

SUR LA THÉORIE DES OSCILLATIONS RADIALES D'UNE ÉTOILE

PAR PAUL LEDOUX

Sommaire: En comparant les périodes fondamentales Π obtenues dans cet article pour trois modèles d'étoiles, à des résultats antérieurs, on voit que, sauf dans des cas extrêmes, Π tend à augmenter quand $(\rho_c/\bar{\rho})$ diminue.

Pour une étoile où $\gamma = \left(\frac{c_p}{c_v}\right)_G = c^{te}$ et où le taux de génération d'énergie est de la forme $\varepsilon_1 \propto \rho T^\nu$, la stabilité diminue lorsque la masse augmente. D'autre part, on peut, soit ramener l'accord entre les Π_{th} et les Π_{obs} , soit annuler le coefficient d'amortissement des oscillations, en choisissant des γ convenables. Il semble que, pour une même « céphéïde », l'ordre de grandeur de ces deux γ soit le même.

1. Introduction.

Nous nous proposons d'étudier les oscillations radiales d'étoiles gazeuses dépourvues de rotation. Deux raisons peuvent conduire à cette étude: la recherche de la condition de stabilité de ces étoiles vis à vis de leurs oscillations radiales ou l'interprétation des céphéïdes comme des étoiles en pulsation.

C'est la seconde qui a conduit A. Eddington¹ à établir l'équation régissant ces oscillations pour les cas où β , rapport de la pression gazeuse p_G à la pression totale P est une constante pour toute l'étoile (modèle-standard).

Par après, S. Rosseland² a traité le problème d'une façon générale pour des étoiles en équilibre radiatif hydrostatique.

T. G. Cowling³ a considéré le cas où des courants de convection existent dans l'étoile, la pression de radiation étant négligeable. ($\beta = 1$)

¹ I. C. S. page 186.

² University Observatory, Oslo, Publications no. 1. no. 2.

³ T. G. Cowling: M. N. 96, 42.

Ces derniers travaux avaient surtout pour but d'obtenir la condition de stabilité.

Nous avons répété les calculs de Cowling pour le cas où la pression de radiation n'est pas négligeable ($\beta \neq 1$ et variable).

2. Valeurs moyennes.

Dans son travail, Cowling considère le mouvement le plus général d'une masse gazeuse située dans un champ de force et traversée de radiation. La vitesse \vec{c} d'un petit élément de matière au point M est divisée en une vitesse de masse \vec{c}_0 et une vitesse de turbulence \vec{C} . Cette vitesse \vec{c}_0 de composantes u_0, v_0, w_0 , est définie par $\overline{\rho u} = \rho u_0$ etc. si ρ est la densité au point M . Ainsi pour \vec{C} de composantes U, V, W on a $\overline{\rho U} = 0$ etc. Une barre au dessus d'un symbole indique que l'on a pris la moyenne de la grandeur correspondante sur une quantité de matière suffisamment grande pour que cette moyenne ne soit pas affectée par la turbulence. Puisque nous avons en vue l'application à une étoile, nous pouvons supposer que cette masse de gaz a la symétrie sphérique et que le champ de force se réduit au champ de gravitation de cette masse elle-même.

Les valeurs moyennes ne dépendent donc que du temps t et de la distance r au centre de l'étoile. Elles peuvent s'obtenir en faisant la moyenne sur une portion suffisamment grande S , d'une sphère concentrique à l'étoile et de rayon r . Nous supposons comme Cowling que P et β sont affectés d'une façon négligeable par la turbulence. Admettons que celle-ci ait pour effet de détacher sans cesse de la matière environnante des masses de gaz qui se déplacent adiabatiquement et sont ensuite réabsorbées toutes entières en quelque autre point. Nous supposons aussi que, durant ce déplacement, il y a égalité entre les pressions extérieure et intérieure à chaque instant et en chaque point de la surface de l'élément en mouvement turbulent.

Dès lors, les lois régissant les modifications des conditions en un point M , de cet élément, durant le mouvement, sont¹

$$(I) \quad \frac{dP}{P} = \Gamma_1 \cdot \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{dP}{P} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \cdot \frac{dT}{T}$$

¹ Voir par ex.: S. Chandrasekhar: I. S. S. S. page 56.

$$\text{où } \Gamma_1 = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta+12(\gamma-1)(1-\beta)}, \quad \Gamma_2 = \frac{(4-3\beta)\Gamma_1}{3(1-\beta)\Gamma_1+\beta}, \quad \gamma = \left(\frac{c_p}{c_v}\right)_G$$

Si nous considérons maintenant une portion S de sphère telle que définie plus haut, ces lois nous permettent de calculer les valeurs des variables (ϱ, T) dans le petit élément de volume $d\omega$ entourant le point M qui se trouve à l'instant t dans cette surface S et qui a préalablement parcouru, du fait de la turbulence, une distance l suivant le rayon.

Si C_r est la composante suivant les rayons croissants de \vec{C} , nous diviserons S en 2 parties S_1 , et $S_2 = S - S_1$ sur lesquelles C_r est respectivement positive ou négative. Nous définirons un \bar{l}_1 par

$$\bar{l}_1 = \frac{\iint_{S_1} C_r l dS}{\iint_{S_1} C_r dS}$$

Si \bar{l}_2 est défini de même sur $(S - S_1)$ nous admettrons que $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = \bar{l}$. Enfin, supposons que \bar{l} est suffisamment petit pour que nous puissions considérer sur une telle distance les gradients de ϱ, T, P dans l'étoile, ainsi que Γ_1 et Γ_2 comme des constantes égales à leur valeur dans la portion de sphère S . Dès lors, nous pouvons obtenir des expressions approchées de \bar{C}_r et du taux moyen de convection d'énergie thermique suivant le rayon: $\overline{\varrho E C_r}$, E étant l'énergie thermique $c_v T + \frac{a T^4}{\varrho}$ contenue par unité de masse.

Si nous introduisons comme variable indépendante, au lieu de r , la masse m contenue dans la sphère de rayon r , nous avons:

$$(2) \quad \bar{C}_r = -4\pi r^2 \bar{l} \cdot q \cdot \bar{\varrho} \left(\frac{4-3\beta}{\beta} \right) \left(\frac{d\bar{T}}{dm} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \cdot \frac{\bar{T}}{P} \cdot \frac{dP}{dm} \right) \cdot \frac{1}{\bar{T}}$$

où q est une vitesse moyenne de turbulence, et

$$(3) \quad \overline{\varrho E C_r} = -4\pi r^2 \bar{l} \cdot q \cdot \bar{\varrho} \left[c_v \bar{\varrho} + 4a \bar{T}^3 \left(1 + \frac{4-3\beta}{4\beta} \right) \right] \cdot \left(\frac{d\bar{T}}{dm} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \cdot \frac{\bar{T}}{P} \cdot \frac{dP}{dm} \right)$$

3. Équations fondamentales.

Les équations régissant les variations des conditions physiques en un point de l'étoile s'obtiendront en prenant la moyenne au sens précédent des équations exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le seul mouvement de masse que nous considérons étant radial, nous pouvons supposer que les effets de la viscosité sur le mouvement de masse sont négligeables. De même, nous admettons qu'il y a équipartition de l'énergie cinétique turbulente $\overline{\rho U^2} = \overline{\rho V^2} = \overline{\rho W^2} = p_c$ et que $\overline{\rho UV} = \overline{\rho UW} = \overline{\rho VW} = 0$. Moyennant ces hypothèses, on obtient le système d'équations suivant:

$$(I) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$(II) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \frac{Gm}{r^2} - 4 \pi r^2 \frac{\partial}{\partial m} (P + p_c)$$

$$(III) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3 p_c}{2 \rho} \right) = \frac{p_c}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \left[4 \pi r^2 \bar{C}_r \frac{\partial P}{\partial m} + \varepsilon_2 + \frac{\partial}{\partial m} (4 \pi r^2 F_2) \right]$$

Cette dernière équation se déduit des deux premières et exprime la variation par rapport au temps de l'énergie cinétique de turbulence. ε_2 est le taux de transformation de l'énergie cinétique turbulente en énergie thermique; F_2 est la composante radiale du vecteur, convection d'énergie turbulente: $\frac{1}{2} \rho C^2 C_r$.

$$(IV) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{P}{\rho} \left[\frac{\beta}{\gamma-1} + 3(1-\beta) \right] \right\} = \frac{P}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \left\{ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \frac{\partial}{\partial m} [4 \pi r^2 (F_1 + F_3)] \right\}$$

Cette équation exprime la conservation de l'énergie.

ε_3 est le taux de conversion d'énergie thermique en énergie cinétique turbulente. ε_1 est le taux de génération d'énergie; F_3 est

la composante radiale du vecteur, convection d'énergie thermique = $\varrho E C_r$; F_1 est la composante radiale du flux de radiation et de la conduction.

Ces équations, dans le cas où on considère le mouvement de masse comme inexistant ($\vec{c}_0 = 0$), régissent l'équilibre de la configuration envisagée et se réduisent à

$$(II') \quad \frac{\partial(P + p_c)}{\partial m} = - \frac{Gm}{4\pi r^4}$$

$$(III') \quad 4\pi r^2 \overline{C_r} \frac{\partial P}{\partial m} + \varepsilon_2 + \frac{\partial}{\partial m} (4\pi r^2 F_2) = 0$$

$$(IV') \quad \frac{\partial}{\partial m} [4\pi r^2 (F_1 + F_3)] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

S'il n'y a pas de convection (III') disparaît et (II') et (IV') se réduisent aux équations habituelles régissant l'équilibre radiatif. Désormais, nous n'indiquerons plus la barre au dessus des symboles.

Considérons maintenant de petites oscillations autour de la position d'équilibre: le rayon passe de r à $r + \delta r$ etc. . . . Si on introduit les valeurs ainsi modifiées des variables, dans les équations I, II, III et IV, si on néglige les produits des variations: δr^2 etc. et si on tient compte des équations (II'), (III'), (IV') régissant l'équilibre, on obtient un système d'équations différentielles à partir duquel on déduit facilement l'équation différentielle régissant le déplacement δr durant une telle oscillation. Si on suppose que δr dépend du temps, t par un facteur $e^{i\sigma t}$ et en revenant à r comme variable indépendante cette équation est:

$$(4) \quad \varrho \left(\sigma^2 + 4 \frac{Gm}{r^3} \right) \delta r + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(P \Gamma_1 + \frac{5}{3} p_c \right) \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (4\pi r^2 \delta r) \right\} \\ = \frac{1}{i\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\varrho \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta} \delta \left\{ \right\} - \frac{2}{3} \varrho \delta \left[\right] \right]$$

où $\{ \}$ et $[]$ représentent les termes encadrés des mêmes symboles dans les équations (III) et (IV).

Si on suppose que l'oscillation est adiabatique le second membre de (4) s'annule, et si on introduit la notation $\xi = \frac{\delta r}{r}$ on obtient

$$(5) \quad \frac{d^2 \xi}{dr^2} + \frac{d\xi}{dr} \left\{ \frac{4}{r} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dr} \right\} + \xi \left\{ \frac{\sigma^2 \varrho + \frac{4}{r} g \varrho}{x} + \frac{3}{r x} \cdot \frac{dx}{dr} \right\} = 0$$

si $x = \Gamma_1 P + \frac{5}{3} p_c$ et $g = \frac{Gm}{r^2}$.

Négligeant $\frac{5}{3} p_c$ devant $\Gamma_1 P$, (5) devient:

$$(6) \quad \frac{d^2 \xi}{dr^2} + \frac{d\xi}{dr} \left\{ \frac{4-\mu}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} \cdot \frac{d\Gamma_1}{dr} \right\} \\ + \xi \left\{ \frac{\sigma^2 \varrho}{\Gamma_1 P} - \frac{\mu}{r^2} \cdot \left[3 - \frac{4}{\Gamma_1} \right] + \frac{3}{\Gamma_1} \cdot \frac{d\Gamma_1}{dr} \right\} = 0$$

avec $\mu = \frac{g \varrho r}{P}$, ce qui est la forme que nous avons employée.

Si β est constant, Γ_1 l'est aussi et l'équation (5) se réduit à l'équation d'Eddington. D'ailleurs, généralement les termes en $\frac{d\Gamma_1}{dr}$ sont petits vis à vis du reste du coefficient dans lequel ils figurent, toutefois pour le modèle à source ponctuelle d'énergie, calculé par Eddington, c'est ce terme qui prend toute l'importance dans le coefficient de ξ quand on se rapproche du centre.

4. Le gradient de température dans la région en équilibre convectif.

Pour que des courants de convection puissent subsister dans une région de l'étoile ($q \neq 0$) il faut qu'aux points de cette région on ait:

$$\left[\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{réel}} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{ad}} \text{ correspondant} \right] < 0 \text{ si nous supposons que}$$

dans une étoile $\left(\frac{dT}{dr} \right)$ est toujours négatif.¹

Or d'après (1), on voit que c'est justement cette différence qui figure dans (2) et (3) et par conséquent $F_g = \overline{\varrho E C_r}$ sera positif dans une région en équilibre convectif. Si nous négligeons le flux d'énergie

¹ Voir par ex.: S. Chandrasekhar I. S. S. S. page 222.

cinétique turbulente F_2 et si nous remplaçons ε_2 par $\frac{A \rho q^2}{\rho l q}$ où A est de l'ordre de l'unité,¹ (III') devient:

$$(7) \quad 4 \pi r^2 \bar{C}_r \cdot \frac{\partial P}{\partial m} = - \frac{A q^3}{l}.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut sur le signe de F_8 nous avons aussi $F_8 < F$ (8), F étant le flux total au point considéré. Si dans (7) et (8), nous remplaçons \bar{C}_r et $F_8 = \rho E \bar{C}_r$ par leur valeur (1) et (2) et si nous éliminons q entre les équations ainsi obtenues, il vient en appelant D , la différence des modules des gradients:

$$(9) \quad D_{(r)}^3 < \frac{A \cdot F^2 \cdot T \cdot \beta^5 \cdot r^2}{C_v^2 [\beta^2 + 3(1-\beta)(\gamma-1)(\beta+4)]^2 (4-3\beta) \rho^2 G M(r) l^4}.$$

Pour $\beta = 1$ cette expression se réduit à celle que Cowling a calculée dans le cas où la pression de radiation est négligeable. Appliquons cette inégalité à une étoile de la série principale supposée construite suivant le modèle de J. Wasiutynski² avec un poids moléculaire moyen

$\bar{\mu} = 1$, $\beta_c = 0,8$, $T_c = 2,59 \cdot 10^7$ ce qui correspond à $\frac{M}{M_\odot} = 10,263$,

$\frac{L}{L_\odot} = 6600$, $\frac{R}{R_\odot} = 6,5$ si κ_0 , constante du coefficient d'absorption

$\kappa = \kappa_0 \rho \cdot T^{-\frac{7}{2}}$ est égale à: $3,467 \cdot 10^{25}$.

Si nous supposons que $l = \frac{1}{20} R_c$, R_c étant le rayon de la zone de convection³ et que $F = \frac{L}{4 \pi r^2}$ nous trouvons $D < 2,7 \cdot 10^{-9}$ pour un point intérieur à la zone en équilibre convectif ($r = 0,816 R_c$). Comme le gradient de température en ce point est $\frac{dT}{dr} = -1,1371 \cdot 10^{-8}$,

¹ Voir réf. 3, page 193.

² Mr J. Wasiutynski a calculé la distribution des conditions physiques au sein d'une étoile composée d'un noyau en équilibre convectif entouré d'une enveloppe en équilibre radiatif ($\beta_c = 0,8$) et il a bien voulu nous communiquer ses résultats avant publication; nous l'en remercions.

³ Biermann: Z. f. Astr. 5 page 124.

on voit que cette différence est tout à fait négligeable

$$\left(D < 2,5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{dT}{dr} \right) \right).$$

Nous avons aussi calculé la valeur de D pour une géante $\bar{\mu} = 1$, $\beta_c = 0,8$ et $T_c = 2,37 \cdot 10^6$, $\kappa_0 = 3,467 \cdot 10^{25}$, ce qui correspond à $\frac{M}{M_\odot} = 10,263$, $\frac{L}{L_\odot} = 1970$, $\frac{R}{R_\odot} = 71$. Nous avons trouvé: $D < 1,915 \cdot 10^{-9}$, alors que le gradient de température en ce point est de l'ordre de $-1 \cdot 10^{-6}$. Ainsi, ici $D < 2 \cdot 10^{-8} \left| \frac{dT}{dr} \right|$ si bien que cette différence n'est pas aussi négligeable.

5. La condition de stabilité.

Le second membre de (4) étant toujours petit, on peut obtenir la solution de cette équation à partir de celle de l'équation constituée par le 1^{er} membre égalé à zéro (approximation adiabatique) par la méthode des perturbations.¹

Si σ^1 est la perturbation de σ^0 valeur de σ correspondant à la solution fondamentale δ_r^0 de l'équation (5) on a:

$$i\sigma^1 = \frac{A}{2\sigma^0} \text{ si}$$

$$(10) \quad A = \int_0^M \frac{\delta \varrho^0}{\varrho} \left[\frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta} \delta \left\{ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \frac{d}{dm} \left[4\pi r^2 (F_1 + F_3) \right] \right\} \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \delta \left\{ 4\pi r^2 C_r \cdot \frac{dP}{dm} + \varepsilon_2 + \frac{d}{dm} (4\pi r^2 F_2) \right\} \right] dm.$$

La condition pour que l'étoile soit stable vis à vis de l'oscillation fondamentale est donc que $A < 0$. Si on compare (10) avec la valeur de A trouvée par Cowling, on voit que la différence consiste en ce que le facteur $\frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta}$ a remplacé le facteur $\gamma - 1$ de Cowling. Les

¹ Voir réf. no. 2 page 193 Publ. no. 1, page 23 etc.

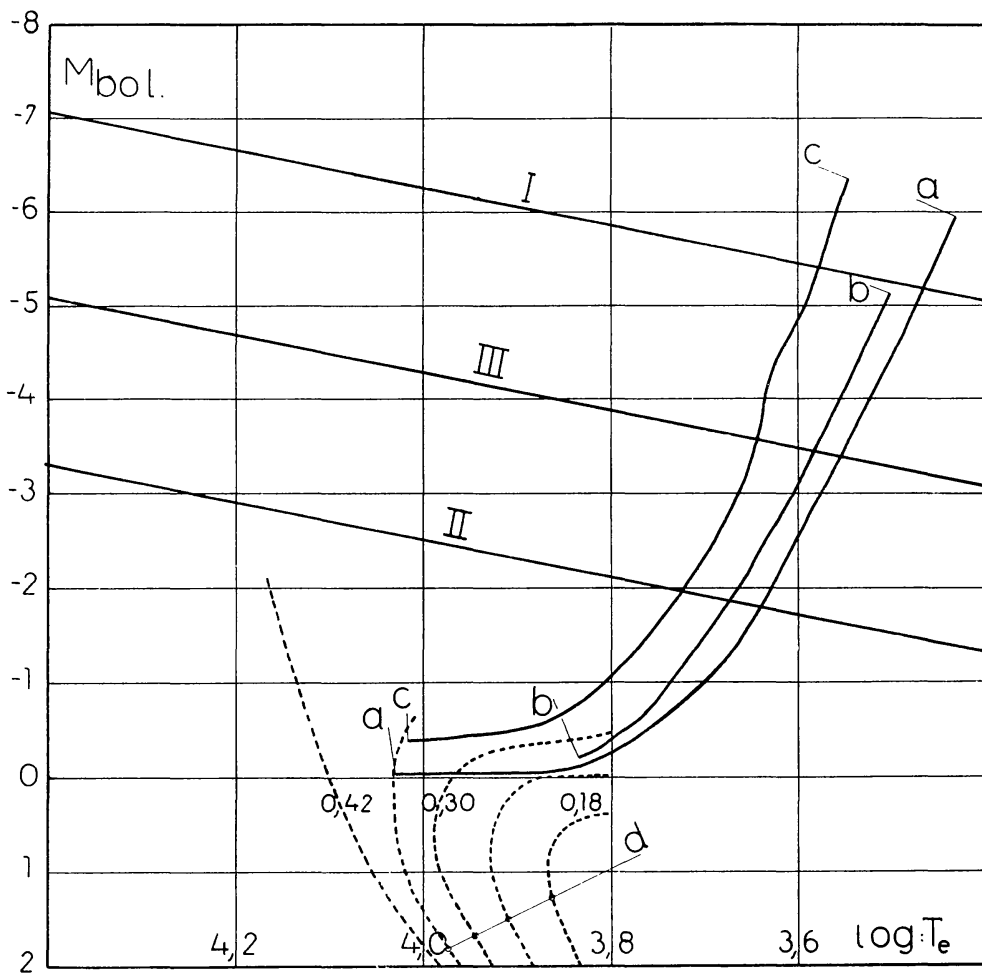


Fig. 1. *c*: céphéides, *a*: M_{22} , *b*: M_{68} . Le long des courbes *d*, l'abondance en *H* est constante et égale au nombre indiqué.

différences précises qui en résultent pour la stabilité des étoiles ne pourraient s'obtenir que par le calcul numérique de cette condition dans différents cas.

Cependant, Cowling a trouvé que lorsque le facteur $(\gamma-1)$ diminue, la stabilité de l'étoile est de plus en plus difficile à assurer. Or le facteur $\frac{\Gamma_1-\beta}{4-3\beta}$, qui remplace ici $(\gamma-1)$, diminue avec β . Par conséquent, on peut conclure que l'instabilité croît avec la masse de l'étoile.

6. Périodes des oscillations fondamentales et interprétation des céphéïdes.

G. P. Kuiper¹ a fait remarquer que les céphéïdes peuvent vraisemblablement être considérées comme étant de composition chimique identique et que leur poids moléculaire moyen $\bar{\mu}$ doit être voisin de l'unité. En effet, dans un diagramme $M_{\text{bol}} \log T_e$ (fig. 1), les céphéïdes se laissent ranger à peu près suivant une courbe parallèle aux lieux des étoiles des amas globulaires M_{22} et M_{68} et très voisine de la courbe $\bar{\mu}=1$ de B. Strömngren.² Naturellement les céphéïdes présentent autour de cette courbe une certaine dispersion mais nous la négligerons. Dès lors, la céphéïde à laquelle s'applique le mieux, un modèle d'étoile fixé pour une masse donnée sera déterminée par l'intersection du lieu des céphéïdes avec la droite qui dans le plan $M_{\text{bol}} - \log T_e$ correspond à la relation $M-L-R$ pour ce modèle et cette masse.

Le seul élément fourni par une théorie basée sur l'équation (6) et par conséquent limitée à l'intérieur de l'étoile (car l'approximation adiabatique cesse d'être valable aux environs de la surface) et susceptible d'être l'objet d'une comparaison avec les résultats de l'observation est la période Π de l'oscillation. Nous nous proposons donc de rechercher la période de l'oscillation fondamentale d'étoiles construites suivant différents modèles non étudiés jusqu'ici, à ce point de vue. Dans l'équation (6) figure le paramètre σ qui est réuni à la période par $\Pi = \frac{2\pi}{\sigma}$. Les solutions de (6) doivent satisfaire à 2 conditions aux limites qui sont: 1) en $r=0$, $\delta r=0$ ou $\xi \cdot r=0$.

2) en $r=R$, $\delta P=0$ qui interprétée en termes de ξ revient à dire que ξ doit rester fini à la surface. En général, les solutions de (6) doivent se calculer numériquement. C'est la condition 2) qui sert à déterminer la valeur de σ correspondant à l'oscillation fondamentale. En réalité, d'après ce que nous avons dit plus haut de la validité de l'hypothèse adiabatique, cette condition no 2 ne peut être appliquée rigoureusement, mais on verra que les valeurs de σ sont

¹ B. H. C. observatory No. 903 page 1.

² Zs. f. Astr. 7, page 222.

facilement divisées (même assez loin de la surface), en 2 groupes pour lesquels les solutions correspondantes tendent respectivement vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, ce qui permet de déterminer σ avec une précision suffisante. Naturellement, choisir une valeur de σ , calculer numériquement la solution de (6) correspondante, voir si la valeur de σ est trop grande ou trop petite et recommencer jusqu'à ce que la vraie valeur de σ soit encadrée avec assez de précision, constitue un procédé très long et pénible. Grâce à la machine à intégrer de l'institut d'Astrophysique d'Oslo, ce travail a été beaucoup raccourci et simplifié. Cependant, comme certains termes dans les coefficients de (6) tendent vers l'infini au centre de l'étoile, on ne peut y commencer l'intégration à la machine et il faut dans chaque cas chercher une solution analytique aux environs du centre.

**A) Modèle à source ponctuelle d'énergie calculé
par Eddington¹ ($\varrho_c = 0$).**

$\bar{\mu} = 2,2$, $M = 5,02 M_{\odot}$, $R = 16,382 R_{\odot}$, $L = 3479,8 L_{\odot}$ si on prend $\kappa_0 = 3,467 \cdot 10^{25}$. Les résultats numériques obtenus par Eddington dans ce cas peuvent être étendus à toute une classe d'étoiles par les transformations homologues :

$$\left. \begin{array}{l} r' = t_R \cdot r \\ P' = t_R^{-4} \cdot P \\ M'(r) = M(r) \\ \varrho' = t_R^{-3} \cdot \varrho \\ \bar{\mu}' = \bar{\mu} \\ T' = t_R^{-1} \cdot T \\ (\kappa_0 L)' = t_R^{-0,5} (\kappa_0 L) \end{array} \right\} \text{(I1)} \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} r' = r \\ P' = t_{\mu}^{-4} P \\ M'(r) = M(r) \cdot t_{\mu}^{-2} \\ \varrho' = t_{\mu}^{-3} \cdot \varrho \\ \bar{\mu}' = t_{\mu} \cdot \bar{\mu} \\ T' = t_{\mu}^{-1} \cdot T \\ (\kappa_0 L)' = t_{\mu}^{-3,5} (\kappa_0 L) \end{array} \right\} \text{(I2)}$$

La transformation (I2) nous servira à ramener $\bar{\mu}$ à la valeur 1,1. D'après (I1) et les valeurs numériques trouvées par Eddington, la relation $M-L-R$ pour ces étoiles peut s'écrire en termes des M_{bol} et $\log T_e$:

$$\text{(I3)} \quad M_{\text{bol}} + 2 \log T_e = 1,7405 \text{ (fig. 1, courbe I).}$$

¹ I. C. S. page 126.

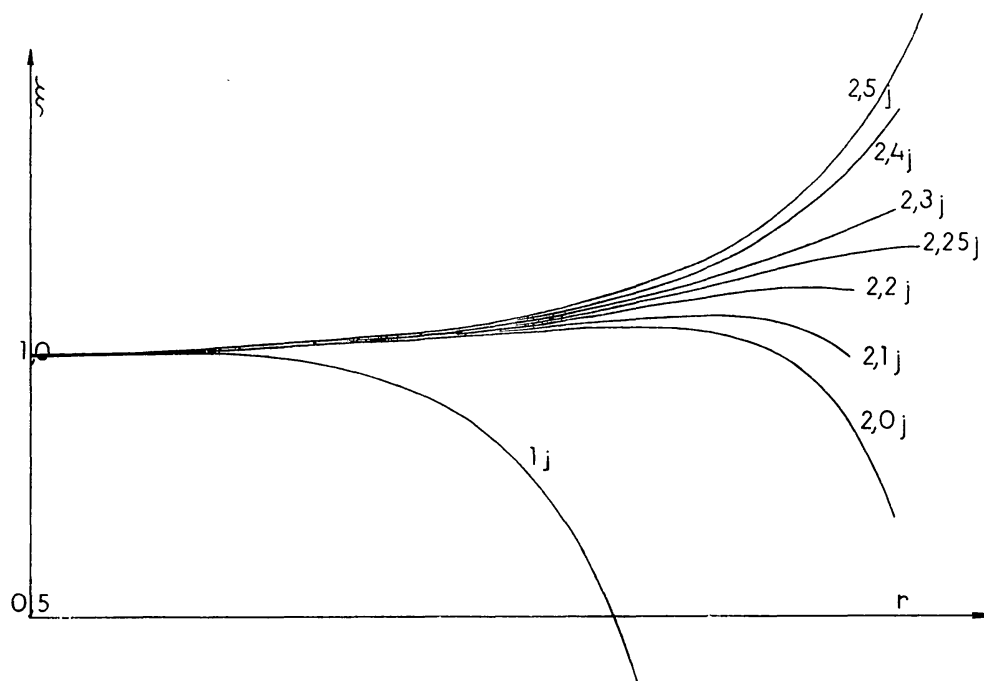


Fig. 2.

D'autre part, ces transformations homologues laissent tous les termes de l'équation (6) invariants, sauf le terme en σ qui est multiplié par $t_\mu^2 \cdot t_R^3$. Par conséquent, la période Π est multipliée par $t_\mu t_R^{3/2}$ quand on passe d'une étoile à sa transformée par (11) et (12). Autrement dit, pour les étoiles homologues de la classe considérée on a $\Pi \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ (14). Nous pouvons déterminer directement la période de l'étoile telle que calculée par Eddington. Si on repasse à la variable $\eta = \delta r = \xi r$, l'équation (6) devient:

$$(15) \quad \frac{d^2 \eta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\eta}{dr} \cdot \left\{ 2 + \mu + \frac{r}{\Gamma_1} \cdot \frac{d\Gamma_1}{dr} \right\} \\ + \frac{\eta}{r^2} \left\{ -2 + \frac{\sigma^2 \rho}{\Gamma_1 P} \cdot r^2 - \mu \left[2 - \frac{4}{\Gamma_1} \right] + \frac{2}{\Gamma_1} \cdot r \cdot \frac{d\Gamma_1}{dr} \right\} = 0.$$

Quand on se rapproche du centre ρ tend vers zéro,

$$\mu = \frac{4\pi G \rho \cdot r \cdot \int_0^r \rho r^2 dr}{P}$$

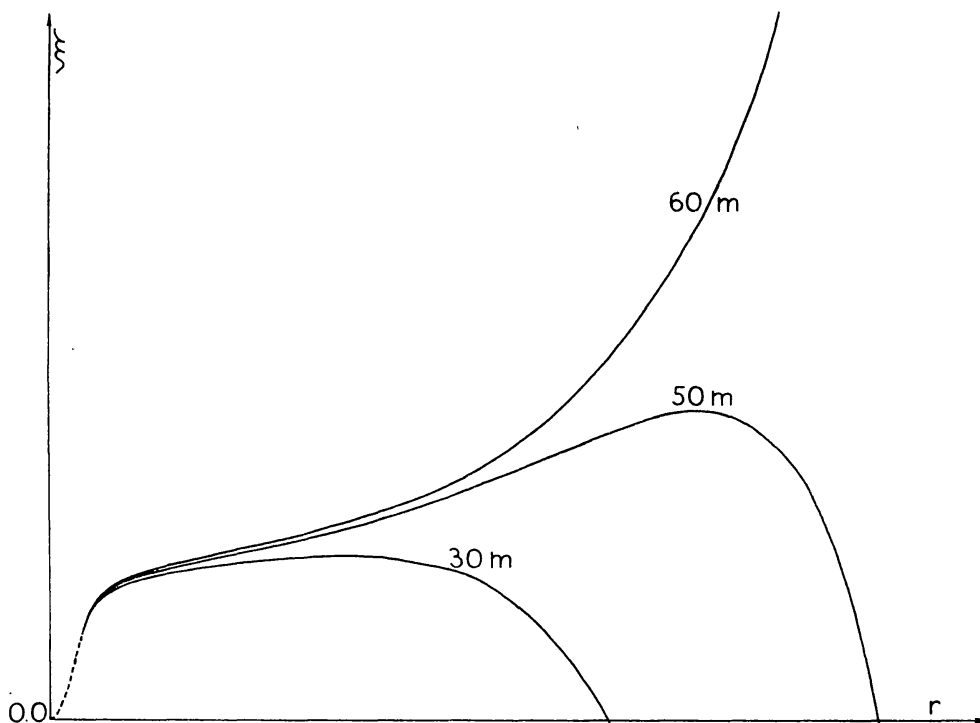


Fig. 3.

aussi et $\frac{1}{\Gamma_1} \cdot \frac{d\Gamma_1}{dr}$ tend vers une valeur finie: par conséquent dans les coefficients de η et $\frac{d\eta}{dr}$ on pourra, en première approximation, négliger les quantités variables devant les constantes et l'équation se réduira à:

$$(16) \quad \frac{d^2\eta}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\eta}{dr} - \frac{2\eta}{r^2} = 0.$$

Comme cette équation ne dépend plus de σ^2 , on pourra donc prendre les mêmes valeurs initiales de η et $\frac{d\eta}{dr}$ pour toutes les valeurs de σ que l'on devra employer. Les racines de l'équation déterminante $\theta(\theta-1) + 2\theta - 2 = 0$ sont $\theta = 1$ et $\theta = -2$. Par conséquent, en tenant compte de la condition au centre ($\delta r = 0$, la solution s'écrira: $\eta = Cr$. Ainsi au point $r = 0,9 \cdot 10^{11}$ cms où nous avons commencé l'intégration à la machine nous avons pris: $\xi = C^{\text{te}}$ (quelconque) et $\frac{d\xi}{dr} = 0$.

Nous avons obtenu ainsi les courbes de la figure 2 qui montrent que la période pour laquelle la condition à la surface est remplie est voisine de 2,3 jours. Au moyen de (14), on en déduit que la période théorique correspondant à l'intersection de (13) avec le lieu des céphéïdes est $\Pi_{\text{th}} = 63$ jours. La période observée correspondante fournie par la relation Période-Luminosité de Shapley¹ est $\Pi_{\text{obs.}} = 41$ jours.

B. Modèle à source ponctuelle d'énergie, calculé par B. Strömgen.²

($\varrho \rightarrow$ vers ∞ pour $r \rightarrow 0$). Les caractéristiques de cette étoile étaient $M = M_{\odot}$, $R = R_{\odot}$, $L = L_{\odot}$, $\kappa_0 = 10^{27,4}$, $\bar{\mu} = 2,2$.

Dans son article B. Strömgen donne aussi la forme asymptotique au centre, de la solution des équations différentielles régissant ce modèle :

$$T \propto \left(\frac{1}{r}\right)^{1-\frac{1}{11}}$$

$$\varrho \propto \left(\frac{1}{r}\right)^{8-\frac{1}{11}}$$

$$M(r) \propto \left(\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{11}}$$

Grâce à cette solution, on peut étudier l'équation (6) aux environs immédiats du centre. Si on fait la transformation de variable indépendante $x = r^{\frac{2}{11}}$ on trouve finalement que (6) peut s'écrire :

$$(17) \quad \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{1}{x} \left\{ -\frac{7}{2} - 21 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{K_2}{K_1} x \right)^n \right\}$$

$$- \frac{\xi}{x^2} \left\{ \frac{231}{4} + 202,125 K K_1^{-1} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} (-Kx)^n = 0$$

¹ Shapley: « Stars Clusters » 1930.

² Zs. f. Astr. 2, page 345.

où $K = 0,2395$, $K_1 = \frac{11}{42}$, $K_2 = 0,0627$ si on prend pour unité de longueur $= \frac{R_\odot}{411}$. Remarquons que cette équation ne dépend plus de σ^2 .

Les racines de l'équation déterminante correspondante sont: 10,175 et $-5,675$.

Par conséquent, en tenant compte de la condition au centre ($\delta r = 0$), la solution s'écrira: $\xi = C x^{10,175} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$.

Ainsi, dans ce cas ξ s'annule au centre. On peut obtenir une formule de récurrence pour les α_n . La série est alternée et converge dans le domaine $0 \leq x < 0,469$ ou $0 \leq r < 0,01554$. Mais nous ne pouvons commencer l'intégration à la machine qu'en $r = 9,8$. Nous avons cherché les valeurs de ξ en plusieurs points du domaine $0 \leq x < 0,469$ et nous avons extrapolé sa valeur en $x = 1$ ($r = 1$). A partir de ce point, jusqu'en $r = 9,8$, nous avons continué l'intégration en représentant les coefficients de (6) par des fonctions fort simples déduites des valeurs numériques de ces coefficients. Nous avons ainsi trouvé que en $r = 9,8$ si nous prenons $\xi = C$, nous devons prendre $\frac{d\xi}{dr} \simeq \frac{1}{10} C$.

Les courbes (fig. 3) obtenues à l'aide de la machine à intégrer montrent que la période est voisine de 55 minutes. Les transformations (11) et (12) sont encore applicables à ce modèle. Quand $\bar{\mu}$ est ramené à 1,1 et κ_0 à $3,467 \cdot 10^{25}$, on obtient la relation suivante entre M_{bol} et $\log T_e$:

$$(18) \quad M_{\text{bol}} + 2 \log T_e = 5,473 \quad (\text{droite II fig. 1})$$

La période observée de la « céphéïde » située à l'intersection de cette droite avec le lieu des céphéïdes est: $\Pi_{\text{obs}} = 3,5 j$.

La période théorique correspondante déduite de celle trouvée plus haut, par (14) est $\Pi_{\text{th}} = 2,3 j$.

C. Modèle de J. Wasiutynski (voir réf. no. 2, page 199).

J. Wasiutynski a employé dans son travail les variables générales σ , τ , χ , ω , δ définies par $\sigma = \frac{\rho}{\rho_c}$, $\tau = \frac{T}{T_c}$, $\omega = \frac{M(r)}{M_0}$, $r = r_0 \chi$, $\delta = \frac{1-\beta}{\beta}$, $r_0^2 = \frac{5 \mathfrak{K} \cdot T_c}{8 \pi G \bar{\mu} \rho_c}$, $M_0 = \frac{5}{8} \cdot \pi \cdot \rho_c \cdot r_0^3$ où \mathfrak{K} est la constante de

la loi des gaz parfaits. Pour toutes les étoiles possédant le même δ au centre, δ_c , les valeurs de τ , σ , ω , δ correspondant à une même valeur de χ , sont les mêmes. Au moyen de ces variables l'équation (6) s'écrit:

$$(19) \quad \frac{d^2 \xi}{d\chi^2} + \frac{d\xi}{d\chi} \left\{ \frac{4-\mu}{\chi} + \frac{1}{\Gamma_1} \cdot \frac{d\Gamma_1}{d\chi} \right\} \\ + \xi \left\{ \frac{\sigma^2}{\Gamma_1} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\pi G \tau (1+\delta)} \cdot \frac{1}{\rho_c} - \left(3 - \frac{4}{\Gamma_1} \right) \frac{\mu}{\chi^2} + \frac{3}{\Gamma_1} \cdot \frac{1}{\chi} \cdot \frac{d\Gamma_1}{d\chi} \right\} = 0$$

On voit facilement d'après cette équation, que l'équation (14) est encore valable pour toutes les étoiles de même δ_c .

Aux environs du centre, l'équation (19) ne se simplifie plus comme précédemment et elle continue à dépendre de σ^2 . Pourtant grâce aux développements en série donnés par J. Wasiutynski pour τ , σ etc., aux environs du centre, on peut obtenir la solution générale de (19) près du centre, sous forme d'une série qui converge rapidement jusqu'au delà de $\chi = 0.8$, point où commence l'intégration à la machine. Cette solution est $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \chi^n$ si les α_n ont les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= c^{te} \text{ indéterminée;} \\ \alpha_1 &= 0; \\ \alpha_2 &= -\alpha_0 (0,012.936.5 \sigma^2 - 0,021.626.2); \\ \alpha_3 &= 0; \\ \alpha_4 &= \alpha_0 (0,000.059.8 \sigma^4 - 0,001.322.1 \sigma^2 + 0,001.215.8); \\ \alpha_5 &= 0; \\ \alpha_6 &= -\alpha_0 (0,000.000.14 \sigma^6 - 0,000.009.7 \sigma^4 + 0,000.097.8 \sigma^2 \\ &\quad - 0,000.083.3); \\ \alpha_7 &= 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

On peut se contenter de ces termes, le reste de la série en $\chi = 0.8$ étant déjà tout à fait négligeable.

Avec les valeurs initiales déduites de cette formule, nous avons obtenu grâce à la machine à intégrer, les courbes de la fig. 4, pour une étoile construite suivant ce modèle et pour laquelle $\bar{\mu} = 1$, $\kappa_0 = 3,467.10^{25}$ $\delta_c = \frac{1}{4}$, $T_c = 2,368.10^6$ c. à d. $\frac{M}{M_{\odot}} = 10,263$;

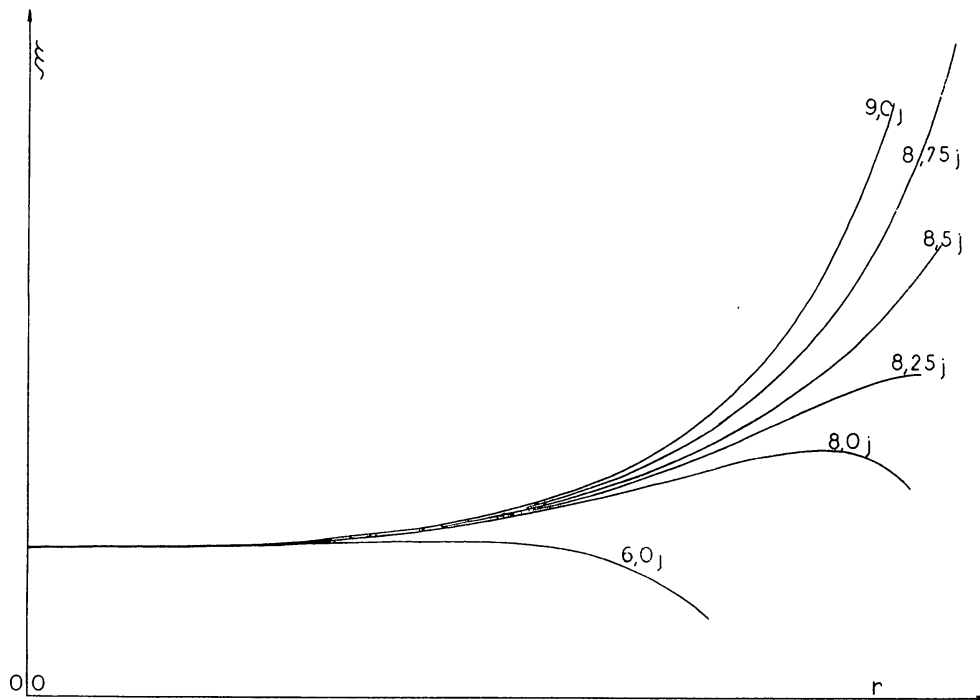


Fig. 4.

$\frac{L}{L_{\odot}} = 1970$; $\frac{R}{R_{\odot}} = 71$. On voit d'après ces courbes que la période est très voisine de 8,5 jours.

La relation entre M_{bol} et $\log T_e$ pour ces étoiles ($\delta_c = \frac{1}{4}$, $\bar{\mu} = 1$, $\kappa_0 = 3,467 \cdot 10^{25}$) est:

$$(20) \quad M_{\text{bol}} + 2 \log T_e = 3,7031 \quad \text{courbe (III)}$$

La période théorique correspondant à l'intersection de (20) avec le lieu des céphéïdes est d'après le résultat que nous venons d'obtenir et la relation (14) $M_{\text{th}} = 9j$, alors que la période observée est 12,5 jours.

D. T. G. Cowling¹ dans le but d'appliquer la condition de stabilité qu'il avait obtenue, a intégré l'équation (6) pour un modèle composé d'un noyau en équilibre convectif entouré d'une enveloppe en équilibre radiatif et dans lequel la pression de radiation est

¹ Voir réf. 3, page 193. Appendice.

négligeable (masse faible). L'équation de la droite qui correspond à la relation $M - L - R$ est

$$(21) \quad M_{\text{bol}} + 2 \log T_e = 6,8316 \quad \text{si on prend } \bar{\mu} = 1, \quad M = 4 M_{\odot}$$

$$\kappa_0 = \frac{3,467 \cdot 10^{25}}{1,4}$$

(le « guillotine-factor » ne peut plus être pris égal à l'unité).

La période observée qui correspond à l'intersection de (21) avec le lieu des céphéides est $II_{\text{obs.}} = 1,20 j$.

$$\text{D'après Cowling, pour ces étoiles, on a: (22) } II_{\text{th}} = \sqrt{\frac{\pi}{G \cdot \rho_c \cdot 0,0865}}$$

En introduisant dans (22) la densité centrale ρ_c , de l'étoile envisagée on a: $II_{\text{th}} = 0,59 j$.

E. Polytropes.

Si n est l'indice du polytrophe considéré et si η est défini par $\eta = \frac{Lr}{Mr} \cdot \frac{M}{L}$, on a d'une façon générale:

$$(23) \quad \frac{L}{L_{\odot}} = \frac{5,2755 \cdot 10^{80}}{\kappa_0 \eta_c} (\mu \beta_c)^{7,5} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{5,5} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-0,5}$$

$$\left\{ \frac{R'^{0,5}}{(n+1)^{7,5} M'^{4,5}} \right\} \left\{ 1 - (3-n) \frac{1-\beta_c}{5-4\beta_c} \right\}$$

où R' et M' représentent la valeur à la surface, de la variable d' Emden correspondante pour le polytrophe envisagé. η_c est la valeur au centre de η . β_c est défini par l'équation quartique correspondante:

$$1 - \beta_c = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a}{\mathfrak{R}^4} \cdot \frac{G^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{1}{M'^2} \cdot (M \bar{\mu}^2)^2 \beta_c^4$$

On peut supposer que la loi habituelle ((23) où l'on prend $\eta_c = 2,5$ et $n = 3$) est valable pour tous les polytropes. Par conséquent, tous les polytropes de même masse seront représentés par une seule droite dans le plan $(M_{\text{bol}} - \log T_e)$, soit $M_{\text{bol}} + 2 \log T_e = 1,4947$ (24) si nous prenons une masse égale à $20,1 M_{\odot}$, $\bar{\mu} = 1$ et $\kappa_0 = 3,467 \cdot 10^{25}$.

La période observée qui correspond à l'intersection de cette droite avec le lieu des céphéïdes est $\Pi_{\text{obs}} = 48,5 j$.

D'après les résultats de A. Eddington et de T. C. P. Miller,¹ les périodes théoriques qui y correspondent sont pour $n = 0$, $\Pi_{\text{th}} = 197,2 j$; $n = 2$, $\Pi_{\text{th}} = 94,62 j$; $n = 3$, $\Pi_{\text{th}} = 55,27 j$; $n = 4$, $\Pi_{\text{th}} = 31,5 j$.

F. Modèles étudiés par T. E. Sterne.

T. E. Sterne² a étudié trois cas où on peut trouver des solutions analytiques surtout afin d'obtenir les périodes des « modes » successifs d'oscillation d'une même étoile. Le premier modèle qu'il considère est le polytrophe $n = 0$ ($\rho = c^{\text{te}}$) et les résultats qu'il obtient, concordent avec ceux de Miller.

Le deuxième modèle est défini par une densité ρ , au point situé à la distance r du centre, égale à: $\frac{R^8 \bar{\rho}}{3 r^2}$. Si la pression de radiation est négligeable (masse petite) on obtient facilement, pour un tel modèle, une relation masse-luminosité-rayon (si on considère, comme énergie émise par une telle étoile, celle qui est produite dans la région de l'étoile où ε , taux de génération est positif).

$$\text{On a } \frac{L}{L_{\odot}} = \frac{1,793 \cdot 10^{25}}{\kappa_0} \cdot \frac{11,7}{2,5} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{5,5} \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{-0,5} (\bar{\mu} \beta)^{7,5}$$

Pour les étoiles de masse égale à $3 M_{\odot}$, cette relation se traduit en M_{bol} et $\log T_e$ par:

$$(25) \quad M_{\text{bol}} + 2 \log T_e = 6,1278$$

A l'intersection de cette droite avec le lieu des céphéïdes correspond une période observée $\Pi_{\text{obs}} = 1,78$ jours.

La période théorique correspondante déduite des résultats de Sterne est 2,83 jours.

Enfin, il a aussi étudié le cas d'un modèle qui correspond à la limite pour α tendant vers zéro, d'un modèle possédant en son centre

¹ Voir réf. no. 1 page 193 pour le polytrophe $n = 3$. Pour $n = 0, 2, 4$ voir J. C. P. Miller: M. N. 90 page 59.

² M. N. 97 page 582.

une particule de masse $\frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \bar{\rho} \cdot \left(1 - \frac{3a}{R^2 \bar{\rho}}\right)$ et en un point distant de r du centre, une densité $\rho = \frac{a}{r^2}$. On ne peut guère comparer, même grossièrement, ce modèle à une étoile réelle, aussi, nous nous sommes contentés pour ce modèle, d'indiquer dans le tableau (I) qui résume tous les résultats, la valeur de $\Pi_{\text{th}} \sqrt{\frac{G \bar{\rho}}{6\pi}}$.

G. Discussion des résultats

Afin de voir l'influence de la distribution de la densité sur la période, nous avons calculé pour chaque étoile considérée jusqu'ici, la période d'une étoile de même densité moyenne $\bar{\rho}$, mais construite suivant le modèle standard d'Eddington. Pour ce modèle, la M_{bol} et le $\log T_e$ d'étoiles de densité moyenne $\bar{\rho}$ sont réunis par la relation suivante (si on suppose que $\bar{\mu} = 1$, $\kappa_0 = 3,467 \cdot 10^{25}$).

$$(26) \quad 2,8 M_{\text{bol}} + 32 \log T_e = 132,4993 + 7,5 \log (\beta) + 5,5 \log \left(\frac{\bar{\rho}}{1,4109} \right).$$

L'intersection de cette droite avec le lieu des céphéïdes nous fournit la céphéïde supposée construite suivant le modèle-standard et de même densité moyenne $\bar{\rho}$ qu'une des étoiles considérées précédemment. Grâce aux résultats d'Eddington, on peut déduire la période théorique qui y correspond. Les résultats sont réunis dans le tableau (I). De gauche à droite, les étoiles y sont classées par densités moyennes croissantes, de haut en bas par concentrations massiques, $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$, croissantes.

Dans chaque case se trouve de haut en bas, la période théorique et le rapport $\frac{\Pi_{\text{th}}}{\Pi_{\text{obs}}}$.

Ce tableau nous montre que pour les différents polytropes, les modèles de Cowling, de J. Wasiutynski et le modèle à source ponctuelle d'énergie d'Eddington, la période diminue quand la concentration augmente, mais les modèles de Strömngren et de Sterne qui ont des concentrations massiques plus grandes que le modèle standard, ont aussi des périodes théoriques plus grandes.

Tableau I.

Modèle	$\log \left(\frac{\bar{\rho}}{1,4109} \right)$		7,92386	6,17852	5,40977	4,44368	4,88995	3,70376	$\Pi \sqrt{\frac{G \bar{\rho}}{6 \pi}}$ si $\beta_c = 0,32$
	$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$								
* Point-Source » Ed- dington		très faible (0)		63,59 <i>j</i> 1,597					
$\rho = c^c$ $n = 0$...	1		197,2 <i>j</i> 4,065						
Polytrophe $n = 2$...	11,4		94,62 <i>j</i> 1,951					0,59 <i>j</i> 0,491	
Modèle de Cowling .	37								
Modèle de J. Wasiu- tynski.....	40,3				9 <i>j</i> 0,72				
Modèle St. $n = 3$..	54,4		55,27 <i>j</i> 1,14	41,22 <i>j</i> 1,024	8,72 <i>j</i> 0,7	2 <i>j</i> 0,484	1,29 <i>j</i> 0,464	0,52 <i>j</i> 0,43	0,531
Polytrophe $n = 4$...	623		31,5 <i>j</i> 0,65						
Modèle de Ström- gren	très grande (∞)					2,3 <i>j</i> 0,654			
Modèle de Stern $\rho \sim \frac{1}{r^2}$...	très grande (∞)						2,83 <i>j</i> 1,612		
Modèle de Sterne: particule au centre	très très grande								0,748

Si on considère la ligne du polytrophe $n = 3$, on voit que son accord avec l'observation dépend de la grandeur de la période (ou si on veut de la masse) de la céphéïde. Pour des masses très grandes, on obtient des périodes théoriques trop grandes, pour des masses très petites, des périodes théoriques trop petites. Comme aux environs de la concentration massique de ce modèle, il semble que la période diminue quand la concentration augmente, si nous voulons pouvoir interpréter toutes les céphéïdes par un seul modèle (voisin du modèle-standard), il faut que pour ce modèle, la concentration massique augmente avec la masse (tels sont par ex. les modèles avec zone de convection au centre: comparer modèle de Cowling et modèle de J. Wasiutynski).

Dans le cas particulier du modèle de J. Wasiutynski, nous avons trouvé que l'accord entre Π_{th} et Π_{obs} était indépendant du poids moléculaire moyen choisi. Par contre, en modifiant κ_0 , on peut obtenir un accord, aussi bon que l'on veut. Le tableau (II) montre que pour un κ_0 , 5 fois plus petit que celui que nous avons adopté, l'accord est du même ordre pour tous les μ , compte tenu des variations supplémentaires de κ_0 correspondant à celles de $\bar{\mu}$.

Jusqu'ici, nous avons toujours supposé que γ était une constante pour toute l'étoile et, égale à $5/3$. Mais on peut aussi ramener l'accord entre les Π_{th} et les Π_{obs} en modifiant γ .¹ En particulier, un γ égal

Tableau II. (Modèle de J. W. $\kappa'_0 = \frac{\kappa_0}{5}$).

$\bar{\mu}$	Π_{th}	$\Pi_{\text{obs.}}$
0,8	48,12 <i>j</i>	46 <i>j</i>
1	31,21 <i>j</i>	31,63 <i>j</i>
1,2	22,23 <i>j</i>	23 <i>j</i>
1,4	14,58 <i>j</i>	17 <i>j</i>
1,6	12,661 <i>j</i>	12 <i>j</i>

¹ I. C. S. page 193.

à 1,47 réaliserait cet accord pour le modèle-standard de même \bar{q} que le modèle de J. Wasiutynski et, probablement aussi, pour ce dernier modèle, vu le peu de différence entre les deux, au point de vue des périodes (voir tableau I).

Dans ce qui précède, nous avons traité κ_0 et γ comme des paramètres indépendants, mais physiquement, ils sont reliés l'un à l'autre. Cependant, comme la valeur de κ_0 est plus sûre que celle de γ le second procédé peut se justifier.

Pour le modèle de J. Wasiutynski (avec $\gamma = \frac{5}{3}$, $\varepsilon_1 \propto \varrho T^\nu$) un calcul numérique de A (formule 10) effectué depuis la rédaction de cet article a montré que ce modèle est stable ($A < 0$) si $\nu < 180$. Pour des modèles où $\beta \simeq 1$ et de γ respectif $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{40}{29}$, Cowling a obtenu les ν critiques suivants: 448, 18,1 et 4,98. Sur un diagramme $\nu_c = f(\Gamma_1)$, on peut voir que notre point ($\nu_c = 180$, $\bar{\Gamma}_1 = 1,53$) tombe à très peu près sur la courbe passant par ceux de Cowling. Il semble donc que si Γ_1 diminue, la stabilité diminue et cela à peu près de la même façon que la diminution de Γ_1 soit due à γ où à β (masse). Dès lors, on peut voir que, pour $\nu = 18$ (valeur vraisemblable d'après les résultats de Bethe), on peut annuler A pour le modèle de J. Wasiutynski en prenant $\gamma = 1,471$. C'est précisément comme nous l'avons vu plus haut l'ordre de grandeur du γ qui rétablit l'accord entre la II_{th} et la II_{obs} d'une « céphéïde » construite suivant ce modèle.

Je suis heureux de trouver ici, l'occasion d'exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur le Professeur S. Rosseland qui m'a suggéré ce travail et qui a mis à ma disposition pour son exécution, non seulement toutes les facilités de l'Institut d'Astrophysique, mais aussi ses conseils.

