TRAVAIL DE MATURITE.

Année Scolaire 1970 - 1971.

LOGIQUE

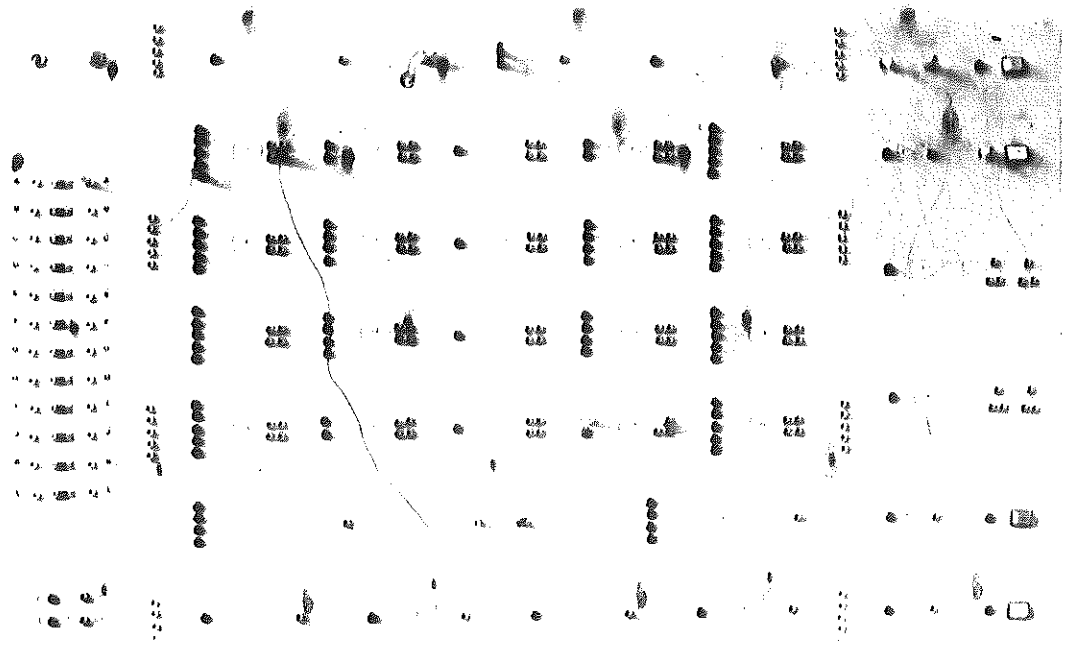
ET

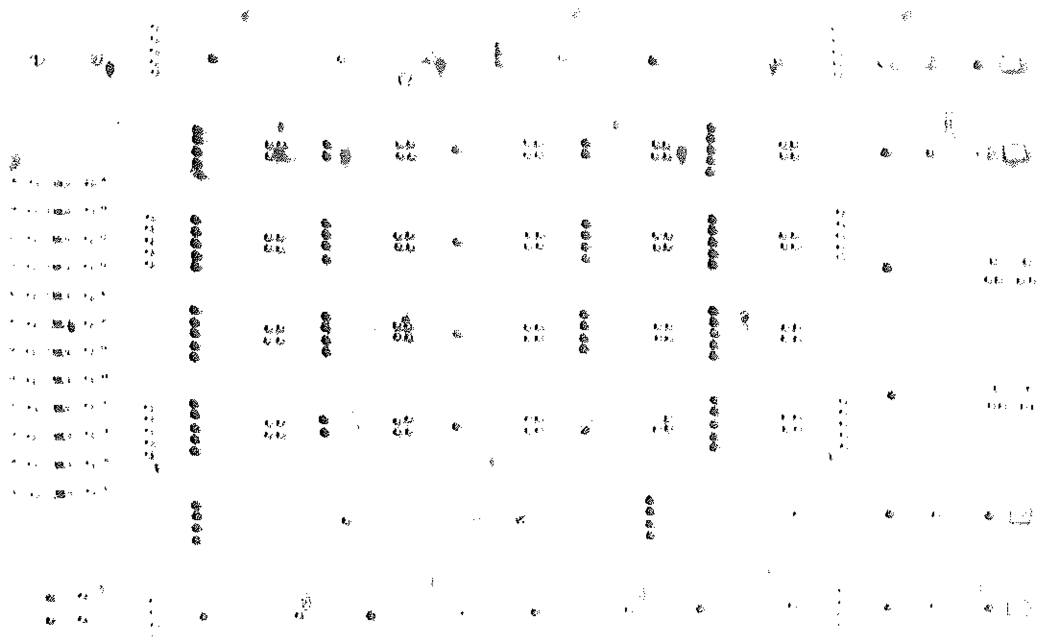
CIRCUITS.

SURDEJ JEAN

1e Latin - Sciences.

APR 71





LOGIQUE

1 QU'EST-CE QUE LA LOGIQUE ?

Bien que les domaines d'application de la logique soient très nombreux et, par conséquent, fort variés(Logique d'Aristote, d'Hegel, logistique,...), tous présentent un point commun : l'idée de preuve. Nous pouvons donc affirmer que la logique est l'étude des moyens de faire la preuve d'une assertion. Quelle que soit l'idée que l'on se fasse de la preuve, celle-ci concerne toujours une thèse formulée, exprimée dans un certain langage. La preuve pour un juge ne représente pas la même chose que la preuve pour un mathématicien, mais leurs thèses sont nécessairement exprimées toutes deux dans des langages différents (langage juridique, algébrique, géométrique,...).

Dans le cas de la logique, il fallait éliminer toute ambiguïté d'expression, de compréhension et c'est la raison pour laquelle les logiciens ont cherché à construire un langage artificiel satisfaisant à ces conditions. Il n'est pas étonnant de remarquer que maints philosophes (Aristote, Russel,...)se soient préoccupés de mener en parallèle la théorie de la connaissance, qui traite du rapport entre ce que nous pouvons ressentir, percevoir et ce que nous devons exprimer, avec la théorie de la preuve.

Il s'agit maintenant de savoir ce que nous entendons par preuve. Pour M. Lalande (vocabulaire de la philosophie),"La preuve est une opération amenant l'intelligence d'une manière indubitable et universellement convaincante(du moins en droit) à reconnaître la vérité d'une proposition considérée d'abord comme douteuse." Nous pourrions plus facilement exprimer cette définition qui s'adresse à la fois à la logique et à la philosophie en disant: La preuve permet d'établir une conviction là où il y avait doute.
Pour J-Stuart Mill: " La preuve n'est pas ce qui détermine la croyance mais ce qui devrait la déterminer en la rendant conforme aux faits."
Ces deux définitions ne manquent pas de présenter certaines analogies. Elles insistent toutes deux sur la manière, non pas dont nous raisonnons, mais dont nous devrions raisonner pour bien conduire nos pensées, pour les rendre conformes à un aspect objectif de la réalité(cf le principe d'accomodation défendu par M.Piaget), c'est-à-dire conformes aux règles de la logique.

Pour définir avec plus de précision le terme " Logique" , reportons-nous aux belles définitions telles que celles de la logique de Port-Royal : " La logique s'applique à découvrir et à formuler les lois de la pensée claire; la logique est l'art de bien conduire sa raison, de penser, de reconnaître, de rechercher les opérations valides qui consistent à distinguer le vrai du faux, ..."
Tout comme en morale, l'homme essaie de distinguer le bien du mal, en logique, il apprend à distinguer le vrai du faux, le vrai et le faux étant les normes indispensables pour la validité de nos jugements et de nos pensées. C'est pourquoi on considère souvent la logique comme une science normative.

Il est tout à fait compréhensible que l'homme considère et interprète la logique en fonction de certains facteurs. Par exemple, les psychologues envisagent les lois logiques comme étant " les lois naturelles d'une intelligence pure". Mais bien que cette définition paraisse objective, notons que la psychologie diffère de la logique en ce sens que la première s'occupe des causes extérieures(éducation, sexe, âge, ...)expliquant telle ou telle valeur d'un jugement alors que le logicien n'est intéressé que par les raisons de tel ou tel jugement
Remarquons qu'il existe une parfaite concordance entre les lois de la raison(faculté commune à tous les hommes) et les principes de la logique puisque si le premier est le moule de la pensée, le second en est l'oeuvre.
Toutefois, il fallait pouvoir étudier les rapports qui existent entre les lois logiques, indépendamment de l'opinion que les hommes peuvent éprouver à leur sujet, et édifier la théorie de la raison avec une cohésion parfaite.
Au XIX[e] siècle, la géométrie paraissait fournir un ensemble de raisonnements rigoureux et, grâce aux progrès accomplis en mathématique, beaucoup ont vu dans les démonstrations géométriques la meilleure réalisation de l'idéal de rigueur logique. Vers 1847, la logique moderne devait triompher de la logique aristotélicienne. Boole, De Morgan,etc., ont consacré leurs études au raisonnement déductif et, spécialement, à celui qui est utilisé dans la mathématique. D'autres encore, très nombreux, contribuèrent à ce développement de la logique(Price, Schröder, Frege, Lukasiewicz,...)

Remarque.
Les moyens de preuve utilisés en sciences humaines, en droit, philosophie, ..., sont de nature différente. Ils relèvent de la théorie de l'argumentation (cf M. Perelman)

2. QUELQUES DOMAINES DE LA LOGIQUE.

a) Logique formelle.

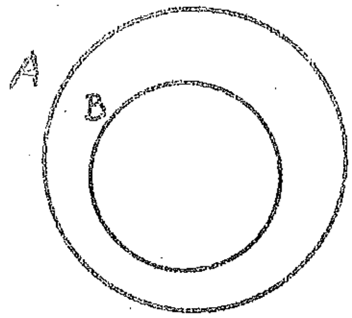
Historiquement, le premier homme que l'on connaisse, à s'être soucié de déterminer les opérations intellectuelles valides tendant à la connaissance du vrai et du faux est Aristote. Il peut, à juste titre être appelé le précurseur de la logique formelle.
Si la logique générale tient compte à la fois de la structure formelle des jugements, des raisonnements, et du contenu des propositions, c'est-à-dire des renseignements, la logique formelle se désintéresse du contenu de ces propositions et n'étudie que leur structure formelle.
Par exemple si, à la variable A on substitue "Socrate" et à B "mortel", l'expression"A est B" représente la structure formelle du jugement prédicatif "Socrate est mortel".
Remarquons que la logique formelle se divise en plusieurs sous-groupes: logique formelle aristotélicienne, pré-classique, classique, symbolique,etc.

La logique formelle d'Aristote prétend règler, à priori, la forme du raisonnement, quelle que soit la matière à laquelle le raisonnement puisse être appliqué. Aussi, elle débouche sur une ontologie, sur une science du concept et de la classification.

Remarques.

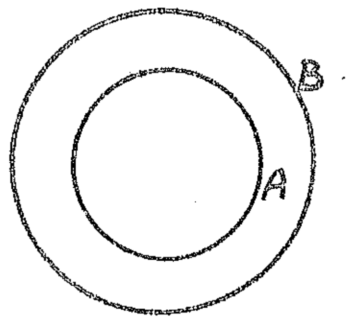
1°) Nous appelons " concepts ": le sujet, la copule, le prédicat qui se caractérise par leur compréhension et leur extension.
2°) La logique aristotélicienne ne repose que sur les relations d'inclusion et d'appartenance (ex: classification biologique), alors que la logistique porte sur toutes les relations possibles. (ex: des relations telles que ... est la capitale de ... , ... est symétrique à ..., etc.).

Sur la classification des concepts se fonde une machine démonstrative très célèbre: le syllogisme.
Le syllogisme repose sur des emboîtements de classes que le mathématicien Euler a imaginé au XVIII^{e} siècle de représenter par des cercles(et Venn, plus tard, par des contours fermés quelconques.)
Exemple.
Soient les expressions: Tous les hommes sont mortels (dite mineure)
Or tu es un homme moyenne
Donc tu es mortel conclusion
Dans ce type de raisonnement, on est à même d'affirmer un jugement à partir d'autres sans jamais se contredire. La conclusion est dite logique.
Si A est la classe des mortels, B la classe des hommes et c un homme, on a, pour ce syllogisme, la représentation suivante.



ce qui est en accord avec la conclusion.

De même pour le raisonnement:
Tous les carnivores (A) sont des mammifères(B).
Or, les lions (C) sont des carnivores.
Donc les lions sont des mammifères.
on a la représentation ci-contre.



Dès le XVI^{e}siècle, la logique formelle aristotélicienne (syllogistique) devait subir un grave discrédit à cause des courants mathématiques qui se développaient.

b) Logique symbolique.

Baptisée logique symbolique, logique mathématique, ou encore logistique, cette discipline est à l'origine l'oeuvre de mathématiciens (Boole, De Morgan, ..) qui ont , les premiers, introduit un langage sur le terrain logique.

Remarque.

Boole et De Morgan, fondateurs de la logistique, ont créé l'analogie réelle entre l'usage des variables numériques de l'algèbre et celui des variables logiques.

Il est à remarquer que ce symbolisme fut créé non pour des raisons de facilité mais par souci de rigueur.

Exemple.

Nous verrons que le produit logique (noté par " et ") affirme la vérité simultanée de deux propositions p et q. Le résultat de cette opération sur les propositions p,q étant noté " p et q ". Cette opération, du point de vue symbolique, est commutative et on a   p et q   équivaut à   q et p.
Cependant, si on substitue à p la valeur "elle reçoit un coup " et à q la valeur " elle meurt ", on obtient, d'une part:
p et q : elle reçoit un coup et elle meurt , d'autre part
q et p : elle meurt et elle reçoit un coup.
Il est évident que tenant compte cette fois du contenu des propositions, il apparaît dans cette conjonction un rapport de temps exclu du symbolisme logique,qui nous empêche de considérer cette fois la commutativité du "et".

Leibniz, au XVIIe siècle, avait déjà voulu créer un calcul qui soit une sorte d'écriture universelle, compréhensible pour chacun, et qui serait un langage algébrique donnant la possibilité de raisonner en calculant.

c) Logique propositionnelle (ou interpropositionnelle).

Nous considèrerons une proposition quelconque comme un bloc, un tout non analysable, susceptible de prendre deux et deux valeurs seulement: le vrai symbolisé par 1 ou le faux symbolisé par 0. Toute proposition sera désormais représentée par une des lettres minuscules p, q, r, ...,employées symboliquement, et qui seront appelées variables propositionnelles.
La négation d'une proposition p quelconque est notée de diverses façons (non p, $\sim p$, $\bar{p}$, ...). Nous employerons non p pour la désigner dans toute la suite de ce texte.

Remarque.

Il ne faut pas confondre " négation" et "fausseté" car seule la négation agit sur la valeur de la proposition. C'est la raison pour laquelle la négation est considérée comme un opérateur logique (foncteur de vérité).

Les variables propositionnelles rentreront dans des calculs permettant de connaître les valeurs de vérité de propositions construites à partir de propositions données aux valeurs de vérité connues

A juste titre cette partie de la logique est désignée logique interpropositionnelle.

Remarque.

En mathématique, une constante désigne toujours le même objet lorsque on l'utilise dans un même texte. (règle d'emploi des constantes.) De même au cours d'un calcul logique, une même variable propositionnelle désignera toujours la même proposition et conservera partout une valeur unique: 1 ou 0 . (principe d'identité).

3. LOGIQUE PROPOSITIONNELLE.

a) Les fonctions logiques.

1°) Exemple et définition.

Une fonction logique f est une opération ayant comme données une ou des variables propositionnelles (opérandes) d'entrée et comme résultat de sortie une variable propositionnelle s .
Comme en mathématique, on note

$$s = f(a,b,\dots,l)$$

la fonction qui aux propositions a,b,....,l fait correspondre s.
Nous savons que les variables logiques sont susceptibles de prendre les seules valeurs 1 ou 0. Il en est naturellement de même du résultat s d'une fonction logique f quelconque. On dit que la fonction logique f est une opération logique et que la proposition s obtenue est le résultat de l'opération mise en oeuvre par f.

Remarque.

Comme nous le verrons lors de l'étude des circuits logiques, les valeurs des variables logiques seront déterminées par la présence ou non d'un potentiel, d'un courant,...., aux bornes d'entrée et de sortie du circuit réalisé. Les fonctions logiques, dans ce cas, sont déterminées par les diverses combinaisons possibles des interrupteurs, diodes ou transistors mis en circuits.(ces éléments étant équivalents aux propositions de la logique formelle.)

2°) Représentation des fonctions logiques. Schèmes.

Soit une fonction logique quelconque f portant sur deux variables propositionnelles p, q. Examinons les résultats possibles de l'opération logique mise en oeuvre par f.
f étant une fonction de deux variables ne pouvant prendre que les seules valeurs 1 ou 0, il sufit , pour la déterminer de connaître les 4 valeurs f(1,1), f(1,0), f(0,1), f(0,0).
Soit s le résultat de l'opération mise en oeuvre par f.

$$f(p,q) = s.$$

Posons f(1,1)=s1 ; f(1,0)=s2 ; f(0,1)=s3 ; f(0,0)=s4 ,
s1, s2, s3, s4 ne pouvant prendre comme valeurs que 1 ou 0.
Il est commode de représenter les diverses combinaisons possibles par un schème utilisé par beaucoup de logicienset appelé table de vérité (et ce que ce soit pour une fonction de 1, 2, 3 ou n

variables).
Dans le cas de 2 variables p, q on a

p	q	s = f(p,q)
1	1	1 ou 0
1	0	1 ou 0
0	1	1 ou 0
0	0	1 ou 0

Dès lors nous pouvons définir une opération logique comme étant une loi de composition de propositions définie par une loi de composition de leurs valeurs logiques.

3°) Dénombrement des opérations logiques.

Combien de schèmes différents peut-on former à partir de n propositions.

1°. S'il y a 1 proposition, il y a 2 places possibles dans le schème.

" " 2 " 2.2 "

" " 3 " $2.2.2$ "

" " n " 2^n "

2°. Dans chaque schème, on peut, à chacune des places, mettre les valeurs possibles de sortie 1 ou 0.

S'il y a 1 place on peut construire 2 schèmes différents.

" 2 " 2.2 "

" m " 2^m "

3°. En conclusion, on peut donc former

$$2^{2^n}$$

schèmes différents à partir de n propositions.

En effet,

1 prop. donne 2 places qui elles-mêmes donnent 2^2 schèmes.

2 " " 2^2 " " $2^{(2^2)}$ "

n " " 2^n " " $2^{(2^n)}$ "

Ainsi, par exemple, avec 4 propositions, on peut former

$$2^{(2^4)} = 2^{16} = 65\,536$$

schèmes différents, chacun correspondant à un opérateur logique différent.

Remarque.

Nous appellerons " expression logique " toute expression composée d'une ou plusieurs propositions et d'un ou plusieurs opérateurs logiques.

L'expression logique devient une opération logique dès qu'elle peut être ramenée à une expression ne contenant plus qu'un seul opérateur.
La manière dont on définira les différents opérateurs logiques ne tient compte que de la valeur des expressions et non de leur sens.
Nous appellerons loi logique toute expression logique dont la valeur est indépendante des valeurs des variables qu'elle renferme.
Le nombre n de propositions sur lesquelles porte une opération logique est appelé l'ordre de cette opération.

b) Opérations logiques d'ordre " un ".

Une proposition p peut comme nous l'avons vu donner lieu à 2^2 c'est-à-dire 4 schèmes différents. Ce sont :

schème 1		schème 2		schème 3		schème 4	
p	f(p)	p	f(p)	p	f(p)	p	f(p)
1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0

l'opérateur correspondant au schème 1 est appelé tautologie.
" " " " 2 " " affirmation.
" " " " 3 " " négation.
" " " " 4 " " contradiction.

c) Opérations logiques d'ordre " deux ".

A partir de deux propositions p, q, on peut établir $2^{(2^2)} = 16$ schèmes possibles illustrés par le tableau ci-dessous.

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

1°) opérateurs logiques.

Chacun des chiffres 1 à 16 correspond à un opérateur du type

$$f(p,q) = s$$

l'ensemble des valeurs de s en fonction des valeurs respectives de p, q étant donné par la colonne correspondante.
On pourrait nommer chacun de ces opérateurs. Cependant, nous verrons par la suite qu'il est possible, à partir de 1, 2 ou 3 d'entre eux d'obtenir tous les autres. Aussi nous examinerons par la suite quels sont les moyens permettant d'aboutir à une telle réduction. Nicod, logicien du passé, avait déjà remarqué l'interdépendance de ces opérateurs et montré que tous peuvent s'obtenir à partir de l'incompatibilité(opérateur 9 du tableau ci-dessus noté p | q). Les expressions définies à l'aide de ce seul opérateur étant cependant souvent très longues, on a rapidement abandonné ce système de réduction.
Du point de vue de la stricte technique logique, aucune raison ne peut nous pousser à choisir comme important un opérateur plutôt qu'un autre.

Cependant, les démarches de la raison étant plus ou moins le reflet de certaines opérations logiques définies à la suite de certains opérateurs, il convient de se référer à ceux-ci plutôt qu'à d'autres.
Ainsi, par exemple, les formes suivantes de raisonnement sont fréquentes: toi <u>et</u> moi , grand<u>ou</u> mince, <u>pas</u> cela, si... alors...
Aussi nous définirons d'abord ces opérateurs logiques.

- <u>La négation.</u> (non p)
La négation d'une proposition p quelconque est la proposition, notée non p, qui est vraie lorsque p est fausse et fausse lorsque p est vraie.
Si f(p)= non p, on a
f(p)=1 si p=0
et f(p)=0 si p=1

p	non p
1	0
0	1

- <u>L'équivalence</u> ($p \Longleftrightarrow q$)
L'opération équivalence est celle qui, étant donné deux propositions p, q, donne pour résultat une proposition, notée $p \Longleftrightarrow q$ vraie si et seulement si p et q ont la même valeur.

Si $f(p,q) = p \Longleftrightarrow q$, on a
$f(p,q) = 1$ si $p = q = 1$
et si $p = q = 0$
$f(p,q) = 0$ si $p \neq q$

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- <u>La conjonction ou produit logique</u> (p et q)
L'opération conjonction est celle qui, étant donné deux propositions p, q, donne pour résultat une proposition vraie si et seulement si p et q sont toutes deux vraies.
On note cette conjonction p et q , p.q , pq , ou $p \wedge q$
Nous la noterons p et q (ou pq) dans la suite de ce texte.
Si $f(p,q) = p$ et q , on a
$f(p,q) = 1$ si $p = q = 1$
et $f(p,q) = 0$ dans tous les autres cas.

p	q	p et q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La table des valeurs de "p et q" est la même que celle de la multiplication dans l'ensemble $\{0,1\}$. C'est pourquoi on la note aussi, comme pour le produit algébrique p.q ou pq et on l'appelle produit logique.

- <u>La disjonction ou somme logique</u> (p ou q)
L'opération disjonction est celle qui, étant donné deux propositions p,q, donne pour résultat une proposition fausse si et seulement si ces propositions sont fausses à la fois.
On note cette disjonction p ou q, p + q, ou $p \vee q$.
Nous la noterons p ou q (ou p+q) dans la suite de ce texte.

Si $f(p,q)$ = p ou q, on a
$f(p,q) = 0$ si $p=q=0$
et $f(p,q) = 1$ dans tous les autres cas.

p	q	p ou q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La table de la disjonction " p ou q " est la même que celle de l'addition modulo 2 dans l'ensemble $\{0,1\}$. C'est pourquoi cette disjonction est encore notée $p+q$ et appelée somme logique.

- <u>L'implication</u>. ($p \Rightarrow q$)
L'implication est l'opération qui appliquée aux propositions quelconques p, q donne pour résultat une proposition fausse lorsque p est vrai et que q est faux et une proposition vraie dans tous les autres cas. Elle est notée $p \Rightarrow q$. (p implique q)
p est l'<u>antécédent</u> ou <u>hypothèse</u> ; q est le <u>conséquent</u> ou <u>thèse</u> de l'implication.
Au lieu de $p \Rightarrow q$ on note encore si p alors q.
Si $f(p,q) = p \Rightarrow q$, on a
$f(p,q) = 0$ si $p=1$ et $q=0$
et $f(p,q) = 1$ dans tout autre cas.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

2°) <u>Problème</u>.

Comment déterminer lavaleur d'une expression logique $f(p,q)$ en fonction des propositions qu'elle renferme?
Soit, par exemple à déterminer les valeurs de l'expression

$$f(p,q) = (\text{ p ou q }) \Rightarrow (\text{ p et non q})$$

- En vertu de la définition de l'implication, nous savons que cette expression est fausse si et seulement si on a

$$\text{p ou q} = 1 \quad \text{et} \quad \text{p et non q} = 0$$

c'est-à-dire, en vertu des définitions de la conjonction et de la disjonction si et seulement si on a
$p=1, q=1$ et
$p=0, q=1$.
- Une autre façon consiste à établir le schème de l'expression.
En posant $f1(p,q)$ = p ou q , $f2(p,q)$ = p et non q ,
on a

p	q	f1	f2	$f = f1 \Rightarrow f2$
1	1	1	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

Nous pouvons d'ailleurs aller plus vite en remplissant comme suit la table de vérité (les numéros placés en dessous des colonnes indiquant l'ordre dans lequel elles sont remplies.)

$f(p,q)$ =	(p	ou	q)	$\Longrightarrow$	(p et	non q)
	1	1	1	0	1	0
	1	1	0	1	1	1
	0	1	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	1
	(1)	(3)	(1)	(5)	(1)	(1)

En conclusion, on a donc, pour la fonction proposée

$f(1,1)=0$; $f(1,0)=1$; $f(0,1)=0$ et $f(0,0)=1$

3°) Réduction des opérateurs logiques.

Il s'agit d'exprimer tout schème en une expression logique où ne figurent qu'un minimum d'opérateurs. Si nous examinons le tableau de la page 8, nous constatons que l'opérateur "négation" permet déjà, à lui seul, d'exprimer les huit dernières fonctions comme négation des huit premières.

On a $f_{16}(p,q) = \text{non } f_1(p,q)$

$f_{15}(p,q) = \text{non } f_2(p,q)$ etc.

Utilisant la négation, la conjonction et la disjonction, on peut exprimer chacune des 16 fonctions du tableau.

Par exemple, on a

$f_7(p,q) = f_8(p,q) + \text{non } f_2(p,q)$

$f_4(p,q) = f_8(p,q) + f_8(p,\text{non}q)$ etc.

4. THEORIE ELEMENTAIRE DE LA DEDUCTION LOGIQUE.

a) Introduction.

A la base de la logique formelle classique se trouve une idée fondamentale: l'idée de déduction correcte.

Quelles en sont les conditions?

Il faut qu'à partir de prémisses (propositions de départ) vraies l'on ne puisse jamais aboutir à une conclusion qui ne le soit pas. (Si la conclusion était seulement probable, on aurait à faire à une logique probabiliste.)

L'intérêt de la théorie de la déduction est de pouvoir déterminer, par un calcul ou par l'application de lois logiques établies, la vérité de certaines expressions plus ou moins complexes. Ainsi la théorie élémentaire de la déduction logique ne s'occupe pas uniquement de la détermination de la vérité ou de la fausseté d'énoncés particuliers mais elle s'occupe plutôt d'obtenir les schémas logiques ou les structures purement formelles telles que toute proposition logique construite selon ce schéma ou présentant une structure déterminée puisse être considérée comme vraie ou comme fausse compte tenu uniquement de sa forme. Nous pourrions dire en d'autres termes que nous devons rechercher des formules indépendantes de l'expérience.

Ex: " Il pleut" ou " Il ne pleut pas".

Chacune de ces propositions dépend du temps qu'il fait au moment où on l'affirme.

Mais lorsqu'on dit " Il pleut ou il ne pleut pas " , on obtient une proposition toujours vraie et indépendante du monde extérieur. Les propositions " Je joue ou je ne joue pas ", " Je dors ou je ne dors pas ", ... présentent toutes la même structure logique symbolisée par" p ou non p"

La discussion concernant le sens exact des signes mis à la place de p sort totalement du cadre de la logique formelle.

Dans la partie qui va suivre les parenthèses, crochets,... utilisés ont la même signification qu'en algèbre.

L'idéal de toute science étant de se servir de notions parfaitement claires et d'énoncés entièrement certains, il est nécessaire de définir toute notion que l'on admet. La seule façon qui nous permette de définir une notion est d'avoir recours à d'autres notions claires. Il est donc nécessaire de commencer par des notions admises comme telles (non définies). Ces principes ou axiomes ainsi admis au départ étaient appelés par Aristote les lois de la pensée.

b) Quelques lois logiques.

A titre d'indication, voici quelques principes ou lois logiques et les conséquences importantes que l'on peut en tirer. La démonstration d'une loi logique peut par exemple se faire à l'aide d'une table de vérité (comme nous l'avons fait pour l'une d'entre elles) en vérifiant que la valeur de l'expression correspondant à cette loi est 1 quelles que soient les propositions qu'elle renferme.

1°) Principes à une variable.

p étant une proposition quelconque, on a

- Principe d'identité.

1 $p \Longleftrightarrow p$ — Quelle que soit la valeur de p, elle reste toujours la même au sein d'une expression.

On a aussi

2 $p \Longrightarrow p$ — Toute proposition s'implique elle-même.

- Principe de double négation.

3 $p \Leftrightarrow$ non(non p) En effet toute proposition ne peut prendre que deux valeurs.

- Principe du tiers exclu.

4 p ou (non p) $p + (\text{non } p)$

Toute proposition est soit vraie, soit fausse.

- Principe de non-contradiction.

5 non(p et non p) non(p.non$p$)

En effet p et non$p$ est une contradiction logique. Sa négation est donc une vérité formelle.

-

6 $p \Leftrightarrow p$ et $p \Leftrightarrow p$ ou p $p \Leftrightarrow p.p \Leftrightarrow p+p$

Toute proposition est idempotente pour la conjonction et la disjonction.

2°) Principes à deux variables.

- Principe de permutation (commutativité)

7 (p et q) $\Leftrightarrow$ (q et p) (p ou q) $\Leftrightarrow$ (q ou p)

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

- Relation entre implication et disjonction.

8 ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ (non$p$ ou q) (p ou q) $\Leftrightarrow$ (non$p \Rightarrow q$)

En effet, on a par exemple, la table de vérité

(p	$\Rightarrow$	q)	$\Leftrightarrow$	(non$p$	ou	q)
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0

- Principe de transposition (ou contraposition.)

9 ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ (non $q \Rightarrow$ non p)

En effet, ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ (non p ou q) propriété (8)
Or (non p ou q) $\Leftrightarrow$ (q ou non p) propriété (7)
et (q ou non p) $\Leftrightarrow$ (non $q \Rightarrow$ non p) propriété (8)

- Le produit logique implique chaun de ses termes.

10 (p et q) $\Rightarrow p$ (p et q) $\Rightarrow q$

[illegible]

[illegible]

11 $p \Longrightarrow (p \text{ ou } q)$ $\qquad\qquad$ $q \Longrightarrow (p \text{ ou } q)$

- Le produit de deux propositions implique la disjonction de celles-ci. (La réciproque est fausse)

12 $(p \text{ et } q) \Longrightarrow (p \text{ ou } q)$

- Lois de De Morgan.

13 $(p \text{ ou } q) \Longleftrightarrow \text{non}(\text{non } p \text{ et non } q)$

$(p \text{ et } q) \Longleftrightarrow \text{non}(\text{non } p \text{ ou non } q)$

ou bien,

$\text{non}(p \text{ ou } q) \Longleftrightarrow (\text{non } p \text{ et non } q)$

$\text{non}(p \text{ et } q) \Longleftrightarrow (\text{non } p \text{ ou non } q)$

- Implication et produit logique.

14 $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \text{non}(p \text{ et non } q)$

$(p \text{ et } q) \Longleftrightarrow \text{non}(p \Longrightarrow \text{non } q)$

- Implications réciproques.

15 $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow \left[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (q \Longrightarrow p)\right]$

On en déduit par exemple,

$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow \left[(p \text{ et } q) \text{ ou } (\text{non } p \text{ et non } q)\right]$

$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow \left[(\text{non } p \text{ ou } q) \text{ et } (\text{non } q \text{ ou } p)\right]$ ....

3°) Principes à trois variables.

- Principe d'associativité.

16 $p \text{ et } (q \text{ et } r) \Longleftrightarrow (p \text{ et } q) \text{ et } r$

$p \text{ ou } (q \text{ ou } r) \Longleftrightarrow (p \text{ ou } q) \text{ ou } r$

– Principe de transitivité.

$$[(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

– Principe de distributivité.

$$[p \text{ et} (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$$

$$[p \text{ ou} (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$$

En appliquant ces divers principes, on peut naturellement établir une infinité de lois logiques.

4°) Règles de déduction.

L'examen de la table de vérité de l'implication nous permet d'établir deux règles de déductions importantes.

– Si $p \Rightarrow q$ est vrai
et que p est vrai

Alors q est vrai.

p	$\Rightarrow$	q	
1	1	1	←
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	

– Si $p \Rightarrow q$ est vrai
et que q est faux

alors p est faux.

p	$\Rightarrow$	q	
1	1	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	←

L'usage de ces deux règles de déduction est fréquent dans les démonstrations mathématiques.

5°) Exemple d'utilisation des lois logiques.

Sachant que

Définition : La droite A est parallèle à la droite B si et seulement si $A = B$ ou $A \cap B = \emptyset$

Propriétés : 1. $A \,//\, A$ quelle que soit la droite A (réflexivité)

2. $A \,//\, B \quad B \,//\, A$ quelles que soient les droites A, B. (symétrie)

Axiome. Par tout point du plan, passe une et une seule parallèle à toute droite donnée dans ce plan.

Soit à démontrer la transitivité du parallélisme c'est-à-dire

quelles que soient les droites A, B, C.

$$(A // B \quad \text{et} \quad B // C) \Rightarrow A // C.$$

Cette implication est équivalente à

$$(\text{non } A//C) \Rightarrow \text{non}(A//B \text{ et } B//C)$$

principe de contraposition.

ou à

$$(\text{non } A//C) \Rightarrow (\text{non } A//B \text{ ou non } B//C)$$

Loi de DE MORGAN.

Or, si p, q, r sont des propositions quelconques, on a

$$[p \Rightarrow (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et non } q) \Rightarrow r]$$

en vertu des définitions de l'implication et de la disjonction.

Il suffit donc d'établir que

$$(\text{non } A//C \text{ et } A//B) \Rightarrow \text{non } B//C$$

Cette dernière implication est évidente en vertu de l'axiome. En effet, il y a un point p tel que

$A \cap C = \{p\}$ (non A//C)
et $B//A$ (car A//B et symétrie)

Puisque par p passe une seule parallèle à B (Axiome), on a non B//C.

5. LOIS LOGIQUES ET CHAMP.

a) Les seules structures de groupes que l'on puisse établir dans la paire $\{0,1\}$ sont celles ayant pour tables

	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1
0	1	0
1	0	1

Chacune de ces tables correspond à une loi logique.

Les tables correspondent respectivement, la première au " ou exclusif " ; la seconde à l'équivalence logique.
Dans ce chapitre, pour faciliter les notations, nous désignerons par + le " ou exclusif " qui correspond d'ailleurs à l'addition modulo 2 et par E l'équivalence.

On a donc

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$(\{0,1\}, +)$ est un groupe commutatif de neutre 0

E	0	1
0	1	0
1	0	1

$(\{0,1\}, E)$ est un groupe commutatif de neutre 1.

Dans ce groupe, si p, q sont des propositions quelconques, on a

$p + 0 = p$ (neutre)

$p + p = 0$ (symétrique de p est p)

$p \; E \; 1 = p$ (neutre)

$p \; E \; p = 1$ (symétrique de p est p).

On en déduit notamment que

$p + (1 + p) = 1$

$p \; E \; (0 \; E \; p) = 0$ (1)

b) De plus, nous pouvons à partir de chacun de ces groupes commutatifs construire un champ ou corps commutatif.
En effet, d'une manière générale, un champ ou corps commutatif répond à la définition suivante :

$(K , * , \top)$ est un champ
si et seulement si

$(K, *)$ est un groupe commutatif de neutre n ;
Il y a dans l'ensemble K une opération $\top$ qui est
- interne et partout définie,
- associative ,
- distributive sur $*$

$(K \setminus \{n\})$ est un groupe commutatif.

Afin de construire un champ à partir de chacun des groupes commutatifs établis ci-dessous, nous devons avant tout définir une seconde opération telle que :

$\{0,1\} \setminus 0$
c'est-à- dire
$\{1\}$
soit un groupe commutatif

$\{0,1\} \setminus 1$
c'est-à-dire
$\{0\}$
soit un groupe commutatif

pour cette seconde loi.

De plus, remarquant que dans un champ $(K, *, \top)$ le neutre n de l'opération $*$ est absorbant pour la seconde $\top$, les lois à définir doivent nécessairement avoir pour tables :

	0	1
0	0	0
1	0	1

	0	1
0	0	1
1	1	1

Ces tables corespondent respectivement

au produit logique ou <u>conjonction</u> que nous noterons .

à la <u>disjonction</u> logique que nous noterons " <u>ou</u>".

Il est aisé de vérifier l'associativité de

ou

et la distibutivité de

sur +

ou sur E

c) En conclusion, on a

$(\{0,1\}, +, .)$ est un champ

$(\{0,1\}, E, ou)$ est un champ.

En particulier, comme règles de calcul importantes, on a

$p.p = p$

p ou $p = p$

comme l'indiquent les tables ci-dessus (idempotence)

$p.0 = 0$

p ou $1 = 1$
(absorbant)

$p.1 = p$

p ou $0 = p$
(neutre du second groupe)

d) A partir de ces champs nous pouvons exprimer chacune des fonctions logiques.

- <u>fonctions à une seule variable</u>.

p	0	1	f(p) =	
			Dans $(\{0,1\}, +, .)$	Dans $(\{0,1\}, E, ou)$
A	0	1	p	p
B	0	0	0	0
C	1	1	1	1
D	1	0	1 + p	0 E p

A est la fonction idéntité; B et C deux fonctions constantes et D est la négation . On a donc

non $p = 1 + p$

non $p = 0 \; E \; p$

- Fonctions à deux variables.

1°) Dans $(\{0,1\}, +, \cdot)$

					$f(p,q) =$	
p	1	1	0	0		
q	1	0	1	0		
A	1	1	1	1	1	f. constante
B	1	1	1	0	$p+q+p\cdot q$	p ou q
C	1	1	0	1	$1+q+p\cdot q$	implication $p \Leftarrow q$
D	1	1	0	0	p	1ère projection $(p,q) \to p$
E	1	0	1	1	$1+p+p\cdot q$	implication $p \Rightarrow q$
F	1	0	1	0	q	2e projection $(p,q) \to q$
G	1	0	0	1	$1+p+q$	équivalence $p \Leftrightarrow q$
H	1	0	0	0	$p\cdot q$	conjonction p et q
I	0	1	1	1	$1+p\cdot q$	négation de H
J	0	1	1	0	$p+q$	négation de G
K	0	1	0	1	$1+q$	négation de F
L	0	1	0	0	$p+p\cdot q$	négation de E
M	0	0	1	1	$1+p$	négation de D
N	0	0	1	0	$q+p\cdot q$	négation de C
O	0	0	0	1	$1+p+q+p\cdot q$	négation de B
P	0	0	0	0	0	négation de A.

Ces fonctions s'établissent à partir des schèmes et des propriétés des opérations dans le champ.
Soit, par exemple, à établir la formule de la fonction E (implication) dans ce système.
On a
$$\begin{aligned} f(p,q) &= p\cdot q + (1+p)\cdot q + (1+p)\cdot(1+q) \\ &= p\cdot q + q + p\cdot q + 1 + q + p + p\cdot q \\ &= (p\cdot q + p\cdot q) + (q + q) + p\cdot q + p + 1 \\ &= 0 + 0 + p\cdot q + p + 1 \\ &= 1 + p + p\cdot q \end{aligned}$$
(en se basant sur les valeurs 1 du schème.)

De même, en se basant sur les valeurs 0, on aurait

$$f(p,q) = 1 + ((1 + q).p) = 1 + (p + q.p)$$
$$= 1 + p + p.q$$

2°) <u>Dans $(\{0,1\}, E, ou)$</u>

	p q	1 1	1 0	0 1	0 0	f(p,q)=	
A		1	1	1	1	1	f. constante
B		1	1	1	0	p ou q	disjonction.
C		1	1	0	1	pE(pouq)	implication $q \Rightarrow p$
D		1	1	0	0	p	1ère projection $(p,q) \rightarrow p$
E		1	0	1	1	qE(p ou q)	implication $p \Rightarrow q$
F		1	0	1	0	q	2e projection $(p,q) \rightarrow q$
G		1	0	0	1	pEq	équivalence $p \Leftrightarrow q$
H		1	0	0	0	pEqE(p ou q)	conjonction p et q
I		0	1	1	1	OEpEqE(p ou q)	négation de H
J		0	1	1	0	OEpEq	" G
K		0	1	0	1	OEq	" F
L		0	1	0	0	OEqE(p ou q)	" E
M		0	0	1	1	OEp	" D
N		0	0	1	0	OEpE(p ou q)	" C
P		0	0	0	1	OE(p ou q)	" B
Q		0	0	0	0	O	" A

Les démonstrations de ces formules se font en se basant sur les schèmes.
Par exemple, pour l'implication E, on a
f(p,q) = (OEp)ou q = (O ou q)E(p ou q) = q E (p ou q)
en se basant sur les O

ou

$f(p,q) = 0 \; E \; (((0Ep) ou (0Eq)) E (p \; ou \; (0Eq)) E (p \; ou \; q))$

$= 0 \; E (0 \; E \; p \; E \; q \; E \; (p \; ou \; q) E \; p \; E \; (p \; ou \; q) \; E \; (p \; ou \; q))$

$= (0 \; E \; 0) E (p \; E \; p) E ((p \; ou \; q) E (p \; ou \; q)) E q \; E \; (p \; ou \; q \;)$

$= 1 \; E \; 1 \; E \; 1 \; E \; q \; E \; (p \; ou \; q \;)$

$= q \; E \; (p \; ou \; q \;)$ en se basant sur les 1.

e) Démonstration de lois logiques grâce aux propriétés de champ.

1er exemple. Lois de DeMorgan.

Soit à démontrer que

$$\left[non \; (p \; ou \; q \;) \right] \Longleftrightarrow \left(non \; p \quad et \quad non \; q \right)$$

Dans le champ$(\{0,1\},+,.)$ on a

$non(p \; ou \; q) = 1 + (p + q + p.q) = 1 + p + q + p.q$

$non \; p \;\; et \; non \; q = (1 + p).(1 + q) = 1 + p + q + p.q$

ce qui montre bien que ces deux fonctions sont égales dans $\{0,1\}$.

2e exemple. Double implication.

Soit à démontrer que

$$\left[(p \Longrightarrow q) \; et \; (q \Longrightarrow p \;) \right] \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$$

On a

$$\left[(p \Rightarrow q) et (q \Rightarrow p) \right] = (1 + p + p.q).(1 + q + p.q)$$
$$= 1 + q + p.q + p + p.q + p.p.q + p.q + p.q.q + p.q.p.q$$
$$= 1 + q + p.q + p + p.q + p.q + p.q + p.q + p.q$$
$$= 1 + p + q. \quad car \; p.q + p.q = 0$$

et

$(p \Leftrightarrow q \;) = 1 + p + q$ ce qui démontre la loi.

Remarque.
On peut naturellement comme dans tout champ considérer des polynômes dans chacun des deux champs défini ci-dessus.
Chacun d'eux se réduira à une des fonctions possibles données ci-avant.
Ainsi par exemple, on a, si x,y sont des variables dans $(\{0,1\},+,.)$

$$x^3y + 2x^2 + 1 = x.x.x.y + x.x + x.x + 1$$
$$= x.y + x + x + 1$$
$$= x.y + 1$$

C'est la fonction I ci-avant qui correspond à l'incompatibilité de x et y
non(x et y).

6. LA LOGIQUE DES CLASSES ET L'ALGEBRE BOOLEENNE

a) Logique des classes.

1°) Fonction propositionnelle.

Une expression du type $f(x)$ " f de x " où f désigne un opérateur quelconque et x une variable d'objet donnera, en substituant à f un prédicat quelconque et, à la variable x, une constante nommable, une proposition qui sera soit vraie soit fausse.
C'est pourquoi une telle expression constitue un véritable moule à proposition. Une telle expression est appelée fonction propositionnelle ou, dans le cadre de la logique des classes, condition en la variable x.

2°) Notions d'ensemble et d'élément.

La théorie des ensembles a, elle aussi, été édifiée en partant de principes admis comme vrais au départ et appelés axiomes de cette théorie. Par exemple, on peut au départ de cette théorie admettre les axiomes suivants:
A1. Il existe des objets.

Le mot "objet" est un mot primitif, non défini. Pour son interprètation, on se réfère au sens commun d'objet en essayant de le préciser autant que possible. Il en est de même par la suite des mots " ensemble", "appartient",....

A2. Tout ensemble est un objet.

A3. Un objet quelconque donné appartient ou n'appartient pas à un ensemble donné.

A4. Si un ou plusieurs objets sont donnés, alors il existe un et un seul ensemble auquel il(s) appartienne(nt) et auquel n'appartient aucun autre objet.

...

De même que nous l'avons fait pour les lois logiques dans la théorie élémentaire de la déduction, on déduit, à partir des axiomes d' autres propositions vraies de la théorie des ensembles appelés théorèmes.

3°) Détermination et représentation.

Une première façon de se donner un ensemble ou une classe est d'en énumérer les éléments. On note alors ces derniers entre accolades et l'ensemble est dit donné en extension.
Par exemple $A = \{a, b, c, d\}$ est l'ensemble constitué des objets a, b, c, et d.
Cette représentation n'est pas toujours commode. Aussi est-il souvent plus facile, surtout en logique des classes, de désigner un ensemble par une condition ou fonction propositionnelle que vérifient les seuls éléments de cet ensemble.
L'expression $\{x \mid p(x)\}$ est l'ensemble ayant pour élément(s) les seuls objets vérifiant la condition p(x) c'est-à-dire ceux qui substitués à x donnent une proposition vraie. La condition ou fonction p(x) est dite caractéristique de l'ensemble.
On dit dans ce cas que l'ensemble est donné en compréhension.

La détermination d'un ensemble, d'une classe à l'aide d'une condition (ou fonction propositionnele) montre le rôle important que vont jouer ces conditions dans l'algèbre ou logique des classes.

Pour représenter un ensemble, on trace un contour fermé à l'intérieur duquel tout élément de l'ensemble pourra être figuré par un point.
Une telle représentation est appelée <u>diagramme de Venn</u>.

$A = \{a, b, c, d\}$

4°) <u>Parties d'un ensemble. Référentiel</u>

On appelle <u>partie d'un ensemble E</u> tout ensemble tel qu'un objet lui appartient si et seulement si cet objet est un élément de E.
Nous admettons l'axiome

A5. <u>A toute expression (condition) f(x) définie sur un ensemble E(référentiel), les éléments de E qui vérifient f(x) constituent une partie de E.</u>

Pour indiquer que f(x) est vérifiée en un élément a, nous notons $f(x)=1$ en a ou encore $f(a)=1$.
De même f(x) a la valeur 0 en tout point (toute valeur) où elle n'est pas vérifiée.
Ainsi par exemple, la représentation ci-contre de la partie A de E définie par

$A = \{x \in E \mid f(x)\}$

indique que l'on a

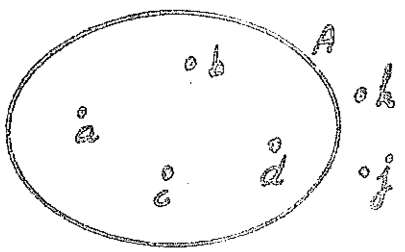
$f(x) = 1$

en a, b, c, d
c'est-à-dire

$f(a)=1,\ f(b)=1,\ f(c)=1,\ f(d)=1$

et $f(x) = 0$ en tout autre point. Par exemple,

$f(k)=f(j)=0.$



Lorsqu'un ensemble A est <u>inclus</u> ou est une partie de l'ensemble référentiel E, on note $A \subset E$.
Nous admettrons l'<u>axhome des parties</u>.

A6. <u>Etant donné un ensemble E quelconque, il existe un ensemble constitué des parties de E. Cet ensemble est noté $\mathcal{P}(E)$.</u>

$$\mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

5°) <u>Complément d'une partie d'un ensemble.</u>

Le <u>complément</u> de la partie A de E est l'ensemble constitué des éléments de E n'appartenant pas à A.
Si la partie A est déterminée comme étant l'ensemble des objets satisfaisant à la condition f(x), son complément est donc l'ensemble des éléments de E qui satisfont à mon f(x).
Le complément de A par rapport au référentiel E est noté

$$C_E^A \quad \text{ou } \overline{A} \quad \text{(lorsque le référentiel E est bien fixé)}$$

Par définition, on a donc

$$\bar{A} = \complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\} = \{x \in E \mid \text{non } f(x)\}$$

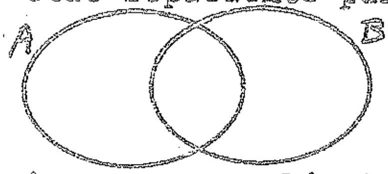
En vertu de cette définition, on a aussi quel que soit l'ensemble E

$\complement_E^E = \emptyset$ où $\emptyset$ est la <u>classe</u> ou <u>ensemble vide</u> (dont on peut démontrer l'unicité.)

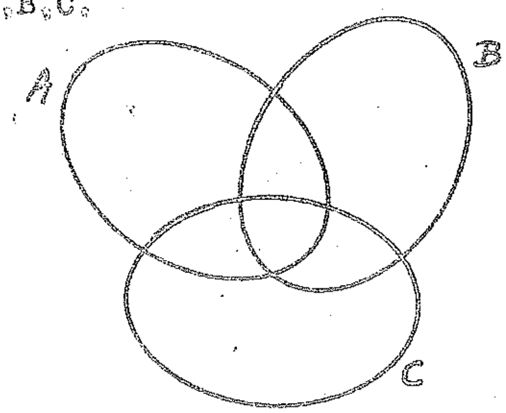
$\complement_E^\emptyset = E$

6°) <u>Représentation de plusieurs ensembles</u>.

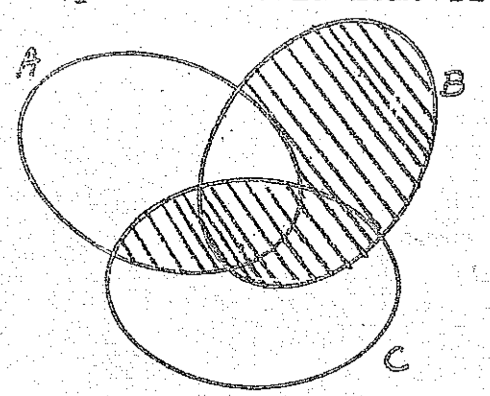
Il est aisé d'établir que, deux ensembles quelconques A et B peuvent toujours être <u>représenté</u> par le diagramme

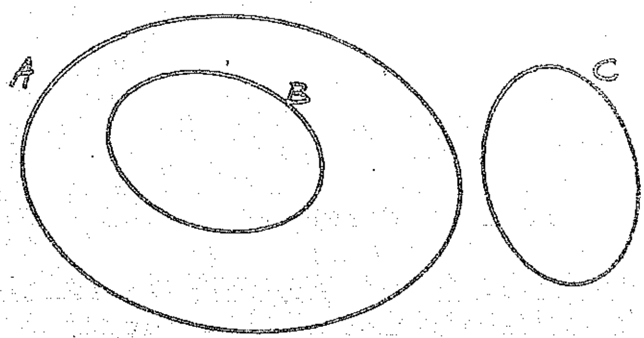


qui pour cette raison est appelé <u>diagramme général pour deux ensembles</u>.
<u>De même</u>, le <u>diagramme</u> ci-dessous est <u>général pour trois ensembles</u> quelconques <u>A,B,C</u>.



Le fait qu'une partie de ces diagrammes soit ou non vide reste naturellement une question ouverte tant qu'aucune précision supplémentaire n'est apportée . Par convention, toute partie indiquée comme vide est hachurée.
Ainsi, moyennant cette convention, les deux diagrammes ci- dessous représentent la même situation entre les ensembles A,B,C.





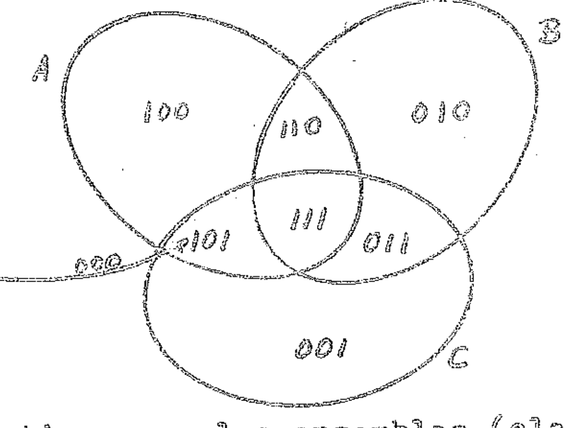
Remarque.

Si les ensembles A, B, C sont les parties de E caractérisées par les conditions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

$A = \{x \mid p(x)\}$ $B = \{x \mid q(x)\}$ $C = \{x \mid r(x)\}$

chacune des plages du diagramme général de représentation de A, B, C correspond à l'un des cas de vérité de la table ci-dessous:

$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0



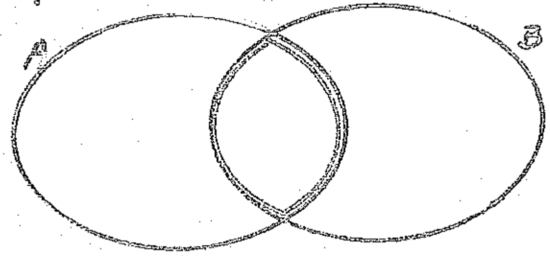
6°) Opérations logiques et opérations sur les ensembles. (classes)

Etant donné un ensemble A et un ensemble B (que nous considèrerons ici comme parties d'un référentiel E, ce qui n'est d'ailleurs nullement nécessaire pour les définitions qui vont suivre.); on appelle

Intersection de A et B/ l'ensemble tel qu'un objet lui appartient si et seulement si il appartient à A et à B.
On note cet ensemble $A \cap B$.
On a $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
Si A, B sont tels que $A = \{x \mid p(x)\}$ et $B = \{x \mid q(x)\}$
on a, par définition

$$A \cap B = \{x \mid p(x) \text{ et } q(x)\}$$

Réunion de A et B : l'ensemble des objets appartenant à l'un au moins des ensembles A ou B.
On a $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
$A \cup B = \{x \mid p(x) \text{ ou } q(x)\}$



$A \cap B$

Remarque.
Il est aisé de montrer que quels que soient les ensembles A et B, si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $A \cap B \subset E$ et $A \cup B \subset E$
Ainsi, les opérations d'intersection et de réunion sont des opérations internes et partout définies au sein d'un référentiel quelconque E.
D'autre part, la définition même de ces opérations montre leur lien étroit avec les opérations logiques de conjonction et de disjonction.
Cette liaison entre la logique des classes et la logique des conditions peut naturellement se généraliser. Par exemple,

Nous avons déjà vu que la négation est associée au complémentaire puisque si $A = \{x \in E \,;\, p(x)\}$ on a $\bar{A} = \{x \in E \,;\, \text{non } p(x)\}$

L'<u>implication</u> peut de même être associée à <u>l'inclusion</u>.
En effet, si $A = \{x \in E \,;\, p(x)\}$
et si $B = \{x \in E \,;\, q(x)\}$
on a

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (p(x) \Rightarrow q(x))$$

De même, l'<u>équivalence</u> logique correspond à l'<u>égalité</u> d'ensembles (ou de classes). On a

$$(A = B) \Leftrightarrow (p(x) \Leftrightarrow q(x))$$

La logique des classes permet donc d'éclairer la logique des propositions et des conditions. De plus la représentation des ensembles rend plus concrètes certaines démonstrations et certaines lois logiques.

b) Algèbre booléenne.

L'algèbre booléenne constitue, comme nous allons le voir, une partie de l'algèbre des ensembles: celle que l'on obtient avec les opérations d'intersection, de réunion et de complémentation.

1°) <u>Fonctions booléennes.</u>

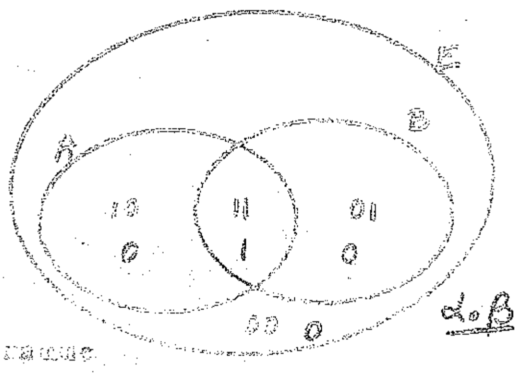
On appelle fonction booléenne toute partie du référentiel E qui peut être exprimée comme fonction des parties de E à l'aide des opérations d'intersection(et), de réunion (ou) et de complémentation (pas)

Si A et B sont des classes respectivement caractérisées dans le référentiel E par les conditions p(x) et q(x), on définit:
- <u>La fonction "et"</u> ou " <u>produit</u>" symbolisée par le point (ou comme en algèbre numérique par la simple juxtaposition)
Elle correspond à l'intersection des classes.

$$A.B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = \{x \in E \mid p(x) \text{ et } q(x)\}$$

On a donc la table de vérité

p(x)	q(x)	p(x).q(x)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



D'où, les règles de calcul

$1.1 = 1$
$1.0 = 0$
$0.1 = 0$
$0.0 = 0$ illustrées par le diagramme

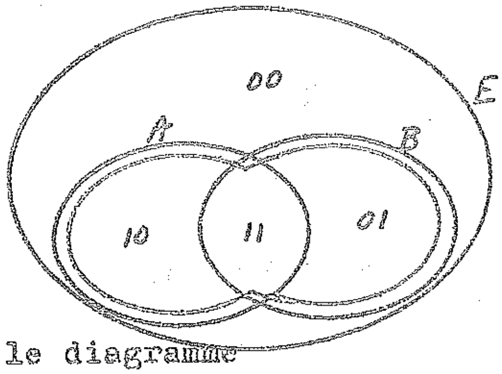
- La fonction " ou " ou " somme " symbolisée par +

Elle correspond à la réunion d'ensembles;

$$A + B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x \in E \mid p(x) \text{ ou } q(x)\}$$

On a donc comme table de vérité

$p(x)$	$q(x)$	$p(x) + q(x)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0



D'où les règles de calcul

$1 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$0 + 1 = 1$
$0 + 0 = 0$ illustrées par le diagramme

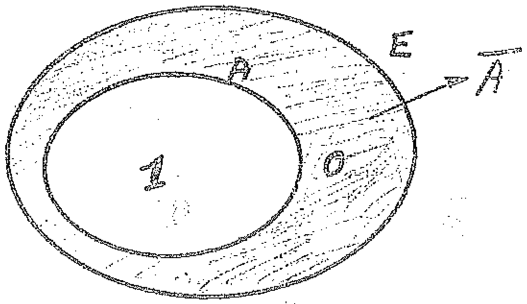
- La fonction "pas" symbolisée par une barre au-dessus de la variable.

Elle correspond au complément.

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\} = \{x \in E \mid \text{non } p(x)\}$$

On a la table de vérité

$p(x)$	$\overline{p(x)}$
1	0
0	1



D'où les règles de calcul

$\overline{0} = 1$

$\overline{1} = 0$ illustrées par le diagramme.

2°) Propriétés des opérations ou fonctions booléennes.

Ces propriétés résultent directement des propriétés des opérations sur les ensembles.

-Commutativité.

Les opérations . et + sont commutatives.

$$\forall x \in E : \quad p(x).q(x) = q(x).p(x)$$
$$p(x)+q(x) = q(x)+p(x)$$

En effet, quels que soient les ensembles A, B, on a

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A$$

- Idempotence.

Toute fonction booléenne est idempotente pour . et +

$$\forall x \in E : \quad p(x).p(x) = p(x) = p(x) + p(x)$$

En effet quel que soit l'ensemble A, on a

$$A \cap A = A = A \cup A$$

- <u>0 est neutre pour + et absorbant pour .</u>

$$\forall x \in E : \quad p(x) + 0 = p(x)$$
$$p(x) \cdot 0 = 0$$

En effet quel que soit l'ensemble A, on a

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{et} \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

- <u>Associativité de + et .</u>

Les opérations + et . sont associatives.

$$\forall x \in E : \quad (\,p(x) + q(x)\,) + r(x) = p(x) + (\,q(x) + r(x))$$
$$(\,p(x) \cdot q(x)\,) \cdot r(x) = p(x) \cdot (\,q(x) \cdot r(x))$$

En effet, quels que soient les ensembles A,B,C on a

$$(\,A \cap B) \cap C = A \cap (\,B \cap C\,)$$
$$(\,A \cup B) \cup C = A \cup (\,B \cup C\,)$$

- <u>Distributivités mutuelles de + et .</u>

Les opérations + et . sont mutuellement distributives.

$$\forall x \in E : \quad p(x) \cdot (q(x) + r(x)) = (p(x) \cdot q(x)) + (p(x) \cdot r(x))$$
$$(\,p(x) + q(x)) \cdot r(x) = (p(x) \cdot r(x)) + (q(x) \cdot r(x))$$
$$p(x) + (q(x) \cdot r(x)) = (p(x) + q(x)) \cdot (p(x) + r(x))$$
$$(\,p(x) \cdot q(x)) + r(x) = (p(x) + r(x)) \cdot (q(x) + r(x))$$

Cette propriété résulte de la propriété analogue relative à la réunion et à l'intersection. On peut, comme d'ailleurs les propriétés précédentes, l'établir à l'aide de tables d'appartenance (ensembles) ou de vérité (fonctions). Par exemple :

$p(x)$	.	($q(x)$	+	$r(x)$)	=	($p(x)$	.	$q(x)$)	+	($p(x)$	.	$r(x)$)
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0		1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1		1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0		1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1		0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0		0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1		0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0

- <u>Associativité et commutativité générales.</u>

L'associativité et la commutativité des opérations + et . peuvent naturellement être généralisées.

Par exemple, on a

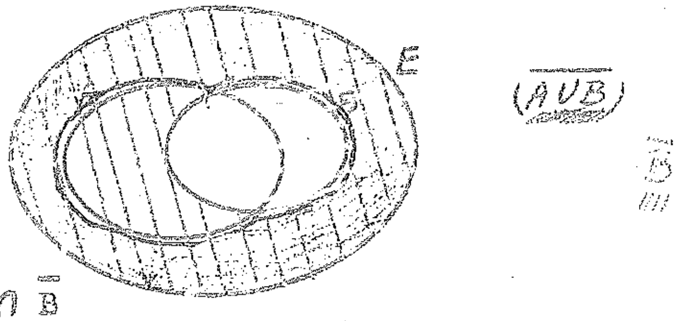
$$\forall x \in E : p(x) \cdot q(x) \cdot (r(x) \cdot s(x)) = p(x) \cdot (r(x) \cdot q(x)) \cdot s(x) \quad \ldots\ldots$$

- <u>Lois de De Morgan.</u>

$$\forall x \in E : \quad \overline{(\, p(x) \cdot q(x)\,)} = \overline{p(x)} + \overline{q(x)}$$

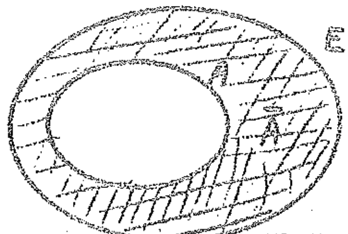
$$\overline{(\, p(x) + q(x)\,)} = \overline{p(x)} \cdot \overline{q(x)}$$

Ces lois peuvent être démontrées à l'aide de table de vérité ou à l'aide d'un diagramme comme indiqué ci-contre.



$$\overline{(\, A \cup B\,)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Le référentiel, noté 1, est neutre pour l'opération . et absorbant pour +



$$\forall x \in E : p(x) \cdot 1 = p(x)$$

$$p(x) + 1 = 1$$

- De plus, on a

$$\forall x \in E : p(x) \cdot \overline{p(x)} = 0 \qquad \text{et} \qquad p(x) + \overline{p(x)} = 1$$

<u>Remarques.</u>

- Souvent pour faciliter l'écriture, nous noterons, le référentiel étant fixé une fois pour toute, les conditions ou fonctions $p(x)$ $q(x)$,.... plus simplement P, Q, ...
- De même au lieu de noter $\overline{P}$ le complémentaire de P, nous l'indiquerons simplement $-P$.

- <u>Applications des propriétés de l'algèbre booléenne.</u>

Nous pouvons facilement établir des chaînes d'identité, simplifier de lourdes expressions, etc. grâce à la mise en pratique des propriétés vues ci-dessus. Par exemple
<u>chaînes d'identités</u>. P, Q étant des fonctions booléennes, on a

$$P = P + P = \overline{\overline{P} \cdot \overline{P}} = \dots = \overline{\overline{P} \cdot \overline{P}} + \underline{(\, 0 \cdot \overline{P}\,) = \dots}$$

$$P + Q = (P + Q) \cdot (R + \overline{R}) = \dots = \overline{(\overline{P} \cdot \overline{Q})} + (\, R + \overline{R}\,) = \dots$$

<u>Simplification</u>. x, y étant des variables logiques, on a

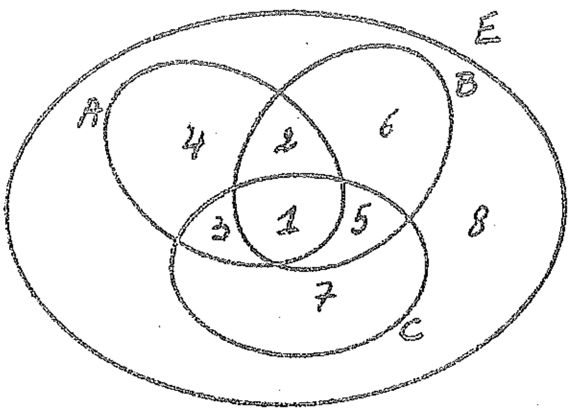
$$x + xy = x(y + 1) = x \cdot 1 = x$$

$$x + \overline{x} \cdot y = x(y + 1) + \overline{x} \cdot y = xy + x + \overline{x} \cdot y$$

$$x(x + y) + \overline{x}(x + y) = (x + y)(x + \overline{x}) = (x + y) \cdot 1 = x + y$$

3°) Les deux types de fonctions booléennes élémentaires.

Nous avons vu précédemment qu'à n propositions données correspond une table de vérité à 2^n places possibles.
De même en remplaçant les propositions par les n classes qu'elles caractérisent, nous obtenons 2^n cas d'appartenance possibles correspondant sur un diagramme à 2^n zones ou sous-ensembles qui constituent une partition du référentiel.
– On appelle <u>minterm</u> (terme minimal) une des 2^n intersections des n classes et de leurs compléments. <u>La réunion des minterms est le référentiel.</u>
Ainsi, par exemple, étant donné 3 classes A, B, C (correspondant à 3 conditions P, Q, R) on a le diagramme suivant faisant apparaître les minterms :



min 1 = $A.B.C$ ou $P.Q.R$

min 2 = $A.B.\overline{C}$ ou $P.Q.\overline{R}$

min 3 = $A.\overline{B}.C$ ou $P.\overline{Q}.R$

min 4 = $A.\overline{B}.\overline{C}$ ou $P.\overline{Q}.\overline{R}$

min 5 = $\overline{A}.B.C$ ou $\overline{P}.Q.R$

min 6 = $\overline{A}.B.\overline{C}$ ou $\overline{P}.Q.\overline{R}$

min 7 = $\overline{A}.\overline{B}.C$ ou $\overline{P}.\overline{Q}.R$

min 8 = $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ ou $\overline{P}.\overline{Q}.\overline{R}$

– On appelle <u>maxterm</u> une des 2^n réunions des n classes et de leurs compléments.
<u>L'intersection de tous les maxterms est l'ensemble vide.</u>
En vertu des lois de De Morgan, les maxterms sont les compléments des minterms et réciproquement.
Ainsi dans le cas de 3 ensembles A, B, C ci-dessus, on a les 8 maxterms

Max 1 = $\overline{\text{min } 1} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Max 2 = $\overline{\text{min } 2} = \overline{A} + \overline{B} + C$

Max 3 = $\overline{\text{min } 3} = \overline{A} + B + \overline{C}$

Max 4 = $\overline{\text{min } 4} = \overline{A} + B + C$

Max 5 = $\overline{\text{min } 5} = A + \overline{B} + C$

Max 6 = $\overline{\text{min } 6} = A + \overline{B} + C$

Max 7 = $\overline{\text{min } 7} = A + B + \overline{C}$

Max 8 = $\overline{\text{min } 8} = A + B + C$

4°) Formes canoniques d'une fonction booléenne.

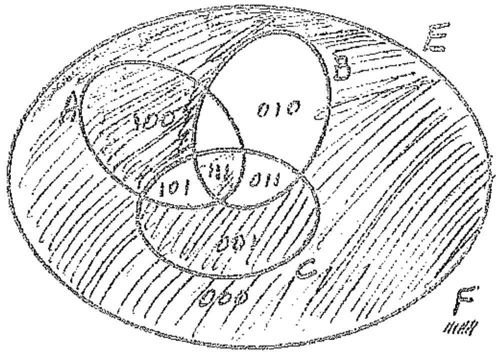
Il existe 2 formes canoniques des fonctions booléennes :

– <u>Forme canonique disjonctive.</u>
<u>Toute fonction booléenne de n variables est la somme de minterms en ces variables</u>. Cette somme est la forme canonique disjonctive de la fonction considérée.

Soit par exemple F une fonction des 3 variables booléennes P,Q,R $\quad F = f(P,Q,R)$
A cette expression correspond une table de vérité en ces variables P,Q,R. appelées variables d'entrée.
Supposons que cette table soit la suivante:

P	Q	R	F=f(P,Q,R)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

d'où, le diagramme



L'examen des valeurs 1 de F nous conduit à considérer celle-ci comme la somme logique des cas (111), (100), (001) et (000), c'est-à dire des minterms correspondant

$$F = P.Q.R + P.\overline{Q}.\overline{R} + \overline{P}.\overline{Q}.R + \overline{P}.\overline{Q}.\overline{R}$$

$$F = \min 1 + \min 4 + \min 7 + \min 8 \quad \text{(v. page 28)}$$

Une telle forme peut naturellement être obtenue pour une fonction quelconque des 3 variables P,Q,R et pour toute fonction de 2 ou 1 de ces variables.

- <u>Forme canonique conjonctive</u>.

Les lois de De Morgan et la définition des maxterms nous permet d'affirmer que
<u>Toute fonction booléenne est le produit de maxtermes en les variables qu'elle contient</u>. Ce produit est appelé forme canonique conjonctive de la fonction considérée.
Par exemple la fonction F ci-dessus a la valeur 0 pour chacun des cas (110), (101), (011) et (010). On a donc

$$F = (P.Q.\overline{R}) + (P.\overline{Q}.R) + (\overline{P}.Q.\overline{R}) + (\overline{P}.Q.R)$$

$$F = (\overline{P}+\overline{Q}+R).(\overline{P}+Q+\overline{R}).(P+\overline{Q}+R).(P+\overline{Q}+\overline{R})$$

$$= \text{Max } 2 \;.\; \text{Max} 3 \;.\; \text{Max } 5 \;.\; \text{Max } 6$$

Ces deux formes canoniques, comme il est aisé de le remarquer, sont d'ailleurs complémentaires l'une de l'autre. La seconde comprend les maxtermes ne correspondant pas aux mintermes de la première.

2°) Réduction des fonctions booléennes.

Il y a diverses façons de réduire les fonctions booléennes
- grâce aux propriétés de l'algèbre booléenne (v. page 27)

- par transposition canonique.

Cette méthode s'avère surtout intéressante lorsque le nombre de maxtermes ou de mintermes est important. Elle consiste à passer de l'une des formes canoniques à l'autre.
Soit par exemple l'expression

$$F = P.Q + P.\bar{Q}.\bar{R} + \bar{P}.Q + \bar{P}.\bar{Q}.R$$

Rendons d'abord cette expression homogène en ses variables en remarquant que, par exemple $P.Q = P.Q.1 = P.Q.(R+\bar{R}) = P.Q.R+P.Q.\bar{R}$
On a $F = P.Q.R + P.Q.\bar{R} + P.\bar{Q}.\bar{R} + \bar{P}.Q.R + \bar{P}.Q.\bar{R} + \bar{P}.\bar{Q}.R$
qui est la forme canonique disjonctive de F.
Elle comprend 6 mintermes

$$F = \min 1 + \min 2 + \min 4 + \min 5 + \min 6 + \min 7$$

La forme canonique conjonctive ne comprendra donc que 8-6 = 2 maxtermes et s'avère donc plus intéressante.
On a $\bar{F} = \min 3 + \min 8$

$$= (P.\bar{Q}.R) + (\bar{P}.\bar{Q}.\bar{R})$$

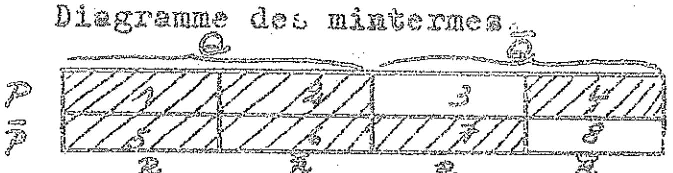
$$\bar{\bar{F}} = F = \overline{(P.\bar{Q}.R) + (\bar{P}.\bar{Q}.\bar{R})} = (\bar{P} + Q + \bar{R}).(P + Q + R)$$

- Diagrammes de Veitch.

Ce type de diagrammes est une généralisation de la représentation des ensembles à l'aide des diagrammes de Venn. Il représente donc aussi case par case les mintermes .(2^n s'il y a n variables)
Soit par exemple à réduire la fonction F ci-dessus

$$F = P.Q + P.\bar{Q}.\bar{R} + \bar{P}.Q + \bar{P}.\bar{Q}.R$$

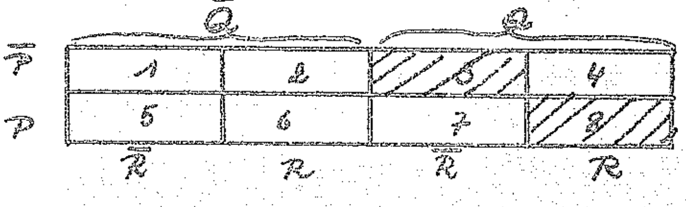
Diagramme des mintermes.



On a
$F = \min1+\min2+\min4+\min5+\min6+\min7$

Les cases 3 et 8 ne convenant pas, on a $\bar{F} = \min3 + \min 8$

Diagramme des Maxtermes



D'où $F = \overline{\min 3} . \overline{\min 4}$

$= \text{Max } 3 . \text{Max } 4$

$= (\bar{P}+Q+\bar{R}).(P+Q+R)$

II CIRCUITS

1- INITIATION A L'ALGEBRE DES CIRCUITS

a) INTRODUCTION.

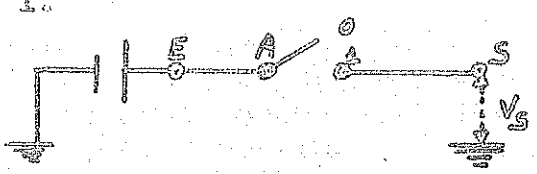
Aujourd'hui, le développement de l'automatisme industriel repose essentiellement sur la réalisation de circuits électriques ou électroniques complexes. La réalisation de tels circuits ne fut garantie et rendue possible que grâce à la mise en pratique d'une méthode de raisonnement sûre basée essentiellement sur les principes de logique vus au chapitre précédent. Le développement de la science physique est évidemment pour beaucoup dans l'amélioration des diverses techniques de réalisation des circuits électriques, hydrauliques, pneumatiques,... et a permis, non seulement de réliser les circuits les plus divers à partir d'organes réduits et de courte fabrication mais aussi d'imposer des rapidités de fonctionnement remarquables. Grâce aux données logiques et techniques incluses dans cette partie il sera possible de réaliser et de concevoir par un raisonnement fiable des circuits dont la complexité va croissante selon qu'ils sont adaptés à des problèmes simples de têécommande ou à la simulation des circuits de base de l'ordinateur du XXe siècle.

b) CIRCUITS DE BASE

L'algèbre de Boole trouve une de ses principales applications dans la réalisation des circuits logiques, ceux-ci fonctionnant uniquement par les valeurs " tout ou rien " .Ces deux valeurs seront déterminées dans un circuit par la présence(l'absence) d'un courant d'intensité connue, d'une différence de potentiel fixée, de la réalisation(ou non) d'un état tel que lampe allumée(éteinte),sonnerie à l'enclenchement(déclenchement) et correspondront aux deux valeurs booléennes 1 (ou 0).
Les principes de base de ces circuits sont les suivants:

1°) Circuits à un seul interrupteur.

1.



La borne de sortie S du circuit étant susceptible de prendre ou l'état 1 (même potentiel que la borne d'entrée E) ou l'état 0 (potentiel de masse) est comparable à une variable propositionnelle.

L'état de la borne de sortie S étant aussi fonction de l'état de fonctionnement de l'interrupteur A, nous pouvons écrire

$$V_S = F_A(V_E)$$

où V_S et V_E sont respectivement les potentiels de sortie et d'entrée et F_A la fonction état de l'interrupteur A.
En abrégé, nous noterons plus simplement

$$S = F(E)$$

ce qui exprime que l'état S est fonction de l'état E suivant l'état des organes intermédiaires placés entre les organes d'entrée et de sortie.

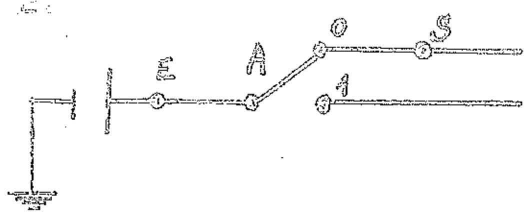
Dans ce circuit, on a donc

si E=0 , S=0 quel que soit A

si E=1 , S=1 si A=1

S=0 si A=0. D'où $\underline{S = E.A}$

2.



Le potentiel de la borne de sortie est égal au potentiel de la borne d'entrée si l(interrupteur A est ouvert (A=0).

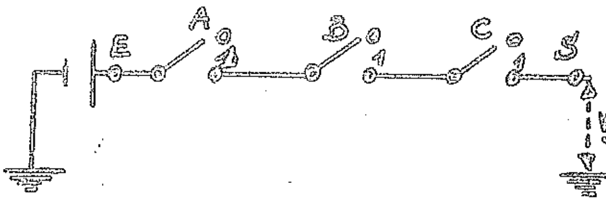
On a $\underline{S= E.\bar{A}}$

En effet, S=1 si et seulement si E=1 et A=0.

Ce circuit illustre donc la <u>fonction " pas "</u> (négation)

2°) <u>Circuits à plusieurs interrupteurs.</u>

1. Soient trois interrupteurs A,B,C en <u>série</u>. Nous savons que le potentiel de la borne de sortie est égal au potentiel de la borne d'entrée si et seulement si les trois interrupteurs sont fermés.



Donc $S=F_{ABC}(E)$

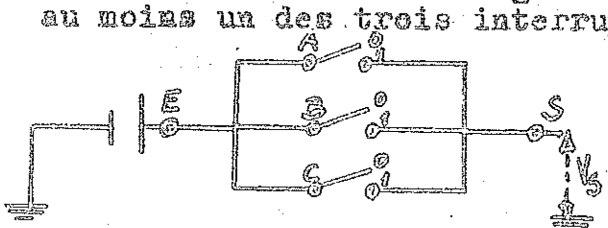
$S=A.B.C.E$

ou, plus simplement si nous supposons comme nous le ferons par la suite que E = 1,

$S = A.B.C$

Ce circuit logique illustre donc la <u>fonction "et"</u>

2. Soient trois interrupteurs A,B,C en <u>parallèle</u> .Le potentiel de la borne de sortie est égal au potentiel de la borne d'entrée si au moins un des trois interrupteurs est fermé.



Donc $S=A+B+C$

si nous convenons comme précédemment que E=1

$S=(A+B+C).E$

Ce circuit illustre donc la <u>fonction " ou "</u>

Ayant réalisé les circuits " pas ", " et ", " ou ", nous sommes à même de réaliser à l'aide d'interrupteurs une fonction logique quelconque. Grâce aux tubes à vides, aux relais, aux semi-conducteurs on a pu rendre automatique et beaucoup plus rapide le fonctionnement de tels circuits.

c) <u>CIRCUITS A RELAIS.</u>

1°) <u>Introduction.</u>

Les relais électromagnétiques fonctionnent grâce au principe des électroaimants. Ils constituent des dispositifs capables d'établir ou d'interrompre un ou plusieurs circuits suivant l'excitation appliquée aux bornes de la bobine du relai.

Le temps de réponse (durée qui s'écoule entre l'excitation et le travail) accuse une certaine lenteur ayant pour conséquence la disparition des relais dans les systèmes nécessitant une grande rapidité (calculatrices électroniques,...).Toutefois dans les automatismes industriels où la rapidité de connexion n'est pas exigée leur emploi subsiste. Les relais(interrupteurs automatiques) illustrent eux-aussi les fonctions booléennes.

2°) Fonctionnement.

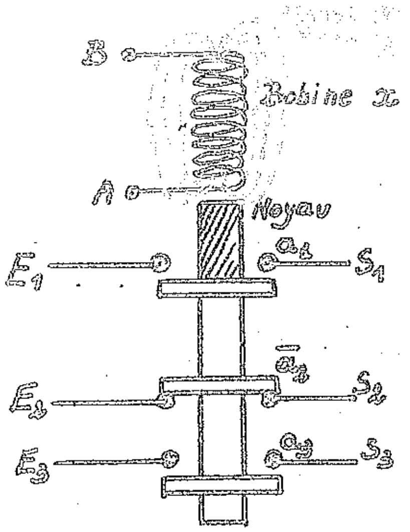


Fig 1

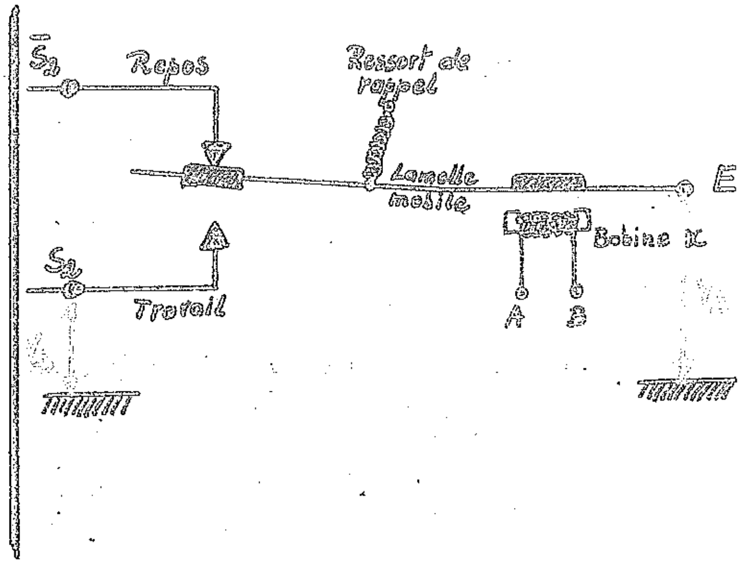


Fig 2

La présence d'un courant dans la bobine excitatrice a pour effet de créer un champ magnétique suffisant pour attirer le noyau ou la lamelle.
En l'absence de courant dans la bobine, le poids du noyau ou la force exercée par le ressort de rappel détermine la position de repos.
1. Dans le cas de la figure 1,
-Si la bobine est excitée, nous obtenons

$$S_1 = E_1 \qquad S_2 = -E_2 \qquad S_3 = E_3$$

avec, si a_1 , $\bar{a}_2$, a_3 sont respectivement les interrupteurs,

$$a_1 = 1 \quad , \quad \bar{a}_2 = 0 \quad , \quad a_3 = 1.$$

-Si le relai est en position de repos, on a

$$S_1 = - E_1 \qquad S_2 = E_2 \qquad S_3 = - E_3$$

avec $a_1 = 0$, $\bar{a}_2 = 1$, $a_3 = 0$

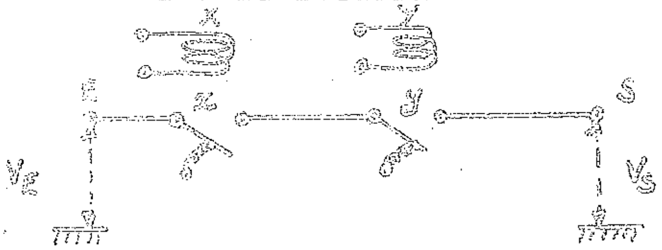
$S_1 = E$ et $S_2 = \bar{E}$

Dans les deux cas, si la variable x représente l'état de la bobine on a.

$S = E.x$ $x = 1$ si la bobine est excitée et 0 si non.

3°) Circuits logiques à relais.

- Fonction " et".



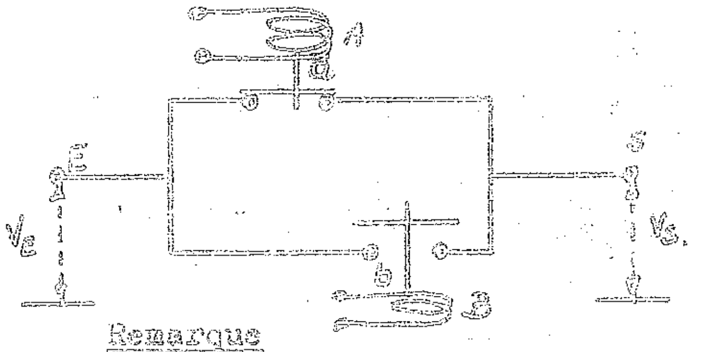
On a

$$S = E.x.y$$

Donc $V_S = V_E$ si et seulement si

$E = 1$ et $x.y = 1$.

Fonction " ou ".



On a

$$S = E.(\bar{a} + b)$$

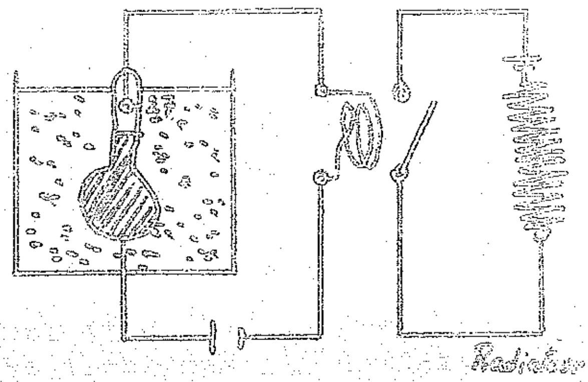
Donc $V_S = V_E$ si et seulement si

$E = 1$ et $\bar{a} + b = 1$.

Remarque

Le fonctionnement d'un relai sera souvent commandé par un bouton poussoir, par un mécanisme pouvant être actionné par l'intermédiaire de phénomènes naturels (lumière, ...)

Par exemple, dans la figure ci-contre ce sont les variations de température qui commandent l'état du relai par l'intermédiaire d'un thermomètre. Lorsque la température atteint 27°C, le niveau du mercure permet au courant de passer et d'actionner un relai destiné par exemple à commander la mise en route d'un système de chauffage.



SEMI-CONDUCTEURS ET CIRCUITS LOGIQUES.

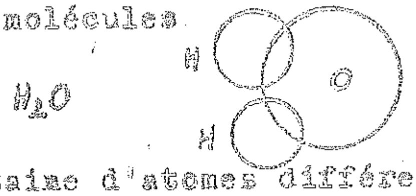
A, Semi-conducteurs.

1°) Introduction.

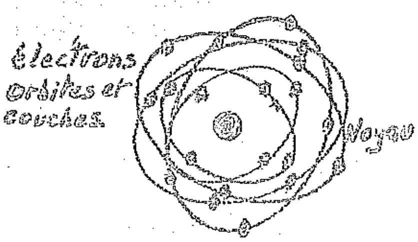
Les circuits logiques auxquels on demande une grande sécurité de fonctionnement et une grande rapidité sont de plus en plus réalisés grâce aux éléments semi-conducteurs ceux-ci présentant entre autres avantages sur les relais leur dimension réduite, leur grande fiabilité, une faible consommation, ...

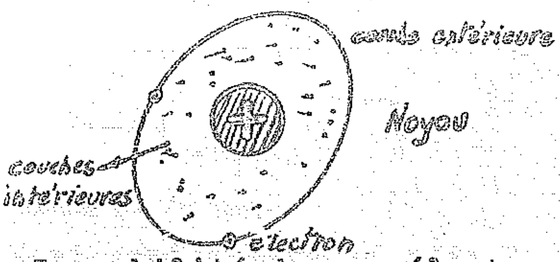
2°) Hypothèse atomique et conductibilité.

Tout corps est constitué d'assemblages plus ou moins complexes et très divers de petites particules appelés atomes. Ceux-ci forment à leur tour lorsqu'ils sont groupés des molécules.
Voici, par exemple, la représentation d'une molécule d'eau constituée comme on le sait de 2 atomes d'hydrogène et d'un atome d'oxygène.



Il existe, à notre connaissance une centaine d'atomes différents.
L'atome est défini comme la plus petite partie d'un corps simple que l'on peut obtenir tout en conservant les propriétés physiques et chimiques de ce corps.
On considère l'atome comme étant constitué d'un noyau (à charge électrique positive) autour duquel gravitent des électrons (à charge négative) disposés sur différentes orbites constituant elles-mêmes des couches à différentes distances du noyau.
Le nombre d'électrons sur les différentes couches est caractéristique de l'élément auquel appartient l'atome.
Seuls les électrons de la couche extérieure déterminent la capacité de l'atome à participer à des réactions chimiques avec d'autres atomes, ou de manifester des caractéristiques électriques.

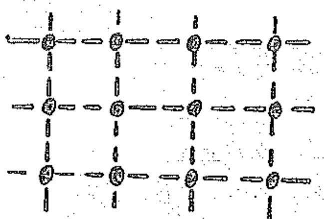




Le noyau exerce sur les électrons extérieurs une force d'attraction due à l'opposition des charges électriques et variant selon le type d'atome.
Si ces électrons peuvent être facilement enlevés à l'aide d'un champ électrique, l'élément dont est issu cet atome est dit bon conducteur.
La mobilité de ces électrons extérieurs caractérise donc la conductibilité d'un corps.
Ainsi, les <u>métaux</u> perdent facilement leurs électrons extérieurs. Ils sont <u>bons conducteurs</u>. En libérant ces électrons ils deviennent des particules positives appelés <u>ions +</u>.
Les <u>non-métaux</u>, au contraire, ont tendance à capturer des électrons supplémentaires et à devenir ainsi des particules négatives appelées <u>ions -</u>.
Les <u>semi-conducteurs</u> sont des corps dont la densité des électrons extérieurs est beaucoup plus faible que dans un métal.

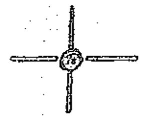
Remarque.
Les atomes s'unissent entre eux pour former des molécules en captant en libérant ou en mettant en commun certains électrons extérieurs. S'ils sont mis en commun la liaison est appelée covalence.

3°) Constitution et propriétés des semi-conducteurs.
Les semi-conducteurs sont des corps dont la densité des électrons extérieurs croît avec la température (ces électrons étant issus des atomes lors des ruptures de liaison.)
Leurs atomes sont unis par covalence ce qui leur donne une structure cristalline. Leur résistivité est comprise entre 10^{-3} et $10^{7}\Omega$ cm à 25°C.Atitre de comparaison, celle des métaux est de l'ordre de 10^{-4} et celle des isolants comprise entre 10^{12} et $10^{18}\Omega$ cm.
Les semi-conducteurs que l'on utilise sont notamment le silicium et le germanium purs cristallisés.Leurs atomes possèdent 4 électrons périphériques. Tous les électrons sont fermement maintenus en place dans un atome de ces corps purs.



Mise en commun des électrons extérieurs.

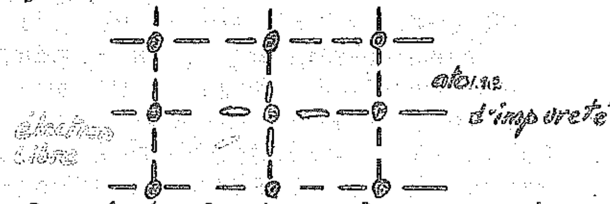
Structure du cristal



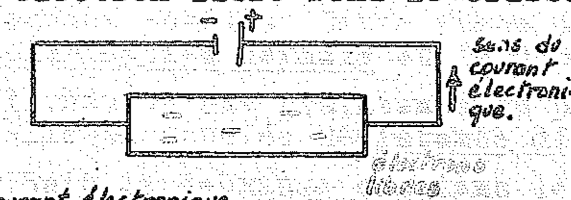
4 électrons extérieurs.

Atome.

Semi-conducteurs de type N.
Si on ajoute à cette structure cristalline pure une infime partie d'atomes dits d'impureté qui possèdent 5 électrons sur la couche extérieure, les atomes d'impureté se lient aux autres suivant la même structure mais en laissant ainsi des électrons extérieurs libres(1 par atome). Le semi-conducteur obtenu est dit de type N (négatif).

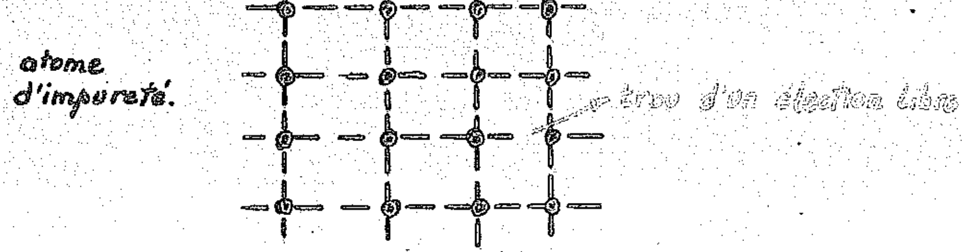


L'électron libre rend le cristal ainsi formé conducteur du courant électrique.Les électrons libres se déplacent en effet dans le cristal pour se rendre à la borne + d'un générateur.



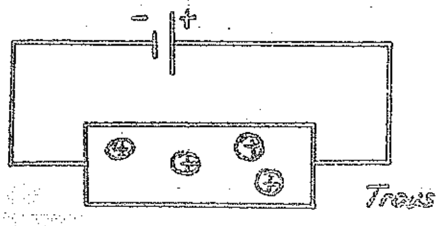
courant électronique.

Semi-conducteurs de type P.
Si on ajoute à la structure cristalline pure d'un semi-conducteur des atomes d'impureté possédant 3 électrons extérieurs, ces atomes se lient aux autres suivant la même structure mais il manque un électron extérieur pour chacun des atomes ajoutés. On dit qu'il y a un trou par atome ajouté.Le semi-conducteur obtenu est dit de typeP.



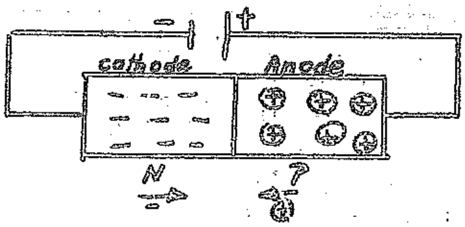
Remarque.
Dans la figure ci-dessus le trou s'est déplacé d'un atome d'impureté à un atome du cristal semi-conducteur car les forces de cohésion qui unissent les électrons aux atomes purs sont plus faibles que celles de l'atome impur qui attire les électrons dans son voisinage.

Ces trous ont les mêmes propriétés que les charges positives et toute tension appliquée aux bornes d'un cristal de semi-conducteur de type P provoque le déplacement de ces trous vers la borne négative du générateur.

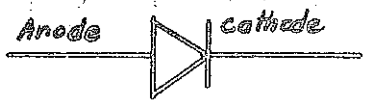


b) La diode à jonction.

1°) Description et fonctionnement.
Une diode à jonction se compose d'un semi-conducteur du type P et d'un semi-conducteur du type N entre lesquels existe un contact étroit.
- Soit le premier cas où la zone P appelée anode est reliée au pôle + du générateur et la zone N appelée cathode est reliée au −.



Passage du courant dans la diode passante.

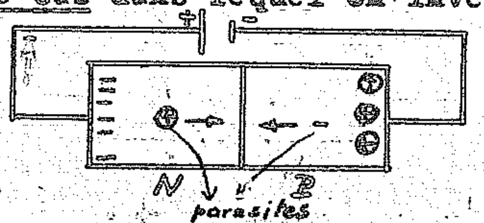


Symbole de la diode.

Les électrons extérieurs de la zone N et les trous de la zone P se meuvent respectivement vers les bornes + et − du générateur. Ces charges se neutralisent à la jonction où l'excès d'électrons tombe dans les trous ce qui permet la formation de nouveaux trous et électrons libres aux extrémités des semi-conducteurs. En effet l'énergie du générateur décroche des électrons extérieurs de leurs atomes. Ce déplacement ininterrompu de charges donne naissance à un courant continu. Cette façon de polariser la diode est appelée polarisation normale et la diode est dite diode passante.

Il résulte une résistance au passage du courant dans la diode mais celle-ci appelée Résistance directe est très faible.

- Soit le deuxième cas dans lequel on inverse les pôles du générateur



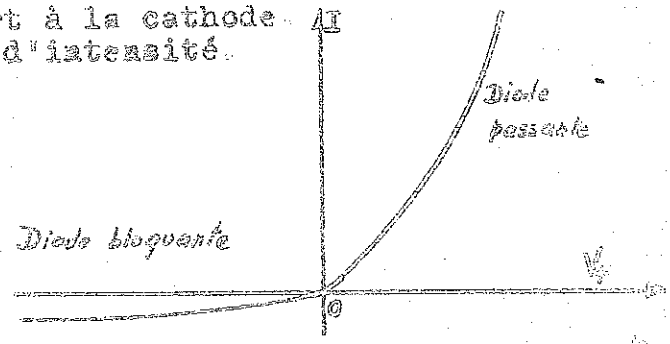
Passage du courant dans une diode bloquante.

Tous les trous et les électrons extérieurs s'éloignent de la jonction et par conséquence ne donnent pas naissance à un courant [illegible] à un très faible courant résiduel
Cette polarisation de la diode est dite inverse et la diode est dans ce cas appelée diode bloquante
Dans ce type de circuit, il résulte pour la diode une résistance inverse énorme au passage du courant

2°) Explication et conclusion.

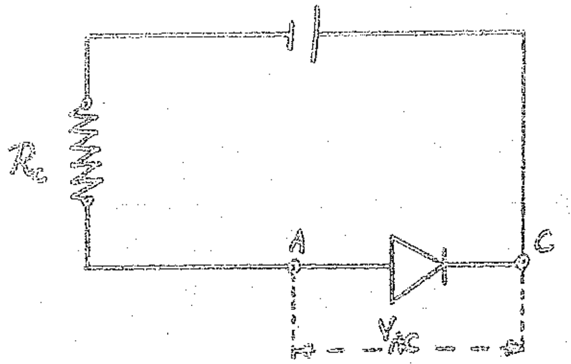
Etant donné qu'il existe une différence de potentiel entre les deux zones (il y a des ions + dans la zone N et des ions – dans la zone P) les charges positives sont repoussées par les ions + et les électrons libres par les ions – .
Aussi, en polarisation normale, le générateur affaiblit la barrière de potentiel qui existe entre P et N de sorte que les charges se meuvent beaucoup plus aisément. En polarisation inverse au contraire, cette barrière est élevée par le générateur.

En conclusion, la diode à jonction est conductrice si le potentiel de l'anode est positif par rapport à la cathode.
Soit $I = f(V)$ la fonction d'intensité.
On a le graphique ci-contre.
Plus l'anode est positive, plus l'intensité du courant croît.



c) La diode dans les circuits logiques.

1°) La diode bloquante.
Elle joue un rôle analogue à celui du relai en position de repos.



La résistance R_c de charge sert à limiter l'intensité du courant qui, trop élevée, détruirait la diode.
On a $V_{AC} \simeq E$

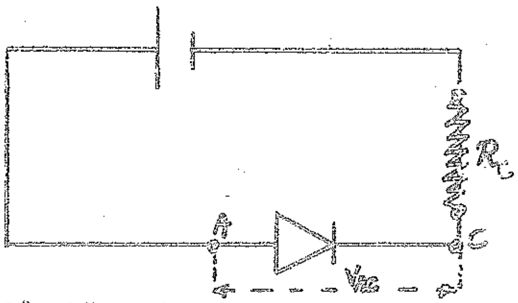
et $I \simeq 0$

L'intensité n'est pas tout à fait nulle à cause de la présence d'un faible courant résiduel dû surtout à l'échauffement de la diode.
Dans ce cas la différence de potentiel qui existe aux bornes du générateur se retrouve aux bornes de la diode et le courant qui peut passer est un courant très faible. On a

$$R_{inverse} > R_{charge} > R_{directe}$$

2°) La diode passante.

Elle joue un rôle analogue à celui d'un relai en position de travail



On a $V_{AC} \approx 0$

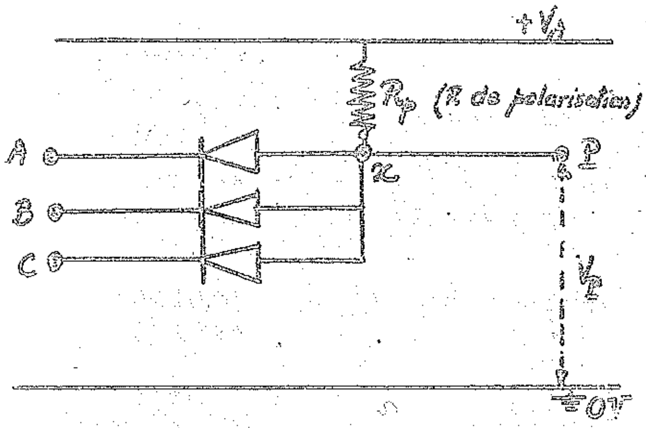
et $I \approx \frac{E}{R_c}$

car la résistance directe devrait être considérée.
Il y a passage d'un courant continu dans le circuit.

d) Circuits logiques à diodes.

La diode étant un organe susceptible de laisser passer ou non un courant p@ut être considérée comme un interrupteur presque idéal. La présence d'une différence de potentiel à l'entrée ou à la sortie d'un circuit sera représentée respectivement par 1 ou 0.(si cette différence est nulle).

1°) Fonction " et ".

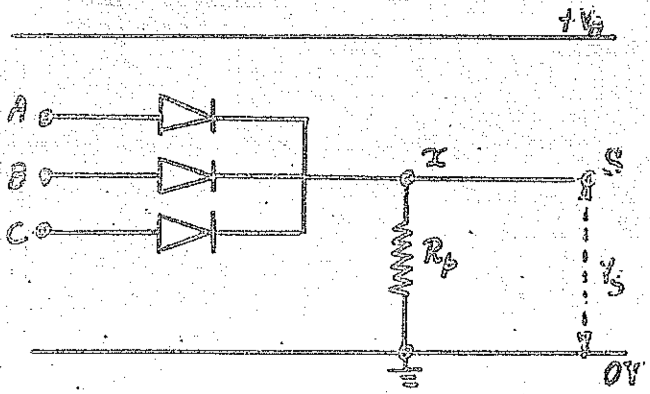


Pour que $P = 1$ (passage d'un courant à la sortie.),
il faut que $V_P = +V_A$
Il faut donc que la différence de potentiel aux extrémités de la résistance soit nulle ou encore il faut que x ne puisse pas être au potentiel de 0 V. La seule condition à réaliser est la suivante: il faut qu'il existe une différence de potentiel aux bornes de chaque diode telle que
$V_A = V_B = V_C = +V_A$ ce qui rend les trois diodes bloquantes.

On a ainsi $V_P = +V_A$ et $V_A . V_B . V_C = V_P$

ou encore $A.B.C=P$.
En effet pour toute autre combinaison que A=1 et B=1 et C=1, on a P=0.
Remarquons que les résistances (directes, inverses, et de polarisation) constituent un diviseur de tension.

2°) Fonction " ou ".



Pour que S=1, il faut $V_S = +V_A$
A cet effet il suffit que l'une au moins des quantités V_A ou V_B ou V_C soit égal à $+V_A$ car les diodes sont passantes.
Dans ce cas la différence de potentiel se retrouve aux bornes de la résistance de polarisation dont la valeur est beaucoup plus grande que celle de la résistance directe de la diode.

On a donc $V_A + V_B + V_C = V_S$ ou encore $A + B + C = S$.

Remarquons qu'un signal sur la borne de sortie n'influence en rien les potentiels d'entrée: c'est le rôle des diodes. DE même un signal sur une entrée n'influence pas les autres entrées.

e) Cellule photoélectrique.

Il est facile de constater qu'un semi-conducteur devient plus conducteur lorsqu'il est éclairé.(diminution de la résistivité) Certains semi-conducteurs sont sensibles pour le spectre normal. D'autres seulement pour l'infra-rouge.

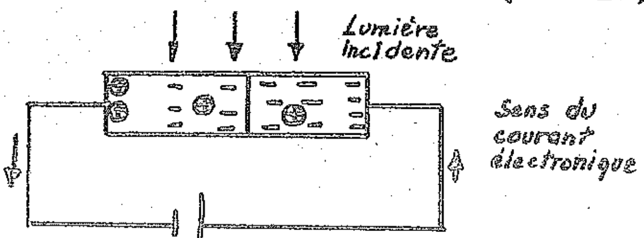
Explication.

Les photons que libère la lumière sont bombardés sur le semi-conducteur et ont pour effet de libérer une paire électron-trou ou seulement un électron d'un centre donneur. C'est l'énergie des photons incidents qui libèrent les porteurs de charge. C'est surtout aux électrons (beaucoup plus rapide que les trous) que les semi-conducteurs doivent une diminution de leur résistivité. En effet sous l'action d'une énergie très faible les impuretés libèrent des électrons.

Dans le cas des cellules au sulfure de cadmium, la sensibilité est très forte (20.000 fois celle des cellules au sélénium) et le courant qui apparaît est suffisant pour actionner un transistor ou un relai,...

Photodiode.

Dans le cas d'une diode, les électrons libérés par les photons de la lumière possèdent une énergie suffisante pour remonter la barrière de potentiel. Il y a donc apparition d'un courant (faible) qui pourra être amplifié (par un transistor comme nous le verrons plus loin.)



La lumière libère des charges. Les charges qui apparaissent libèrent un faible courant supérieur au courant résiduel.

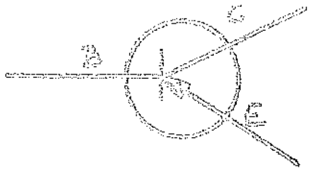
Dans le cas d'une photorésistance, on utilise simplement la variation de la résistivité de la cellule avec la lumière incidente.

3. LE TRANSISTOR.

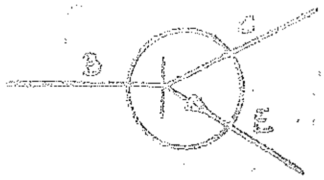
a) Description.

1°) Introduction.

Le transistor à jonction est composé de semi-conducteurs disposés dans l'ordre N - P - N ou P - N - P dont les extrémités sont respectivement appelées base, collecteur, émetteur.



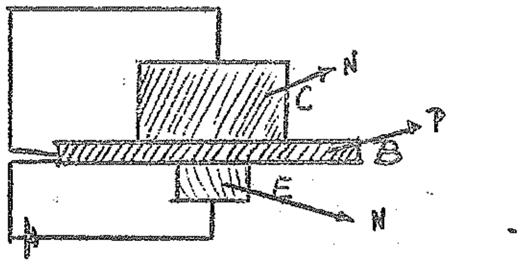
Symbole du transistor
P N P



Symbole du transistor
N P N

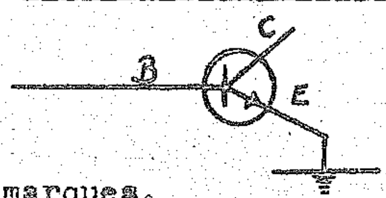
Pour diverses raisons de commodité, nous emploierons le transistor NPN. Tout ce qui sera dit pour le NPN(polarisation,électrons extérieurs, trous,...) sera équivalent pour le PNP si on inverse les polarités, si on remplace les trous par les électrons,etc.
De plus tous les circuits utilisés seront à émetteur commun(potentiel de masse à l'émetteur du transistor) car ces circuits sont les plus appropriés à l'étude qui va suivre.

2°) Explication.



On voit aisément sur ce schéma que la diode collecteur - base est bloquée alors que la diode base - émetteur est passante . De plus, la zone P est plus faible que l'épaisseur de la zone de diffusion des électrons émis par l'émetteur.
Lorsque la diode B-E est passante, l'émetteur expulse des électrons extérieurs et ceux-ci franchissent la zone P(car ils ont suffisamment d'énergie) sans se combiner avec les trous présents dans la base. La différence de potentiel aux bornes de la diode accélère le passage des électrons extérieurs et ceux-ci, dans le collecteur, en perturbent d'autres compte tenu de leur énergie.
La diode C-B qui était bloquante devient donc passante car le déplacement des électrons émis par l'émetteur crée un courant(la résistance inverse s'affaiblit, en effet, considérablement.)
Etant donné que la résistance E-B-C s'affaiblit au passage des électrons, un courant(plus important que celui B-E) prend naissance entre l'émetteur et le collecteur. Le transistor a donc amplifié un faible courant.
Si la diode B-E est bloquante, il apparaît à la diode B-C une résistance inverse très élevée. Donc, dans ce cas, le courant E-C est très faible.

3°) Montage du transistor à émetteur commun.



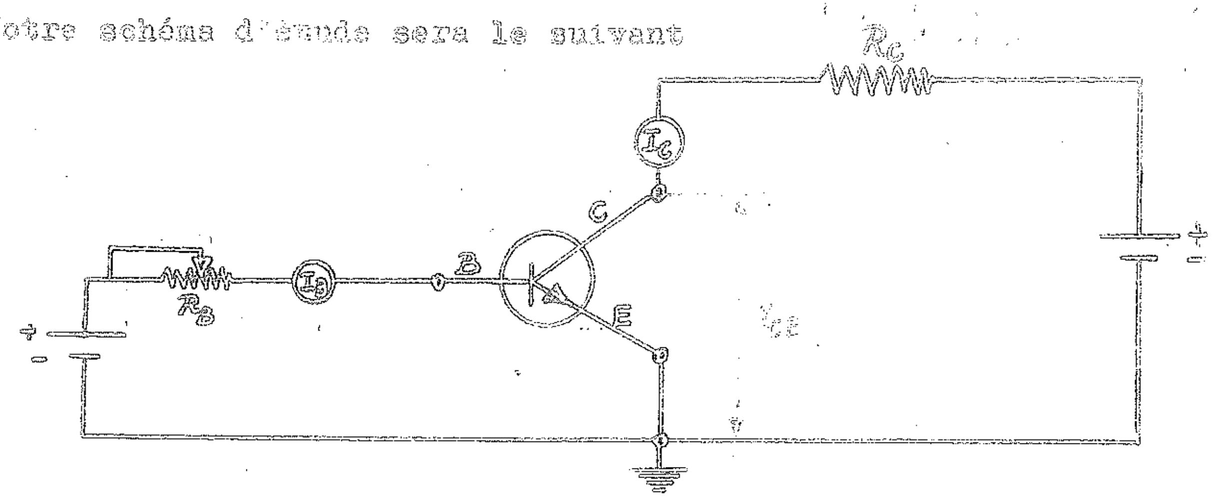
Dans ce cas, le potentiel de E est nul. D'où $V_B > V_E$ si l'on veut qu'il y ait un courant entre C et E.

Remarques.
En polarisation normale, on a $V_C \geqslant V_B > V_E$

En polarisation inverse, on a $V_B \leqslant V_E$.

b) Fonctionnement du transistor.

Notre schéma d'étude sera le suivant



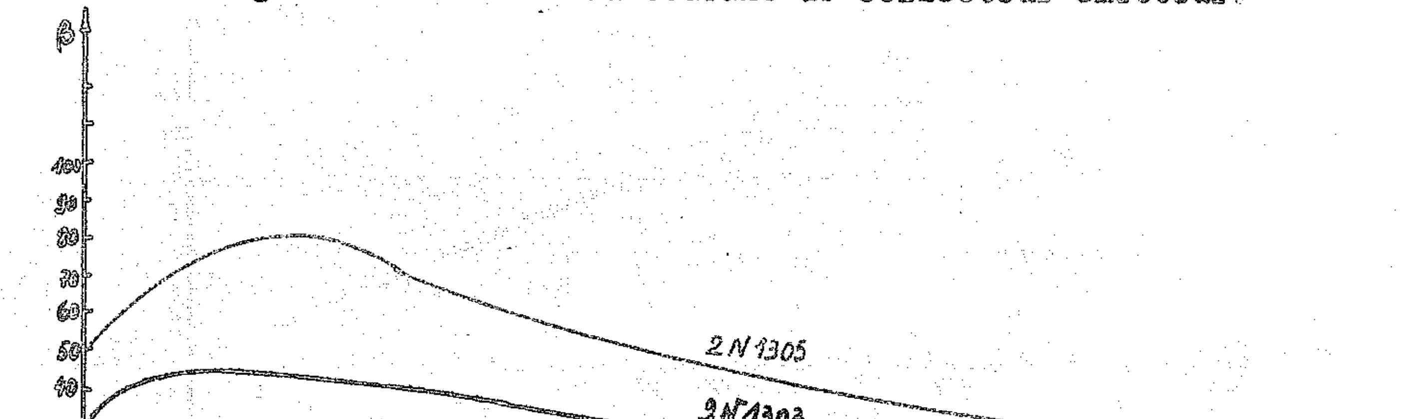
Il existe trois montages fondamentaux du transistor : montages à base commune, à émetteur commun et à collecteur commun. Le montage à émetteur commun est celui qui possède le plus petit écart entre les résistances d'entrée et de sortie. Son emploi est donc le plus facile lorsque l'on met plusieurs de ces montages en étage. Le transistor fonctionnant comme un amplificateur nous savons que

$$I_C = I_B \cdot \beta$$

où β représente le facteur de gain du transistor lorsqu'il est monté en émetteur commun.
Le paramètre β varie fortement suivant le type de transistor, la température, l'intensité de courant base-collecteur, etc.
La valeur de ce paramètre est comprise entre 30 et 100.
On comprend facilement qu'en l'absence d'une résistance de charge R_C, l'intensité du courant collecteur-émetteur (I_C) serait beaucoup trop grande et risquerait fort de détériorer le transistor.
Notons aussi que V_{CE} est fixée suivant le type de transistor employé de sorte que cette tension est suffisante pour assurer le transport des électrons émis par l'émetteur jusqu'au collecteur.

1°) Choix de I_C

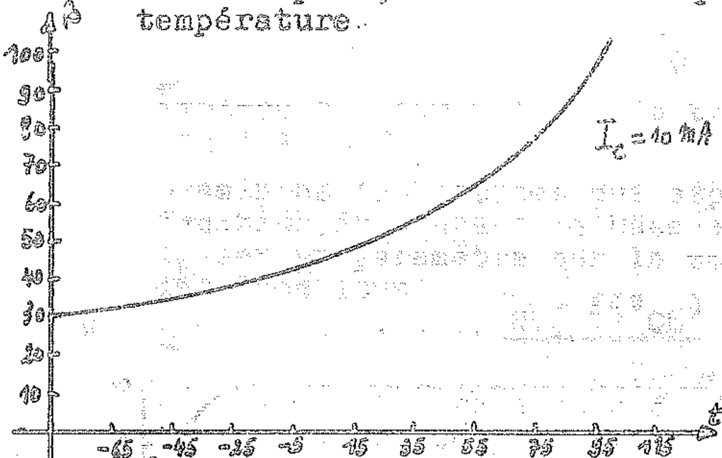
Il faut, pour ce choix, examiner la courbe qui détermine la variation du gain en fonction du courant de collecteur-émetteur.



Par exemple le transistor 2N103 est tel que β est maximum pour I_C = 25 mA On choisira donc une valeur plus faible pour éviter tout risque de dissipation de chaleur aux jonctions. Une bonne valeur serait par exempe de 10mA.
La valeur de résistance de charge s'obtient alors en appliquant la loi d'Ohm. On a $R_C = V/I$

D'où $R_C = \frac{V_{CE}}{10 mA}$. Par exemple, pour une tension collecteur-émetteur appliquée de 10 V, on a $R_C = (10\ V : 10\ mA) = 1\ k\Omega$

D'autre part, on sait aussi que le gain β varie en fonction de la température.



Pour I_C = 10 mA, on a la variation indiquée par le graphique ci-contre. Or $I_B = \frac{I_B}{\beta}$ et nous devons choisir l'intensité minimale pour que I_B soit capable de saturer le transistor et provoquer ainsi un courant de collecteur d'intensité égale à 10mA. Sur ce diagramme nous prendrons la température la plus basse à laquelle on peut travailler, soit − 25°C de sorte que la valeur minimale de β que l'on pourrait obtenir soit environ égale à 21. La valeur I_B ainsi obtenue est l'intensité minimale nécessaire dans ces conditions pour saturer le transistor.

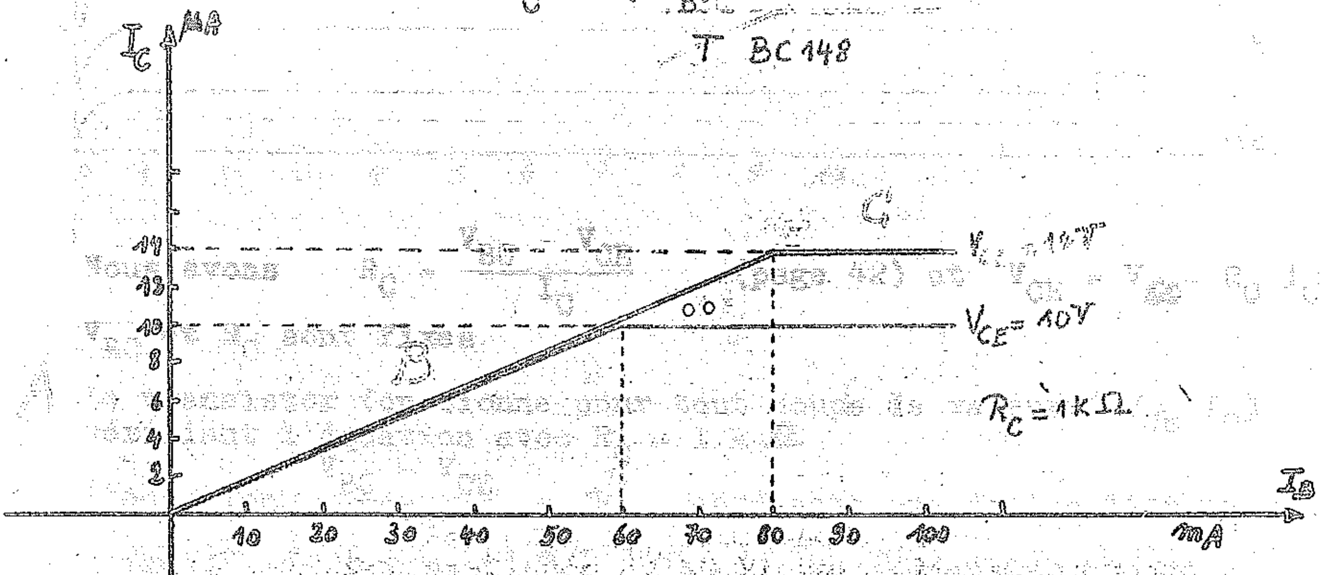
$$I_B = I_C/\beta = 10mA/21 = 0,48\ mA.$$

Remarques

Examinons les caractéristiques du transistor BC148 employé connaissant V_{CE}, R_C, I_C, I_B

Examinons la courbe qui exprime comment varie l'intensité du courant de collecteur en fonction de l'intensité du courant de base.

$$I_C = f(I_B)$$



Dans la zone A le transistor est bloqué et $I_B = I_C = 0$.
Puis de 0 à 60 (0à 80)mA pour I_B, apparaît une zône active où une petite variation de I_B produit une grande variation de I_C.

$$\frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \beta$$

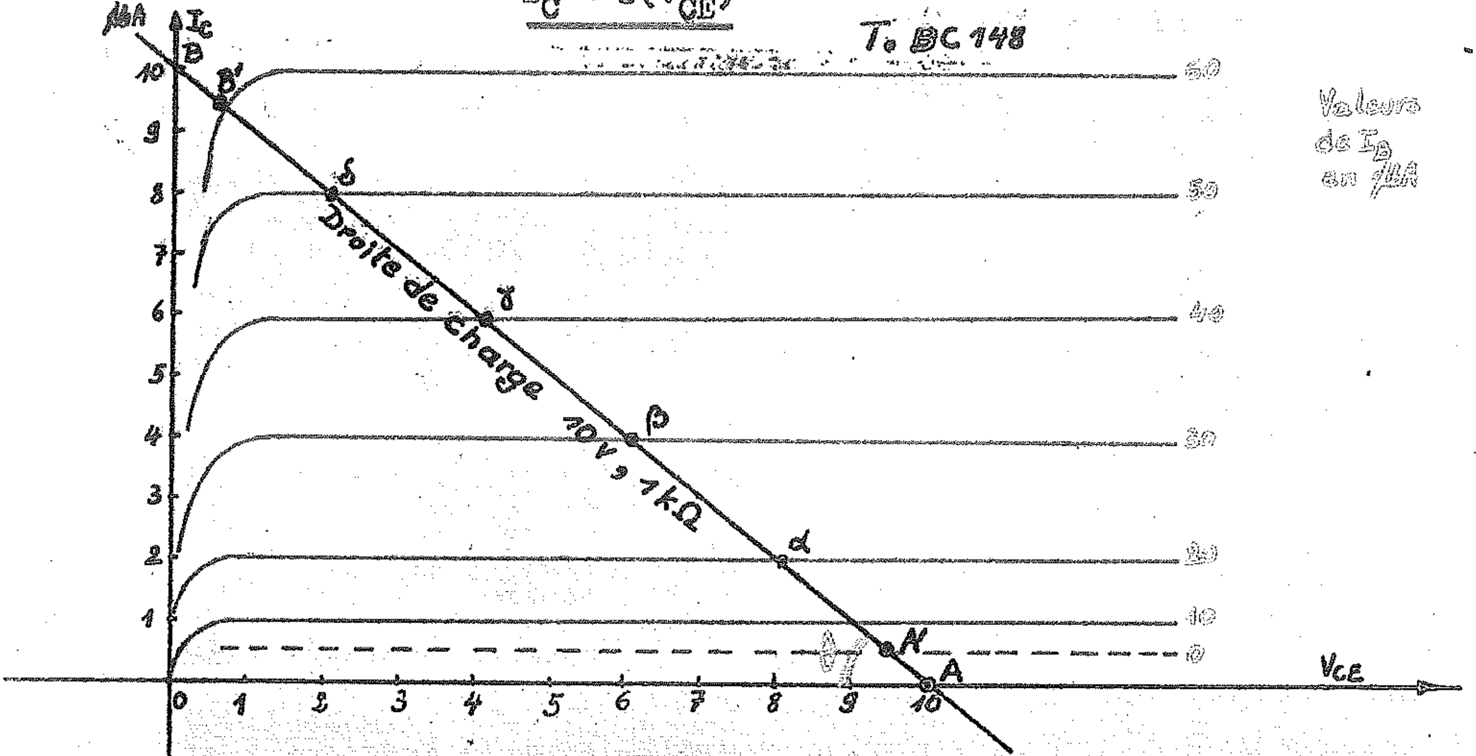
Ensuite, le transistor est saturé et nous avons la résistance qui limité l'intensité du courant de collecteur.

$$I_C = \frac{V_{CE}}{R_C}$$

Employé en commutation, le transistor ne travaille que dans les zones A et C.

Examinons les courbes qui expriment le courant de collecteur en fonction du courant de base et de la tension collecteur-émetteur. I_B est un paramètre sur le schéma. Les courbes figurées sont celles des fonctions

$I_C = f(V_{CE})$



Nous avons $R_C = \frac{V_{BC} - V_{CE}}{I_C}$ **(page 42) et** $V_{CE} = V_{CC} - R_C \cdot I_C$

V_{BC} et R_C sont fixes.

Le transistor fonctionne pour tout couple de valeurs(V_{CE}, I_C) vérifiant l'équation avec $R_C = 1\ k\Omega$.

L'équation $\frac{V_{BC} - V_{CE}}{I_C} = R_C$ **représente une droite dite de charge joignant les points A(V_{CE}, 0) pour le transistor bloqué et B(0, $\frac{V_{CE}}{R_C}$) pour le transistor saturé.**

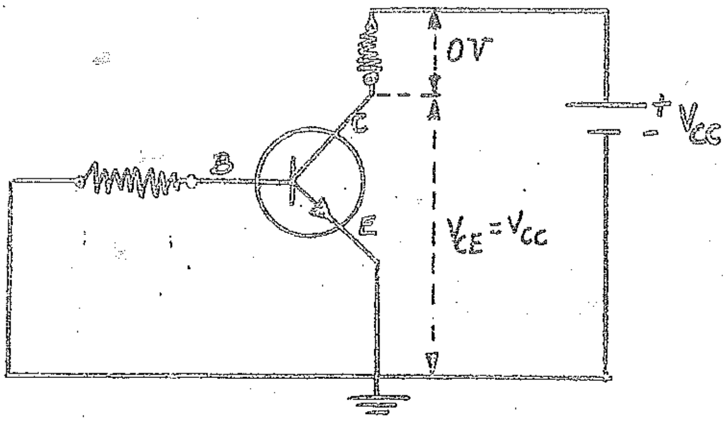
On a $\quad tg\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{I_C}{V_{CE}} = \frac{1}{R_C} \qquad$ Donc $\quad R_C = \cotg\theta$

Pour des valeurs de I_B données nous obtenons les points B', δ, γ, β, α, A' de fonctionnement du transistor.

c) <u>Le transistor en commutation.</u>

Dans notre algèbre de commutation nous ne considèrerons que les points de fonctionnement A et B (transistor bloqué ou saturé).

1°) <u>Transistor bloqué.</u>



Dans ce cas nous avons V_{CE} pratiquement égale à V_{CC} et $I_C \simeq 0$

Si $I_B = 0$, le point de fonctionnement est A' et le courant de collecteur représente un courant résiduel de très faible intensité semblable au courant inverse de la diode.

Pour éliminer au maximum ce courant, il faut polariser la base le plus négativement possible par rapport à l'émetteur.

Dans ce cas le fonctionnement du transistor est très proche du point A' et la puissance dissipée par le transistor est très faible. ($P = R.I^2.t$).

Si $V_B = 0$, alors $\quad V_{CE} = 1$.

2°) <u>Transistor saturé.</u>

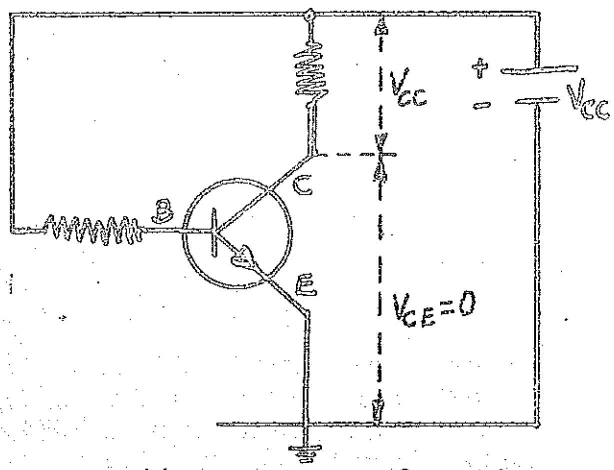
Dans ce deuxième cas, $V_{CE} \simeq 0$ et

$$I_C = \frac{V_{CC}}{R_C}$$

Plus I_B est grand, plus le point de fonctionnement est proche de B.

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{V_{CC}}{R_C \cdot \beta}$$

Si $V_B = 1$ alors $V_{CE} = 0$.



<u>Conclusion.</u>

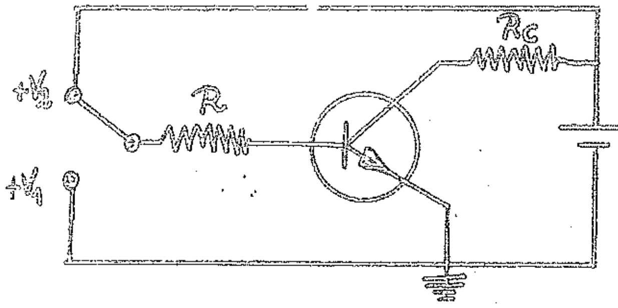
Le transistor employé en émetteur commun agit comme une fonction " pas ".

En effet, pour la variable d'entrée égale à 1, la variable de sortie est égale à 0 et réciproquement.

d) Calcul des valeurs des résistances

Lorsqu'on utilise ces circuits, généralement deux types de schéma sont à envisager.
Il s'agit dans ce court examen de rechercher(au moyen de résistances placées à l'entrée du circuit.) le meilleur compromis qui permettra d'obtenir le rendement optimal du matériel utilisé en fonction des différentes qualités (conditions techniques,...) exigées.
Voici quelques procédés de stabilisation technique :

1°)



La résistance R a deux fonctions:

1. Elle est employée pour éliminer au maximum le courant résiduel B-C (transistor bloqué). Il faut que la valeur de R soit la plus grande possible.

2. Mais lorsque le transistor est saturé, R, dont la valeur a été calculée en fonction du courant résiduel, présente une valeur beaucoup trop élevée.

Nous avons donc $I_B \geqslant \frac{I_C}{\beta}$ (transistor saturé)

Or $I_C = \frac{E}{R_{ch}}$ Donc $I_B \geqslant \frac{E}{\beta \cdot R_{ch}}$

$I_B \approx \frac{+V_2}{R}$ car la résistance de charge directe de la diode B-C est négligeable.

Donc $\frac{+V_2}{R} \geqslant \frac{E}{\beta \cdot R_{ch}}$ et $R \leqslant \beta \cdot R_{ch} \cdot \frac{+V_2}{E}$

Dans le cas où $E = +V_2$ on a $R \leqslant \beta \cdot R_{ch}$.

Remarques.

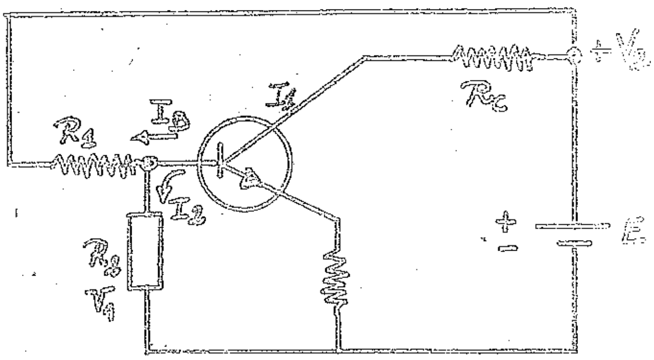
Si I_B n'est pas suffisant pour produire la saturation, alors la résistance E-C est grande. Le transistor, dans ce cas, ne sera pas suffisamment conducteur et bien vite il sera détérioré car la puissance augmentera très vite. $(P = RI^2)$
Nous avons tenu compte de ce risque de détérioration lorsque β a été choisi suffisamment petit (page4,). Cependant le courant résiduel, lorsque le trasistor est bloqué, sera plus élevé.
Pour que la résistance de base ne joue pas deux fonctions(incomplètes) on remplace celle-ci par deux résistances telles que la première (R_2 de valeur très élevée) limite fortement le courant résiduel B-C et que la seconde (R_1 de valeur déterminée) puisse établir le courant I_B désiré pour saturer le transistor.

2°) On a $I_1 = I_2 + I_B$ (courants dérivés.)

Or on a $I_B = \frac{I_C}{\beta}$ et pratiquement $I_1 = \frac{V_2}{R_1}$ et $I_2 = \frac{V_1}{R_2}$

Donc $\frac{V_2}{R_1} = \frac{I_C}{\beta} + \frac{V_1}{R_2}$

ou $R_1 = \dfrac{V_2}{\frac{I_C}{\beta} + \frac{V_1}{R_2}}$



R_2 devant assurer le limitation maximale du courant résiduel.
Mais, dans le cas du transistor bloqué, il faut que V_2 soit égal au moins à -1 V (base négative par rapport à l'émetteur)
On a alors $R_2 = \frac{V_1 - (-1)}{I \text{ du c.résiduel}}$

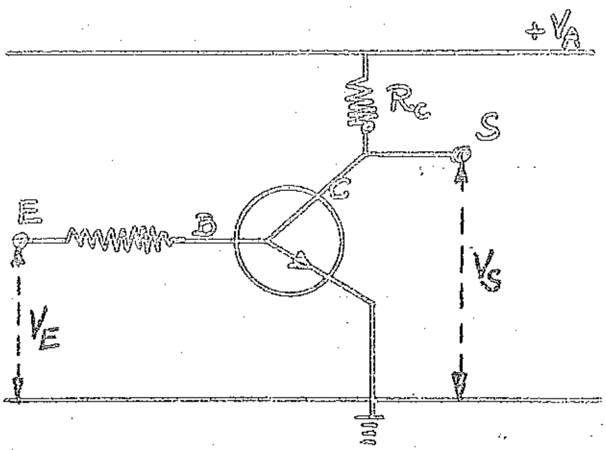
Remarques.
Si on met une ampoule à la sortie du circuit il faut tenir compte de la résistance de celle-ci lorsqu'elle est éteinte. On ajoutera alors cette valeur à la résistance de charge.

e) Circuits logiques à transistors.

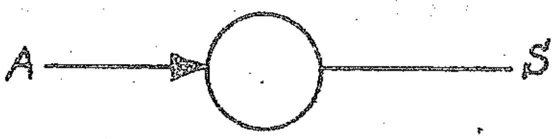
1°) Circuit " pas ".
Il a déjà été vu lors de l'examen du transistor.
Si la tension d'entrée est nulle ou négative, (E = 0), la tension de sortie est pratiquement égale à V_{CC} (S = 1).
Si la tension d'entrée est positive(E=1), la tension de sortie est pratiquement nulle(S=0).
En désignant la fonction " pas " du circuit par f, on a donc

f(E) = S

avec f(0)=1 et f(1)=0



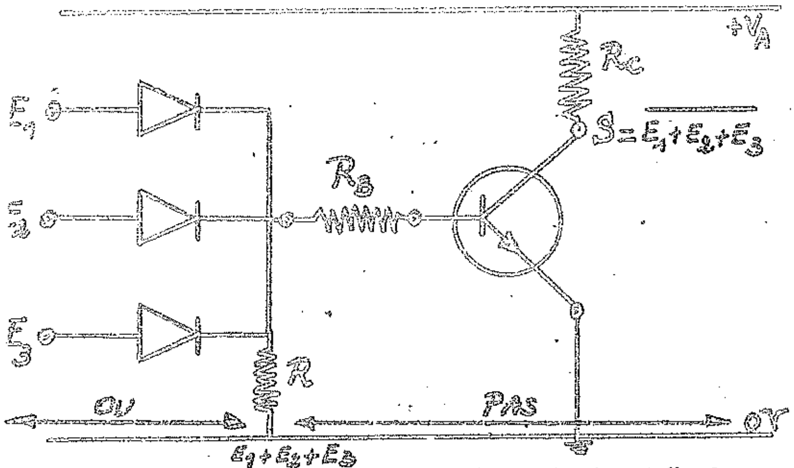
La fonction "pas" se représente symboliquement par le schéma ci-dessous:



$S = \overline{A}$

2°) Circuit " Ni "

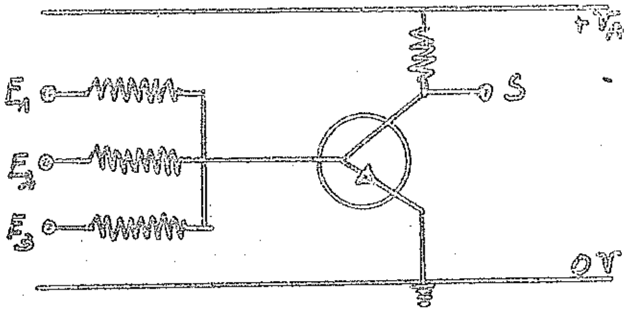
Il est comparable au précédent mais le transistor comporte plusieurs entrées.



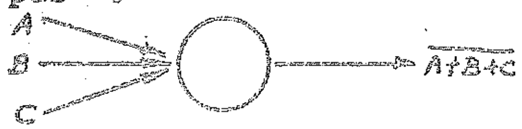
Le circuit est donc défini comme étant l'inverse d'une fonction "ou".
Il est composé d'un circuit "ou" dont la sortie est reliée à un circuit "pas".
Les diodes du circuit " Ni" peuvent être remplacée par des résistances. En effet, la fonction de ces diodes est remplacée par la diode base-collecteur.

Explication:
La sortie du circuit "ou" est égale à 1 si et seulement si une des anodes est positives. Dans ce cas le circuit "pas" fonctionne aussi car la base a aussi comme valeur 1.

Dans le cas du circuit à résistances, la base du circuit "pas" a la valeur 1 si et seulement si une des résistances est 1.



Remarque.
La fonction " pas " est aussi une fonction " Ni " dont une seule entrée est utilisée.
Aussi la représentation symbolique ci-dessous du circuit " Ni " est-elle la généralisation de celle du circuit " pas ".



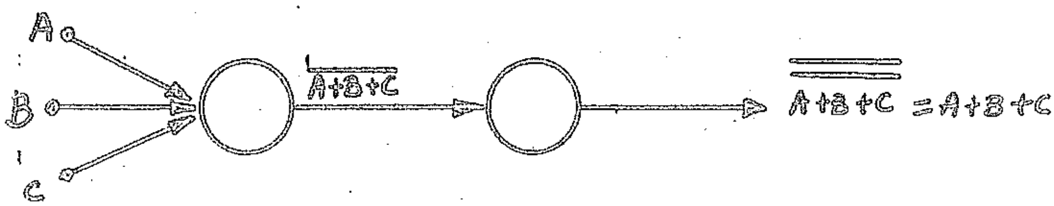
Dans les chaînes de circuits, l'utilisation des diodes présente un grand désavantage : affaiblissement des signaux, influence des courants inverses, effets thermiques,... Les circuits à transistors grâce à leur fonction amplificatrice mettent hors cause tous ces inconvénients.

3°) La fonction " ou " et le circuit "Ni".

Grâce aux principes de base de la logique, nous savons que

$$A + B + C = \overline{\overline{A + B + C}}.$$

La fonction " ou " peut donc être réalisée grâce aux circuits "Ni" comme l'indique le schéma ci-dessous.

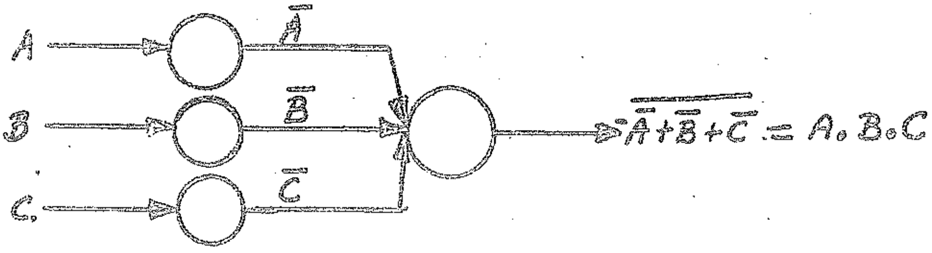


4°) <u>La fonction " et " et le circuit " Ni ".</u>

Grâce aux lois de De Morgan, on a :

$$A \cdot B \cdot C = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}$$

Cette fonction " et " peut donc elle-aussi être représentée grâce aux seuls circuits " Ni ".



<u>Conclusion</u>.

Les fonctions logiques de base "pas", "et", "ou" peuvent toutes être figurées grâce aux circuits " Ni ". En conséquence, toute fonction logique (booléenne) peut être réalisée avec ces circuits. C'est ce qui sera utilisé dans le simulateur décrit plus loin.

e) <u>Quelques circuits particuliers</u>.

Tous les circuits décrits ci-après sont utilisés dans le simulateur de type NORBIT construit.

1°) <u>Circuits de temporisation</u>.

Etant donné que la notion de temps intervient non seulement pour assurer une succession ordonnée d'opérations logiques mais encore suivant la notion de durée sur le fonctionnement de certains organes, il convient d'examiner les principaux circuits de base.

- <u>circuits de temporisation</u>.

Ils sont utilisés pour retarder la transmission d'un signal A. Ce retard peut s'opérer à l'enclenchement , au déclenchement ou encore à l'enclenchement et au déclenchement de certains organes. Si A est le signal, nous avons à l'entrée :

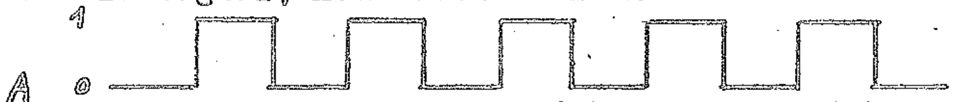
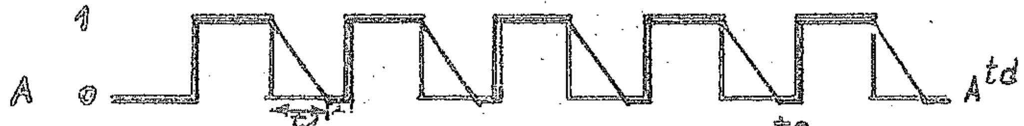
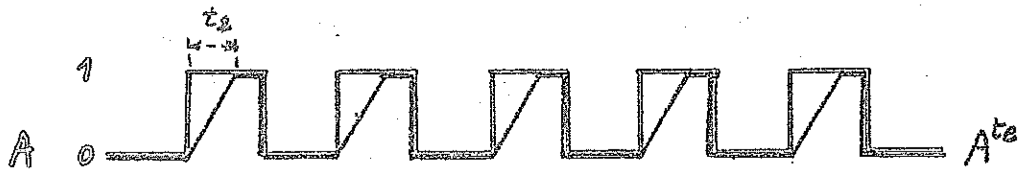


schéma du courant qui s'établit (1)et se coupe(0) périodiquement. A la sortie, on a dans les circuits:

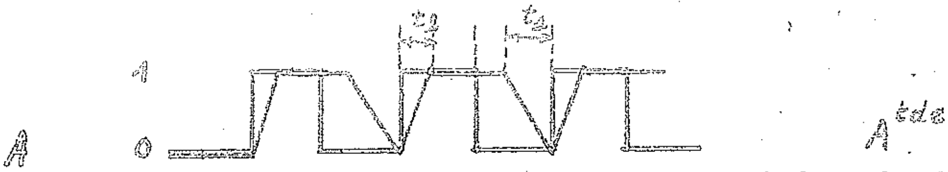
- <u>qui réalisent la temporisation au déclenchement</u> (A^{td})



- <u>la temporisation à l'enclenchement</u> (A^{te})



- La temporisation à l'enclenchement et au déclenchement (A^{tde})



Si on examine les diverse combinaisons possibles de tel circuits, on déduira par exemple que

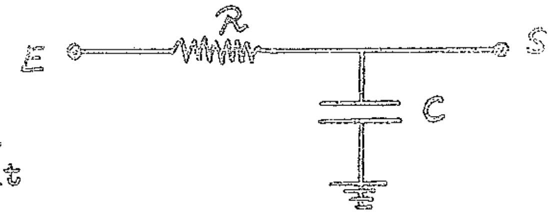
$\overline{A^{tde}} = \overline{A}^{tde}$, $\overline{A^{td}} = \overline{A}^{te}$, $\overline{A^{te}} = \overline{A}^{td}$

On peut aisément vérifier ces identités par les tracès d'impulsion indiqués ci-dessus.

- Schéma de ces circuits.

1°. Pour Atde

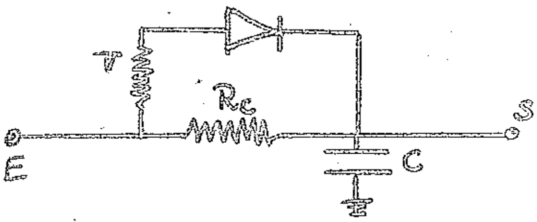
Une résistance et un condensateur qui se charge progressivement à la tension d'entrée à travers la résistance. Dès que le condensateur est chargé, les charges électriques passent entièrement par la sortie et on retrouve le potentiel positif qui est nécessaire. Au déclenchement, la décharge du condensateur prolonge pendant une courte durée la présence du potentiel.



2°. Pour A^{td}

Une résistance de charge que l'on shunte par une diode, celle-ci évitant le temps de charge caractéristique du condensateur à l'enclenchement (cette diode est protégée par une résistance).

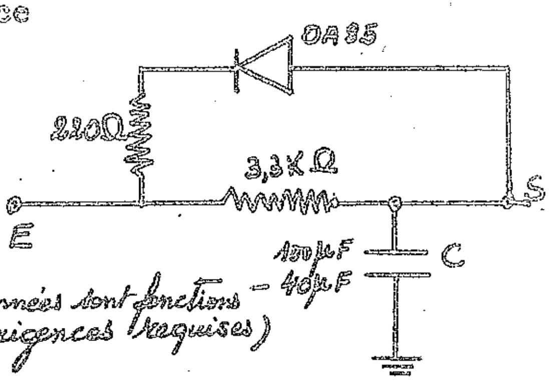
La diode ne conduit en effet le courant que dans un seul sens.



3°) Pour Ate

Une résistance de charge que l'on shunte par une diode, celle-ci étant aussi protégée par une résistance de faible valeur (mais la diode est placée en sens inverse).

4°. Pour les temporisations longues et précises on combine plusieurs de ces circuits dans lesquels la capacité du condensateur est très élevée et où larésistance est de préférence variable.



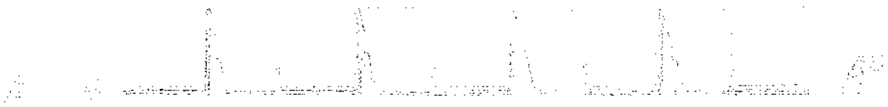
(Les données sont fonctions des exigences requises)

2°) Circuits différentiateurs.

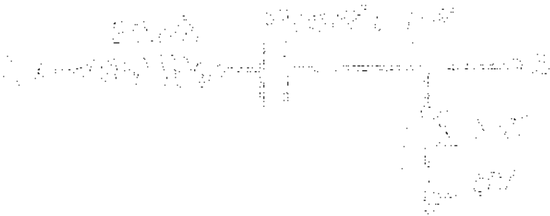
1. Différentiateur direct.

Il constitue un circuit qui transmet sous forme d'impulsions l l'enclenchement d'un signal de commande et qui retrouve presque d directement la valeur 0, même si l'organe de commande reste enclenché.

A étant le signal d'entrée, on désigne par A^{c} le signal de sortie.



Le circuit de différentiation [illegible] est

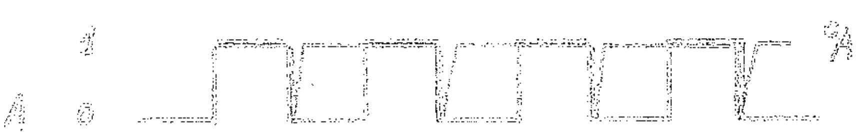


Les valeurs indiquées sont actuellement données aux circuits construits.

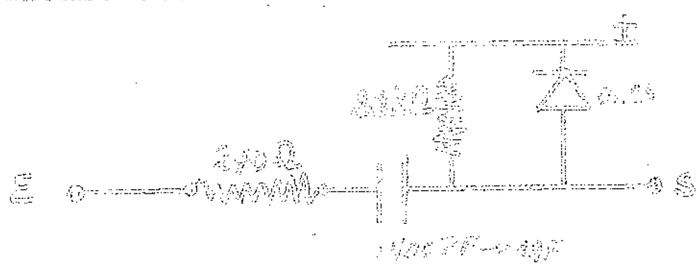
Explication:
[illegible] d'un tel circuit [illegible] [illegible] que c'est [illegible] une large série [illegible].
Aussi longtemps qu'une [illegible] positive est [illegible] à l'entrée d'un tel circuit, il apparaît sur la première plaque du condensateur des trous (assimilables à des charges positives).
Par un effet d'influence (trop complexe pour l'expliquer ici), des électrons (charges négatives) apparaissent sur la seconde plaque du condensateur. Ces charges de signes opposés ne se détruisent pas mutuellement à cause de la présence du diélectrique du condensateur. La diode étant bloquée, ces électrons ne peuvent provenir que d'atomes du conducteur, qui ayant ainsi perdu des électrons périphériques deviennent porteurs de trous (charges positives) qui se manifestent un court instant pendant le temps de charge du condensateur. Dès que le condensateur est chargé, un équilibre tend à nouveau à se produire et les seules perturbations d'atomes servent exclusivement à reboucher, par des électrons, les trous [illegible] par les atomes [illegible]. La polarité de la cathode de [illegible] égale à celle de l'anode, la diode permet de rétablir cet équilibre entre les charges positives et négatives.

2. Différentiateur inverse.

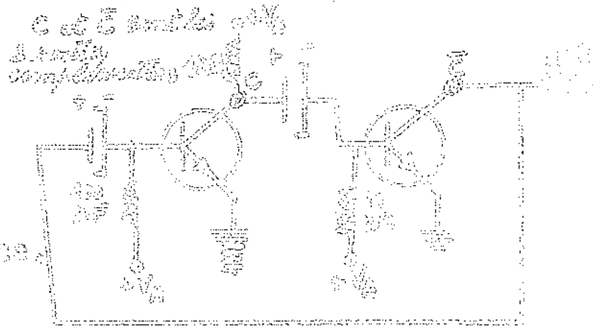
Lorsqu'un signal est appliqué à l'entrée d'un tel circuit, il passe de l'état 1 à l'état 0 pendant une très courte durée puis retrouve cet état 1.
Si A est le signal d'entrée, le signal de sortie est désigné par $^{\circ}A$.



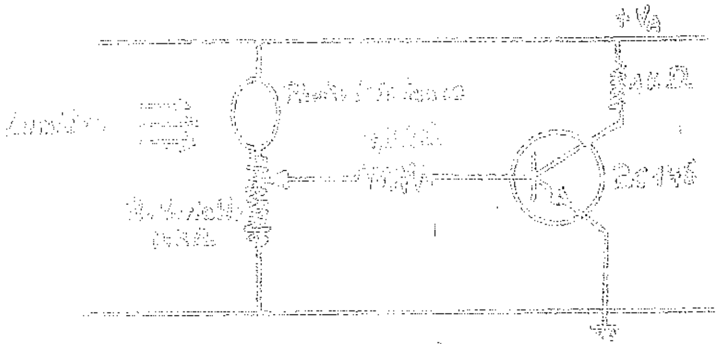
Son circuit est



Il est constitué [illegible] circuit qui est caractéristique de la [illegible] [illegible] et où le collecteur d'un transistor est relié à la base de l'autre au moyen d'un condensateur et d'une résistance. Leurs valeurs servent à détermi- ner la période de clignotement. L'oscillation (assez simple) est basée sur l'effet d'inductance.



4. Montage d'une photorésistance.



Ce circuit caractérise une fonc- tion " pas " et, suivant que la photorésistance est, ou non, conductrice, on a un potentiel de base positif ou négatif qui assure ou non la conduction du transistor.

Le réglage de la lumière se fait à l'aide de la résistance varia- ble.

5°) Transistor et amplification.

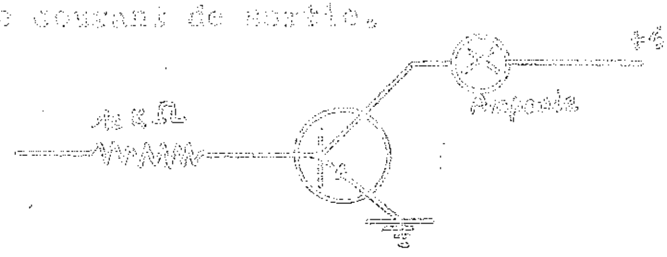
Souvent le courant de sortie n'est pas suffisant pour alimenter directement un moteur, une ampoule, un relais,... Dans ce cas, on ajoute un transistor relié à la sortie du circuit (émetteur commun) afin d'amplifier le courant de sortie.

$R_B \leq \beta . R_C$

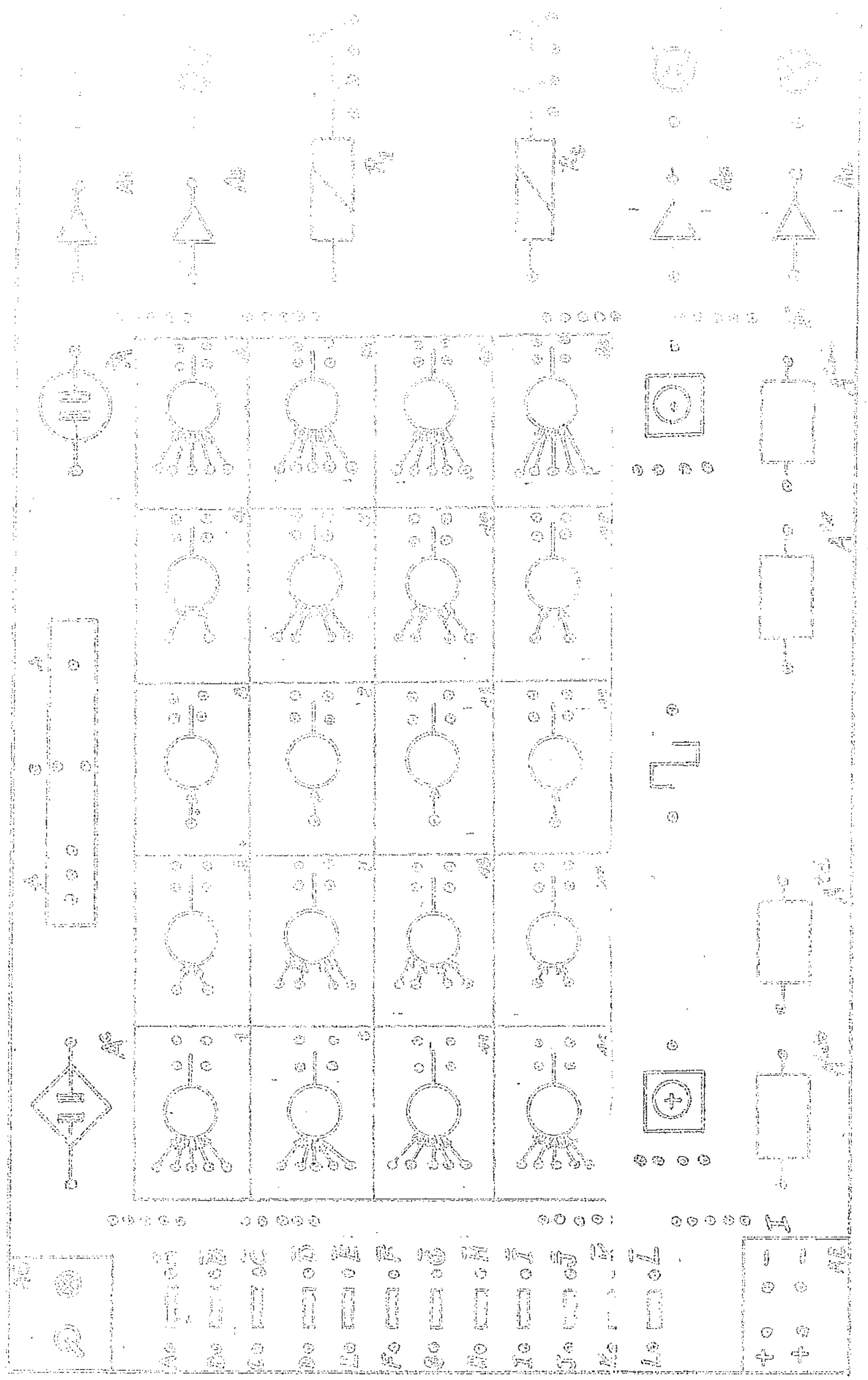
$R_B \leq 90.120\,\Omega$

$R_B \leq 10800\,\Omega$

$R_B = 10\,k\Omega$



Le transistor utilisé par la suite dans les circuits d'amplifi- cation est du type AC 127. Les ampoules ont pour caractéristiques 0,05 A, 6 V, 120 Ω.



C - LE SIMULATEUR :

Le simulateur présenté ici est du type [illegible] c'est-à-dire que les circuits de base sont des circuits du type " NI ". Son but est, comme l'indique son nom, de simuler les problèmes logiques avant réalisation pratique du circuit correspondant.
Les montages à transistor utilisent le BC148 et le AC 127(ce dernier déjà décrit ne sert que dans les circuits d'amplification). Les caractéristiques du BC 148 ont été décrites lors de l'étude du transistor. Pour repérer les différentes bornes de ce transistor, on utilise le procédé pratique suivant: tourner le transistor de manière à amener vers soi le côté lisse, les bornes étant en l'air; l'émetteur se trouve alors à gauche, la base au milieu et le collecteur à droite.

Description du simulateur. (plan page 53)

1° Le noyau central est constitué de 20 fonctions " NI " à 1,2,3,4 ou 5 entrées et à sortie quadruple, les 4 bornes de sortie étant reliées entre elles. Ces fonctions " NI " sont numérotées de 1 à 20 sur le plan et sur le simulateur.
Les bornes d'entrée sont noires et les bornes de sortie rouges.

2° L'alimentation générale est assurée par une batterie, commandée par un interrupteur avec lampe témoin (AG) .

3° Une alimentation extérieure double est prévue de manière à permettre d'alimenter sur place des moteurs,... (AE). Elle est supposée être de 6 V.

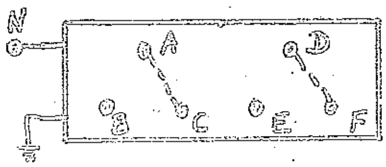
4° 12 interrupteurs inverseurs (A,B,...,L) permettent de positionner les variables d'entrée. Un jeu de douilles reliées en série (I) permet de multiplier éventuellement les entrées.

5° 4 amplificateurs (A1, A2,A3,A4) permettent d'obtenir un courant suffisant pour alimenter par exemple les 4 ampoules de sortie L1,L2, L3,L4 (de couleurs différentes.)

6° Enfin certains circuits spéciaux sont prévus (ils ont tous été décrits précédemment). Ce sont :

- Un différentiateur direct (A^{C}) et un différentiateur inverse(^{C}A)
- Quatre circuits de temporisation A^{tde}, A^{td}, A^{te}, A^{tde}.
- Un circuit à photorésistance (p : potentiomètre; c : cellule; s : sortie)
- Un clignoteur (   )
- Un circuit " ou " à diodes (4 entrées) symbolisé par
- Un circuit " et " à diodes (4 entrées) symbolisé par

7° Deux relais du type ci-dessous



Lorsque N (douille noire) est au potentiel positif, le relai est au travail et laisse passer le courant entre A-C et D-F.
Au repos, le courant peut passer entre A-B et D-E.
Les bornes A,B;C,D,E,F sont rouges.

8° Un jeu de douilles reliées en série permet de multiplier les sorties(II).

PROBLEMES DE LOGIQUE

a) Introduction

Ces problèmes peuvent être considérés comme étant de deux types:
1°) Les problèmes dans lesquels la notion de temps n'intervient pas(problèmes sans mémoire). Les circuits qui leur correspondent sont appelés <u>circuits de pure combinaison</u>.
Dans le cas de ces circuits, on peut toujours prévoir l'état des organes commandés en ne tenant compte que de l'état des circuits commandants.

2°) Les problèmes dans lesquels intervient la notion de temps et qui se divisent en deux groupes:
- ceux où les divers organes sont influencés par le déroulement passé des opérations. Ces circuits comprennent donc des mémoires. Ils sont appelés <u>circuits séquentiels</u>.
- ceux où la notion de temps est relative à la notion de durée des opérations. Les circuits correspondants à ces problèmes sont appelés <u>circuits de temporisation</u>,...
Dans ces deux cas, à un certain moment, il n'est plus possible de prévoir l'état des organes commandés par le simple examen des organes commandants.
En général, toutes les commandes des machines automatiques, les divers circuits électroniques, ... résultent de la combinaison des circuits de pure combinaison, séquentiels et de temporisation.

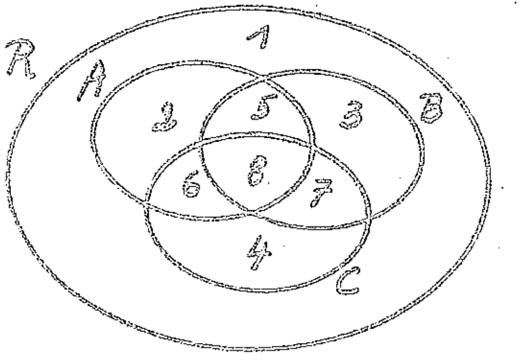
b) Les circuits de pure combinaison.

Possédant toutes les données qui nous permettent de réaliser n'importe quel circuit de pure combinaison, nous ne traiterons ici que quelques exemples:

- 1°) <u>Exemple 1</u>

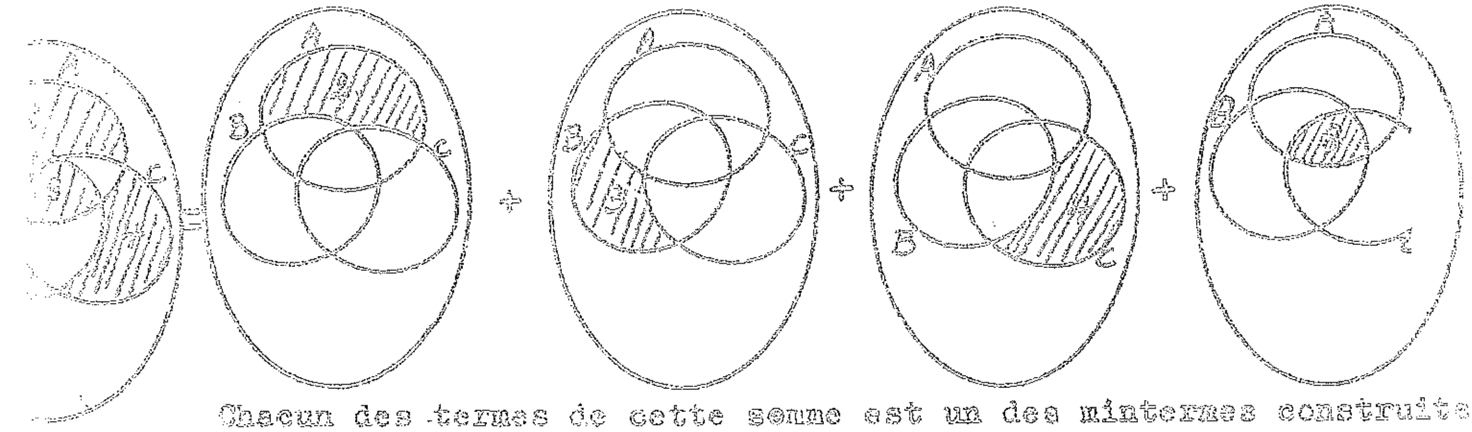
Au moyen de trois inverseurs a, b, c à contacts A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$, C, $\bar{C}$ commander l'allumage d'une ampoule L de telle sorte qu'à toute manoeuvre de l'un quelconque des 3 inverseurs, l'ampoule change d'état.

<u>Solution</u>.
Nous pouvons poser ce problème de diverses façons (cercles d'Euler tables de vérité, organigrammes,...). Utilisons par exemple les cercles d'Euler.
Soit A, B, $C = 1$ si les inverseurs respectifs a, b, c sont fermés et A, B, $C = 0$ ou $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C} = 1$ s'ils sont ouverts.
Chacun des cas possibles peut être représenté sur le diagramme ci-dessous.



A chacune des zones faisons correspondre un numéro.
Si on a $L = 0$ (lampe éteinte) dans la zone 1, on a $L=1$ dans les zones 2, 3 et 4 car un seul des inverseurs a changé d'état au cours du passage de la zone de départ dans l'une de ces zones d'arrivée.

Deux changements d'état s'imposant pour passer de la zone de départ 1 dans les zones 5, 6 ou 7, on a L=0 dans chacune de ces zones. Enfin L=1 dans la zone 8 (3 changements d'états)
La zone où L=1 peut donc être schématisée comme ci-dessous:



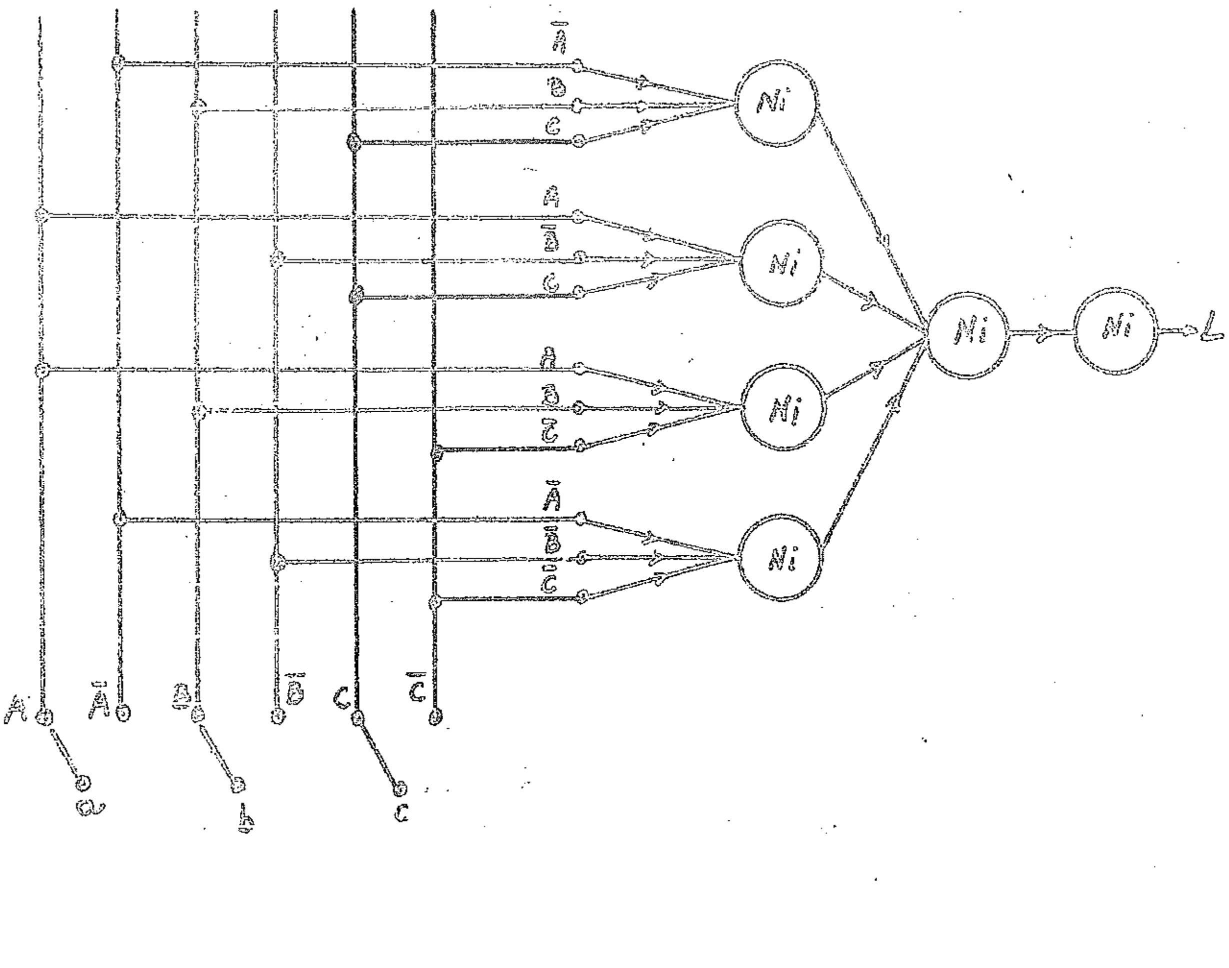
Chacun des termes de cette somme est un des mintermes construits sur A, B, C et on a

$$L = A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + A.B.C$$

ou encore si on désire adapter ce résultat au simulateur c'est à dire aux fonctions " Ni " :

$$L = \overline{\overline{\bar{A} + B + C} + \overline{A + \bar{B} + C} + \overline{A + B + \bar{C}} + \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}}$$

D'où le schéma de câblage ci- dessous:



– 2°) Exemple 2.

Comparer deux nombres binaires.
Pour limiter le problème nous considérerons ces nombres inférieurs ou égaux à trois.

Solution.

Soient N et M les deux nombres. On a

$$N = A.2^1 + B.2^0 \quad \text{et} \quad M = C.2^1 + D.2^0$$

où A, B, C, D sont les chiffres binaires des deux nombres à comparer et ont donc pour valeur 1 ou 0.
Trois cas sont à considérer. A chacun d'eux associons une ampoule qui s'allumera si la condition est réalisée.

Si $N = M$ l'ampoule verte (L1) s'allume
Si $N > M$ l'ampoule rouge (L2) s'allume
Si $N < M$ l'ampoule bleue (L3) s'allume.

1er cas. N = M

$N = M$ si et seulement si $A = C$ et $B = D$

A	C	A=C	B	D	B=D
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1

Les tables montrent donc que

$(N=M) = 1$ si et seulement si $((AC+\bar A\bar C)=1)$ et $(BD + \bar B\bar D)=1))$

Donc $L1 = (AC + \bar A\bar C).(BD + \bar B\bar D)$

2e cas. N > M.

On a $N > M$ si $A = 1$ et $C = 0$ $\quad (A.\bar C = 1)$
ou si lorsque $A=C$, on a $B=1$ et $D=0$
c'est-à-dire $(AC + \bar A\bar C) = 1$ et $B\bar D = 1$
ou $(AC + \bar A\bar C).B\bar D = 1$.

D'où $L2 = (AC + \bar A\bar C).B\bar D + A\bar C$

3e cas. N < M :

On a $N < M$ si et seulement si $L1 = 0$ et $L2 = 0$

D'où $L3 = \overline{L1} . \overline{L2}$

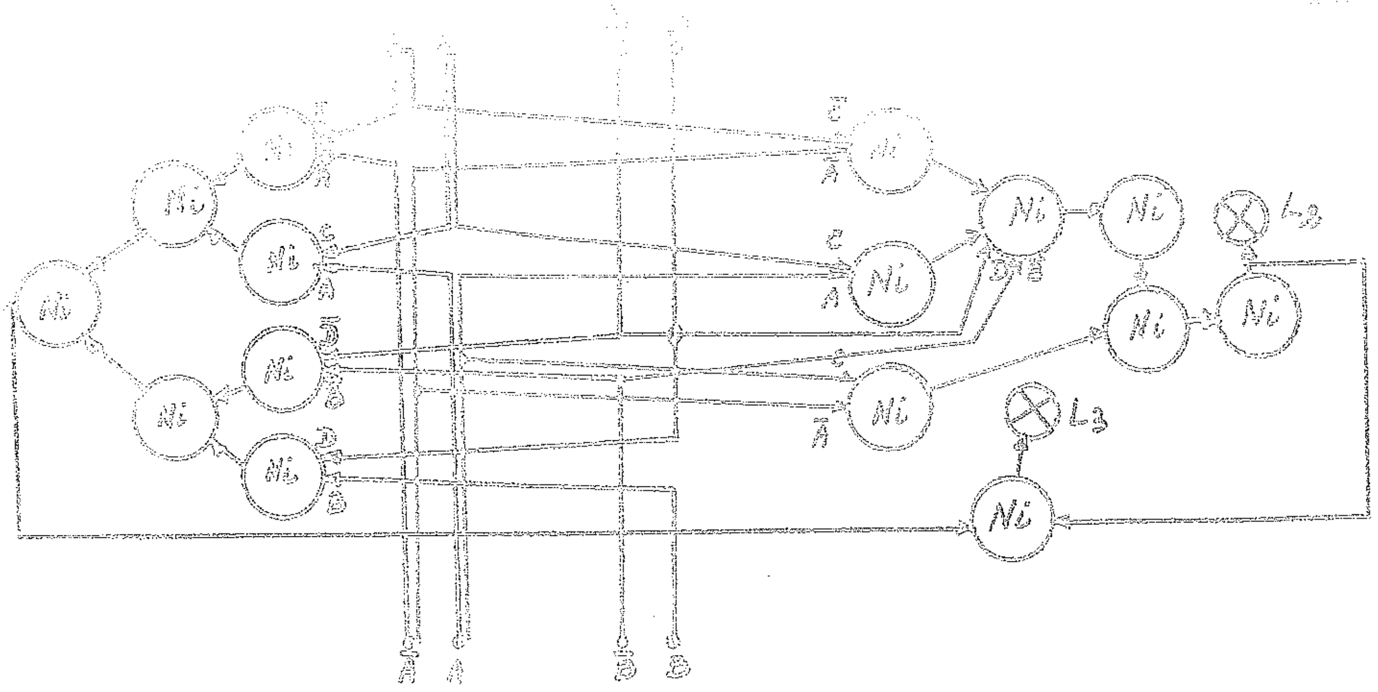
Transformons les résultats pour les adapter au simulateur.

$$L1 = \overline{\overline{\overline{\overline{\bar A + \bar C} + \overline{A + C}}} + \overline{\overline{\overline{\bar B + \bar D} + \overline{B + D}}}}$$

$$L2 = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\bar A + \bar C} + \overline{A + C}} + \bar B + D} + \overline{\bar A + C}}}$$

$$L3 = \overline{L1 + L2}$$

D'où le câblage suivant :



$$L_1 = \overline{\overline{\overline{\bar{A}+\bar{C}}+\overline{A+C}}+\overline{\overline{\bar{B}+\bar{D}}+\overline{B+D}}}$$

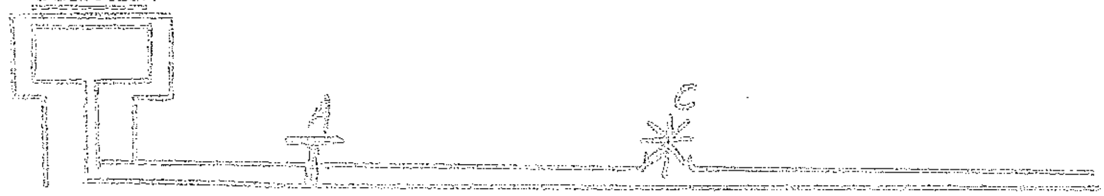
$$L_2 = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\bar{A}+\bar{C}}+\overline{A+C}}+\bar{B}+D}+\overline{\bar{A}+C}}}$$

$$L_3 = \overline{L_1+L_2}$$

F) Les circuits séquentiels

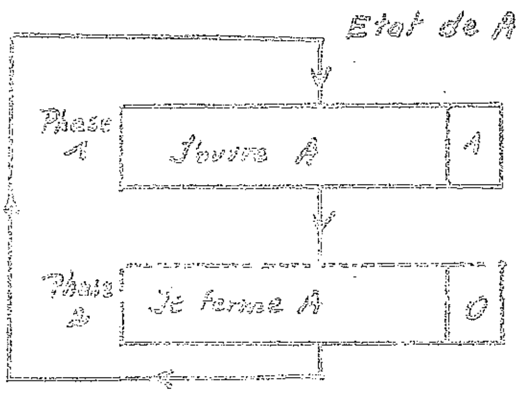
1°) Introduction.

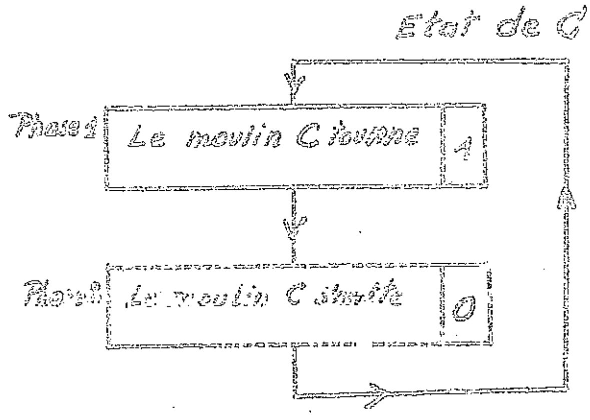
Dans ce type de problème (correspondant aux circuits séquentiels) nous emploierons, pour raisonner, l'organigramme qui est un schéma représentant les différentes phases possibles et ordonnées du problème posé. L'état d'un organe commandé dépendant de l'état des organes commandants, nous accorderons , dans l'organigramme, une phase chaque fois que l'un des organes commandants change d'état.
Il est nécessaire de remarquer qu'un organe commandé de la phase p peut devenir un organe commandant au cours de la phase suivante p+1 .
<u>Exemple</u>: Soit un montage dans lequel un moteur B est commandé si et seulement si un moteur A fonctionne. Soit Z l'interrupteur qui assure le fonctionnement du montage. A la phase 1, va correspondre la position repos des 3 organes. La phase 2 consistera en l'allumage de l'interrupteur Z; la phase 3 en l'allumage du moteur A (organe commandé); la phase 4 en la mise en service du moteur B (organe commandé) grâce au fonctionnement du moteur A (devenu organe commandant) , etc.
Afin de mieux comprendre ce que représente un circuit séquentiel, examinons en quoi ce type de circuit diffère des circuits vus jusqu'à présent.
<u>Examen du circuit de pure combinaison.</u>
<u>Schéma.</u>



château d'eau alimentant un moulin.

Soit un château d'eau qui alimente un moulin C. La conduite d'alimentation est commandée par la vanne A. Supposons les états où A=1 (vanne ouverte), A=0 (vanne fermée),C=1 (action du moulin), C=0(moulin au repos).
Un simple examen montre que l'état de la vanne détermine complètement l'état du moulin. Dans ce problème, l'organe commandant est la vanne A et l'organe commandé le moulin C.
L'organigramme ci-dessous représente le tableau de toutes les séquences possibles et ordonnées correspondant au problème. Il nous renseigne sur tous les états que les organes commandés peuvent prendre en fonction de l'état des organes commandants.

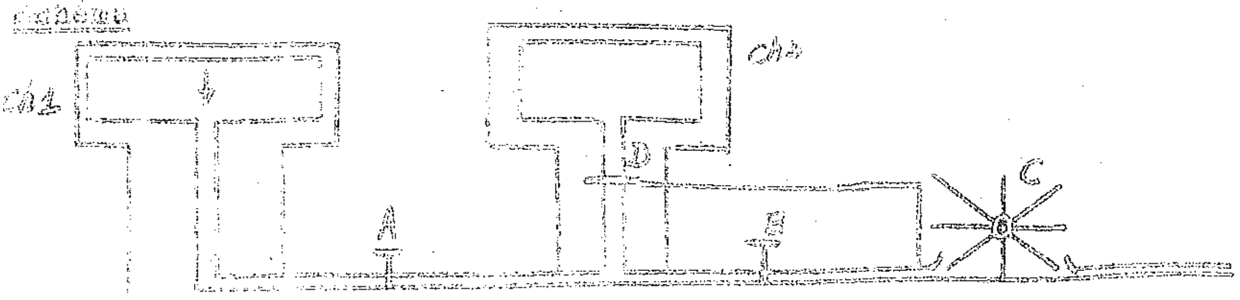




[illegible] au moyen [illegible] un organe [illegible] d'un [illegible] Séquentiel [illegible]

[illegible] du circuit séquentiel

Schéma



Lorsqu'on ouvre la vanne A, le courant d'eau issu de ch1, ouvre sur son passage la vanne basculante B ce qui permet au moulin C de se mettre en marche. Celui-ci est relié mécaniquement à la vanne D et agit sur elle instantanément. L'ouverture de la vanne D permet l'alimentation du moulin au moyen de ch2 même si on referme la vanne A. Si maintenant on referme manuellement, la vanne B, le moulin s'arrête et la vanne D se referme(sous l'action mécanique émanant du moulin). Le filet d'eau provenant de ch2 ne peut plus sur la vanne B et le circuit d'alimentation est complètement arrêté.

Il apparaît que le fonctionnement du moulin C dépend, non seulement de l'état de la vanne A (comme dans le cas de circuit de pure combinaison) mais aussi de l'état dans lequel tous les organes commandants étaient dans la phase précédant la mise en route. On dit que l'état du moulin possède une certaine mémoire du passé. Notons que dans cet exemple, le moulin C joue le rôle d'organe commandé et d'organe commandant puisque c'est lui qui ouvre la vanne D ou la referme. En effet, dans ce cas, le moulin peut s'autoalimenter.

Si C est l'organe commandé(avec D et B) et A,B,C,D l'état des organes commandants, nous avons l'organigramme ci-dessous. (L'état de la vanne D étant directement lié à celui du moulin, nous l'avons omis dans l'organigramme).

	Organes commandants			Organe commandé
	A	B		C
[illegible]	Vanne A fermée 0	Vanne B fermée 0	[illegible] 0	C au repos 0
[illegible]	[illegible] 1	[illegible] 0	[illegible] 0	[illegible] 0
[illegible]	[illegible] 1	[illegible] 1	[illegible] 0	[illegible] 1
[illegible]	A ouverte 1	B ouverte 1	[illegible] 1	[illegible] 1
[illegible]	A fermée 0	[illegible] 1	[illegible] 1	[illegible] 1
[illegible]	[illegible] 0	[illegible] 0	[illegible] 1	[illegible] 0

Il faut toujours considérer dans l'organigramme qu'il y a une phase de différence entre l'état commandé et l'état commandant d'un même organe (ici C).
On voit aisément que l'état de fonctionnement du moulin C en tant qu'organe commandant présente une phase de retard par rapport à l'état de tous les organes qui commandent son état. On a

$$C_{\text{à la phase } p} = F(A,B,C)_{\text{à la phase } p-1}.$$

En apliquant les règles vues précédemment, nous tirons l'équation indiquant l'état de fonctionnement de C:

$$C = A.B.\bar{C} + A.B.C + \bar{A}.B.C$$

D'où, en simplifiant:

$$C = A.B + \bar{A}.B.C = B.(A + \bar{A}.C)$$

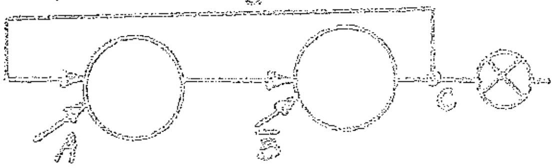
$$C = B.(A + C).$$

2°) Circuit-mémoire à transistor.

Si nous remplaçons respectivement les vannes A,B par des interrupteurs et C par une ampoule, nous établissons le circuit dit " d'autoalimentation". Transformons l'équation obtenue en fonction "Ni". On obtient

$$C = \overline{\bar{B} + (\overline{A + C})}$$

D'où le câblage ci-dessous:

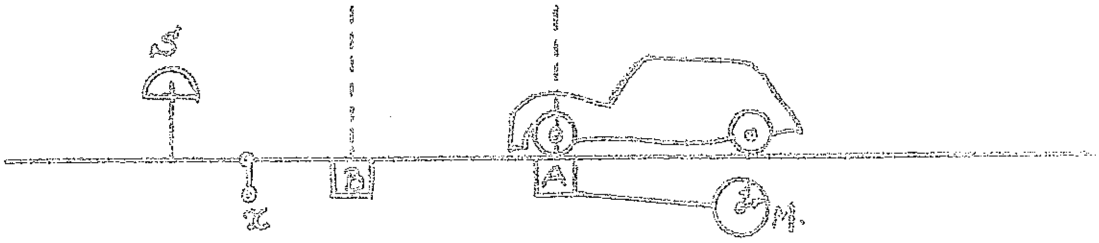


Un signal bref ou passager sur A est retenu en mémoire par un tel circuit et l'ampoule C s'autoalimente jusqu'au moment où une impulsion est envoyée sur B (B = 1).

D'une manière générale, tout problème de type séquentiel peut être résolu en posant en organigramme les différentes phases ordonnées des états commandants et commandés comme nous l'avons fait ci-dessus.

3°) Problème.

Disposant de deux capteurs A et B placés à faible distance, il s'agit d'enclencher une alarme au moment du passage d'un véhicule excédant une certaine vitesse.



Solution.

Le passage d'une roue de voiture sur le capteur A doit enclencher une mémoire M telle que celle-ci se coupe après une durée de temps fixée (t_1). Si le véhicule dépasse une certaine vitesse, cette roue arrive au capteur B avant que la mémoire se soit coupée. Dans ce cas une sonnerie S s'enclenche. Le bouton x permet la rupture de S.

Réalisons l'organigramme des différentes phases de ce problème. [illegible] des corps intervenants, nous devrons intégrer dans le circuit un temporisateur à l'enclenchement ou au déclenchement de la mémoire M.
Dans le suite des séquences, plusieurs solutions pourront se présenter. Nous choisirons celle qui convient le mieux.

Organes commandants					séquences	Organes commandés.	
X	A	B	M^{te}	S		M	S
0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	2	1	0
0 1	1	0	1	0	3	1	0
0	0	0	1	0	4	1	0

Ici plusieurs cas sont possibles: ou bien M^{te} s'éteint avant que B soit touché ou non. L'état de fonctionnement de S étant le seul à nous intéresser, choisissons le second cas.

0	0	1	1	0	5	1	1
0	0	1	1	1	6	1	1

Plusieurs possibilités à nouveau: ou bien B=0 avant la mémoire ou l'inverse. Choisissons le second cas.

0	0	0	1	1	7	1	1
0	0	0	0	1	8	0	1
1	0	0	0	1	9	0	0
1	0	0	0	0	10	0	0

Equations: $S = \bar{X}\,\bar{A}\,B\,Mte\,\bar{S} + \bar{X}\,\bar{A}\,B\,Mte\,S + \bar{X}\,\bar{A}\,\bar{B}\,Mte\,S + \bar{X}\,\bar{A}\,\bar{B}\,Mt\ldots$

$$S = \bar{X}\,\bar{A}(\,B\,Mte + \bar{B}S\,)$$

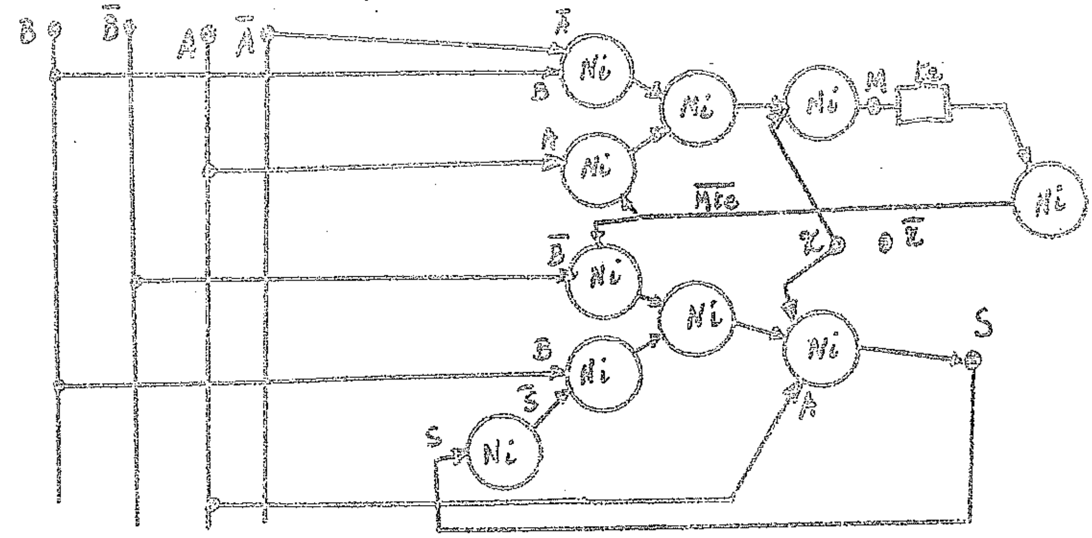
$$M = \bar{X}\,A\,\bar{B}\,\overline{Mte}\,\bar{S} + \bar{X}\,A\,\bar{B}\,Mte\bar{S} + \bar{X}\,\bar{A}\,\bar{B}\,Mte\bar{S} + \overline{XA}\,B\,Mte\bar{S}$$
$$+ \bar{X}\,\bar{A}\,B\,Mte\,S + \bar{X}\,\bar{A}\,\bar{B}\,Mte\,S$$

$$M = \bar{X}\,(A\,\bar{B}\,\bar{S} + \bar{A}\,Mte)$$

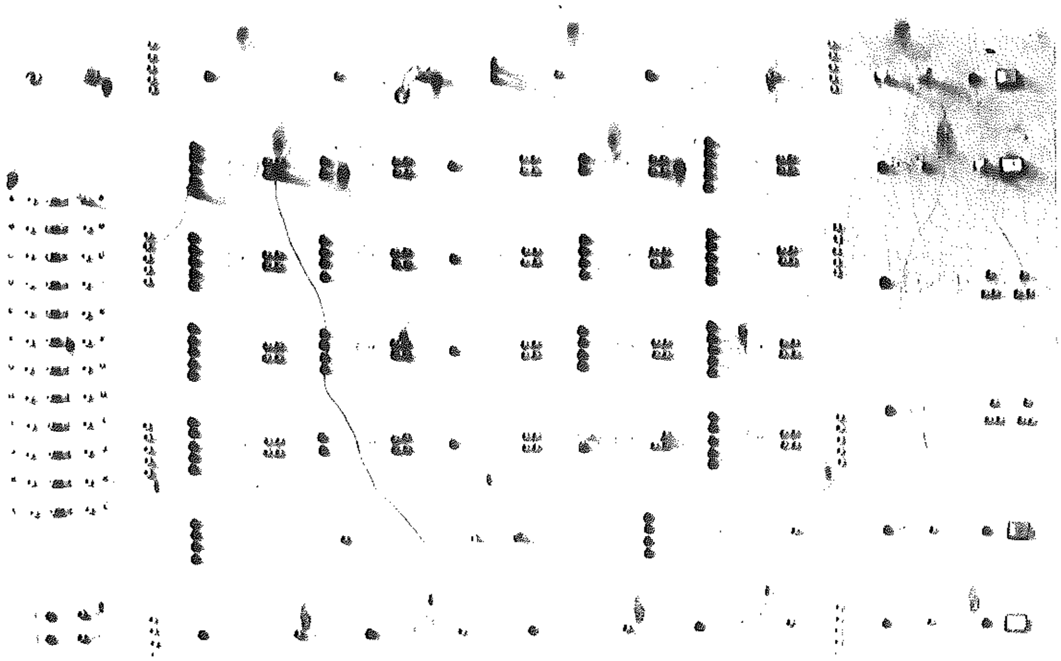
Transformons en fonctions " Ni". On obtient:

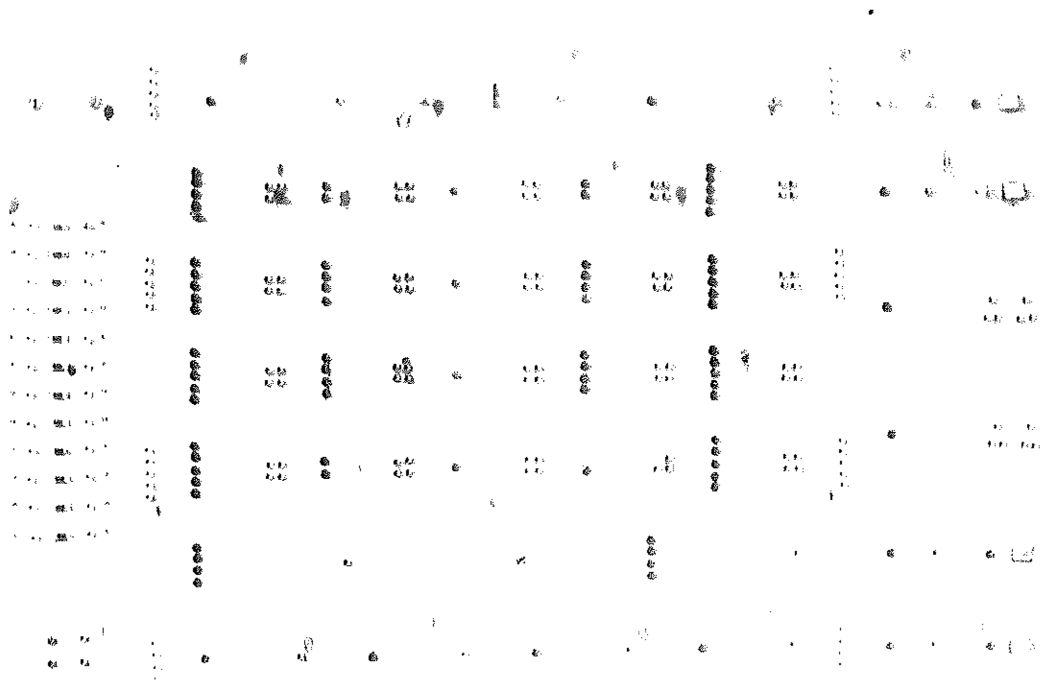
$$S + \overline{\overline{\overline{X + A} + (\overline{\overline{\bar{B} + \overline{Mte}} + \overline{B + \bar{S}}})}}$$

$$M = \overline{X + (\overline{\overline{\bar{A} + B + S} + \overline{A + \overline{Mte}}})}$$



APR • 71





Bibliographie sommaire

Mathématique 1	Servais - Clercy - Biefnot	Ed. Labor
Histoire de la logique	Henri Scholz.	
La logique contemporaine	R. Donché	Que sais-je (322)
La logique formelle	A. Virieux-Reymond (S.U.P)	P.U.F (57)
La logique moderne	J. Chauvineau	P.U.F (745)
L'algèbre de Boole	Casanova.G	P.U.F (1246)
Cours de Logique	Ch. Perelman	P.U Bruxelles
Court traité de philosophie Logique	A. Vergez D.Huisman	Nathan
Cours de calcul booléen appliqué	M.Denis-Papin.	
L'électronique (v.5)	Van Valkenburgh	Ed Gamma.

TABLE DES MATIERES

I. LOGIQUE

II. CIRCUITS.