Les fonctions exponentielles

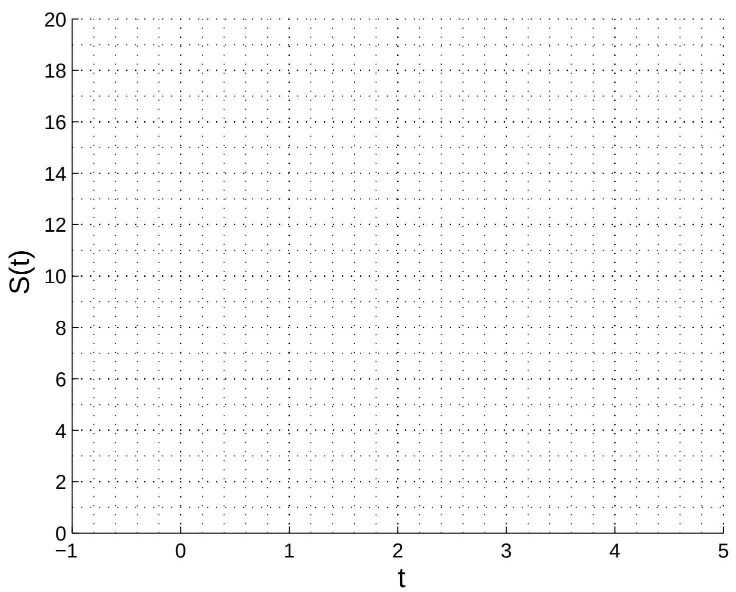
1 Activité : La superficie du nénuphar

La superficie d'un nénuphar double chaque année.

1. Si, à un moment donné, l'aire couverte est 1 m^2 :
   a) Quelle sera la superficie (S) 2, 3 ou 4 ans plus tard ?
   b) Quelle sera l'aire après 1 mois ? Après 3 mois ?
   c) Quelle était l'aire 1 mois, 2 mois ou 3 mois avant le moment d'observation ?

Temps	Superficie [m^2]
- 3 mois	
- 2 mois	
- 1 mois	
0	1
1 mois	
3 mois	
1 an	2
2 ans	
3 ans	
4 ans	

2. Réaliser le graphique de la fonction exprimant l'aire en fonction du temps mesuré en années à partir de l'instant où la surface mesure 1 m^2 (les moments antérieurs sont les temps négatifs). Pouvez-vous donner une expression analytique pour cette fonction ?



2 Puissances à exposants réels

2.1 Définition

Rappel : Si $a \in \mathbb{R}_0^+$ alors $a^x \in \mathbb{R}_0^+$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ (nombre rationnel positif ou négatif).

Exemples : $2^0 =$; $2^2 =$; $2^{-3} =$; $2^{1/2} =$

De même, nous admettrons que si $a \in \mathbb{R}_0^+$ alors $a^x \in \mathbb{R}_0^+$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemples : $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665$; $2^{\pi} \approx 8{,}825$

2.2 Propriétés

Les propriétés algébriques des puissances à exposants rationnels peuvent être étendues aux puissances à exposants réels.

$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall r, s \in \mathbb{R}$:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

3 Croissance exponentielle

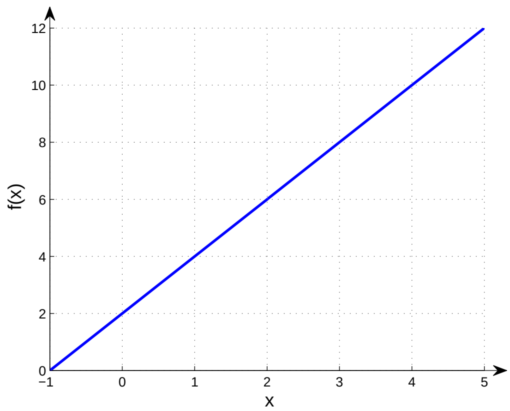
Rappel : On parle de croissance linéaire lorsqu'un phénomène augmente d'une valeur constante sur des intervalles de temps égaux ; la progression est arithmétique. Cette situation peut-être modélisée par une fonction du premier degré ($f(x) = a \cdot x + b$), dont le graphique est une droite.

Exemple : $f(x) = 2 \cdot x + 2$

$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	6	8	10

$+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$



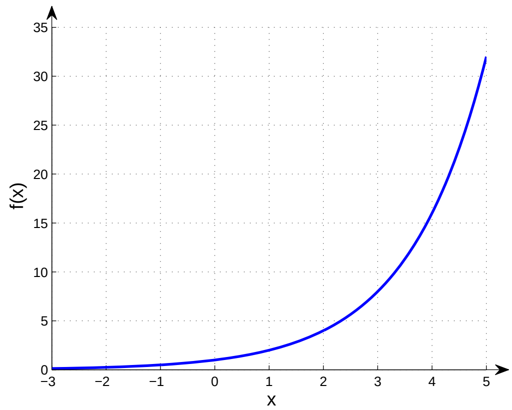
On parle de croissance exponentielle lorsqu'un phénomène suit une progression géométrique. Le facteur multiplicatif est alors constant sur des intervalles de temps égaux. Le fonction modélisant ce type de situation est de la forme $f(x) = a^x$.

Exemple : $f(x) = 2^x$

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	4	8	16

x2 x2 x2 x2



4 Fonction exponentielle de base a

4.1 Définition

La fonction exponentielle en base a, a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, est notée $\exp_a$ et est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a^x = \exp_a x \qquad a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$$

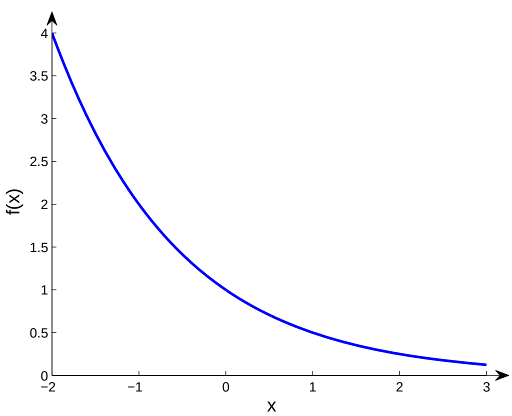
Exemples : $f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $h(x) = 10^x$ et $i(x) = \pi^x$
sont des fonctions exponentielles.

4.2 Propriétés

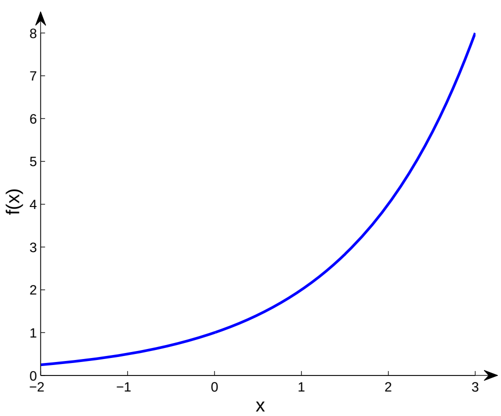
Pour les fonctions exponentielles $f(x) = 2^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, complétez le tableau ci-dessous :

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$\sqrt{2}$	2
$f(x) = 2^x$								
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$								

$0 < a < 1$



$a > 1$



Fonction exponentielle de base a (avec $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) : $\exp_a$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \exp_a(x) = a^x$$

$$\text{dom } \exp_a = \mathbb{R}$$

$$\text{im } \exp_a = \mathbb{R}_0^+$$

Point particulier à toutes les fonctions exponentielles : $(0;1)$
O_x est une asymptote horizontale : $AH \equiv y = 0$
Il n'y a pas d'autres asymptotes.

$0 < a < 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

$\exp_a$ est une fonction strictement décroissante

$a > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

$\exp_a$ est une fonction strictement croissante

Toute fonction exponentielle étant strictement croissante ou décroissante, elle établit une bijection entre les valeurs de la variable x et ses images y (à un x correspond un seul y et inversement).

4.3 Reconnaître un accroissement exponentiel

Le facteur multiplicatif entre deux réels r et s d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vaut

$$\frac{f(s)}{f(r)} \quad \forall r,s \in \mathbb{R}$$

Pour une fonction exponentielle de base a, le facteur multiplicatif est donc

$$\frac{\exp_a s}{\exp_a r} = \frac{a^s}{a^r} = a^{s-r} \quad \forall r,s \in \mathbb{R}$$

Il ne dépend que de la différence $s-r$. Pour toute différence constante entre deux réels, on observe donc un facteur multiplicatif constant.

Il en est de même pour toute fonction multiple d'une fonction exponentielle $f(x) = k \cdot a^x$:

$$\frac{f(s)}{f(r)} = \frac{k \cdot a^s}{k \cdot a^r} = a^{s-r} \quad \forall r,s \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, si le facteur multiplicatif d'une fonction entre deux réels r et s ne dépend que de la différence $s-r$, il s'agit d'une fonction exponentielle ou d'un multiple d'une fonction exponentielle (ou fonction constante si le facteur multiplicatif vaut 1).

En pratique, lorsqu'on dispose d'observations expérimentales faites sur des intervalles réguliers, on calcule le rapport de valeurs consécutives pour reconnaître si le phénomène est exponentiel. Si ce rapport est quasi constant et que l'on note a la valeur approchée de ce rapport, le phénomène peut être modélisé par $f(x) = b \cdot a^x$ où b est la valeur initiale (en $x = 0$) de la fonction.

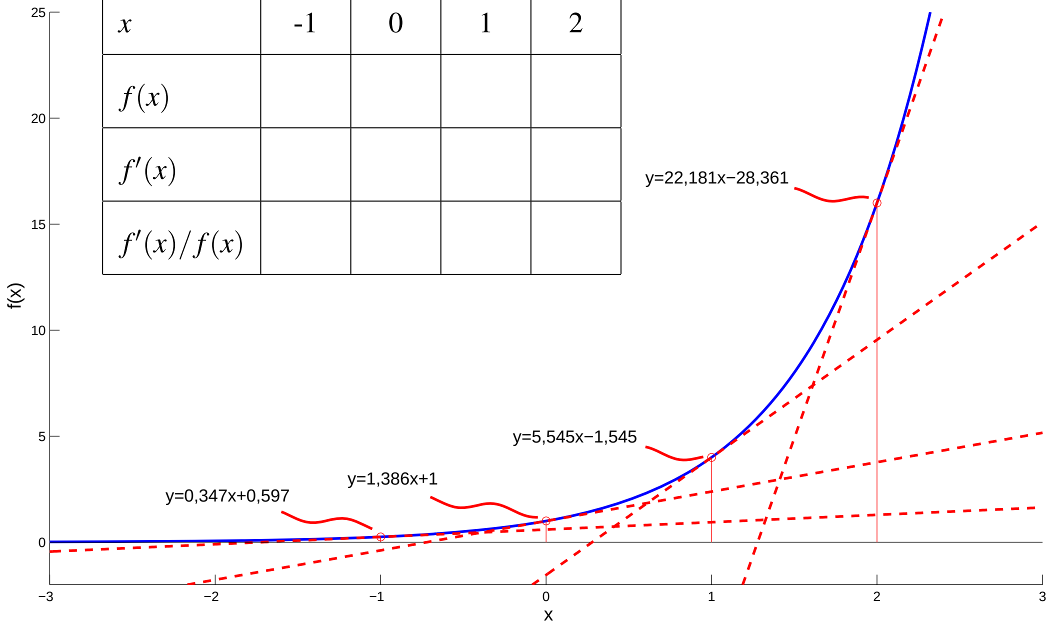
4.4 Dérivée

Rappel : Le nombre dérivé de la fonction f en un point est le coefficient angulaire de la tangente au graphe de la fonction en ce point. Le signe de ce nombre détermine la croissance ou la décroissance de f.

Sur le graphe ci-dessous, on a tracé le graphe de la fonction exponentielle $f(x) = 4^x$ ainsi que quelques unes de ses tangentes.

A l'aide des équations des tangentes, remplissez le tableau ci-dessous :

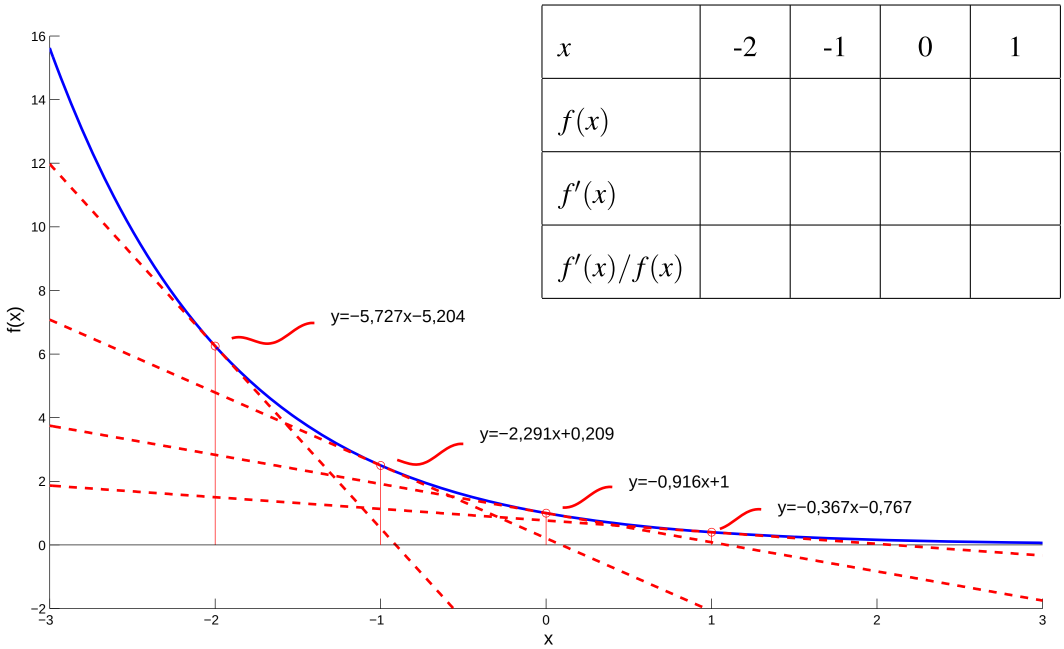
x	-1	0	1	2
$f(x)$				
$f'(x)$				
$f'(x)/f(x)$				



Voici le graphe de la fonction exponentielle $f(x) = 0,4^x$ et quelques unes de ses tangentes.

A l'aide des équations des tangentes, complétez le tableau ci-dessous :

x	-2	-1	0	1
$f(x)$				
$f'(x)$				
$f'(x)/f(x)$				



Les images des dérivées des fonctions exponentielles sont directement proportionnelles aux images de la fonction elle-même. Ainsi, le taux de variation d'une fonction exponentielle est directement proportionnel à l'image de la fonction ; c'est l'effet boule de neige.

La fonction exponentielle $f(x) = a^x$ est une fonction dont la fonction dérivée est un multiple de la fonction elle-même :

$$(a^x)' = k \cdot a^x$$

k étant un nombre réel constant pour une même exponentielle.

Démonstration (pour information) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-a^0)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-a^0}{h} \\ &= a^x \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \right) = a^x \cdot f'(0) \end{aligned}$$

5 Résoudre une équation exponentielle

Principe d'équivalence :

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\},\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ :\ a^x = a^y \ \Leftrightarrow\ x = y$$

Résoudre une équation ou une inéquation exponentielle consiste à comparer les images de deux fonctions ayant même base. Sous cette condition impérative , il est permis de comparer les exposants et donc résoudre l'équation ou l'inéquation.

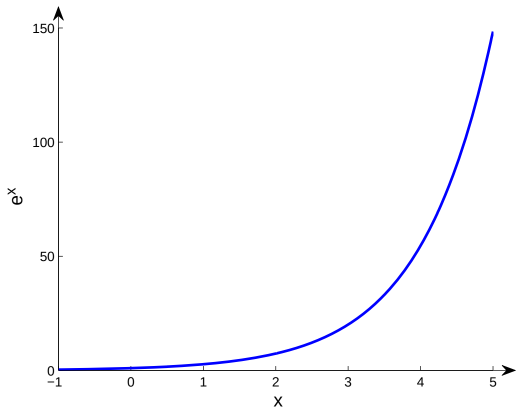
Exemple :

$$\begin{gathered} 3^{x+1} = 12 - 3^{x+2} \\ 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12 \\ 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 = 12 \\ 3^x \cdot (3+9) = 12 \\ 3^x = 1 \\ 3^x = 3^0 \\ x = 0 \end{gathered}$$

6 Fonction exponentielle de base e

La fonction exponentielle de base e est appelée fonction exponentielle népérienne, elle est notée $exp_e(x)$ ou simplement e^x.

$$\exp_e : x \in \mathbb{R} \ \rightarrow\ \exp_e(x) = e^x$$



Cette fonction est telle que

$$(e^x)' = e^x$$

Le nombre noté e est appelé nombre d'Euler, il est défini par

$$e = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

$$e \approx 2,71828$$

Démonstration (pour information) :

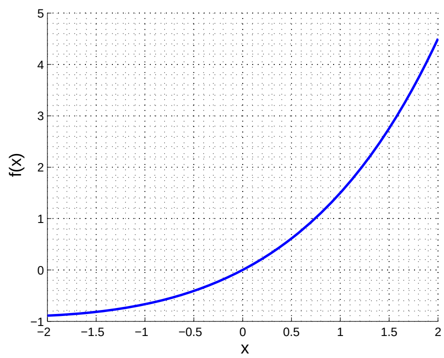
$$\begin{array}{rrcl}
 & (e^x)' & = & e^x \\
\Leftrightarrow & \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{x+h} - e^x}{h}\right) & = & e^x \\
\Leftrightarrow & \lim_{h \to 0} \left(e^x \frac{(e^h - 1)}{h}\right) & = & e^x \\
\Leftrightarrow & \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}\right) & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \lim_{m \to +\infty} e^{\frac{1}{m}} & = & \lim_{m \to +\infty} 1 + \frac{1}{m} \\
\Leftrightarrow & e & = & \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m
\end{array}$$

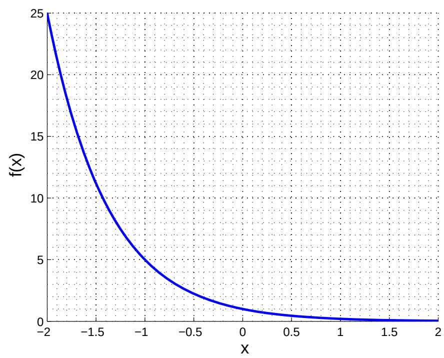
7 Exercices et problèmes

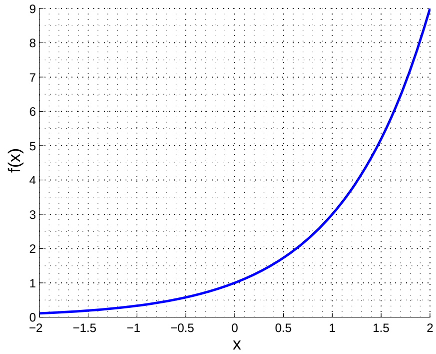
1. Parmi les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles peuvent être appelées fonctions exponentielles ? Lesquelles sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ ou strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$?

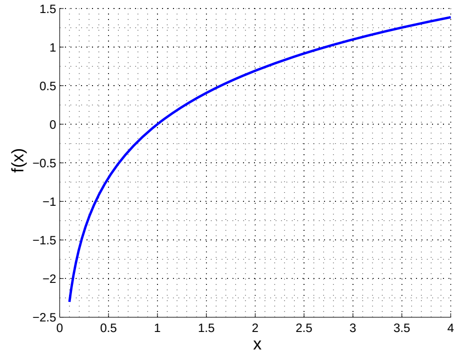
   a) $f(x) = 5^x$
   b) $f(x) = x^3$
   c) $f(x) = 2^{x+3}$
   d) $f(x) = x \cdot 5^x$
   e) $f(x) = \dfrac{1}{3^x}$

2. Parmi les graphiques suivants, lesquels correspondent à une fonction exponentielle ? Préciser la base.









3. Résoudre les équations suivantes :

   a) $3^{2x-5} = \dfrac{1}{3}$

   b) $5^x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

   c) $16^x = \dfrac{1}{2}$

   d) $3^{x^2-3x+5} = 27$

   e) $3^{x-2} - \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2x+1} = 0$

4. Une population de bactéries triple tous les deux jours. C'est-à-dire que le facteur multiplicatif est de ..... pour deux jours, le facteur pour un jour est alors ..... .
   Si N_0 représente le nombre initial de bactéries, la fonction exprimant le nombre de bactéries en fonction du nombre de jours écoulés à partir du jour initial est $f(x) =$ ..... .
   Quel sera, en fonction de N_0 , le nombre de bactéries

   a) dans 8 jours ?

   b) 5 jours avant le jour initial d'observation ?

5. Une somme de 12000€ est placée le premier janvier 2014 sur un compte à intérêts composés au taux annuel de 2%. Cela signifie qu'au bout d'une année, l'intérêt produit est capitalisé et l'année suivante l'intérêt est calculé sur le capital initial augmenté des intérêts de l'année précédente.

   (a) Par quel nombre le capital d'une année doit-il être multiplié pour obtenir le capital de l'année suivante ?

   (b) Exprimer la fonction $f(x)$ donnant le montant du capital en fonction du nombre x d'années.

   (c) Quel sera le capital obtenu le 01/01/2020 ?

   Avec ce même taux annuel, quelle somme aurait-il fallu placer il y a dix ans pour produire un capital de 5000€ aujourd'hui ?

6. Un condensateur - dispositif électrique qui permet d'emmagasiner des charges électriques - contient une charge de $3,12\ \mu C$ au temps $t = 5\ s$. Il est en train de se décharger ; au temps $t = 7\ s$, la charge n'est plus que de $2,75\ \mu C$. Si la variation de charge par unité de temps est proportionnelle à la quantité de charge encore présente dans le condensateur :

   a) Quelle sera la quantité de charge dans le condensateur aux temps $t = 11\ s$ et $t = 15\ s$?

   b) Quelle était la charge au temps $t = 0\ s$?

7. Le carbone 14 (^{14}C) est un isotope radioactif ; il se désintègre naturellement en se transformant en azote. Cette propriété peut-être utilisée pour dater certains vestiges archéologiques.
   On a pu établir que pendant chaque période de 5734 ans, la masse de ^{14}C est multiplié par $\dfrac{1}{2}$. Cette période durant laquelle la quantité de ^{14}C diminue de moitié est appelée période de demi-vie (T).

L'évolution du nombre d'atomes N de ^{14}C suit alors une décroissance exponentielle de la forme :

$$N(t) = N_0 \cdot a^{b \cdot t}$$

où N_0 est le nombre d'atomes initial.

a) Dans l'expression analytique décrivant la désintégration du ^{14}C, que valent a et b ?
b) Calculer le % d'atomes perdus au bout de 20 000 ans.
c) On analyse un fragment d'os et on constate qu'il a perdu $87,5\%$ de sa teneur en carbone. Déterminer l'age de cet os.

8. Avec un taux d'intérêt de 100% sur 10 ans, un capital de 1000€ au départ conduira à une somme de 2000€ 10 ans plus tard. Que se passerait-il si le compte était crédité plus régulièrement grâce à un intérêt périodique proportionnel au nombre de périodes ?

Capitalisation	Nombre de périodes	Taux d'intérêt périodique	Capital obtenu
après 10 ans	1	100%	2000€
après 5 ans	2	50%	2250€
annuelle	10	10%	
semestrielle	20		
mensuelle	120		
quotidienne			
toutes les heures			

9. Sous l'effet de la pesanteur, un fil suspendu entre deux poteaux adopte une forme courbe. La courbe mathématique est appelée *chainette*, elle a pour équation

$$f(x) = \frac{a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}{2}$$

où a est une constante physique propre à chaque situation.
Construire le graphique de la fonction au départ de celui de la fonction exponentielle népérienne. (Prendre par exemple $a = 5$)