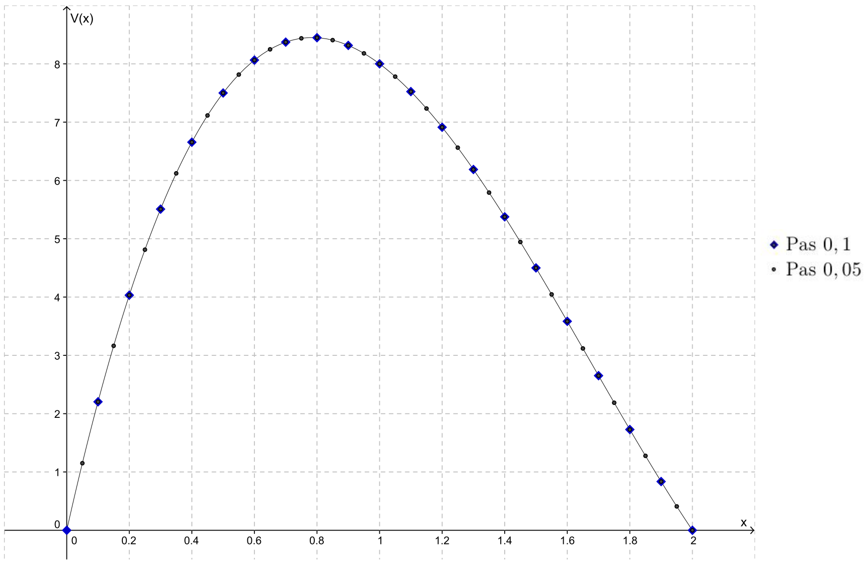
	A	B
1	Valeur de x	Volume de la boîte
2	0	0
3	0.1	2.204
4	0.2	4.032
5	0.3	5.508
6	0.4	6.656
7	0.5	7.5
8	0.6	8.064
9	0.7	8.372
10	0.8	8.448
11	0.9	8.316
12	1	8
13	1.1	7.524
14	1.2	6.912
15	1.3	6.188
16	1.4	5.376
17	1.5	4.5
18	1.6	3.584
19	1.7	2.652
20	1.8	1.728
21	1.9	0.836
22	2	0



1.2 Le timbre poste

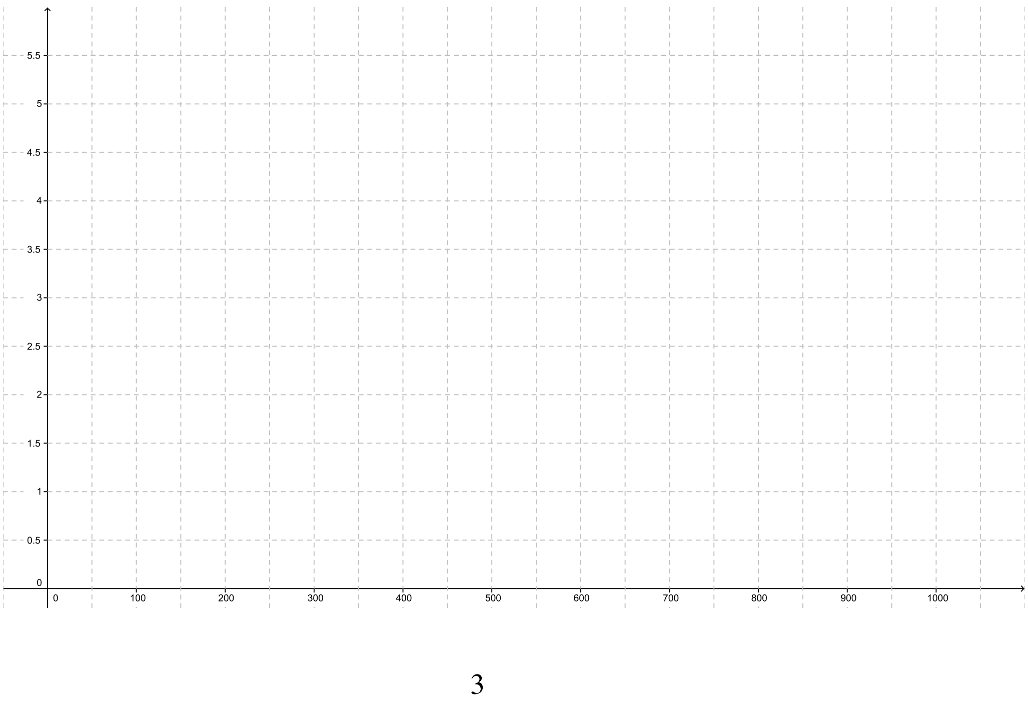
Le tarif d'un envoi postal en Belgique dépend du poids du courrier. Le tableau ci-dessous reprend les tarifs du timbre poste acheté à l'unité (au 1er janvier 2015) :

Poids jusqu'à	Tarifs [€]
50g	0,77
100g	1,54
350g	2,31
1kg	3,85

1. Comment doit-on affranchir une lettre de $20g$, de $50g$? Un envoi de $75g$? Un colis de $750g$?

2. Si je reçois dans ma boite aux lettres une enveloppe affranchie avec un timbre de $3,85$€, est-ce que je peux deviner son poids ?

3. Représenter graphiquement le coût d'un envoi en fonction de son poids.



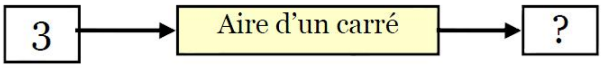
1.3 La machine à calculer

La machine « P » donne le périmètre d'un carré si on lui donne une longueur de côté :

La machine « P » transforme :

3 en ...	$3 \to ...$	$P(3) = ...$
5 en ...	$5 \to ...$	$P(5) = ...$
... en 36	$... \to 36$	$P(...) = 36$
x en ...	$x \to ...$	$P(x) = ...$

La machine « A » donne l'aire d'un carré si on lui donne une longueur de côté :



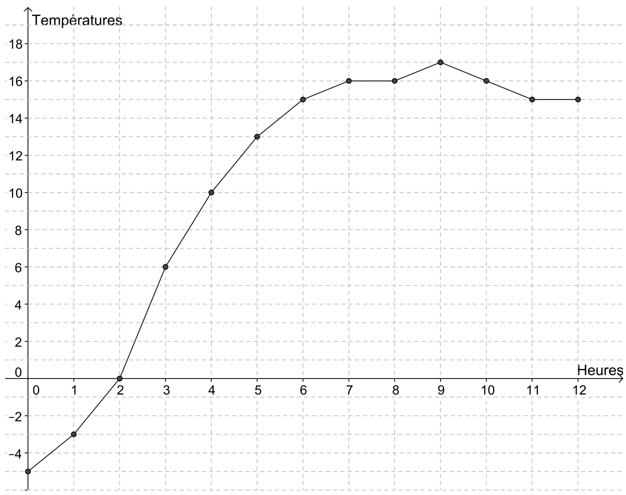
La machine « A » transforme :

3 en ...	$3 \to ...$	$A(3) = ...$
5 en ...	$5 \to ...$	$A(5) = ...$
... en 36	$... \to 36$	$A(...) = 36$
x en ...	$x \to ...$	$A(x) = ...$

1.4 La température d'un hangar

Pour réchauffer un hangar de stockage dans lequel il gèle, on y allume le chauffage. Les relevés de températures dans les heures qui suivent ont permis de tracer le graphique ci-dessous :

Notons $f(x)$ la température au temps x.



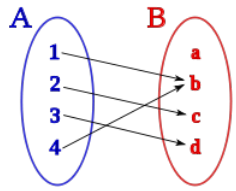
1. Au temps initial, la température était de ...
   $f(0) = ...$
2. Après une heure, la température était de ...
   $f(..) = ...$
3. Après six heures, la température était de ...
   $f(..) = ...$
4. A quel moment la température atteint-elle 0°C ?
   $f(..) = 0$
5. A quel moment la température atteint-elle 13°C ?
   $f(..) =$
6. Compléter le tableau ci-dessous :

x [Heures]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$ [Températures °C]													

7. La température maximale est de ... : $f(..) =$
8. La température maximale a été atteinte après ...
9. On souhaite avoir une température supérieure à 15°C, quand est-ce le cas ? ...

2 Définitions

Fonction : Une fonction est une relation entre deux ensembles telle qu'à chaque élément de l'ensemble de départ, on associe **au plus** un élément (0 ou 1) de l'ensemble d'arrivée.



Notation : $f:\ x \to f(x)$

- x représente la variable, c'est-à-dire n'importe quel élément de l'ensemble de départ ;
- $\to$ rappelle l'idée de relation ;
- $f(x)$ représente l'image de x par la fonction f, ou encore la valeur associée à x par la fonction f.

Domaine de définition :

L'ensemble des réels qui ont une image par f est appelé domaine de définition de la fonction. Il est noté *dom* f.

Ensemble-image :

L'ensemble des images par une fonction f est noté *im* f et est appelé ensemble-image.

Exemple : La relation f qui, à chaque réel, fait correspondre l'inverse de son carré est une fonction. Elle est notée

$$f:\ x \to f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Le domaine de définition de cette fonction est l'ensemble des réels sauf 0 ($\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ou bien $\mathbb{R}_0$) et son ensemble image est l'ensemble des réels positifs ($\mathbb{R}^+$).

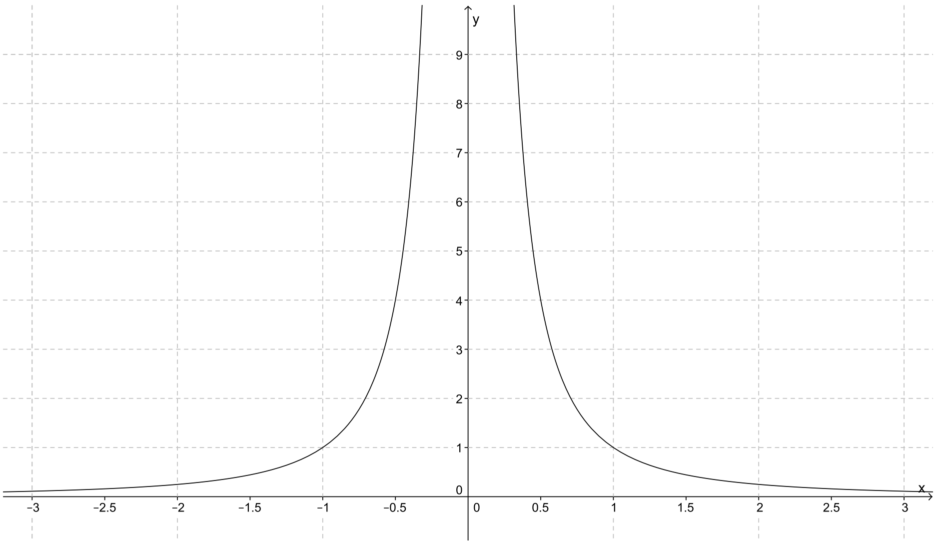
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est l'**expression analytique** de cette fonction. C'est une représentation courte et précise. Pour rendre la fonction plus concrète, on peut utiliser un **tableau** :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0,25	1	$\nexists$	1	0,25

On dit que

- o 2 a pour image $0,25$
- o $0,25$ est l'image de 2
- o $0,25$ a pour antécédents -2 et 2
- o 2 est l'antécédent de $0,25$

Enfin, le **graphique** est une troisième représentation possible. Le graphe cartésien d'une fonction est l'ensemble des points du plan cartésien dont les coordonnées sont $(x, f(x))$.

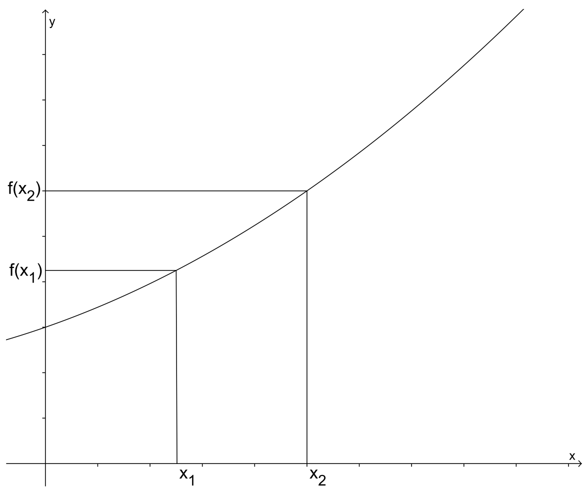


Graphiquement,
- le domaine de définition est l'ensemble des abscisses qui ont une image, c'est l'étendue horizontale (axe OX) du graphe cartésien ;
- l'ensemble-image correspond à l'entendue verticale (axe OY) du graphe cartésien.

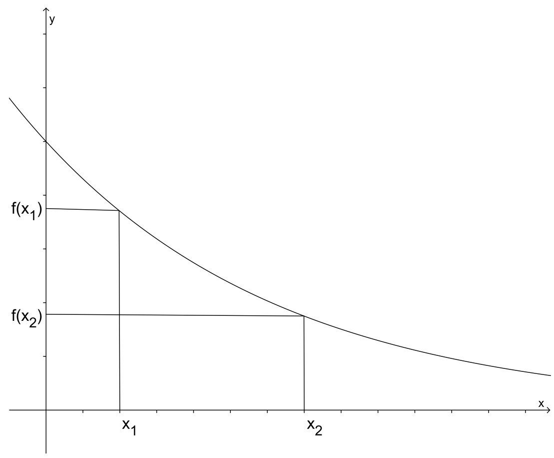
3 Caractéristiques des fonctions

3.1 Croissance et décroissance

Une fonction f est **croissante**
sur un intervalle I de son domaine ssi
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$
f est **strictement croissante**
sur un intervalle I de son domaine ssi
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$



Une fonction f est **décroissante**
sur un intervalle I de son domaine ssi
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geqslant f(x_2).$$
f est **strictement décroissante**
sur un intervalle I de son domaine ssi
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$



3.2 Racines et signe d'une fonction

Les **racines** d'une fonction f sont les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.

La fonction est **positive** sur un intervalle I de son domaine ssi $\forall x \in I : \quad f(x) \geqslant 0$.
La fonction est **strictement positive** sur un intervalle I de son domaine ssi $\forall x \in I : \quad f(x) > 0$.

La fonction est **négative** sur un intervalle I de son domaine ssi $\forall x \in I : \quad f(x) \leqslant 0$.
La fonction est **strictement négative** sur un intervalle I de son domaine ssi $\forall x \in I : \quad f(x) < 0$.

Graphiquement, les racines sont donc les abscisses des intersections de la fonction f avec l'axe des x. Au-dessus de cet axe, la fonction est positive ; en-dessous, elle est négative.

Exemple :

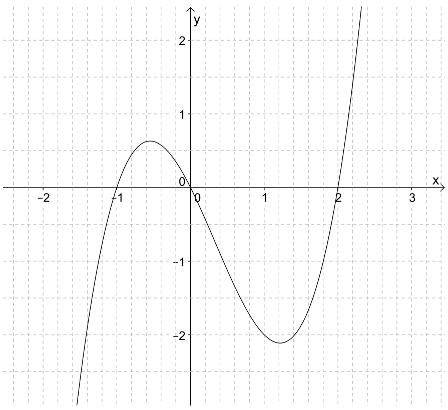


Tableau de signes :

x	
$f(x)$	

3.3 Extremum

Une fonction f admet un **maximum** local en c sur un intervalle $[a,b]$ de son domaine ssi
$\forall x \in [a,b] \quad f(c) \geqslant f(x)$.

Une fonction f admet un **minimum** local en c sur un intervalle $[a,b]$ de son domaine ssi
$\forall x \in [a,b] \quad f(c) \leqslant f(x)$.

Exemple :

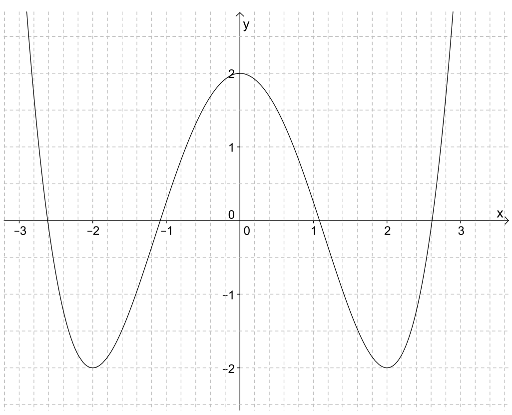


Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

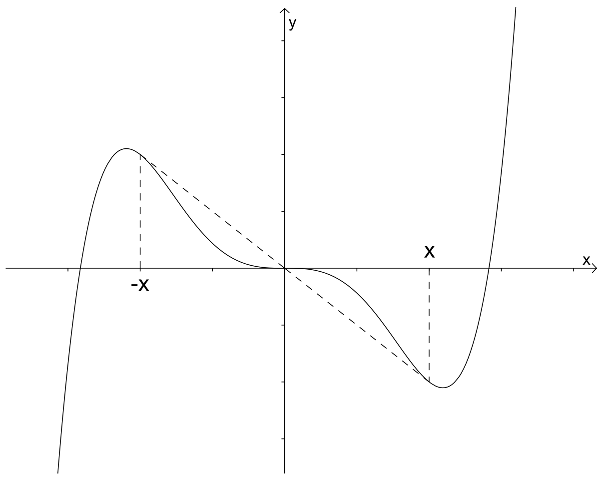
3.4 Fonctions paires et impaires

Une fonction f est **paire** ssi $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in\ dom f$.
En conséquence, graphiquement, dans un repère orthonormé, une fonction est **paire** lorsque l'axe des ordonnées est un axe de **symétrie orthogonale** de son graphe cartésien.

Exemple de fonction paire : $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$ (graphe exemple précédent)

Une fonction f est **impaire** ssi $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in\ dom f$.
En conséquence, graphiquement, dans un repère orthonormé, une fonction est **impaire** lorsque l'origine du repère est un centre de **symétrie centrale** de son graphe cartésien.

Exemple de fonction impaire : $f(x) = x^5 - 2x^3$

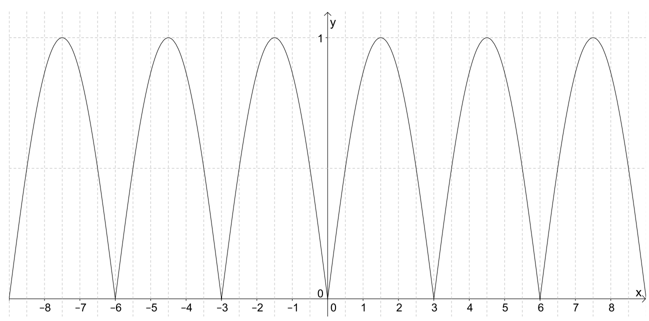


3.5 Périodicité

Une fonction numérique d'une variable réelle est périodique de période p non nulle lorsque
$$f(x+p) = f(x)$$
quel que soit le réel x appartenant au domaine de f.

Exemple :

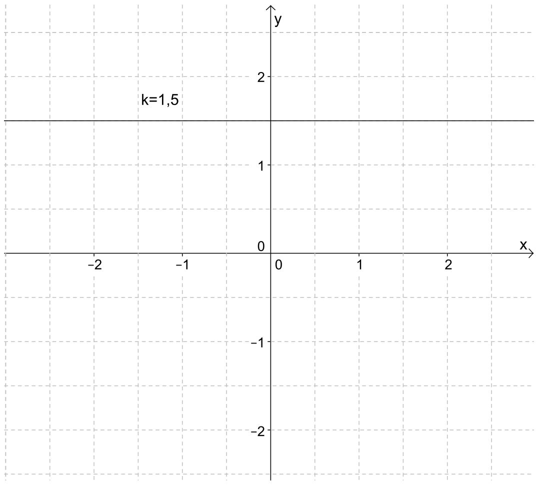
Fonction périodique de période 3



4 Fonctions usuelles

4.1 Fonction constante

$f : x \to k$ C'est une droite horizontale.



- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

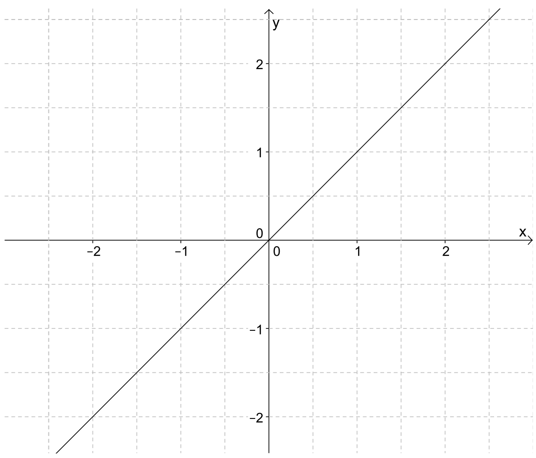
x	
$f(x)$	

Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

4.2 Fonction identité

$f : x \to x$ C'est une droite.



- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

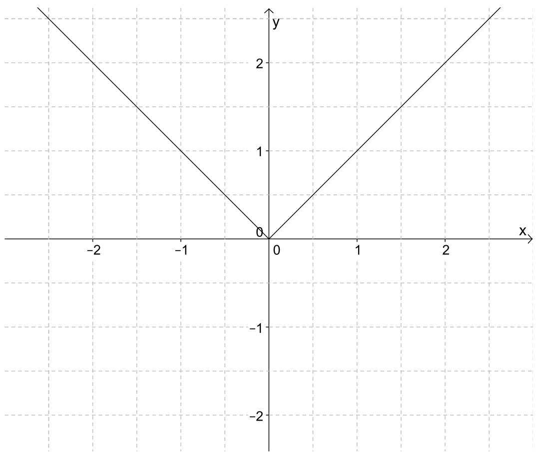
x	
$f(x)$	

Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

4.3 Fonction valeur absolue

$$f : x \to |x|$$



- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

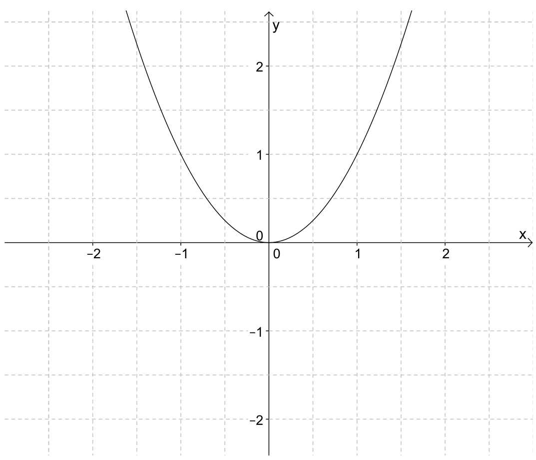
x	
$f(x)$	

Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

4.4 Fonction carré

$$f : x \to x^2$$



C'est une parabole.

- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

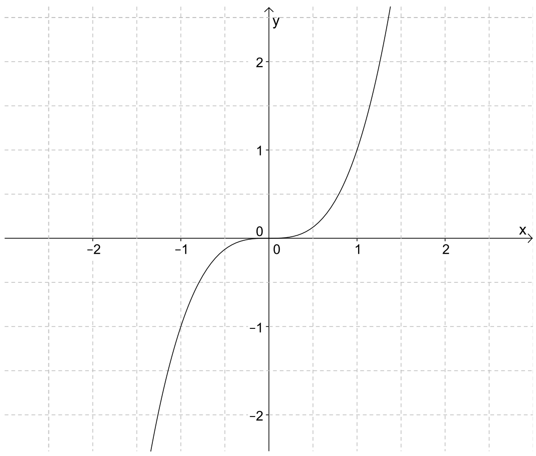
x	
$f(x)$	

Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

4.5 Fonction cube

$$f : x \to x^3$$



- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

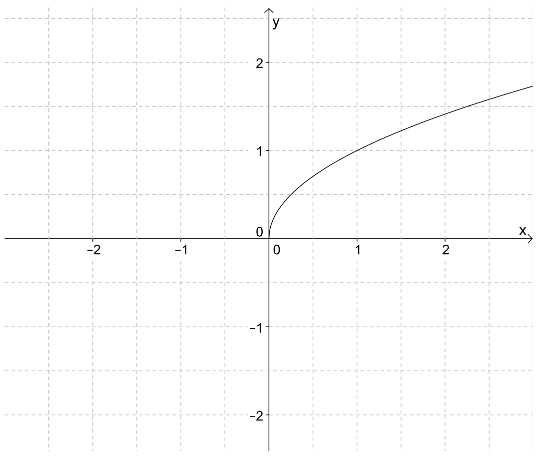
x	
$f(x)$	

Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

4.6 Fonction racine carrée

$$f : x \to \sqrt{x}$$



- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

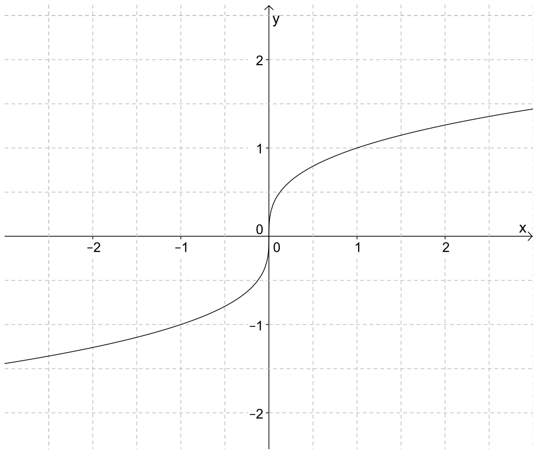
x	
$f(x)$	

Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

4.7 Fonction racine cubique

$$f : x \rightarrow \sqrt[3]{x}$$



- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

x	
$f(x)$	

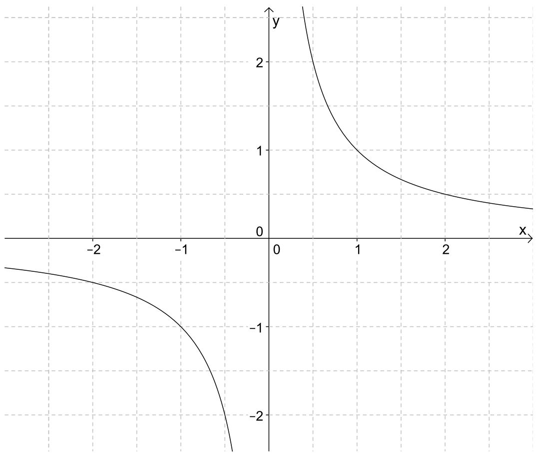
Tableau de variations :

x	
$f(x)$	

4.8 Fonction inverse

$$f : x \rightarrow \frac{1}{x}$$

C'est une hyperbole.



- Domaine :
- Ensemble-image :
- Parité :
- Racine :
- Ordonnée à l'origine :

Tableau de signes :

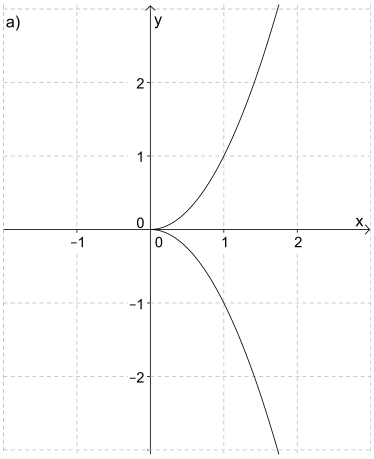
x	
$f(x)$	

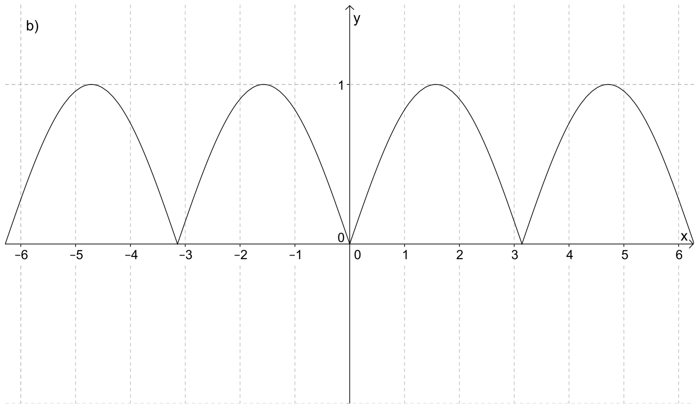
Tableau de variations :

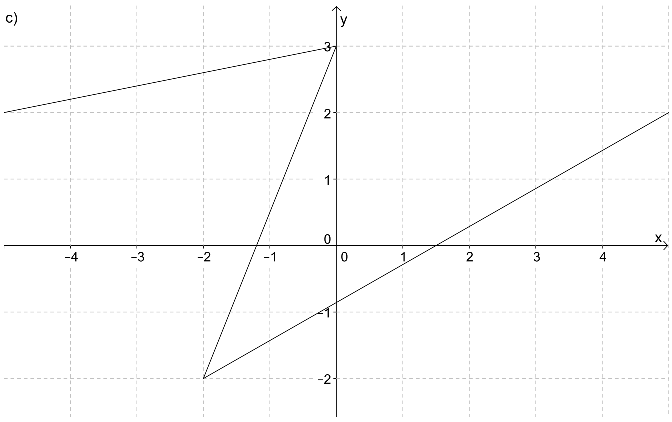
x	
$f(x)$	

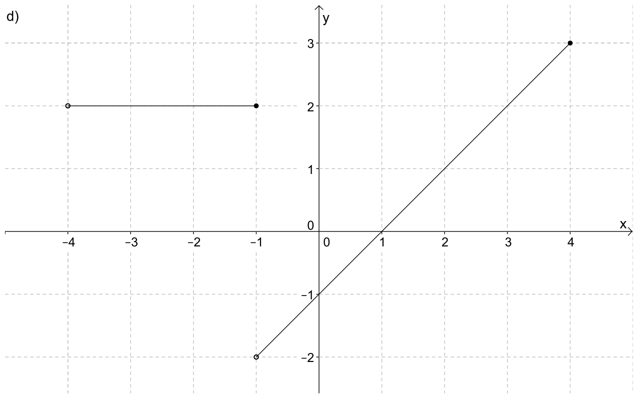
5 Exercices

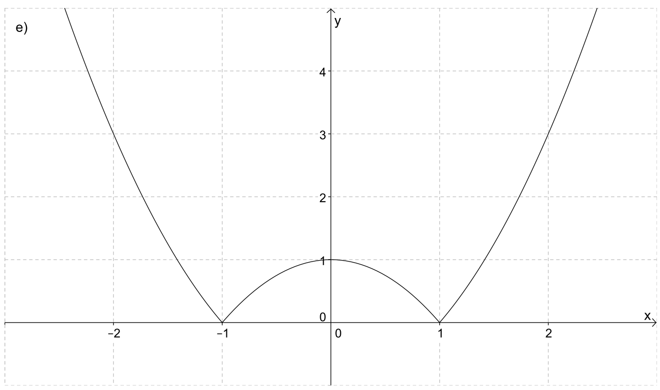
1. Parmi les graphiques suivants, quels sont ceux appartenant à une fonction mathématique ? Préciser le domaine de définition.











2. A l'aide des conditions d'existence, déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = x^2 + 1$

   Réponse : $\mathbb{R}$

   (b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 1}$

   Réponse : $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

   Réponse : $]\leftarrow; 2] \cup]3; \rightarrow[$

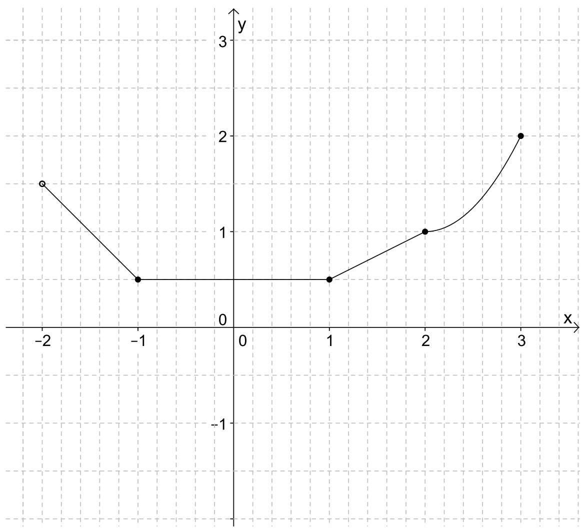
   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$

   Réponse : $]3; \rightarrow[$

   (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3(x-2)^2}{(x-3)^4}}$

   Réponse : $[0; 3[\cup]3; \rightarrow[$

3. Pour la fonction dont le graphique est donné ci-dessous, déterminer les intervalles où elle est (strictement) croissante et ceux où elle est (strictement) décroissante.



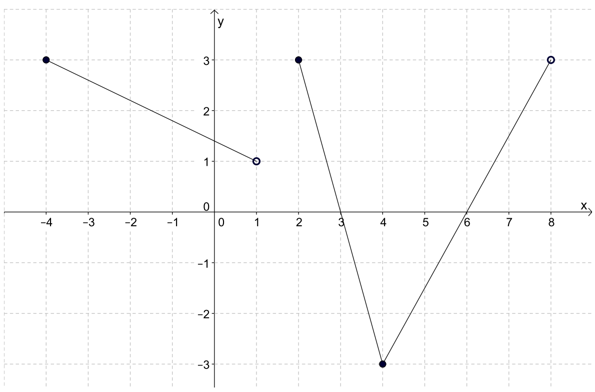
La fonction est

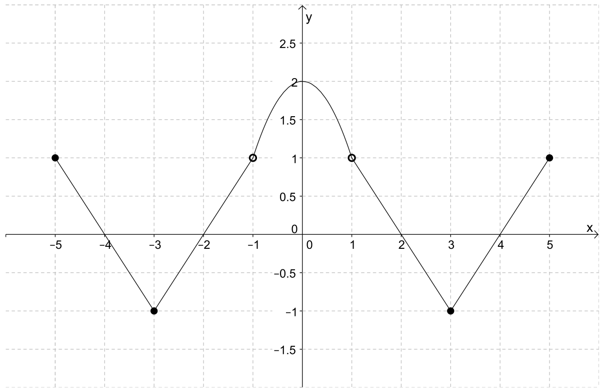
- croissante sur
- strictement croissante sur
- décroissante sur
- strictement décroissante sur
- constante sur

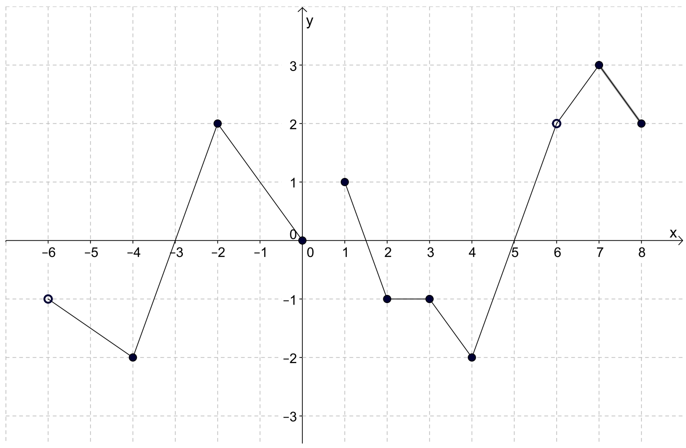
4. Déterminer les racines et les tableaux de signes des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = x - 2$
   b) $f(x) = (x-1)(x+3)$
   c) $f(x) = x^2 - 1$

5. Voici le graphique de trois fonctions dans $\mathbb{R}$. Pour chacune d'entre-elles, détermine : le domaine ; l'ensemble des images ; l'ensemble où la fonction est positive, croissante, décroissante, constante ; les points extrema.







6. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si celle-ci est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre ?
   (a) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

   Réponse : impaire

   (b) $f(x) = x^2 - 3x$

   Réponse : ni paire, ni impaire

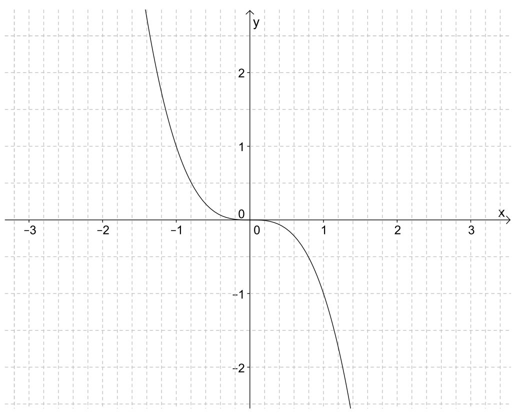
   (c) $f(x) = x\,\sqrt[3]{x^3-2x}$

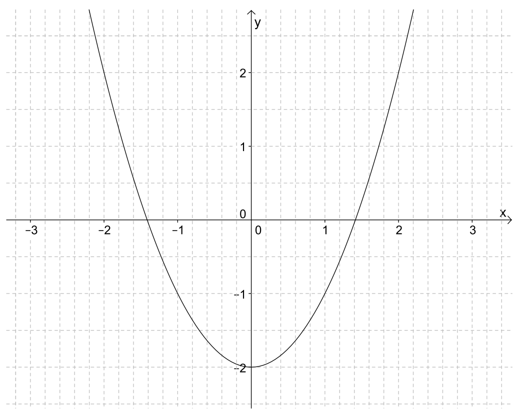
   Réponse : paire

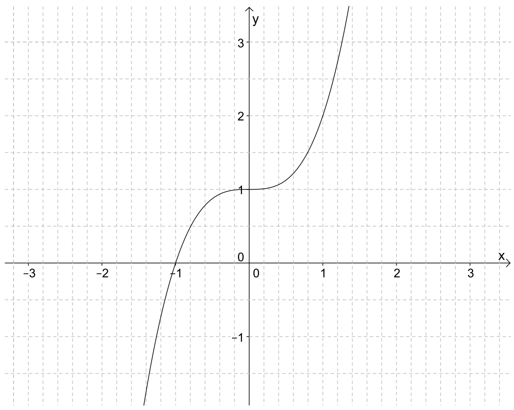
   (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4-3x^2+1}$

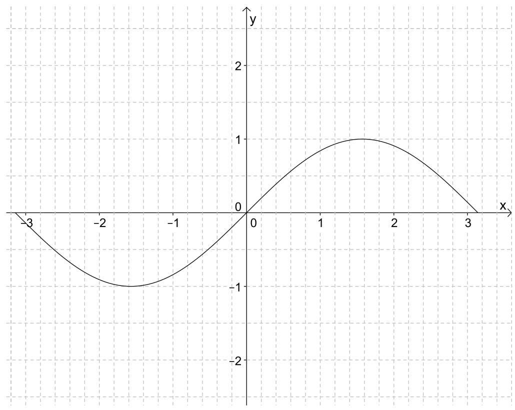
   Réponse : impaire

7. Les fonctions dont les graphes cartésiens sont représentés ci-dessous sont-elles paires ou impaires ?

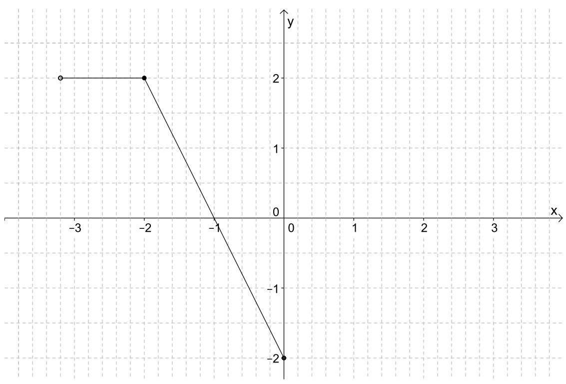




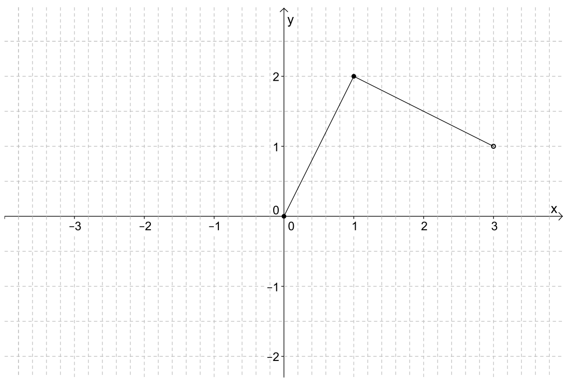




8. Une partie du graphique d'une fonction définie sur $]-3,3[$ est donné ci-dessous. Compléter de manière à obtenir une fonction paire.



9. Une partie du graphique d'une fonction définie sur $]-3,3[$ est donné ci-dessous. Compléter de manière à obtenir une fonction impaire.



10. Vrai ou faux ?
    a) Si une fonction paire est définie en 0, alors $f(0) = 0$.
    b) Si une fonction impaire est définie en 0, alors $f(0) = 0$.
    c) Si $f(0) = 0$, alors f est impaire.
    d) La fonction f définie par $f(x) = 7$ est impaire.
    e) La fonction g définie par $g(x) = 8$ est paire.

11. Trouver une fonction qui est :
    (a) paire et admettant -1 comme racine

    Réponse : $f(x) = x^2 - 1$

    (b) paire et négative

Réponse : $f(x) = -x^2 - 1$

(c) impaire et décroissante

Réponse : $f(x) = -x^3$

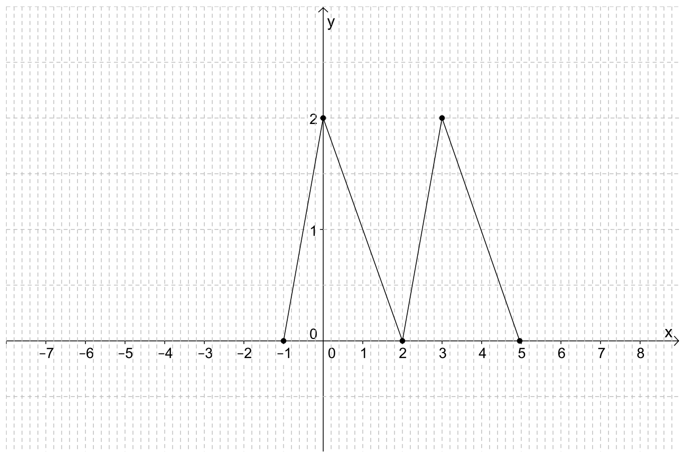
(d) négative et dont le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

Réponse : $f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2}$

(e) positive et comprenant le point $(-3;2)$

Réponse : $f(x) = 2$

12. Une partie du graphe d'une fonction périodique est représentée ci-dessous. Quelle est la plus petite période de cette fonction ? Compléter 3 périodes supplémentaires.



13. Une partie du graphe d'une fonction paire et périodique est représentée ci-dessous. Compléter le graphe de la fonction sur quelques périodes.