

SUR LA STABILITÉ SÉCULAIRE DES MODÈLES A NOYAUX ISOTHERMES

M. GABRIEL et P. LEDOUX

Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège, Cointe-Sclessin. Belgique.

RÉSUMÉ. — *On discute la stabilité séculaire des modèles à noyaux isothermes et l'on montre que le modèle critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR qui sépare les modèles stables des modèles instables est neutre vis-à-vis d'une modification linéaire impliquant une contraction des régions centrales et une expansion de l'enveloppe (ou vice versa).*

Dans la méthode de HENYEV, l'instabilité séculaire se marque par l'annulation d'un déterminant, ce qui peut correspondre à un point de bifurcation et les implications en sont brièvement soulignées.

ABSTRACT. — *The secular stability of models with isothermal cores is discussed and it is shown that the critical model of SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR which divides the stable from the unstable models is neutral with respect to a linear modification consisting of a contraction of the central regions and an expansion of the envelope (or vice-versa).*

In HENYEV'S method, secular instability should correspond to the vanishing of a determinant. This may correspond to a bifurcation point and implications are briefly discussed.

INTRODUCTION

Le problème de la stabilité séculaire des étoiles a été comparativement négligé jusque très récemment. A part la tentative de L. H. THOMAS [1] dans le cadre d'une approche basée sur le principe du minimum de l'énergie, on s'est contenté très longtemps du résultat de JEANS [2] donnant une base algébrique aux remarques plus qualitatives de Russell, à savoir qu'une étoile gazeuse est séculairement stable si la sensibilité du taux de production d'énergie ε aux variations de densité et de température est suffisamment prononcée pour qu'il augmente plus rapidement, lors d'une lente contraction accompagnée d'un échauffement, que le flux radiatif d'énergie réglé par la réponse de l'opacité κ aux mêmes variations.

Mais, la forme quantitative usuelle de ce critère

$$3\mu + \nu > n - 3m,$$

où

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln \rho} \right)_{\mathbf{T}}, & \nu &= \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln \mathbf{T}} \right)_{\rho}, \\ m &= \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho} \right)_{\mathbf{T}}, & n &= - \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \mathbf{T}} \right)_{\rho}, \end{aligned}$$

implique que la modification appropriée est une transformation homologue qui, en fait, viole l'équation de conservation de l'énergie, alors que celle-ci est déterminante dans le problème. Au mieux, peut-on dire que si l'égalité $3\mu + \nu = n - 3m$ pouvait être réalisée en chaque point, la transformation homologue constituerait, dans ce cas marginal, une déformation possible, solution des équations.

Mais, ceci semble exclu dans les modèles physiques et, de plus, il n'y a pas de raison de se limiter *a priori* à ce type de déformation. En réalité, si le problème peut être approché d'une façon efficace par la méthode des petites perturbations dépendant du temps par un facteur e^{st} , celle-ci devrait conduire à un problème aux valeurs propres pour s et les solutions propres devraient constituer un système complet capable de servir à la représentation d'une déformation générale quelconque. Le problème fut formulé sous cette forme en 1960 [3] par l'un de nous mais l'application aux modèles à noyaux isothermes envisagée à ce moment a été fort retardée en partie du fait de difficultés purement mathématiques. En effet, le problème qui est du quatrième ordre est essentiellement non-conservatif et l'opérateur n'est pas auto-adjoint si bien qu'une discussion générale devrait porter également

sur les fonctions propres de l'opérateur adjoint. Bien que la connaissance mathématique du problème n'ait pas progressé beaucoup jusqu'ici, le recours aux calculateurs électroniques peut en tout cas fournir des résultats utiles dans des cas particuliers.

D'autre part, de tous les aspects du problème de la stabilité des étoiles, c'est celui qui est le plus directement lié à l'évolution stellaire. Il est, par conséquent, assez normal que ce soit justement l'étude de cette évolution et la construction de séquences de modèles pouvant la représenter qui ait récemment ramené le problème de la stabilité séculaire à l'ordre du jour. En effet, SCHWARZSCHILD et HÄRM [4] ne trouvant aucune raison mathématique aux difficultés numériques rencontrées dans un tel calcul relatif aux phases avancées où un noyau de carbone est entouré successivement d'une couche d'hélium libérant de l'énergie par la réaction 3α et, un peu plus haut, d'une couche où brûle l'hydrogène, furent conduits à formuler et à résoudre le problème du 4^e ordre rappelé ci-dessus pour des modèles caractéristiques de ces phases. Ils découvrirent ainsi que leurs difficultés étaient attribuables à une véritable instabilité séculaire qui semble se manifester pour un seul des modes propres, le spectre de s paraissant borné supérieurement et une seule valeur propre tombant entre zéro et cette borne supérieure quand elle devient positive.

Nous reviendrons plus loin sur l'interaction intime entre évolution et stabilité séculaire d'ailleurs déjà très bien soulignée par SCHWARZSCHILD et HÄRM. Mais notons dès maintenant que les méthodes de calcul de séquences d'évolution, comme celle de HENYEU [5, 6] reviennent essentiellement à construire une suite de configurations en fonction des variations temporelles d'un paramètre tel que la composition chimique. Ces séquences de modèles sont comparables formellement aux « séries linéaires » de Poincaré pour l'évolution de masses de fluide parfait autogravitant dont la rotation supposée rigide est modifiée au cours du temps d'une façon continue. Les points où l'instabilité séculaire apparaît doivent être de la nature des points de bifurcation de cette théorie, un point de vue sur lequel l'un de nous a insisté à diverses occasions [7, 8, 9]. En principe, si les calculs d'évolution fournissaient continûment tous les points d'une telle série linéaire, ils devraient automatiquement révéler tout point d'instabilité séculaire. Mais comme SCHWARZSCHILD et HÄRM le remarquent, en pratique, le pas dans le temps est fini et souvent fort grand et il est possible de dépasser un tel point sans s'apercevoir de l'instabilité. Ceci n'est peut-être

pas très grave si le point en question n'est pas un véritable point de bifurcation où une autre série linéaire apparaît et hérite de la stabilité, quoique nous puissions ainsi « manquer » des phases très intéressantes même si elles ne couvrent qu'un temps limité de l'évolution globale. Dans la situation discutée par SCHWARZSCHILD et HÄRM, l'instabilité séculaire donne lieu à des espèces d'oscillations de relaxation [10, 11] de longues périodes ($\simeq 10^4$ à 10^5 années) du même type que celles étudiées par WEIGERT [12] dans des cas analogues. Il y a sans doute lieu à présent d'exercer beaucoup de prudence dans l'interprétation des résultats numériques mais ces investigations ouvrent certainement un champ nouveau de recherches intéressantes.

Comme dans toutes les discussions précédentes, nous nous bornerons ici aussi à des perturbations purement radiales qui, dans les étoiles à symétrie parfaitement sphérique, sont probablement les seules significatives. Toutefois, en présence de facteurs pouvant altérer cette symétrie, rotation, champ magnétique, effet de marée, il n'y a pas de doute que les perturbations non-radiales devront être prises en considération et que, dans certains cas, c'est probablement par leur intermédiaire que l'instabilité séculaire se manifesterait en premier lieu. Le problème risque toutefois d'être passablement difficile et peut-être impossible à attaquer actuellement puisque nous ne connaissons que très approximativement jusqu'ici les effets de ces facteurs sur les modèles d'équilibre eux-mêmes.

Les modèles stellaires à noyau isotherme présentent deux particularités qui méritent de retenir l'attention et qui ne sont d'ailleurs pas indépendantes l'une de l'autre. D'une part, on sait que la masse relative q_s de ce noyau passe par un maximum $q_{s,c}$ (masse critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR [13]) qu'il s'agisse de modèles détaillés tenant compte du transfert de l'énergie et de sa génération ou de modèles plus simples formés d'un noyau isotherme et d'une enveloppe polytropique. Cette difficulté hydrostatique peut s'interpréter, comme nous le montrerons plus loin, sur les lignes classiques des séries linéaires de Poincaré.

D'autre part, si q_2 représente la masse relative du noyau isotherme correspondant à la solution tangente à la boucle inférieure de la spirale isotherme (voir figure 1), il existe, lorsque $q_2 < q_s < q_{s,c}$, plusieurs modèles pour une masse et une distribution de composition chimique données. C'est un des rares exemples où le pseudo-théorème de Vogt-Russell est en défaut. Comme on peut s'y attendre, l'étude de la stabilité séculaire de ces modèles révèle qu'un seul de ceux-ci est stable.

LES MODÈLES

Deux groupes de modèles ont été construits. Le premier consiste en une série de 5 modèles polytropiques formés d'un noyau isotherme et d'une enveloppe polytropique d'indice $n = 3$, de poids moléculaire constant et dont la fraction de masse dans le noyau isotherme est voisine de la valeur critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR.

Si on introduit les variables sans dimension x, q, ρ', p définies par

$$(1) \quad x = \frac{r}{R} \quad q(x) = \frac{m(r)}{M}$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \quad p = \left(\frac{3GM^2}{4\pi R^4} \right)^{-1} P,$$

où R, M et $\bar{\rho}$ sont respectivement le rayon, la masse et la densité moyenne, tandis que ρ et P représentent la densité et la pression, les équations de structure s'écrivent

$$\frac{dq}{dx} = 3\rho' x^2$$

$$(2) \quad \frac{d\rho'}{dx} = -\frac{3}{4} \alpha \frac{q}{x^2} \rho'^{2/3} \text{ dans l'enveloppe}$$

$$\frac{d\rho'}{dx} = -\beta \frac{q}{x^2} \rho' \text{ dans le noyau.}$$

Le paramètre α est défini par la relation

$$(3) \quad p = \alpha^{-1} \rho'^{4/3},$$

dans l'enveloppe polytropique et β est donné par

$$(4) \quad \beta = \alpha \rho_s'^{-1/3},$$

où ρ_s' est la densité à la surface du noyau isotherme. En l'absence de discontinuité de composition chimique, cette définition de β assure la continuité et p et ρ' à l'intersurface entre le noyau et l'enveloppe.

Les solutions du système (2) doivent satisfaire aux conditions, aux limites

$$q = 0 \text{ en } x = 0$$

$$q = 1, \quad p = 0 \text{ en } x = 1.$$

Les principales caractéristiques des modèles polytropiques sont reprises au tableau I où ρ'_c désigne la densité centrale.

Le deuxième groupe consiste en une série de 6 modèles pour une étoile de masse $M = 3M_\odot$ obtenus en tenant compte explicitement des équations de transfert et de conservation de l'énergie. Dans la suite nous les désignerons sous le nom de modèles physiques. Ils ont été calculés avec les hypothèses simplificatrices suivantes :

a) les modèles sont statiques ; la variation temporelle de l'énergie interne et le travail de la pression ont donc été négligés dans l'équation de conservation de l'énergie ;

b) le noyau isotherme est formé d'hélium pratiquement pur ($X = 0, Z = 0,02$) et l'enveloppe a une composition chimique homogène normale ($X = 0,708, Z = 0,02$) ;

c) le taux de génération d'énergie par le cycle CNO est donné par [14] ;

$$\epsilon = 1,7 \cdot 10^{28} \rho X X_{\text{CNO}} T_7^{-2/3} \exp(-70,5 T_7^{-1/3}),$$

d) le coefficient d'opacité est donné par [14] ;

$$\kappa = 0,2(1 + X) + [4,3 \cdot 10^{25} Z(1 + X) + 3,7 \cdot 10^{22} (1 + X)(X + Y)] \rho T^{-3,5},$$

e) la pression p est la somme des pressions gazeuse p_G et radiative p_R et le gaz est toujours considéré comme parfait ;

f) le gaz est totalement ionisé dans toute l'étoile ; les conditions à la surface sont les conditions classiques, $p = 0, T = 0$.

Les principales caractéristiques de ces modèles sont reprises au tableau II. L'indice s indique que les grandeurs sont prises à la surface du noyau isotherme.

TABLEAU I

CARACTÉRISTIQUES DES MODÈLES POLYTROPIQUES

N° DU MODÈLE	1	2	3	4	5
$\alpha/4$	0,8668	0,8648	0,8639	0,8633	0,8600
q_s	0,3591237	0,3519163	0,3519169	0,3591552	0,3590110
ρ_c	1,5736 10^3	1,6492 10^3	1,68386 10^3	1,71043 10^3	1,85933 10^3

TABLEAU II

CARACTÉRISTIQUES DES MODÈLES PHYSIQUES

N ^o DU MODÈLE	ρ_c	$T_c \times 10^{-6}$	L/L_\odot	R/R_\odot	$\left(\frac{r}{R}\right)_s$	q_s	ρ_s	U_s	V_s
1	141,5	19,9	33,6	2,20	0,144	0,05	47	0,9056	0,718
2	645,5	20,6	45,6	2,57	0,141	0,073	52	0,5756	1,0922
3	1.296	20,8	46,0	2,64	0,132	0,074	52,6	0,484	1,139
4	7.269	21,00	40,5	2,60	0,113	0,06	47,5	0,3695	1,060
5	12.893	20,98	38,6	2,55	0,116	0,058	46,40	0,3602	1,009
6	5,1149 10^5	20,59	35,2	2,39	0,115	0,048	46,42	0,480	0,844

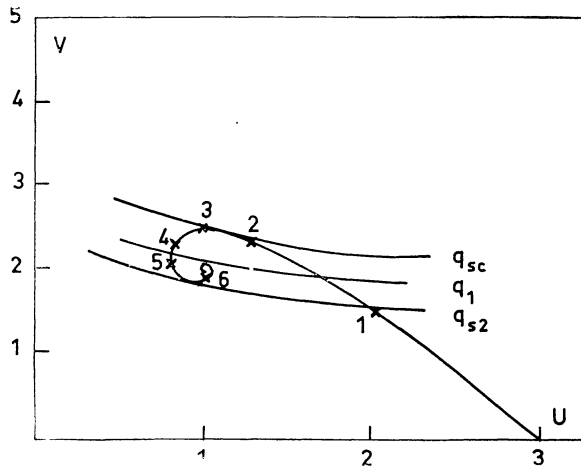


FIG. 1. — Solution dans le plan (U, V) pour le noyau isotherme et courbes de masse constante pour les solutions de l'enveloppe.

La figure 1 donne la position dans le plan (U, V) des points représentatifs de la surface du noyau isotherme ainsi que l'allure de quelques courbes, lieux des points des solutions de l'enveloppe satisfaisant aux deux conditions :

$$\begin{cases} L(r) = 0 \\ q = \frac{m(r)}{M} = \text{constante.} \end{cases}$$

Ces courbes ont été obtenues en multipliant les valeurs correspondantes de U et V par le rapport $\frac{\mu_i}{\mu_e}$ des poids moléculaires moyens dans le noyau (μ_i) et dans l'enveloppe (μ_e). Des courbes analogues à celles-ci pourraient également être tracées pour les modèles polytropiques en imposant uniquement la condition $q = \text{constante}$. A chaque point d'intersection d'une courbe de masse constante $q = q_s$ et

de la spirale correspond un modèle dont le noyau isotherme contient une fraction q_s donnée de la masse totale.

STABILITÉ SÉCULAIRE DES MODÈLES PHYSIQUES

Les équations de la stabilité séculaire s'obtiennent en perturbant linéairement les équations fondamentales de l'hydrodynamique et en négligeant le terme d'accélération dans l'équation de mouvement ce qui est justifié puisque les temps caractéristiques des perturbations séculaires sont très longs, de l'ordre de $\frac{|V|}{L}$ [7] où V et L désignent respectivement l'énergie potentielle gravifique et la luminosité. Si les perturbations dépendent du temps par un facteur e^{st} , les équations du problème s'écrivent

$$(5) \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \left(3 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta \rho}{\rho} \right)$$

$$(6) \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta P}{P} \right) = -\frac{d \ln P}{dr} \left(4 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta P}{P} \right)$$

$$(7) \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = \frac{d \ln T}{dr} \left[\frac{\delta L}{L} - 4 \frac{\delta r}{r} + \kappa_p \frac{\delta \rho}{\rho} - (4 - \kappa_T) \frac{\delta T}{T} \right],$$

ou dans une zone convective

$$(7') \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta P}{P} \right) + \frac{d \ln P}{dr} \delta \left(\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \right),$$

ou encore dans le noyau isotherme

$$(7'') \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa_p}{T^4} \frac{\delta L}{4\pi r^2},$$

TABLEAU III

COEFFICIENTS DE STABILITÉ SÉCULAIRE POUR LES MODÈLES PHYSIQUES

NUMÉRO DU MODÈLE	$s(s^{-1})$	$ s^{-1} _{(\text{années})}$	$s(s^{-1})$	$ s^{-1} _{(\text{années})}$
1	-4,9009 10 ⁻¹⁴	6,80 10 ⁵		
2	-5,7682 10 ⁻¹⁶	5,78 10 ⁷		
3	+5,5548 10 ⁻¹⁶	6,00 10 ⁷	-9,7538 10 ⁻¹⁵	3,42 10 ⁶
4	+5,1543 10 ⁻¹⁶	6,47 10 ⁷	-3,8803 10 ⁻¹⁷	8,59 110 ⁸
5	+5,0208 10 ⁻¹⁶	6,64 10 ⁷	-3,1296 10 ⁻¹⁷	1,065 10 ⁹
6	+1,53 10 ⁻¹⁸	2,18 10 ⁹	2,6860 10 ⁻²⁰	1,24 10 ¹³

$$(8) \frac{d}{dr} \delta L = 4\pi\rho r^2 \left[\varepsilon \left(\varepsilon_\rho \frac{\delta\rho}{\rho} + \varepsilon_T \frac{\delta T}{T} \right) - \frac{P}{\rho} \frac{s}{\Gamma_3 - 1} \left(\frac{\delta P}{P} - \Gamma_1 \frac{\delta\rho}{\rho} \right) \right],$$

où δ représente une perturbation Lagrangienne et

$$\begin{aligned} \varkappa_\rho &= \left(\frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln \rho} \right)_T & \varkappa_T &= \left(\frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln T} \right)_\rho \\ \varepsilon_\rho &= \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln \rho} \right)_T & \varepsilon_T &= \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln T} \right)_\rho \end{aligned}$$

L'équation (7') exprime que la perturbation de l'entropie est constante dans la zone convective. Cette approximation reste très bonne pour autant que $|s^{-1}|$ soit beaucoup plus grand que le temps de relaxation de la convection.

Les solutions du système (5) à (8) doivent satisfaire aux conditions, aux limites

$$(9) \quad \begin{aligned} \delta r = \delta L = 0 & \text{ en } r = 0 \\ \delta P = \delta T = 0 & \text{ en } r = R. \end{aligned}$$

Le calcul numérique montre que les équations de stabilité séculaire admettent, du moins dans le cas présent, un spectre discret de valeurs propres borné supérieurement. Les deux plus grandes valeurs propres sont reprises au tableau III qui suggère que le nombre de valeurs propres instables ($s > 0$) est égal au nombre d'extréma de q_s rencontrés en parcourant la spirale depuis son origine (3,0) jusqu'au point correspondant à la surface du noyau isotherme du modèle considéré.

On peut de plus montrer que tout modèle associé à un extrémum de q_s possède une valeur propre nulle. En effet, un tel modèle est linéairement indéterminé puisque la courbe correspondante ($q = c^{\text{ste}}$, $L(r) = 0$) du plan (U, V) est tangente à la spirale. Le système d'équations obtenu en pertur-

bant *linéairement* les équations de la structure interne au voisinage de ce modèle admet toujours une solution pour la même valeur de q_s mais des valeurs distinctes de L et R. Or, les équations de ce système linéaire ne diffèrent de celles de la stabilité séculaire que par le terme en s , ce qui implique l'existence d'une solution propre correspondant à une valeur propre $s = 0$, caractérisant l'état marginal de ce modèle.

La méthode de Henyey appliquée au calcul d'une telle séquence de modèles statiques à noyaux isothermes conduirait à la même indétermination linéaire correspondant à l'annulation du déterminant du système de $(4n + 4)$ équations résolues dans cette méthode, ce qui implique également l'annulation d'une valeur propre.

Ainsi, chaque fois qu'on passe par un extrémum de q_s , on s'attend à trouver au-delà une valeur propre positive (instable) supplémentaire ce qui est confirmé par les résultats numériques. Parmi les modèles ayant la même fraction de la masse dans le noyau isotherme, un seul est donc séculairement stable. Ainsi, il semble qu'on devrait apporter une restriction au pseudo-théorème de Vogt-Russell sur l'unicité des solutions : pour une masse et une composition chimique donnée, il n'existe qu'un seul modèle *statique* séculairement stable.

Les figures 2 et 3 donnent pour les modèles physiques respectivement un exemple de solutions stable et instable pour la plus grande valeur propre. La différence essentielle entre ces solutions est le comportement de $\frac{\delta T}{T}$. Pour un $(\delta r/r)$ négatif au

centre, $\frac{\delta T}{T}$ est toujours négatif au centre pour les solutions stables et positif pour les solutions instables.

Les caractéristiques principales de ces solutions

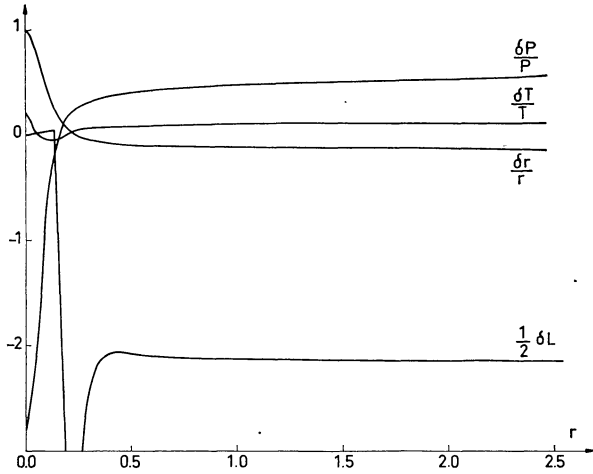


FIG. 2. — Solution propre correspondant à la plus grande valeur propre du modèle n° 2 (solution stable). δL et r sont exprimés en unité solaire.

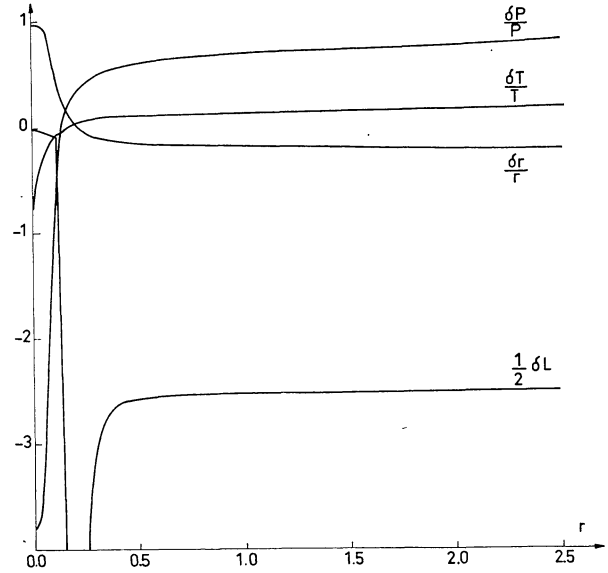


FIG. 3. — Solution propre correspondant à la plus grande valeur propre du modèle n° 3 (solution instable). δL et r sont exprimés en unité solaire.

peuvent s'interpréter aisément en remarquant que $\left| \frac{d \ln P}{dr} \right|$ dans le noyau isotherme augmente avec la densité centrale. Supposons qu'une perturbation locale provoque, pendant un court instant, une augmentation de température dans la zone de génération d'énergie. Elle entraînera un accroissement de l'énergie produite par les réactions nucléaires. Cet excès d'énergie ne pouvant être transféré immédiatement vers les couches voisines, la température et la pression augmenteront dans les couches juste extérieures au noyau isotherme et elles repousseront à la fois le noyau qui se contractera et l'enveloppe qui se dilatera. Les perturbations de P , ρ , T et r posséderont donc un nœud aux environs de la surface du noyau isotherme. Comme la variation de $\delta P/P$ est proportionnelle à $\frac{d \ln P}{dr}$ pour $\left| \frac{d \ln P}{dr} \right|$ suffisamment faible (c'est-à-dire ρ_c suffisamment faible), la valeur centrale de $\delta P/P$ satisfera à la condition

$$\left(\frac{\delta P}{P} \right)_c < \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)_c = -3 \left(\frac{\delta r}{r} \right)_c = 3,$$

et $\left(\frac{\delta T}{T} \right)_c$ sera négatif. La perturbation entraînera donc l'apparition d'un gradient de température positif dans le noyau provoquant un flux d'énergie dirigé vers l'intérieur qui, en chauffant le noyau, provoquera la disparition progressive de la pertur-

bation. Si par contre $\left| \frac{d \ln P}{dr} \right|$ dépasse une certaine limite (c'est-à-dire ρ_c est assez grand) $\left(\frac{\delta T}{T} \right)_c$ sera positif, le flux sera dirigé vers l'extérieur et la perturbation pourra continuer à se développer.

INTERPRÉTATION DE LA MASSE CRITIQUE DE SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR

Une explication de la masse critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR valable pour les deux types de modèles consiste à la considérer comme un point de bifurcation d'une série linéaire.

Considérons un modèle calculé par la méthode de Henyey et dans lequel on a procédé à un découpage en couches défini par

$$m_i = \frac{i}{N_1} q_s M \quad i = 1, \dots, N_1,$$

dans le noyau isotherme et

$$m_i = \left[q_s + (1 - q_s) \frac{i - N_1}{N_2} \right] M \quad i = N_1, \dots, N_2,$$

dans l'enveloppe, N_1 et N_2 donnant respectivement le nombre de couches dans le noyau et dans l'enveloppe : $N_1 + N_2 = N$.

Nous pouvons définir le vecteur $\vec{A} = (\vec{A}_c, \vec{A}_1 \dots \vec{A}_i \dots \vec{A}_{N_1}, \vec{A}_R)$ où \vec{A}_c et \vec{A}_R sont deux vecteurs à deux

dimensions exprimant les conditions aux limites au centre et à la surface tandis que \vec{A}_i est défini par

$$(10) \quad \vec{A}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln r_i - \ln r_{i-1}}{\ln m_i - \ln m_{i-1}} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d \ln r}{d \ln m} \right)_i + \left(\frac{d \ln r}{d \ln m} \right)_{i-1} \right] \\ \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\ln m_i - \ln m_{i-1}} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d \ln P}{d \ln m} \right)_i + \left(\frac{d \ln P}{d \ln m} \right)_{i-1} \right] \\ \frac{\ln T_i - \ln T_{i-1}}{\ln P_i - \ln P_{i-1}} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_i + \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{i-1} \right] \\ \frac{L_i - L_{i-1}}{\ln m_i - \ln m_{i-1}} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dL}{d \ln m} \right)_i + \left(\frac{dL}{d \ln m} \right)_{i-1} \right] \end{array} \right\},$$

où les dérivées entre crochets prennent les valeurs définies par les équations de structure interne. Dans le modèle à l'équilibre $\vec{A} = 0$.

Notons que le choix adopté pour le découpage fait apparaître dans \vec{A} , la masse du noyau isotherme $q_s M$ qui est le paramètre différenciant les modèles.

Pour obtenir le modèle dont le noyau isotherme contient une fraction $(q_s)_0 + dq_s$ de la masse à partir du modèle dont la masse du noyau est $(q_s)_0 M$, il suffit de résoudre le système

$$(11) \quad \sum_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{Y}_i} \frac{dY_i}{dq_s} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial q_s} = 0,$$

où

$$\vec{Y} = (\vec{z}_c, \vec{z}_1 \dots \vec{z}_N, \vec{z}_R)$$

avec

$$\vec{z}_c = (\ln P_c, \ln T_c)$$

$$\vec{z}_i = (\ln r_i, \ln P_i, \ln T_i, L_i)$$

$$\vec{z}_s = (\ln R, L).$$

Le système d'équations (11) ne diffère que par le dernier terme du système de $4(N+1)$ équations résolu dans la méthode de Henyey.

Pour que (11) ait une solution, il faut et il suffit que

$$(12) \quad \left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{Y}_i} \right\| \neq 0$$

Aussi longtemps que $\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{Y}_i} \right\| \neq 0$, nous obtenons, lorsque q_s varie continûment, une suite de modèles d'équilibre qui constitue une série linéaire.

Lorsqu'on atteint le point où $\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{Y}_i} \right\| = 0$, ce qui est le cas, par exemple pour le modèle correspondant à

la valeur critique de q_s de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR, le système (11) n'a plus une solution unique. Dans ce cas, la série linéaire peut s'arrêter, avoir un point de rebroussement ou un point de bifurcation.

Le même raisonnement peut être repris pour les modèles polytropiques. Dans ce cas, le vecteur \vec{A} est formé à partir du système (2) auquel on adjoint l'équation

$$\frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

et la matrice $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{Y}_i} \right)$, à partir du système

$$(13) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta x}{x} \right) = -\frac{1}{x} \left(3 \frac{\delta x}{x} + \frac{3}{4} \frac{\delta p}{p} + \frac{3}{4} \frac{\delta \alpha}{\alpha} \right)$$

pour l'enveloppe

$$(13') \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta x}{x} \right) = -\frac{1}{x} \left(3 \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta p}{p} + \frac{\delta \beta}{\beta} \right)$$

pour le noyau

$$(13'') \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta p}{p} \right) = -\frac{d \ln p}{dx} \left(4 \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta p}{p} \right)$$

$$(13''') \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta \alpha}{\alpha} \right) = 0,$$

et de

$$(14) \quad \frac{\delta \beta}{\beta} = \frac{1}{4} \left(\frac{\delta p}{p} \right)_s - \frac{3}{4} \frac{\delta \alpha}{\alpha},$$

tirée de (3) et (4) ainsi que les trois conditions aux limites

$$(15) \quad \begin{array}{l} \frac{\delta x}{x} = \frac{\delta p}{p} = 0 \quad \text{en } x = 1 \\ 3 \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta p}{p} + \frac{\delta \beta}{\beta} = 0 \quad \text{en } x = 0. \end{array}$$

Il est possible de montrer par un raisonnement analogue à celui effectué à la section 3 pour les modèles physiques, que le système (2) est linéairement indéterminé pour les modèles correspondant à un extremum de q_s , que de ce fait le système (13) admet

alors une solution et que le déterminant $\left\| \frac{\vec{\partial \tilde{A}}}{\partial \tilde{Y}_i} \right\|$ écrit à partir de (13) est nul pour ces modèles. La vérification numérique a été effectuée en étudiant les solutions propres du système (13) où la troisième équation a été réécrite sous la forme

$$(16) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta p}{p} \right) = - \frac{d \ln p}{dx} \left[\left(4 + \omega^2 \frac{x^3}{q} \right) \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta p}{p} \right],$$

correspondant à la restitution du terme dynamique en $\frac{d^2 x}{dt^2}$ si la dépendance vis-à-vis du temps est de la

forme $e^{i\sigma t}$ et si $\omega^2 = \sigma^2 \frac{R^3}{GM}$.

On remarque que le système (13) ainsi modifié est analogue à celui qu'il faut résoudre dans le problème de la stabilité dynamique excepté qu'ici les valeurs données à γ , respectivement $4/3$ dans l'enveloppe polytropique $n = 3$ et 1 dans le noyau isotherme, n'ont pas de sens physique mais gardent simplement la signification barotropique qu'elles ont dans le modèle lui-même. De plus, la quatrième équation de (13) et la condition (14) ne figurent pas dans le problème classique de la stabilité dynamique. Enfin, à la surface, les solutions doivent satisfaire à une condition supplémentaire $\delta x/x = 0$.

Il s'agit donc d'une espèce de problème pseudo-dynamique et on vérifie dans le tableau IV que la plus petite valeur propre s'annule bien en changeant de signe entre les modèles 2 et 3 qui encadrent l'extremum de q_s . Dans le cas marginal, les équations (13) modifiées se réduisent évidemment à la forme primitive et l'annulation de ω^2 correspond à

celle du déterminant $\left\| \frac{\vec{\partial \tilde{A}}}{\partial \tilde{Y}_i} \right\|$.

On peut donc également affirmer ici que le déterminant $\left\| \frac{\vec{\partial \tilde{A}}}{\partial \tilde{Y}_i} \right\|$ s'annule pour le modèle critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR et que celui-ci correspond à nouveau à un point de bifurcation d'une série linéaire. Ce point de bifurcation est comme dans le premier cas accompagné d'un changement de signe $\left\| \frac{\vec{\partial \tilde{A}}}{\partial \tilde{Y}_i} \right\|$.

TABLEAU IV

VALEURS PROPRES DU PROBLÈME
DE PSEUDO-STABILITÉ DYNAMIQUE

N° DU MODÈLE	1	2	3	4	5
ω^2	-1,2737	-0,2168	0,2865	0,6830	3,0948

CONCLUSIONS

Parmi les modèles à noyaux isothermes seuls ceux qui correspondent dans le plan (U, V) à des jonctions sur la branche de la spirale comprise entre (3,0) et le point (U_{sc} , V_{sc}) correspondant à la configuration critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR sont séculairement stables.

La configuration critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR est associée à l'existence d'un point de bifurcation de la série linéaire construite en fonction de la masse relative du noyau isotherme.

L'étude de la stabilité des modèles statiques effectuée ici ne permet pas de prévoir ce qu'il adviendra à la configuration physique au-delà de ce point critique quand, par suite des processus nucléaires, la masse relative du noyau isotherme tend à augmenter et à dépasser la valeur critique de SCHÖNBERG-CHANDRASEKHAR. Il est intéressant de noter toutefois que, dans l'état marginal, le modèle est neutre vis-à-vis d'une déformation correspondant à une contraction des régions centrales s'étendant un peu au-delà du noyau et d'une expansion de l'enveloppe extérieure réminiscente des solutions adoptées par SANDAGE et SCHWARZSCHILD [15] pour représenter l'évolution physique des modèles au-delà de ce point critique. Toutefois, l'approximation linéaire est aussi compatible avec cette même déformation changée de signe et une étude au second ordre et incluant sans doute explicitement le terme dS/dt serait indispensable pour lever l'indétermination sur le signe du mouvement.

L'apparition d'une instabilité séculaire est toujours accompagnée par un changement du signe du déterminant apparaissant dans la méthode de Henyey ce qui fournit un moyen, en principe, très simple de tester la stabilité séculaire des modèles calculés. Mais ceci requiert également une prudence assez stricte dans le calcul des modèles lorsque l'on note l'apparition d'une instabilité séculaire.

En effet, si la série de modèles était calculée de

façon continue, le modèle correspondant à l'échange de stabilité ne pourrait être obtenu par une méthode linéaire telle que celle de Henyey. Il y aurait donc lieu en un tel point de poursuivre les développements en série ou les représentations en termes de différences finies jusqu'au second ordre au moins, ce qui

conduirait à résoudre un système d'équations algébriques du second degré susceptible de fournir deux solutions. On peut facilement imaginer que la situation puisse encore se compliquer davantage et l'étude de la question, nous semble-t-il, mérite d'être poursuivie.

Manuscrit reçu 24 août 1967.

RÉFÉRENCES

- [1] THOMAS L. H., 1930, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **91**, 122 et 619.
- [2] JEANS J., 1928, *Astronomy and Cosmogony*, 115. The University Press, Cambridge.
- [3] LEDOUX P., 1960, *Bull. Ac. R. Belgique, Cl. Sci.*, 5^e série, **46**, 429.
- [4] SCHWARZSCHILD M. and HÄRM R., 1965, *Ap. J.*, **142**, 855.
- [5] HENYEV L. G., WILETS L., BÖHM K. H., LE LÉVIER R. and LEVEE R. D., 1959, *Ap. J.*, **129**, 628.
- [6] HENYEV L. G., FORBES J. E. and GOULD H. L., 1964, *Astrophys. J.*, **139**, 366.
- [7] LEDOUX P., 1963, *Stellar Stability and Stellar Evolution*, in *Star Evolution*, Ed. Gratton, L., Academic Press, New-York and London, 394.
- [8] LEDOUX P., 1958, *Stellar Stability, Handbuch der Physik*, **51**, 605. Ed. S. Flügge. Springer Verlag, Berlin.
- [9] LEDOUX P., 1965, *Stellar Stability, Stars and Stellar Systems*, vol. 8, 499. Ed. Aller and McLaughlin, The University of Chicago Press, Chicago.
- [10] ROSE W. K., 1966, *Ap. J.*, **146**, 838.
- [11] SCHWARZSCHILD M. and HÄRM R., communication privée.
- [12] WEIGERT A., 1966, *Z. f. Astrophys.*, **64**, 395.
- [13] SCHÖNBERG M., CHANDRASEKHAR S., 1942, *Ap. J.*, **96**, 161.
- [14] HAYASHI C., HOSHI R. and SUGIMOTO D., 1962, *Prog. Theor. Phys.*, Suppl. 2.
- [15] SANDAGE A. R., SCHWARZSCHILD M., 1952, *Ap. J.*, **116**, 463.