. Elles génèrent des résultats indépendants du maillage mais ces théories ne restaurent pas le caractère unique de la solution pour le problème d'excavation de galerie [Fer09, SaHC09]. Ces remarques sont valables pour toutes les méthodes de régularisation.

## 6.1 Modèle numérique

Une modélisation hydromécanique d'une excavation de galerie est réalisée en état plan de déformation à deux dimensions. La galerie modélisée correspond à la galerie GED du laboratoire de recherche souterrain de l'Andra creusé dans l'argilite du Callovo-Oxfordien. Cette galerie est orientée parallèlement à la contrainte (totale) principale horizontale mineure  $\sigma_h$  et a un rayon de 2.3 m. Les valeurs initiales de la pression interstitielle et de l'état de contrainte anisotrope sont :

$$\sigma_{x,0} = \sigma_H = 1.3 \sigma_h = 15.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y,0} = \sigma_v = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z,0} = \sigma_h = 12 \text{ MPa}$$

$$p_{w,0} = 4.5 \text{ MPa}$$

Une représentation schématique des modèles, des maillages et des conditions aux limites est détaillée à la Fig. 11. Deux maillages sont utilisées : une galerie complète et un quart de galerie. L'extension du maillage de la galerie complète est de 120 m, à la

fois horizontalement et verticalement. Sa discrétisation spatiale est effectuée avec un total de 29040 noeuds et 7440 éléments. En faisant l'hypothèse de symétries le long des axes  $x$  et  $y$ , seul un quart de galerie peut être discrétisé. Dans ce cas, l'extension du maillage est de 60 m horizontalement et verticalement. La discrétisation est effectuée avec un total de 9801 noeuds et 2480 éléments. Pour les deux maillages, les contraintes initiales et la pression interstitielle sont imposées à la frontière externe du maillage (frontière drainée). De plus, les maillages ont une discrétisation plus fine près de la galerie. Pour établir la symétrie, les déplacements normaux et les flux d'eau normaux sont bloqués à une valeur nulle le long des axes de symétrie, qui sont donc imperméables. Néanmoins, comme mentionné par [ZPV01a], une attention particulière doit être apportée aux conditions cinématiques aux limites requises pour établir la symétrie. En raison de l'existence de gradients dans les équations d'équilibre, des conditions d'ordre supérieur doivent être caractérisées en plus des conditions aux limites classiques sur les déplacements normaux. Cette seconde condition cinématique nécessite que le déplacement radial  $u_r$  soit symétrique de part et d'autre des axes de symétrie. Ceci implique que la dérivée normale de  $u_r$ , par rapport à la direction tangentielle  $\theta$  (orthoradiale), s'annule :

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad (90)$$

ce qui équivaut à :

$$\text{axe } x : \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad (91)$$

$$\text{axe } y : \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad (92)$$

De plus, des conditions aux limites naturelles pour les forces doubles,  $\bar{T}_i = 0$ , sont adoptées sur les différentes limites et la gravité n'est pas prise en compte.

L'excavation de la galerie peut maintenant être réalisée. Elle est modélisée en diminuant pendant 5 jours les contraintes totales et la pression interstitielle en paroi de galerie. Cette diminution est réalisée depuis les valeurs initiales jusqu'à la pression atmosphérique de 100 *kPa*. Après l'excavation, le calcul est étendu jusqu'à 1000 jours sous contrainte radiale totale constante, pour mettre en évidence d'éventuels effets à long terme (Fig. 12). Cette imposition de contrainte est représentative des galeries non soutenues.

Pour modéliser la ventilation de l'air à l'intérieur de la galerie, une condition d'écoulement aux limites classique est supposée. Elle impose, sur la paroi du tunnel, la succion correspondant à l'humidité relative de l'air de la cavité. Deux cas sont considérés pour l'air à l'intérieur de la galerie (Fig. 12). Dans le premier cas, il n'y a pas de ventilation à l'intérieur de la galerie. L'air est donc saturé en vapeur d'eau avec une concentration maximale correspondant à  $RH = 100 \%$ . Selon la loi de Kelvin, la pression interstitielle correspondante en paroi de galerie est la pression atmosphérique  $p_w = 100 \text{ kPa}$ . La pression de l'eau est alors maintenue constante après la fin de l'excavation et la masse rocheuse reste presque saturée. Dans le second cas, la ventilation d'air est prise

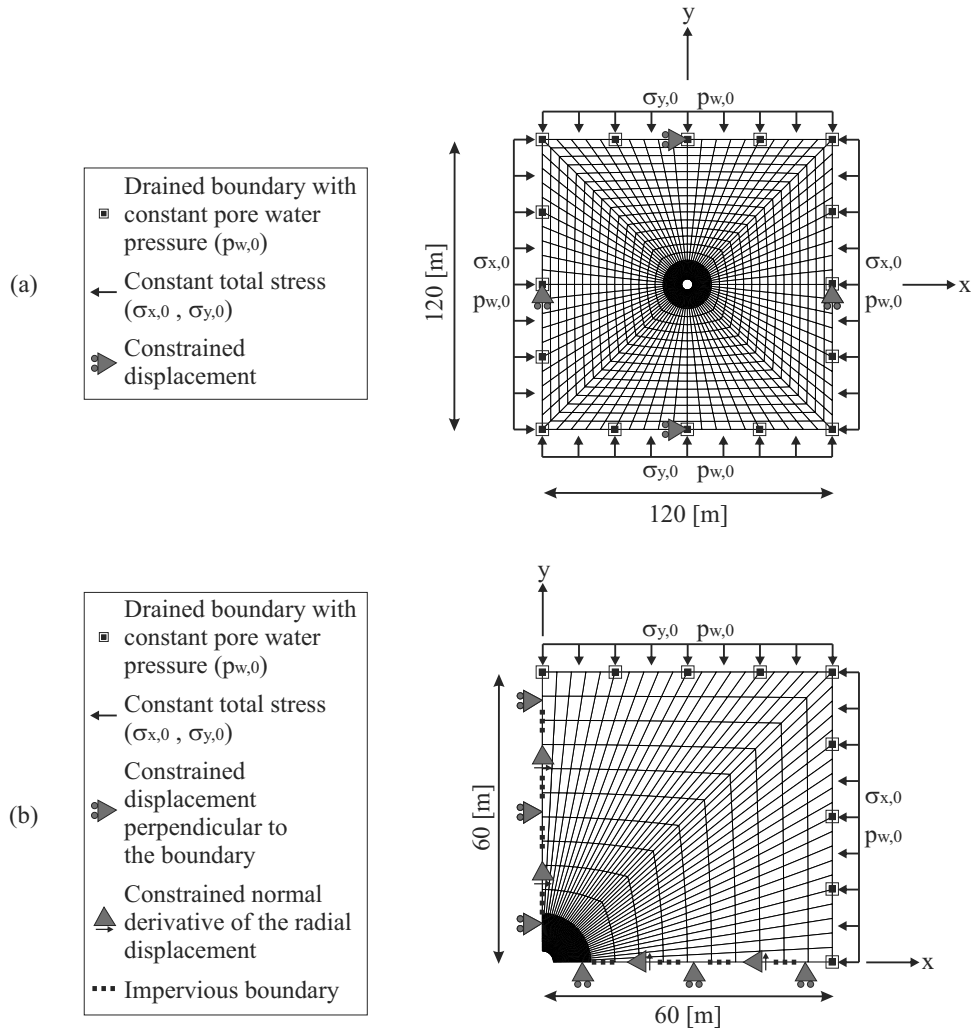


Figure 11: Représentation schématique des modèles utilisés pour la modélisation d'une excavation de galerie: (a) galerie complète et (b) quart de galerie.

en compte puisqu'une ventilation est généralement réalisée dans les galeries composant les ouvrages souterrains. La ventilation peut alors engendrer un drainage de l'eau de la roche, voire une désaturation de celle-ci. Cela peut modifier la structure de la fracturation et la taille de la zone fracturée. La ventilation de l'air peut ainsi être modélisée afin d'observer ses effets sur la roche. Une ventilation théorique, avec une humidité relative de l'air constante, est envisagée pour observer l'effet de la ventilation sur les bandes de cisaillement. L'air qui est injecté dans la galerie est plus



sec que précédemment. Une humidité relative de 80 % et une température de 25 °C ( $T = 298.15 \text{ K}$ ) sont considérés. Suivant la loi de Kelvin, cette humidité correspond à une pression interstitielle en paroi de la galerie de  $p_w = -30.7 \text{ MPa}$ . Pour atteindre cette valeur, la diminution de  $p_w$  s'effectue en deux étapes : d'abord, elle diminue de sa valeur initiale à la pression atmosphérique lors de l'excavation (5 jours), puis une phase d'initiation de la ventilation est considérée (5 jours) pour atteindre la valeur finale. Après cette phase d'initiation, une ventilation constante est maintenue.

Les conditions aux limites imposées en paroi de galerie, pour les évolutions des contraintes totales et de la pression interstitielle, sont présentées à la Fig. 12 pour les deux cas considérés. Il convient de mentionner que l'effet de la ventilation sur les bandes de cisaillement est donc représenté par le modèle hydromécanique. En effet, la ventilation influe sur les pressions interstitielles et sur les contraintes effectives, qui influencent alors la structure et le comportement de la localisation des déformations de cisaillement.

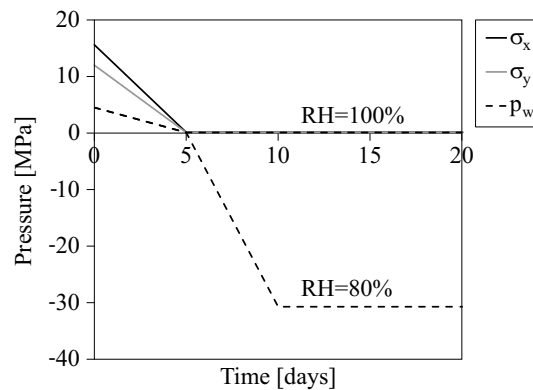


Figure 12: Contraintes totales et pression interstitielle imposées en paroi de galerie pour la modélisation d'une excavation avec et sans ventilation d'air.

Les objectifs principaux des modélisations sont de représenter les fractures par bandes de cisaillement ainsi que de reproduire au mieux les mesures et observations *in situ*, avec un modèle mécanique isotrope.

## 6.2 Influence des anisotropies de contrainte et de perméabilité

La création et l'évolution de la zone fracturée peuvent être observées à travers l'évolution de la localisation des déformations de cisaillement. Celle-ci n'est pas *a priori* assurée d'être symétrique autour des galeries et de nombreuses solutions pourraient émerger [SaHC09]. Pour éviter toute hypothèse précoce de symétrie, l'excavation d'une galerie complète est d'abord modélisée avec des grains solides incompressibles  $b = 1$  et sans ventilation. Avec une galerie circulaire et un matériau isotrope, la localisation

des déformations de cisaillement n'est pas déclenchée à la suite de l'excavation. Une déformation diffuse est observée autour de la galerie. L'apparition de localisation de déformations peut être déclenchée en introduisant une imperfection dans le matériau.

Toutefois, en cas d'état de contrainte anisotrope de la roche avec  $\sigma_{x,0} = 15.6 \text{ MPa}$  et  $\sigma_{y,0} = \sigma_{z,0} = 12 \text{ MPa}$ , la localisation des déformations de cisaillement apparaît sans ajouter d'imperfection dans la roche. La Fig. 13 illustre l'évolution de la localisation des déformations autour de la galerie, pendant et après le forage. Les résultats numériques présentés sont la déformation déviatorique totale, la zone plastique et l'incrément de déformation déviatorique qui représente l'activité des bandes de cisaillement :

$$\hat{\epsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} \quad (93)$$

où  $\hat{\epsilon}_{ij}$  est le champ de déformation déviatorique calculé à partir du tenseur de déformation total  $\epsilon_{ij}$  :

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\epsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad (94)$$

$$\kappa_{eq} = \frac{\hat{\epsilon}_{eq} dt}{\int \hat{\epsilon}_{eq} dt} \quad (95)$$

La modélisation présente une structure symétrique de fractures en chevrons autour de la galerie. Cette structure est similaire aux observations *in situ* pour les galeries parallèles à  $\sigma_h$ . Les fractures en chevrons apparaissent lors de l'excavation et sont principalement concentrées au-dessus de la galerie, en raison de l'état de contrainte anisotrope du matériau. Au contraire, n'introduire que l'anisotropie de la perméabilité hydraulique intrinsèque avec  $k_{w,h} = 4 \times 10^{-20} \text{ m}^2$  et  $k_{w,v} = 1.33 \times 10^{-20} \text{ m}^2$  ne conduit pas à la localisation des déformations à moins qu'une imperfection matérielle ne soit introduite. Cela signifie que l'apparence et la forme de la localisation des déformations sont principalement dues à des effets mécaniques liés à l'état de contrainte anisotrope. La zone composée de bandes de cisaillement se développe préférentiellement dans la direction de la contrainte principale mineure de la section de la galerie.

En plus des anisotropies détaillées ci-dessus, l'argilite étudiée est une roche sédimentaire anisotrope transverse. L'anisotropie matérielle a également une influence sur l'apparition et sur la forme des bandes de cisaillement autour des galeries [PSC15]. Plus de détails concernant l'influence de l'anisotropie de résistance du matériau sur la zone endommagée sont présentés par [PSC15].

### 6.3 Influence de la condition aux limites second gradient

La modélisation précédente met en évidence que l'état de contrainte anisotrope est à l'origine d'une symétrie dans la structure de localisation autour de la galerie. Il conviendrait dès lors de ne considérer qu'un quart de galerie. Cependant, dans le contexte de la théorie du second gradient, une condition aux limites d'ordre supérieur doit être

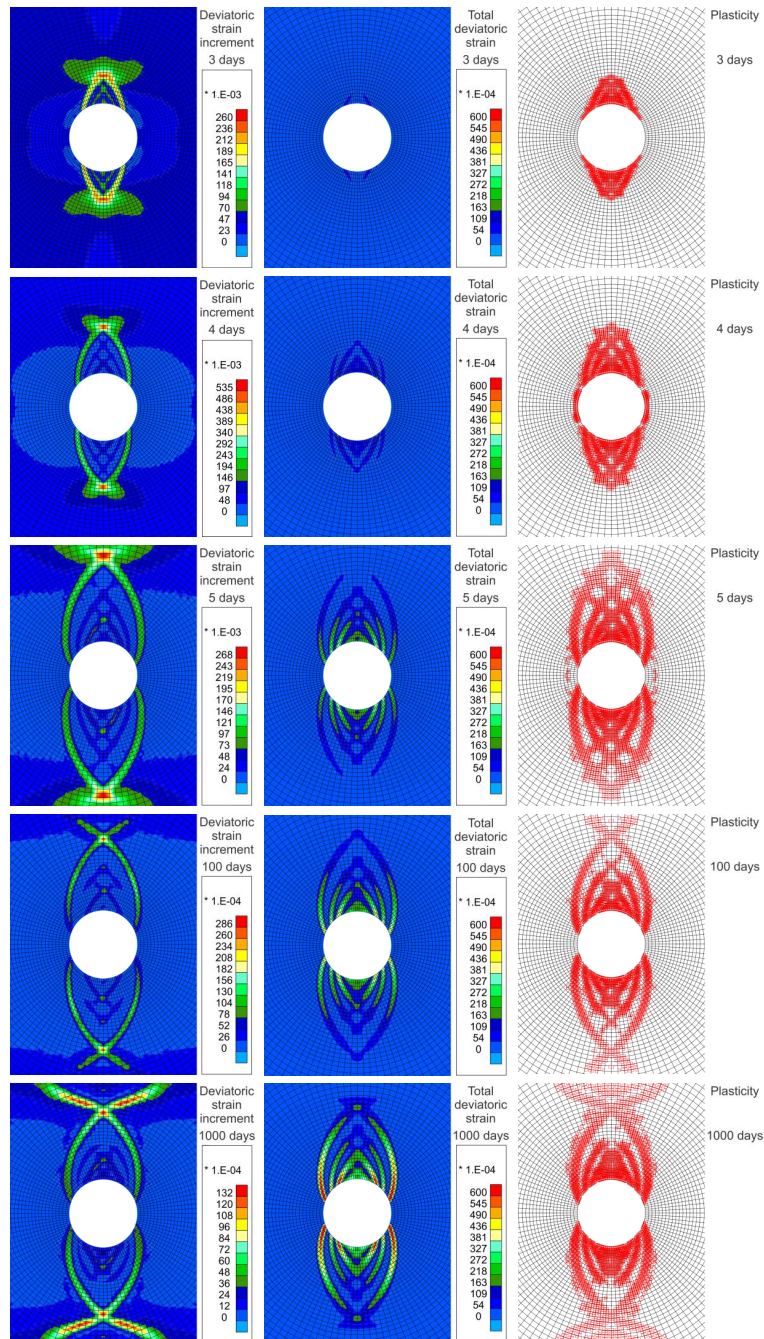


Figure 13: Evolution de la localisation des déformations pendant et après l'excavation d'une galerie complète (5 jours d'excavation), dans une roche présentant des anisotropies de perméabilité hydraulique et d'état de contrainte.

considérée au niveau des axes de symétrie du problème. Cette condition s'ajoute à la condition aux limites classique sur le déplacement perpendiculaire à la frontière [ZPV01a]. Cette seconde condition cinématique spécifique que la dérivée normale du déplacement radial doit s'annuler sur les axes de symétrie.

Pour illustrer la nécessité de cette condition aux limites second gradient, la structure de localisation des déformations de la Fig. 13 est comparée à celle obtenue sur un quart de galerie. La modélisation sur un quart de galerie est calculée avec la condition aux limites second gradient, avec  $b = 1$  et sans ventilation comme précédemment. Dans la Fig. 14, on peut observer que l'utilisation de la condition aux limites second gradient produit une structure de localisation des déformations de cisaillement qui est similaire aux résultats obtenus pour la galerie complète. Par conséquent, pour des raisons de simplicité de calcul et de symétrie, un quart de galerie peut être utilisé pour les modélisations futures. Ceci implique que la condition aux limites spécifique au modèle second gradient soit utilisée.

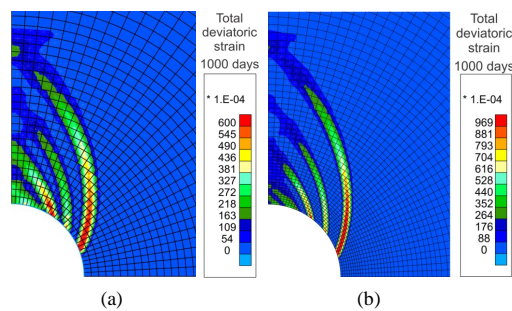


Figure 14: Comparaison de localisation des déformations à la fin du calcul pour les modélisations de : (a) une galerie complète et (b) un quart de galerie avec la condition aux limites second gradient.

## 6.4 Influence du coefficient de Biot

Même si la localisation des déformations semble être principalement contrôlée par des effets mécaniques, les conditions hydrauliques peuvent également avoir un impact sur la structure des bandes de cisaillement. Ci-après, l'accent est mis sur l'influence du coefficient de Biot pour le cas sans ventilation. Dans le premier calcul, on fait l'hypothèse que les grains solides sont incompressibles, ce qui implique  $b = 1$  (Fig. 15). Dans le deuxième calcul, une valeur de  $b = 0.6$  est utilisée (Fig. 16). La comparaison des Figs. 15 et 16 indique que le coefficient de Biot influence de manière significative la structure des bandes de cisaillement. Avec une valeur de 0.6, moins de bandes apparaissent et la localisation des déformations de cisaillement est retardée. En effet, la déformation reste diffuse jusqu'au quatrième jour d'excavation; néanmoins, la localisation apparaît avant la fin de l'excavation. Cela peut être expliqué en examinant les



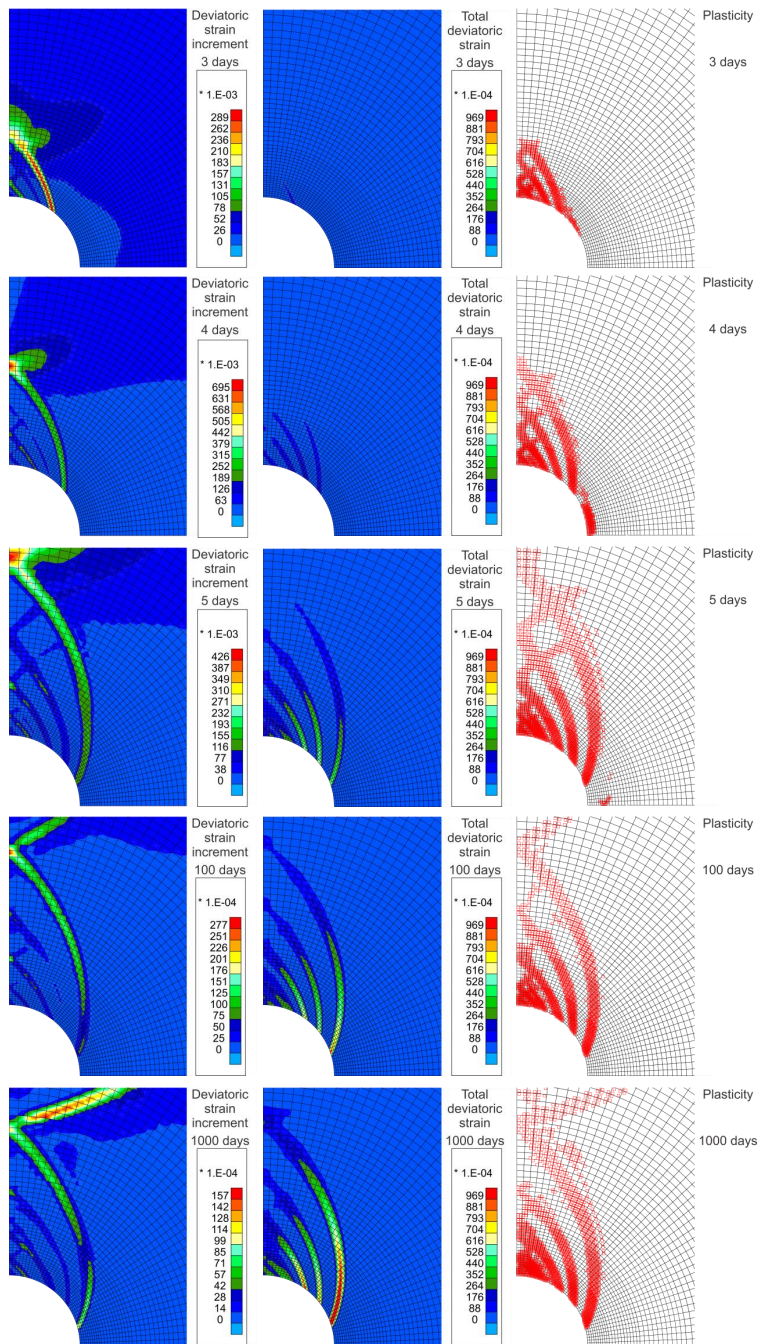


Figure 15: Evolution de la localisation des déformations pendant et après l'excavation d'une galerie (5 jours d'excavation), sans ventilation de la galerie et pour un coefficient de Biot de 1.

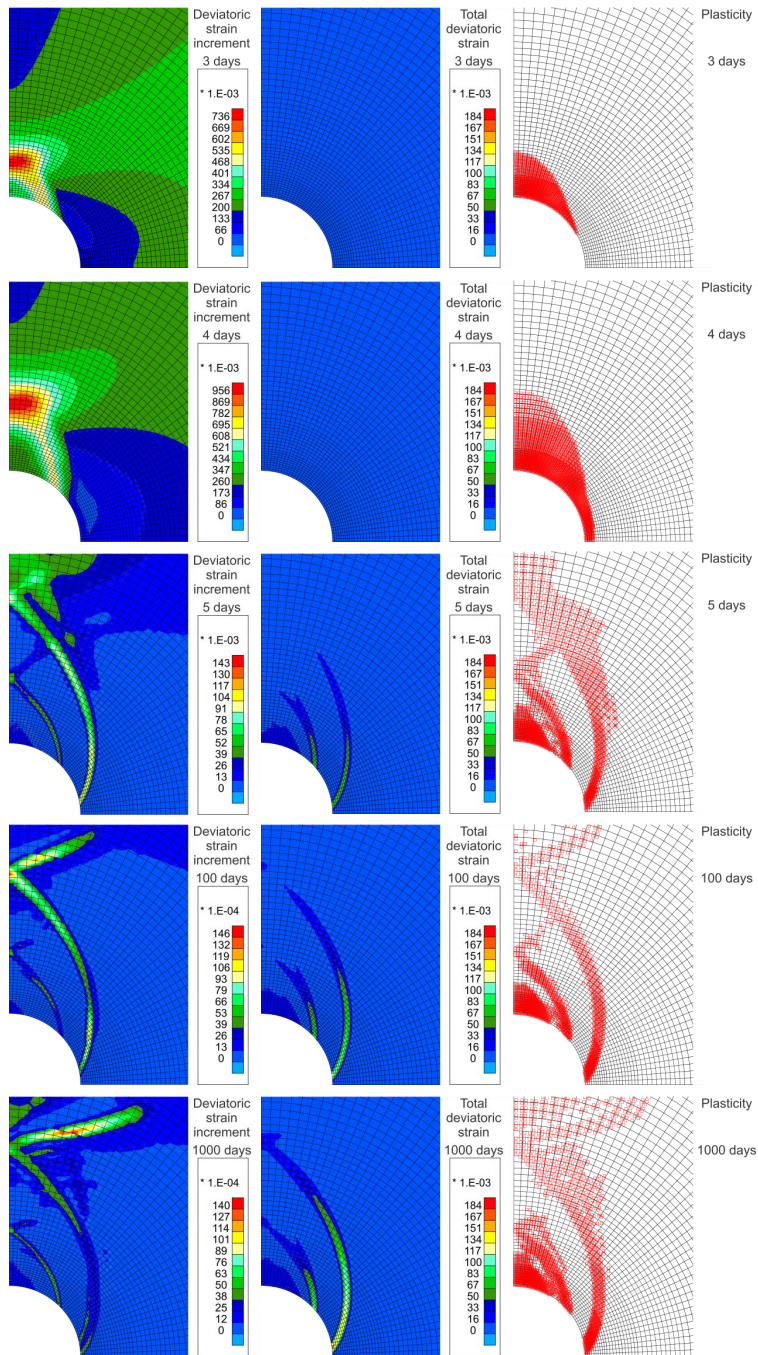


Figure 16: Evolution de la localisation des déformations pendant et après l'excavation d'une galerie (5 jours d'excavation), sans ventilation de la galerie et pour un coefficient de Biot de 0.6.

contraintes proches de la galerie. En paroi de galerie, les contraintes totales et la pression interstitielle sont imposées. Par conséquent, suivant la définition des contraintes effectives selon Biot pour les matériaux partiellement saturés (Eq. 82), plus le coefficient de Biot est faible, plus la contrainte effective de compression à la paroi de la galerie est élevée. Cela implique que la roche proche de la paroi de la galerie est plus résistante et que la localisation des déformations de cisaillement apparaît plus tard.

## 6.5 Influence de la ventilation des galeries

La modélisation présentée ci-après inclut les anisotropies initiales, un coefficient de Biot de 0.6 et la ventilation de la galerie. La phase de forage n'est pas influencée par la ventilation et les mêmes résultats qu'à la Fig. 16 sont obtenus jusqu'à 5 jours de calcul. Les résultats obtenus après l'excavation, affichés à la Fig. 17, indiquent que la succion imposée en paroi influence fortement les résultats. Suivant la définition des contraintes effectives, plus la succion est élevée, plus la contrainte effective est élevée (Fig. 20). Comme indiqué précédemment, ceci implique que le matériau devient plus résistant et, dans ce cas, redevient élastique à proximité de la galerie. Ce comportement inhibe la localisation des déformations de cisaillement autour de la galerie.

Différents résultats numériques, provenant de la paroi de la galerie et du massif rocheux, sont interprétés ci-après afin de souligner l'influence de la ventilation de la galerie. Les résultats proviennent des coupes et des points d'observation en paroi de galerie qui sont présentés à la Fig. 18. La coupe verticale traverse les bandes de cisaillement; dès lors, les résultats obtenus le long de cette coupe montrent les effets de la localisation des déformations. Ce qui n'est pas le cas pour la coupe horizontale. Par ailleurs, les résultats sont comparés pour les cas considérant ( $RH = 80 \%$ ) ou non ( $RH = 100 \%$ ) la ventilation.

L'évolution de la pression interstitielle pour les coupes verticale et horizontale est détaillée à la Fig. 19. Dans la masse rocheuse, une augmentation de la pression est observée dans la direction verticale et une diminution dans la direction horizontale, jusqu'à une distance radiale d'environ 30 m. Ces surpressions sont liées au couplage hydromécanique induit par l'anisotropie de l'état de contrainte initial. L'influence des bandes de localisation des déformations est visible verticalement mais pas horizontalement. Cela est illustré par les fluctuations de la pression interstitielle dans des zones restreintes, avec une diminution dans les bandes de cisaillement. L'influence des bandes de cisaillement est principalement observée pendant les 50 premiers jours de calcul, puis elle a tendance à disparaître. Ce phénomène est dû à l'incrément de déformation à l'intérieur des bandes (activité des bandes) et au couplage hydromécanique. Comme prévu, l'influence de la ventilation est importante près de la paroi de la galerie, mais tend à disparaître plus profondément dans la roche.

Les chemins de contrainte au niveau de la paroi de la galerie sont détaillés à la Fig. 20 où  $q$  est la contrainte déviatorique :

$$q = \sqrt{3} II_{\sigma'} \quad (96)$$



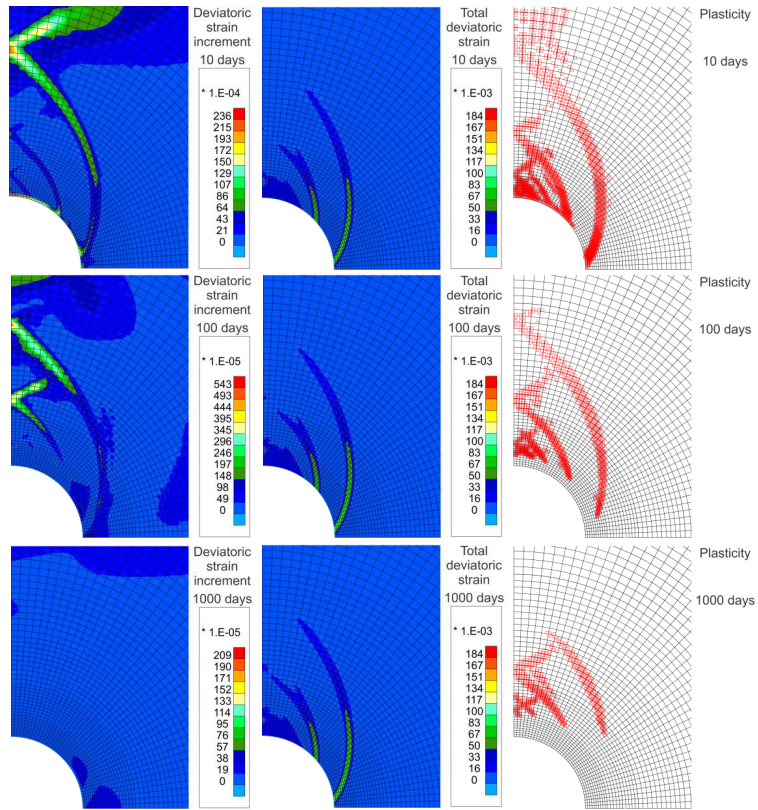


Figure 17: Evolution de la localisation des déformations après l'excavation d'une galerie, avec ventilation de la galerie et pour un coefficient de Biot de 0.6.

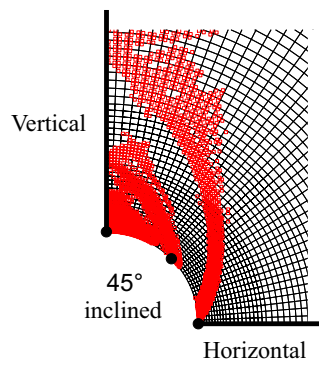


Figure 18: Positions des coupes et des points d'observation en paroi de galerie.



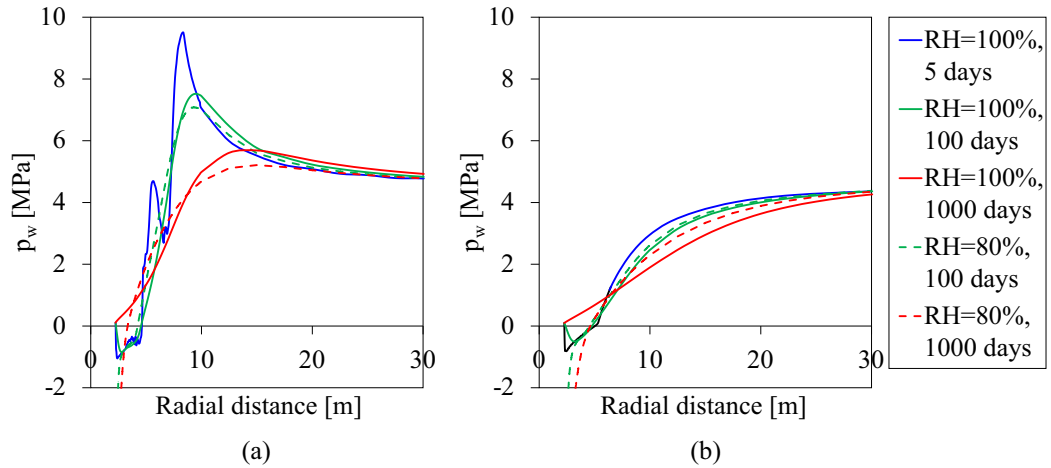


Figure 19: Evolution de la pression interstitielle le long des coupes (a) verticale et (b) horizontale après l'excavation de la galerie.

et  $p'$  est la contrainte effective moyenne. Comme mentionné précédemment, si une ventilation est réalisée, les contraintes effectives sont beaucoup plus élevées en raison de la succion. Ceci explique la différence, après la fin de la phase de forage, entre les chemins de contrainte des modélisations avec et sans ventilation.

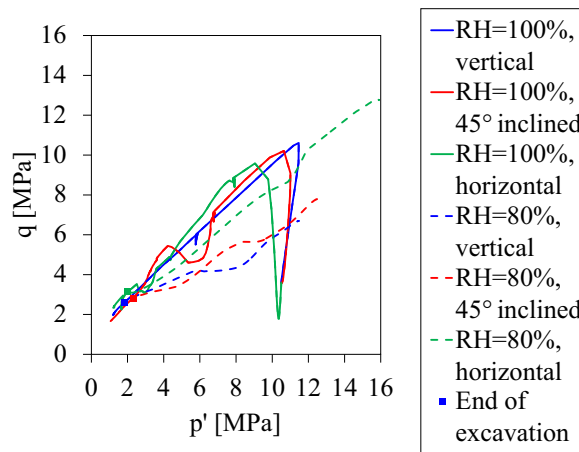


Figure 20: Chemins de contrainte en paroi de galerie pendant et après l'excavation de la galerie.

Tous ces résultats sont des preuves que des différences notables de comportement de la roche existent entre les cas avec ou sans ventilation d'air en galerie. Pour la

modélisation avec ventilation,  $p_w$  reste négatif à proximité de la galerie (Fig. 19), les contraintes effectives augmentent après l'excavation (Fig. 20) et le matériau redevient élastique. Par conséquent, la désaturation de la roche à proximité de la galerie inhibe la localisation des déformations de cisaillement (Fig. 17), ce qui a pour effet de limiter les déformations ultérieures. Au contraire, sans ventilation,  $p_w$  près de la paroi de la galerie augmente après l'excavation (Fig. 19), les contraintes effectives diminuent (Fig. 20) et le matériau reste partiellement plastique près de la galerie (Fig. 16). Ceci augmente la déformation et la convergence de la galerie.

Si le problème est étudié avec un modèle isotrope, sans considérer la localisation des déformations mais en modélisant la ventilation de la galerie, alors les convergences horizontale et verticale sont similaires. Seuls les processus de fracturation et de localisation des déformations permettent de reproduire l'anisotropie de convergence. En effet, ni la structure de fracturation, ni la convergence des galeries ne peuvent être reproduites correctement avec une approche classique [PC17, PSC15]. La création de fractures, principalement au-dessus de la galerie en raison de l'état de contrainte anisotrope du matériau, augmente à la fois les convergences verticale et horizontale. Dans cette dernière direction, la proximité des bandes de cisaillement induit des déformations excessives. A long terme, les déformations différées observées dans des conditions saturées s'expliquent par la consolidation. En revanche, lorsque la ventilation de la galerie est reproduite, le matériau proche de la paroi de la galerie redevient élastique, ce qui limite la déformation plastique et la convergence à long terme.

Les modélisations numériques réalisées mettent en évidence l'effet de la ventilation en galerie sur le transfert hydraulique et sur le drainage progressif de la roche environnante. Cependant, la ventilation d'air considérée est théorique et une ventilation réelle est à envisager [CCP<sup>+</sup>13, PTC16]. De plus, le transfert d'eau et sa cinétique à proximité de la galerie sont principalement conditionnés par les modifications des propriétés hydromécaniques à l'intérieur de la zone endommagée d'excavation. En effet, la zone endommagée se développant autour des galeries suite au processus de forage est composée de fractures ayant un impact irréversible significatif sur les caractéristiques d'écoulement et de transport [TBD05]. Pour une approche par bandes de cisaillement, l'impact de la fracturation sur les propriétés de transport peut être abordé en associant l'augmentation de la perméabilité hydraulique intrinsèque à la déformation mécanique [PTC16]. Cette dernière est amplifiée dans les discontinuités de localisation des déformations. Une telle dépendance permet de reproduire une augmentation significative de la perméabilité de plusieurs ordres de grandeur dans la zone endommagée [PTC16], en accord avec les mesures expérimentales [ALN<sup>+</sup>14].

## 7 Conclusions

La rupture dans les géomatériaux est souvent précédée d'une localisation des déformations au sein de bandes minces. La localisation des déformations est donc un processus important qui a été étudié à la fois expérimentalement et théoriquement. Les

développements de la géomécanique dans le domaine des processus multiphysiques couplés nécessitent une étude de la localisation des déformations adaptée à ces nouvelles conditions. Des interactions entre les différents processus peuvent en effet avoir lieu. De plus, la modélisation numérique des bandes de cisaillement avec des éléments finis classiques souffre d'un problème de dépendance au maillage. Une longueur interne doit être introduite dans le modèle. Parmi les différentes techniques de régularisation, nous proposons un modèle couplé second gradient pour une application d'excavation de galerie. Il a été démontré que le modèle régularise la solution mais ne restitue pas son unicité. L'extension de telles théories à d'autres contextes multiphysiques est davantage un problème expérimental qu'un problème numérique. Des expériences doivent encore montrer l'influence de la température, de la succion ou de concentrations chimiques sur l'apparition et l'épaisseur des bandes de localisation de déformation !

## References

- [ABS03] K Alshibli, S Batiste, and S Sture. Strain Localization in Sand: Plane Strain versus Triaxial Compression. *J Geotech Geoenviron Eng*, 129(6):483–494, 2003.
- [Aif84] E C Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *J Eng Mater Technol*, 106(4):326–330, 1984.
- [ALN<sup>+</sup>14] G Armand, F Leveau, C Nussbaum, R de La Vaissiere, A Noiret, D Jaeggi, P Landrein, and C Righini. Geometry and properties of the excavation-induced fractures at the Meuse/Haute-Marne URL drifts. *Rock Mech Rock Eng*, 47(1):21–41, 2014.
- [BA95] R I Borja and E Alarcon. A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 122(1-2):145–171, 1995.
- [BBC84] Z P Bazant, T B Belytschko, and T P Chang. Continuum Theory for Strain Softening. *J Eng Mech*, 110(12):1666–1692, 1984.
- [BCC06] P Bésuelle, R Chambon, and F Collin. Switching deformation modes in post-localization solutions with a quasibrittle material. *J Mech Mater Struct*, 1(7):1115–1134, 2006.
- [BDR00] P Bésuelle, J Desrues, and S Raynaud. Experimental characterisation of the localisation phenomenon inside a vosges sandstone in a triaxial cell. *Int J Rock Mech Min Sci*, 37(8):1223–1237, 2000.
- [Bio41] M A Biot. General theory for three-dimensional consolidation. *J Appl Phys*, 12(2):155–164, 1941.

- [BW57] M A Biot and D G Willis. The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. *J Appl Mech*, 24:594–601, 1957.
- [CC09] E Cosserat and F Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. Hermann, Paris, 1909.
- [CCC01] R Chambon, S Crochepeyre, and R Charlier. An algorithm and a method to search bifurcation points in non-linear problems. *Int J Numer Meth Engng*, 51(3):315–332, 2001.
- [CCC06] F Collin, R Chambon, and R Charlier. A finite element method for poro mechanical modelling of geotechnical problems using local second gradient models. *Int J Numer Meth Engng*, 65(11):1749–1772, 2006.
- [CCC09] F Collin, D Caillerie, and R Chambon. Analytical solutions for the thick-walled cylinder problem modeled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation. *Int J Solids Struct*, 46(22-23):3927–3937, 2009.
- [CCH98] R Chambon, D Caillerie, and N El Hassan. One-dimensional localisation studied with a second grade model. *Eur J Mech A-Solid*, 17(4):637–656, 1998.
- [CCM01] R Chambon, D Caillerie, and T Matsushima. Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. *Int J Solids Struct*, 38(46-47):8503–8527, 2001.
- [CCP<sup>+</sup>13] R Charlier, F Collin, B Pardoën, J Talandier, J P Radu, and P Gerard. An unsaturated hydro-mechanical modelling of two in-situ experiments in Callovo-Oxfordian argillite. *Eng Geol*, 165:46–63, 2013.
- [CLC09] F Collin, S Levasseur, and R Chambon. Numerical post failure methods in multiphysical problems. *Eur J Environ Civ Eng*, 13(7-8):983–1004, 2009.
- [CM04] R Chambon and J C Moullet. Uniqueness studies in boundary value problems involving some second gradient models. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 193(27-29):2771–2796, 2004.
- [Cou73] C A Coulomb. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l’architecture. *Académie Royale des Sciences*, 7:343–382, 1773.
- [Cou95] O Coussy. *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley & Sons, Chichester, 1995.
- [Cou04] O Coussy. *Poromechanics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
- [CRB97] R Charlier, J P Radu, and J D Barnichon. Water movement effect on the strain localisation during a biaxial compression. In G Pande and

- S Pietruszczak, editors, *Numerical Models in Geomechanics, NUMOG VI*, pages 219–224, Rotterdam, 1997. Balkema.
- [dBM92] R de Borst and H B Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithm aspects. *Int J Numer Meth Engng*, 35(3):521–539, 1992.
- [DC93] E Detournay and A H D Cheng. *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*, volume 2 Analysis and Design Method, chapter 5, Fundamentals of Poroelasticity, pages 113–171. Pergamon Press, Oxford, 1993.
- [Des84] J Desrues. *La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Institut National Polytechnique, Grenoble, 1984.
- [Des05] J Desrues. Hydro-mechanical coupling and strain localization in saturated porous media. *Rev Eur Génie Civ*, 9(5-6):619–634, 2005.
- [Die03] M S Diederichs. Rock Fracture and Collapse Under Low Confinement Conditions. *Rock Mech Rock Eng*, 36(5):339–381, 2003.
- [DV04] J Desrues and G Viggiani. Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 28(4):279–321, 2004.
- [EV98] W Ehlers and W Volk. On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar elasto-plastic solid materials. *Int J Solids Struct*, 35(34-35):4597–4617, 1998.
- [Fer09] R Fernandes. *Modélisation numérique objective des problèmes hydromécaniques couplés dans le cas des géomatériaux*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.
- [FHMV96] R Finno, W Harris, M Mooney, and G Viggiani. Strain localization and undrained steady state of sands. *J Geotech Engrg*, 122(6):462–473, 1996.
- [FHMV97] R Finno, W Harris, M Mooney, and G Viggiani. Shear bands in plane strain compression of loose sand. *Géotechnique*, 47(1):149–165, 1997.
- [Ger73] P Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 Microstructure. *SIAM J Appl Math*, 25(3):556–575, 1973.
- [GSH12] N Guy, D M Seyed, and F Hild. A probabilistic nonlocal model for crack initiation and propagation in heterogeneous brittle materials. *Int J Numer Meth Engng*, 90(8):1053–1072, 2012.
- [HD93] C Han and A Drescher. Shear bands in biaxial tests on dry coarse sand. *Soils Found*, 33(1):118–132, 1993.

- [JKC14] G Jouan, P Kotronis, and F Collin. Using a second gradient model to simulate the behaviour of concrete structural elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 90:50 – 60, 2014.
- [JS88] Y S Jenq and S P Shah. Mixed-mode fracture of concrete. *Int J Fracture*, 38(2):123–142, 1988.
- [KCB<sup>+</sup>07] P Kotronis, F Collin, P Bésuelle, R Chambon, and J Mazars. Local Second Gradient Models and Damage Mechanics: 1D Post-Localization Studies in Concrete Specimens. In G Exadaktylos and I Vardoulakis, editors, *Bifurcation, Instabilities and Degradation in Geomechanics*, pages 127–142. Springer, 2007.
- [KCMC05] P Kotronis, R Chambon, J Mazars, and F Collin. Local second gradient models and damage mechanics: application to concrete. In *11th international conference on fracture, Turin, Italy, Org. ICF, cd, paper*, volume 5712, pages 20–25, 2005.
- [KGDL06] H D V Khoa, I O Georgopoulos, F Darve, and F Laouafa. Diffuse failure in geomaterials: Experiments and modelling. *Comput Geotech*, 33(1):1–14, 2006.
- [KHBC08] P Kotronis, S Al Holo, P Bésuelle, and R Chambon. Shear softening and localization: Modelling the evolution of the width of the shear zone. *Acta Geotechnica*, 3(2):85–97, 2008.
- [Kot08] P Kotronis. *Stratégies de Modélisation de Structures en Béton Soumises à des Chargements Sévères*. H.D.R. (Habilitation à Diriger des Recherches), Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2008. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00350461>.
- [LB88] D Lasry and T Belytschko. Localization limiters in transient problems. *Int J Solids Struct*, 24(6):581–597, 1988.
- [LBD<sup>+</sup>07] N Lenoir, M Bornert, J Desrues, P Bésuelle, and G Viggiani. Volumetric digital image correlation applied to X-ray microtomography images from triaxial compression tests on argillaceous rock. *Strain*, 43(3):193–205, 2007.
- [MCC02] T Matsushima, R Chambon, and D Caillerie. Large strain finite element analysis of a local second gradient model: application to localization. *Int J Numer Meth Engng*, 54(4):499–521, 2002.
- [MD99] M Mokni and J Desrues. Strain localisation measurements in undrained plane-strain biaxial test on Hostun RF sand. *Mech Cohes-Frict Mat*, 4(4):419–441, 1999.
- [Min64] R D Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Arch Ration Mech An*, 16(1):51–78, 1964.

- [Min65] R D Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int J Solids Struct*, 1:417–438, 1965.
- [MSC14] F Marinelli, Y Sieffert, and R Chambon. Hydromechanical modelling of an initial boundary value problem: Studies of non-uniqueness with a second gradient continuum. *Int J Solids Struct*, 2014.
- [Mua76] Y Mualem. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour Res*, 12(3):513–522, 1976.
- [NL08] M Nuth and L Laloui. Effective stress concept in unsaturated soils: Clarification and validation of a unified framework. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 32(7):771–801, 2008.
- [PC17] B Pardoen and F Collin. Modelling the influence of strain localisation and viscosity on the behaviour of underground drifts drilled in claystone. *Comput Geotech*, 85:351–367, 2017.
- [PCB87] G Pijaudier-Cabot and Z P Bazant. Nonlocal damage theory. *J Eng Mech*, 113(10):1512–1533, 1987.
- [PdBB<sup>+</sup>96] R H J Peerlings, R de Borst, W A M Brekelmans, J H P de Vree, and I Spee. Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *Eur J Mech A/Solids*, 15(6):937–953, 1996.
- [PdBBdV96] R H J Peerlings, R de Borst, W A M Brekelmans, and J H P de Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int J Numer Meth Engng*, 39(19):3391–3403, 1996.
- [PGdBB01] R H J Peerlings, M G D Geers, R de Borst, and W A M Brekelmans. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *Int J Solids Struct*, 38(44-45):7723–7746, 2001.
- [PLC15] B Pardoen, S Levasseur, and F Collin. Using Local Second Gradient Model and Shear Strain Localisation to Model the Excavation Damaged Zone in Unsaturated Claystone. *Rock Mech Rock Eng*, 48(2):691–714, 2015.
- [PM81] S T Pietruszczak and Z Mróz. Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *Int J Numer Meth Engng*, 17(3):327–334, 1981.
- [PSC15] B Pardoen, D M Seyedi, and F Collin. Shear banding modelling in cross-anisotropic rocks. *Int J Solids Struct*, 72:63–87, 2015.
- [PTC16] B Pardoen, J Talandier, and F Collin. Permeability evolution and water transfer in the excavation damaged zone of a ventilated gallery. *Int J Rock Mech Min Sci*, 85:192–208, 2016.

- [PV92] P C Papanastasiou and I G Vardoulakis. Numerical treatment of progressive localization in relation to borehole stability. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 16(6):389–424, 1992.
- [Ric76] J R Rice. The localization of plastic deformation. In W T Koiter, editor, *Theoretical and Applied Mechanics*, volume 1, pages 207–220. North-Holland Publishing Company, 1976.
- [RR75] J W Rudnicki and J R Rice. Conditions for the localisation of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *J Mech Phys Solids*, 23:371–394, 1975.
- [SaHC09] Y Sieffert, S al Holo, and R Chambon. Loss of uniqueness of numerical solutions of the borehole problem modelled with enhanced media. *Int J Solids Struct*, 46(17):3173–3197, 2009.
- [SJKC18] M Soufflet, G Jouan, P Kotronis, and F Collin. Using a penalty term to deal with spurious oscillations in second gradient finite elements. *International Journal of Damage Mechanics*, 2018. (online first).
- [Ske60] A W Skempton. Effective stress in soils, concrete and rocks. In *Pore Pressure and Suction in Soils*, pages 4–16, London, 1960. Butterworths.
- [TBD05] C F Tsang, F Bernier, and C Davies. Geohydromechanical processes in the Excavation Damaged Zone in crystalline rock, rock salt, and indurated and plastic clays - in the context of radioactive waste disposal. *Int J Rock Mech Min Sci*, 42(1):109–125, 2005.
- [Tou62] R Toupin. Elastic materials with couple-stresses. *Arch Ration Mech An*, 11(1):385–414, 1962.
- [vG80] M T van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci Soc Am J*, 44(5):892–898, 1980.
- [VGG78] I Vardoulakis, M Goldscheider, and Q Gudehus. Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2(2):99–128, 1978.
- [VS95] I Vardoulakis and J Sulem. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie Academic and Professional, 1995.
- [WW10] S Wu and X Wang. Mesh Dependence and Nonlocal Regularization of One-Dimensional Strain Softening Plasticity. *J Eng Mech*, 136(11):1354–1365, 2010.
- [Zau89] E Zauderer. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. Wiley, Chichester,UK, second ed. edition, 1989.



- [ZPV01a] A Zervos, P Papanastasiou, and I Vardoulakis. Modelling of localisation and scale effect in thick-walled cylinders with gradient elastoplasticity. *Int J Solids Struct*, 38(30-31):5081–5095, 2001.
- [ZPV01b] A Zervos, P Papanastasiou, and I Vardoulakis. A finite element displacement formulation for gradient elastoplasticity. *Int J Numer Meth Engng*, 50(6):1369–1388, 2001.
- [ZSS01] H W Zhang, L Sanavia, and B A Schrefler. Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model. *Comput Struct*, 79(4):441–459, 2001.
- [ZT00] O C Zienkiewicz and R L Taylor. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Stonchem, MA, fifth edition edition, 2000.