Sur les fonctions continûment dérivables sur un ensemble compact

L. Loosveldt (Aspirant FNRS)
en collaboration avec
Leonhard Frerick et Jochen Wengenroth (Universität Trier)

Journées annuelles du GDR AFHP

Mardi 10 Novembre 2020

LIÈGE université
Mathématique

fnrs
LA LIBERTÉ DE CHERCHER

Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$,

Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$,

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ si il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$,

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ si il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

!! En général, une telle dérivée n'est pas unique !!

Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$,

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ si il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

!! En général, une telle dérivée n'est pas unique !!

$$\mathcal{J}^1(K) := \{(f; df) \in C(K)^{d+1} \ : \ df \text{ est une dérivée continue de } f \text{ sur } K\}$$

équipé de la norme

$$\|(f; df)\|_{\mathcal{J}^1(K)} = \|f\|_K + \|df\|_K,$$

Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$,

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ si il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

!! En général, une telle dérivée n'est pas unique !!

$$C^1(K) = \pi_1(\mathcal{J}^1(K)),$$

équipé de la norme

$$\|f\|_{C^1(K)} = \|f\|_K + \inf\{\|df\|_K \ : \ df \text{ est une dérivée continue de } f \text{ sur } K\}$$

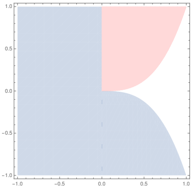
$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ est le sous-espace de $C^1(K)$ des restrictions à K des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}^d$.

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ est le sous-espace de $C^1(K)$ des restrictions à K des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}^d$.

$$C^1(\mathbb{R}^d|K) \subsetneq C^1(K)$$

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ est le sous-espace de $C^1(K)$ des restrictions à K des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}^d$.

$$C^1(\mathbb{R}^d|K) \subsetneq C^1(K)$$



$$K = \{(x,y) \in [-1,1]^2 \ : \ |y| \geq x^3 \text{ pour } x \geq 0\}$$

$$f(x,y) = x^2 \text{ sur la partie rouge } f(x,y) = 0 \text{ sinon}$$

$f \in C^1(K)$ mais $f \notin C^1(\mathbb{R}^2|K)$ parce que f n'est lipschitzienne à l'origine.

Théorème (Whitney,1934)

Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d|K)$ si et seulement si $f \in \pi_1(\mathscr{E}^1(K))$

Un jet $(f, df) \in \mathscr{E}^1(K)$ si

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0.$$

uniformément en $x \in K$.

Théorème (Whitney,1934)

Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d|K)$ si et seulement si $f \in \pi_1(\mathscr{E}^1(K))$

Un jet $(f, df) \in \mathscr{E}^1(K)$ si

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x\rangle}{|y - x|} = 0.$$

uniformément en $x \in K$.

Si K est topologiquement régulier ($\overline{\overset{\circ}{K}} = K$)

$$C^1_{\text{int}}(K) = \{f \in C(K) : f|_{\overset{\circ}{K}} \in C^1(\overset{\circ}{K}) \text{ et } df \text{ s'étend continûment à } K\}.$$

Théorème (Whitney,1934)

Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d|K)$ si et seulement si $f \in \pi_1(\mathscr{E}^1(K))$

Un jet $(f, df) \in \mathscr{E}^1(K)$ si

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x\rangle}{|y - x|} = 0.$$

uniformément en $x \in K$.

Si K est topologiquement régulier ($\overline{\mathring{K}} = K$)

$$C^1_{\text{int}}(K) = \{f \in C(K) : f|_{\mathring{K}} \in C^1(\mathring{K}) \text{ et } df \text{ s'étend continûment à } K\}.$$

$$C^1(K) \subseteq C^1_{\text{int}}(K)$$

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne car les segments dont les extrémités sont dans K et sur lesquels on aimerait appliquer le théorème des accroissements finis ne sont pas nécessairement contenus dans K.

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne car les segments dont les extrémités sont dans K et sur lesquels on aimerait appliquer le théorème des accroissements finis ne sont pas nécessairement contenus dans K.

Un chemin rectifiable est une fonction continue $\gamma : [a, b] \longrightarrow K$ telle que la longueur

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| : a = t_0 < \cdots < t_n = b \right\}$$

est finie.

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne car les segments dont les extrémités sont dans K et sur lesquels on aimerait appliquer le théorème des accroissements finis ne sont pas nécessairement contenus dans K.
Un chemin rectifiable est une fonction continue $\gamma : [a, b] \to K$ telle que la longueur

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| : a = t_0 < \cdots < t_n = b \right\}$$

est finie.
La fonction $\ell(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ est alors continue.

Lemme (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Soit $f \in C^1(K)$ et $x, y \in K$. Si df est une dérivée de f sur K et si x et y sont connectés par un chemin rectifiable $\gamma : [a, b] \to K$, alors

$$|f(y) - f(x)| \leq L(\gamma) \sup\{|df(z)| \ : \ z \in \gamma([a, b])\}.$$

Lemme (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Soit $f \in C^1(K)$ et $x, y \in K$. Si df est une dérivée de f sur K et si x et y sont connectés par un chemin rectifiable $\gamma : [a, b] \to K$, alors

$$|f(y) - f(x)| \leq L(\gamma) \sup\{|df(z)| \;:\; z \in \gamma([a, b])\}.$$

Si $F : K \to \mathbb{R}^d$ est continu et si γ est un chemin rectifiable dans K, on définit l'intégrale de F le long de γ, $\int_\gamma F$, comme la limite de la somme de Riemann-Stieltjes

$$\sum_{j=1}^{n} \langle F(\gamma(\tau_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$$

où $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, $\max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq n\} \to 0$ et $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$.

Si γ est absolument continu, il existe une fonction Lebesgue intégrable $\dot{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ pour laquelle $\gamma(\beta) - \gamma(\alpha) = \int_\alpha^\beta \dot{\gamma}(t)dt$ pour tout $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Dans ce cas, $F \circ \gamma$ est uniformément continu et on a la formule plus explicite et familière

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

Si γ est absolument continu, il existe une fonction Lebesgue intégrable $\dot{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ pour laquelle $\gamma(\beta) - \gamma(\alpha) = \int_\alpha^\beta \dot{\gamma}(t)dt$ pour tout $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Dans ce cas, $F \circ \gamma$ est uniformément continu et on a la formule plus explicite et familière

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt.$$

Si γ est continûment dérivable et $F = df$, pour une fonction $f \in C^1(K)$, $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Si γ est absolument continu, il existe une fonction Lebesgue intégrable $\dot{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ pour laquelle $\gamma(\beta) - \gamma(\alpha) = \int_\alpha^\beta \dot{\gamma}(t)dt$ pour tout $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Dans ce cas, $F \circ \gamma$ est uniformément continu et on a la formule plus explicite et familière

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

Si γ est continûment dérivable et $F = df$, pour une fonction $f \in C^1(K)$, $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

T.F.C.I. généralisé (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Pour toute fonction $f \in C^1(K)$ de dérivée continue df et pour tous chemins rectifiables $\gamma : [a, b] \to K$ on a

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

$$C^1(K) \subsetneq C^1_{\mathrm{int}}(K)$$

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$.

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$. On a $F \in C^1_{\text{int}}(K)$ par continuité et $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ sur $\Omega = \overset{\circ}{K}$.

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$. On a $F \in C^1_{\text{int}}(K)$ par continuité et $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ sur $\Omega = \overset{\circ}{K}$.

Si $F \in C^1(K)$, $dF = (0,0)$ et si on considère $\gamma : [0,1] \to K$ la paramétrisation évident d'une droite horizontale traversant K de gauche à droite

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$. On a $F \in C^1_{\text{int}}(K)$ par continuité et $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ sur $\Omega = \mathring{K}$.

Si $F \in C^1(K)$, $dF = (0,0)$ et si on considère $\gamma : [0,1] \to K$ la paramétrisation évident d'une droite horizontale traversant K de gauche à droite, on a

$$\int_\gamma dF = 0 \quad \text{tandis que} \quad F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = f(1) - f(0) = 1.$$

Ensemble compact avec une infinité de composantes connexes

Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

Ensemble compact avec une infinité de composantes connexes

Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes

Ensemble compact avec une infinité de composantes connexes

Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.

Ensemble compact avec une infinité de composantes connexes

Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \longrightarrow x_0 \in K$

Ensemble compact avec une infinité de composantes connexes

Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \longrightarrow x_0 \in K$, ce point limite ne peut appartenir à un des $K_{k(j)}$ vu que ces ensembles sont ouverts et deux à deux disjoints.

Ensemble compact avec une infinité de composantes connexes

Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \to x_0 \in K$, ce point limite ne peut appartenir à un des $K_{k(j)}$ vu que ces ensembles sont ouverts et deux à deux disjoints.
3. $$f_n(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ et } j \leq n \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{k(j)}. \end{cases}$$

Ensemble compact avec une infinité de composantes connexes

Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \to x_0 \in K$, ce point limite ne peut appartenir à un des $K_{k(j)}$ vu que ces ensembles sont ouverts et deux à deux disjoints.
3. $$f_n(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ et } j \leq n \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{k(j)}. \end{cases}$$

   $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ avec $df_n = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ pour un } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{k(j)}. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ pour un } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{k(j)}. \end{cases}$$

Pour tout j,

$$\frac{|f(x_{k(j)}) - f(x_0)|}{|x_{k(j)} - x_0|} = 1.$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Longrightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow\!\!\!\nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Longleftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}
$$

On dit qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$ est *(Whitney) régulier* si il existe une constante $C > 0$ tel que tous points $x, y \in A$ peuvent être joints par un chemin rectifiable dans A de longueur bornée par $C|x - y|$.

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}$$

On dit que A est *ponctuellement (Whitney) régulier* si pour tout $x \in A$ il existe un voisinage V_x de x dans A et $C_x > 0$ tels que tout $y \in V_x$ est joint à x par un chemin rectifiable dans A de longueur bornée par $C_x|x-y|$.

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ sup_{\substack{y\in K \\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

K est ponctuellement régulier	$\Rightarrow$	$(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$ Banach
$\Uparrow$	$\nearrow$	$\Downarrow$
Pour tout $x \in K$, il existe $C_x > 0$ tel que $\sup_{\substack{y\in K\\ y\neq x}} \frac{\|f(y)-f(x)\|}{\|y-x\|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}$	$\Leftarrow$	$(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ Banach

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc} K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\ \Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\ \text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\ C_x > 0 \text{ tel que} & & \\ sup_{\substack{y\in K \\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & & \end{array}$$

1. Considérons $((f_j; df_j))_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$, par complétude de $(C(K), \|\cdot\|_K)$ on obtient des limites uniformes f et df.
2. Étant donné $x \in K$ et un chemin rectifiable γ_y de x vers y de longueur $L(\gamma_y) \leq C_x|x - y|$

$$f_j(y) - f_j(x) - \langle df(x), y - x\rangle = \int_{\gamma_y} (df_j - df(x))$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc} K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\ \Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\ \text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe } C_x > 0 \text{ tel que } \sup_{\substack{y\in K \\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \end{array}$$

1. Considérons $((f_j; df_j))_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$, par complétude de $(C(K), \|\cdot\|_K)$ on obtient des limites uniformes f et df.
2. Étant donné $x \in K$ et un chemin rectifiable γ_y de x vers y de longueur $L(\gamma_y) \leq C_x|x-y|$

$$f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x\rangle = \int_{\gamma_y} (df - df(x))$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}
$$

En passant au quotient.

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Longrightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Longleftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}
$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe } C_x > 0 \text{ tel que } \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}
$$

Fixons $x \in K$, pour tout $y \in K \setminus \{x\}$, on définit une application linéaire et continue sur $C^1(K)$ par

$$\Phi_y(f) = \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \quad \forall f \in C^1(K).$$

On conclut par Banach-Steinhaus.

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}
$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Longrightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow\!\!\!\nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c} \text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ sup_{\substack{y\in K \\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} \end{array} & \Longleftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c} \text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ sup_{\substack{y\in K \\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} \end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \ : \ \gamma \text{ chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

($K_{2\varepsilon}$ voisinage ouvert et connexe de K)

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc} K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\ \Uparrow & \nearrow\!\!\!\!\nearrow & \Downarrow \\ \text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\ C_x > 0 \text{ tel que} & & \\ sup_{\substack{y\in K \\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & & \end{array}$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \,:\, \gamma \,\text{chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

$y_0 \in K$ fixé, définissons $u_\varepsilon(y) = \min\{d_\varepsilon(y), d_\varepsilon(y_0)\}$. Si y et y' sont suffisamment proches $K_{2\varepsilon}$, on a

$$|u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(y')| \leq |y - y'|,$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow\!\!\!\nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ sup_{\substack{y\in K\\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \,:\, \gamma \text{ chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

$y_0 \in K$ fixé, définissons $u_\varepsilon(y) = \min\{d_\varepsilon(y), d_\varepsilon(y_0)\}$. Si ϕ est une fonction C^∞, positive, à support dans $B(0,\varepsilon)$ et d'intégrale 1, le produit de convolution $u_\varepsilon * \phi$, défini sur K_ε, est une function C^∞.

$$|(u_\varepsilon * \phi)(x) - (u_\varepsilon * \phi)(y_0)| \leq C_x(d_\varepsilon(y_0) + d)|x - y_0|$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc} K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\ \Uparrow & \nearrow\!\!\!\nearrow & \Downarrow \\ \begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \end{array}$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \ : \ \gamma \text{ chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

$y_0 \in K$ fixé

$\text{supp}\phi \longrightarrow \{0\}$

$$d_\varepsilon(y_0) \leq C_x(d_\varepsilon(y_0) + d)|x - y_0|.$$

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow\!\!\!\nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K \text{, il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}$$

Pour tout $y_0 \in B(x, \frac{1}{2C_x}) \cap K$, il existe un chemin rectifiable de x vers y_0 in $K_{2\varepsilon}$ de longueur bornée par $2C_x d|x - y_0| + \varepsilon$. En utilisant un paramétrage par abscisse curviligne pour ces chemins, on obtienne une famille de fonctions uniformément équicontinue.

Si K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K \text{, il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}
$$

Pour tout $y_0 \in B(x, \frac{1}{2C_x}) \cap K$, il existe un chemin rectifiable de x vers y_0 in $K_{2\varepsilon}$ de longueur bornée par $2C_x d|x - y_0| + \varepsilon$. En utilisant un paramétrage par abscisse curviligne pour ces chemins, on obtient une famille de fonctions uniformément équicontinues. Par Arzelà-Ascoli, on trouve une sous-suite convergente donc la limite est un chemin rectifiable de longueur bornée par $2C_x d|x - y_0|$.

Caractérisation de la complétude de $C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Soit K un ensemble compact, $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ est un espace de Banach si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes qui sont toutes ponctuellement Whitney régulières.

On désire montrer que

$$\overline{C^1(\mathbb{R}^d|K)}^{C^1(K)} = C^1(K).$$

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathcal{J}^1(K)} = \mathcal{J}^1(K).$$

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathcal{J}^1(K)} = \mathcal{J}^1(K).$$

Pour un compact général K, toutes les procédures standards d'approximation comme la convolution avec des fonctions test ou des "recollages" via des partitions de l'unité ne s'appliquent pas facilement.

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathcal{J}^1(K)} = \mathcal{J}^1(K).$$

Pour un compact général K, toutes les procédures standards d'approximation comme la convolution avec des fonctions test ou des "recollages" via des partitions de l'unité ne s'appliquent pas facilement.

Conséquence du théorème de Hahn-Banach

Il suffit de montrer que, si Φ une application linéaire continue sur $C(K)^{d+1}$ telle que $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$ alors $\Phi_{|\mathcal{J}^1(K)} = 0$

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathcal{J}^1(K)} = \mathcal{J}^1(K).$$

Pour un compact général K, toutes les procédures standards d'approximation comme la convolution avec des fonctions test ou des "recollages" via des partitions de l'unité ne s'appliquent pas facilement.

Conséquence du théorème de Hahn-Banach

Il suffit de montrer que, si Φ une application linéaire continue sur $C(K)^{d+1}$ telle que $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$ alors $\Phi_{|\mathcal{J}^1(K)} = 0$

Considérons une telle application Φ.

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

Comme $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \varphi \, d\mu = -\int \partial_1 \varphi \, d\mu_1 - \cdots - \int \partial_d \varphi \, d\mu_d$$

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

Comme $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mu[\varphi] = (\partial_1 \mu_1)[\varphi] + \cdots + (\partial_d \mu_d)[\varphi]$$

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

$$\mu = \mathrm{div}(T)$$

où $T = (\mu_1, \cdots, \mu_d)$ est un champ vectoriel de mesure (charge).

Si $\gamma : [a, b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

Si $\gamma : [a,b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \sum_{j=1}^{d} \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t) \, dt$$

Si $\gamma : [a,b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \sum_{j=1}^d \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\, dt = \sum_{j=1}^d \int F_j \, d\mu_j^{(\gamma)},$$

où $\mu_j^{(\gamma)}$ est l'image par γ de la mesure de densité γ_j' sur $[a,b]$.

Si $\gamma : [a, b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \sum_{j=1}^d \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t) \, dt = \sum_{j=1}^d \int F_j \, d\mu_j^{(\gamma)},$$

où $\mu_j^{(\gamma)}$ est l'image par γ de la mesure de densité γ_j' sur $[a, b]$. On pose $T_\gamma = (\mu_1^{(\gamma)}, \cdots, \mu_d^{(\gamma)})$

Si $\gamma : [a,b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \sum_{j=1}^{d} \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\, dt = \sum_{j=1}^{d} \int F_j\, d\mu_j^{(\gamma)},$$

où $\mu_j^{(\gamma)}$ est l'image par γ de la mesure de densité γ_j' sur $[a,b]$. On pose $T_\gamma = (\mu_1^{(\gamma)}, \cdots, \mu_d^{(\gamma)})$,

$$\operatorname{div} T_\gamma = \delta_a - \delta_b$$

Si $\gamma : [a, b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \sum_{j=1}^d \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t) \, dt = \sum_{j=1}^d \int F_j \, d\mu_j^{(\gamma)},$$

où $\mu_j^{(\gamma)}$ est l'image par γ de la mesure de densité γ_j' sur $[a, b]$. On pose $T_\gamma = (\mu_1^{(\gamma)}, \cdots, \mu_d^{(\gamma)})$,

$$\operatorname{div} T_\gamma = \delta_a - \delta_b$$

Si Γ est l'ensemble de tous les chemins rectifiables lipschitzien.

Smirnov (1993)

Toute charge T à support compact telle que $\operatorname{div}(T)$ est une mesure signée peut être décomposée en éléments de Γ, i.e., il existe une mesure positive finie ν sur Γ telle que

$$T = \int_\Gamma T_\gamma d\nu(\gamma) \text{ et } \|T\| = \int_\Gamma \|T_\gamma\| d\nu(\gamma).$$

Theorem (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Pour tout compact K, l'espace des restrictions à K des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$.

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.
Remarque : l'égalité (algébrique) $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ a des propriétés de stabilités assez pauvres :

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.
Remarque : l'égalité (algébrique) $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ a des propriétés de stabilités assez pauvres :

- Deux moitiés d'un cœur brisé se comportent mieux que le cœur intact...

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.
Remarque : l'égalité (algébrique) $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ a des propriétés de stabilités assez pauvres :

- Deux moitiés d'un cœur brisé se comportent mieux que le cœur intact...
- Considérons $M = \{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ et $K = M \times [0, 1]$, on a $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}^2|K)$.

Whitney (1934)

Soit K un compact topologiquement régulier. Si $\mathring{K}$ est Whitney régulier, alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$.

Whitney (1934)

Soit K un compact topologiquement régulier. Si $\mathring{K}$ est Whitney régulier, alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$.

Conjecture de Whitney : qu'en est-il de la réciproque ?

Whitney (1934)

Soit K un compact topologiquement régulier. Si $\mathring{K}$ est Whitney régulier, alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$.

Conjecture de Whitney : qu'en est-il de la réciproque ?

Critère pour l'égalité $C^1(K) = C^1_{\text{int}}(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Soit K un compact topologiquement régulier et supposons que, pour tout $x \in \partial K$, il existe $C_x > 0$ et un voisinage V_x de x dans K tel que chaque $y \in V_x$ peut être joint depuis x par un chemin rectifiable dans $\mathring{K} \cup \{x, y\}$ de longueur bornée $C_x|x - y|$. Alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(K)$.

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier.

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier. En particulier, on a $C^1(\mathbb{R}^2|K) = C^1(K)$.

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier. En particulier, on a $C^1(\mathbb{R}^2|K) = C^1(K)$.

$\overset{\circ}{K}$ n'est pas Whitney régulier, parce que $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ n'est pas contenu dans $\overset{\circ}{K}$

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier. En particulier, on a $C^1(\mathbb{R}^2|K) = C^1(K)$.
$\overset{\circ}{K}$ n'est pas Whitney régulier, parce que $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ n'est pas contenu dans $\overset{\circ}{K}$, mais les hypothèses du dernier critère étant satisfaites $C^1(K) = C^1_{\text{int}}(K)$.

Égalité entre $C^1(K)$ and $C^1(\mathbb{R}|K)$

Égalité entre $C^1(K)$ and $C^1(\mathbb{R}|K)$

Si K est un compact de $\mathbb{R}$ avec un nombre infini de composantes connexes, pour tout $\xi \in K$, soit

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

Égalité entre $C^1(K)$ and $C^1(\mathbb{R}|K)$

Si K est un compact de $\mathbb{R}$ avec un nombre infini de composantes connexes, pour tout $\xi \in K$, soit

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \; : \; y \in G\}}{\ell(G)} \; : \; G \text{ trou } \subseteq (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \right\}$$

Théorème (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact set wvec un nombre infini de composantes connexes. On a $C^1(K) = C^1(\mathbb{R}|K)$ si et seulement si $\sigma(\xi) < \infty$ pour tout $\xi \in K$.

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup\left\{\frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)\right\}$$

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup\left\{\frac{\sup\{|y-\xi| \;:\; y \in G\}}{\ell(G)} \;:\; G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \longrightarrow 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup\left\{\frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)\right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \longrightarrow 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

   $\Longrightarrow$ fini pour des suites avec décroissance rapide comme $x_n = a^{-n}$ avec $a > 1$ mais infini pour des suites plus lentes comme $x_n = n^{-p}$ ($p > 0$)

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

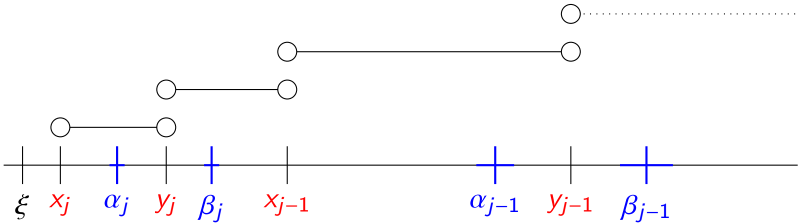
   $\Longrightarrow$ fini pour des suites avec décroissance rapide comme $x_n = a^{-n}$ avec $a > 1$ mais infini pour des suites plus lentes comme $x_n = n^{-p}$ ($p > 0$)
3. $K = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n, x_n + r_n]$

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup\left\{\frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)\right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

   $\Rightarrow$ fini pour des suites avec décroissance rapide comme $x_n = a^{-n}$ avec $a > 1$ mais infini pour des suites plus lentes comme $x_n = n^{-p}$ ($p > 0$)
3. $K = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[x_n, x_n + r_n]$ Pour $r_n = e^{-2n}$ on a $\sigma(0) < \infty$, par exemple, pour $x_n = e^{-n}$ et $\sigma(0) = \infty$ pour $x_n = 1/n$

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$



Pour en savoir plus :

Leonhard Frerick, Laurent Loosveldt and Jochen Wengenroth, *Continously differentiable functions on compact sets*, Results in Mathematics **75** n°4, 2020.

Pour en savoir plus :

Leonhard Frerick, Laurent Loosveldt and Jochen Wengenroth, *Continously differentiable functions on compact sets*, Results in Mathematics **75** n°4, 2020.

Disponible en ligne en open access