Les dérivées en résistance des matériaux

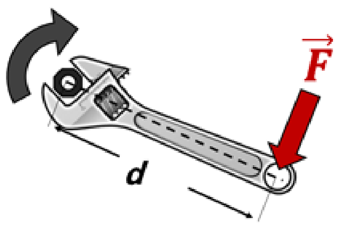
1 Force et moment

Il existe deux types de déplacement qui peuvent survenir suite à l'action de forces :

a) le mouvement de translation (vertical et/ou horizontal) associé à la force proprement dite ;

b) le mouvement de rotation associé au moment de la force.

Exemple : lorsqu'on agit sur un boulon à l'aide d'une clé anglaise, on exerce à l'extrémité de la clé une force F perpendiculaire au bras de levier (d) qui engendre un mouvement de rotation au boulon à l'autre extrémité de la clé.



Schématiquement, on a $moment = force$ x $distance$. Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$ sont perpendiculaires, alors l'intensité du moment vaut simplement $M = F \cdot d$.

Lorsque $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$ forment un angle quelconque, on définit de manière rigoureuse le moment comme un produit vectoriel :

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{d}$$

2 Principes fondamentaux en résistance de matériaux

2.1 Principe général d'équilibre

Tout solide dont on étudie les efforts internes et déformations doit être considéré comme en équilibre sous l'action des forces extérieures (charges directement appliquées et réactions des appuis).

Il en résulte les équations d'équilibre. Dans le plan, on a ainsi :

Translation :

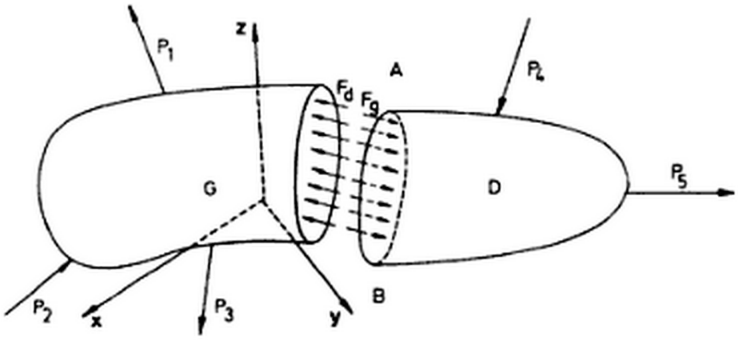
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

Rotation :

$$\sum M_z = 0$$

2.2 Principe de la coupe

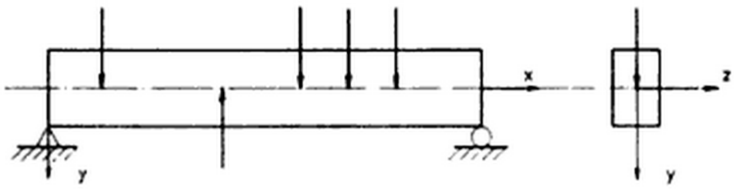
Tout fragment d'une structure en équilibre est lui-même en équilibre.



Ce principe montre que des forces apparaissent sur la surface d'une coupe qui isole un fragment d'une structure. D'un point de vue physique, ces forces internes représentent la transmission des charges entre les fragments à travers les coupes et correspondent à la capacité de la matière à transmettre des forces, grâce à sa cohésion.

3 Forces internes en flexion simple

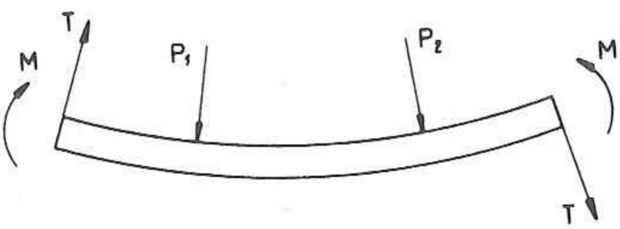
Considérons une poutre à axe rectiligne soumise à des forces extérieures agissant dans un plan $x-y$ et perpendiculairement à l'axe de la poutre (x) .



Dans ce cas, les forces internes sont de deux types :

- Les efforts tranchants : T
- Les moments fléchissants : M

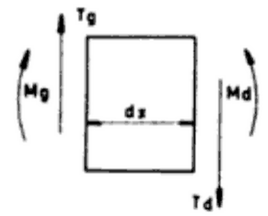
Les moments fléchissants sont positifs lorsqu'ils rendent la poutre concave vers le haut. Ils sont négatifs dans le cas contraire. Les efforts tranchants sont positifs lorsqu'ils tendent à faire monter la partie gauche de la poutre par rapport à la partie droite.



De ces conventions, on en déduit que le moment fléchissant est positif s'il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre quand on l'évalue en fonction des forces à gauche et dans le sens contraire quand on l'évalue en fonction des forces à droite.

De même, l'effort tranchant dans une section est positif s'il est dirigé vers le haut quand on l'évalue en fonction des forces à gauche et vers le bas quand on l'évalue en fonction des forces à droite.

En effet, du fait que l'élément de poutre de longueur dx est en équilibre, il faut nécessairement que les sollicitations M_g et M_d, T_g et T_d aient des sens inverses.

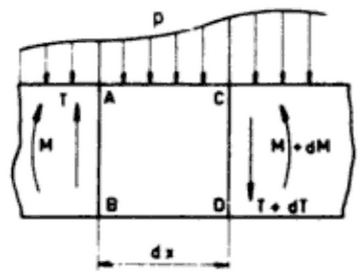


Ces sollicitations varient d'une section droite à l'autre, en fonction de l'abscisse x de la section. La représentation graphique de chacune de ces fonctions le long de l'axe de la poutre s'appelle diagramme de l'effort tranchant ou diagramme du moment de flexion.

Pour nous aider à réaliser ces divers diagrammes, déterminons mathématiquement les relations liant effort tranchant et moment de flexion. Ces relations s'établissent au moyen des équations d'équilibre.

4 Relations entre p, T et M

Considérons d'abord une poutre droite d'axe x soumise à une charge $p(x)$ répartie le long de la poutre. A l'abscisse x, isolons un petit élément dx de la poutre. Sur la face gauche de cet élément naissent des sollicitations T, M et sur la face droite les mêmes sollicitations accrues de leurs variations dT, dM sur l'intervalle dx. Entre les deux faces, la résultante $p(x)dx$ de la charge appliquée à l'élément dx agit également.



L'équilibre du fragment dx de poutre donne les relations :

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = -T + p(x)\ dx + T + dT = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p(x) = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

$$\sum M_z = M + T\ dx - p(x)dx\frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}$$

Dans la somme des moments, le terme $p(x)dx\dfrac{dx}{2}$ étant du second ordre, il est négligeable devant les autres termes.

Ainsi,

$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = M'(x)$$

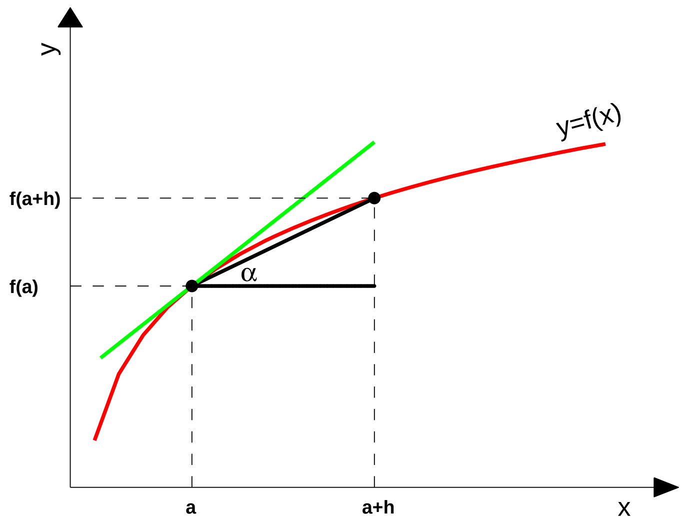
Cette formule se traduit par l'énoncé suivant :

Dans toute section d'une poutre où il n'existe pas de force concentrée, l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section. On déduit que le moment de flexion est extremum dans la section droite de poutre où l'effort tranchant s'annule.

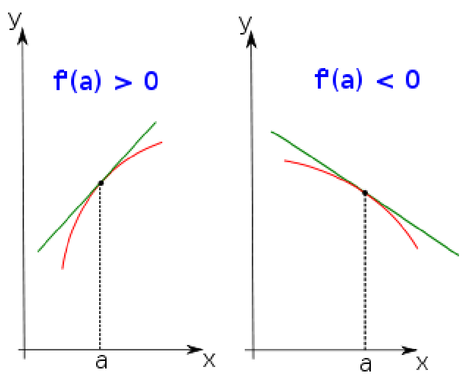
5 Rappel sur les dérivées

La dérivée d'une fonction est définie par

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

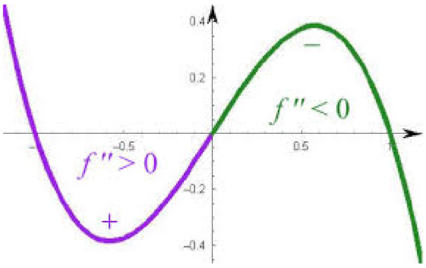


Graphiquement, la dérivée d'une fonction en x correspond à la pente de la droite tangente à la fonction en x. Le signe de la dérivée (donc le signe de la pente de la droite tangente) est lié à la croissance/ décroissance de la fonction.

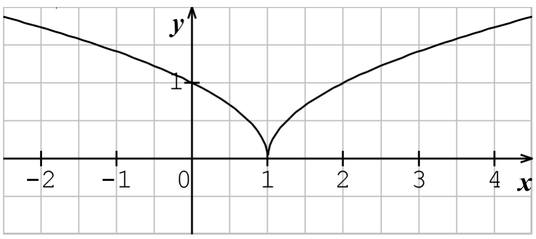


Ainsi, la dérivée d'une fonction est positive dans l'intervalle où la fonction est croissante et négative là où elle est décroissante. La dérivée est donc nulle aux extrema (minimum ou maximum) de la fonction.

Quant au signe de la dérivée seconde, c'est un indicateur du sens de la concavité de la fonction. La concavité est tournée vers le bas lorsque la dérivée seconde est négative (donc dérivée première est décroissante). A l'inverse, une concavité dirigée vers le haut implique que la dérivée seconde est positive (dérivée première croissante). Le point où la concavité change de sens est appelé **point d'inflexion**, la dérivée seconde évaluée en ce point est nulle.

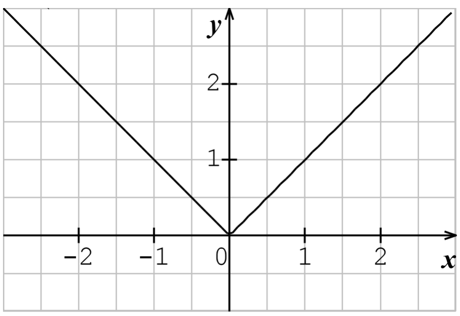


Pour certaines abscisses x, la dérivée à gauche et la dérivée à droite peuvent ne pas être identiques. On parle alors soit de points de rebroussement soit de points anguleux.



Un point du graphe d'une fonction est un **point de rebroussement** si et seulement si la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que ces deux dérivées sont infinies.

C'est par exemple le cas du point $(0,1)$ de la fonction $\sqrt{|x-1|}$ dont le graphe est donné ci-contre.



Un point du graphe d'une fonction est un **point de anguleux** si et seulement si la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que l'une de ces dérivées au moins n'est pas infinie.

C'est par exemple le cas du point $(0,0)$ de la fonction $|x|$ dont le graphe est donné ci-contre.

Le tableau ci-dessous reprend les formules usuelles permettant d'évaluer les fonctions dérivées de quelques fonctions de base :

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$mx+p$	m
x^n	$n\,x^{n-1}$
$k\,x^n$	$k\,n\,x^{n-1}$

6 Diagrammes de moment, d'effort tranchant et déformée

La suite du cours consiste à réaliser les diagrammes des sollicitations pour diverses configurations. Pour déterminer le moment de flexion en une section droite d'une poutre, on exploite le fait qu'il est égal à la somme algébrique des moments des forces situées d'un côté de la section.

Par définition, le moment de flexion tend à fléchir la poutre, il décrit la courbure prise par l'axe de la poutre. Le diagramme du déplacement v d'un point d'abscisse x par rapport à la ligne moyenne de la poutre est appelé *déformée*. Le moment de flexion et la déformée sont liés par la relation :

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

où $v''(x)$ est la dérivée seconde de la déformée et la quantité EI est une constante appelée *rigidité flexionnelle* qui dépend du matériau.

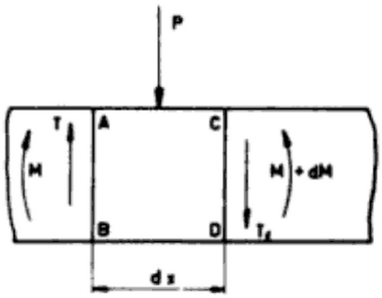
Si on se rappelle que la dérivée seconde d'une fonction est liée au sens de concavité de celle-ci, alors le signe du moment et le sens de concavité de la déformée sont liés. En effet, un moment positif implique une déformée dont la concavité est dirigée vers le haut alors qu'un moment négatif implique une concavité dirigée vers le bas. Un point d'inflexion (changement de sens de courbure) dans l'allure de la déformée est donc synonyme d'un moment de flexion nul.

Nous avons déterminé que

$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = M'(x)$$

Ainsi, le diagramme d'effort tranchant est positif lorsque le diagramme de moment est croissant et négatif dans le cas où le moment décroit. Lorsque le moment est maximal, l'effort tranchant est nul.

Supposons maintenant qu'une force concentrée P soit appliquée entre les sections AB et CD de l'élément de poutre.



Si T désigne l'effort tranchant dans la section AB et T_1 celui existant dans la section CD, l'équilibre de l'élément de poutre impose

$$T_1 = T - P$$

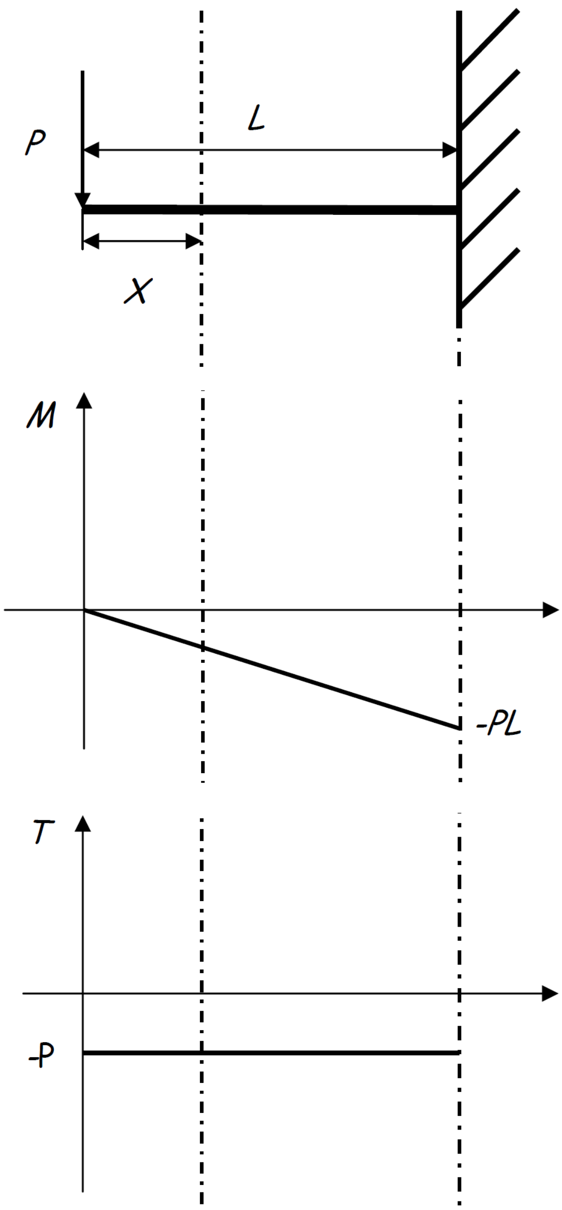
Donc, au point d'application d'une force concentrée, l'effort tranchant varie brusquement, c'est-à-dire qu'il se produit une variation brusque de la dérivée du moment fléchissant (point anguleux dans le diagramme de moment).

7 Exercices

Les exercices qui suivent envisagent différentes configurations de poutres. Différents types d'appuis sont considérés (encastrement, deux appuis et porte-à-faux) ainsi que diverses sollicitations (force concentrée et charge répartie).

7.1 Poutre encastrée à une extrémité

7.1.1 Une force concentrée



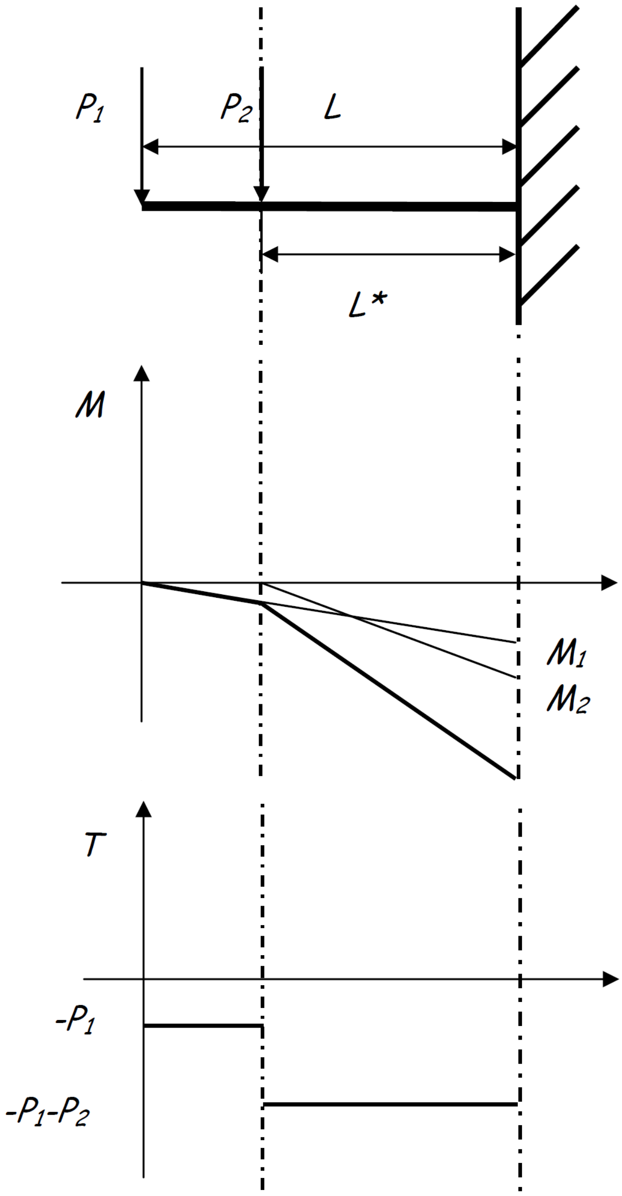
$$M + P \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = -P \cdot x \quad \text{(Fonction du 1}^{\text{er}}\text{ degré)}$$

$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -P \quad \text{(Fonction constante)}$$

7.1.2 Deux forces concentrées

Lorsque plusieurs forces concentrées sont présentes, on réalise les diagrammes de flexion de chacune des forces puis on additionne les moments pour obtenir le moment résultant.



- si $x < L - L*$:

$$M + P_1 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -P_1 \cdot x$$

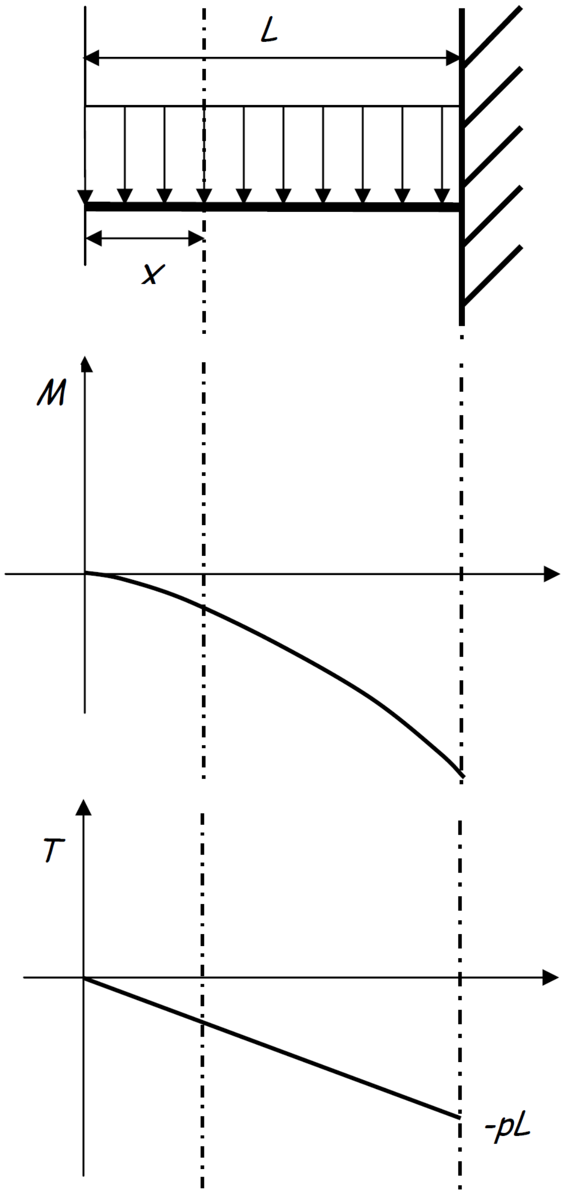
- si $x > L - L*$:

$$M + P_1 \cdot x + P_2 \cdot [x - (L - L*)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = -P_1 \cdot x - P_2 \cdot [x - (L - L*)]$$

$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} -P_1 & \text{si} \quad x < L - L* \\ -P_1 - P_2 & \text{si} \quad x > L - L* \end{cases}$$

7.1.3 Charge uniformément répartie



Soit p la charge par unité de longueur.
On note $P = p \cdot L$, la charge totale.

$$M + p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

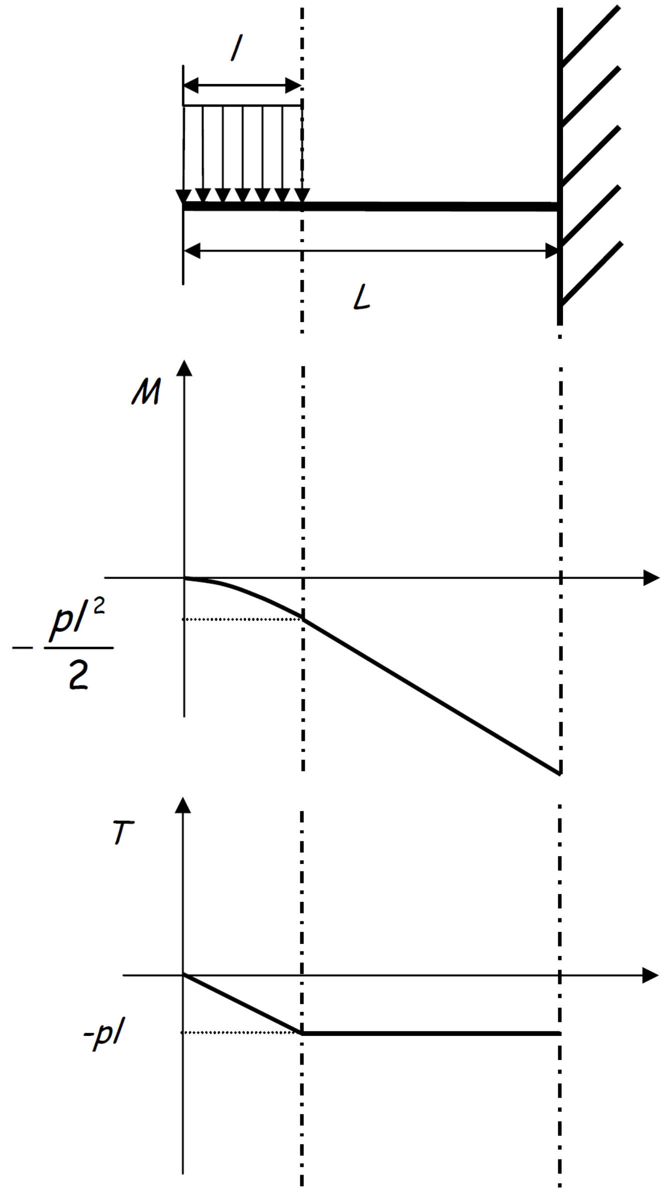
$$\Rightarrow \quad M = -p \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{(Fonction du 2}^{\text{e}}\text{ degré)}$$

$$M(L) = -p\frac{L^2}{2} = -\frac{P \cdot L}{2}$$

C'est le moment maximal (en valeur absolue).

$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -p \cdot x \quad \text{(Fonction du 1}^{\text{er}}\text{ degré)}$$

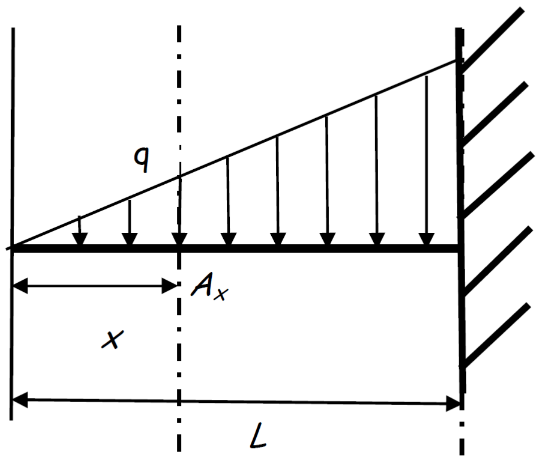
7.1.4 Charge uniformément répartie sur $l < L$



- si $x < l$: $M = -\dfrac{p \cdot x^2}{2}$
- si $x = l$: $M = -\dfrac{p \cdot l^2}{2}$
- si $x > l$: $M = -p \cdot l(x - \dfrac{l}{2})$

$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} -p \cdot x & \text{si} \quad x \leqslant l \\ -P \cdot l & \text{si} \quad x \geqslant l \end{cases}$$

7.1.5 Charge répartie linéairement croissante

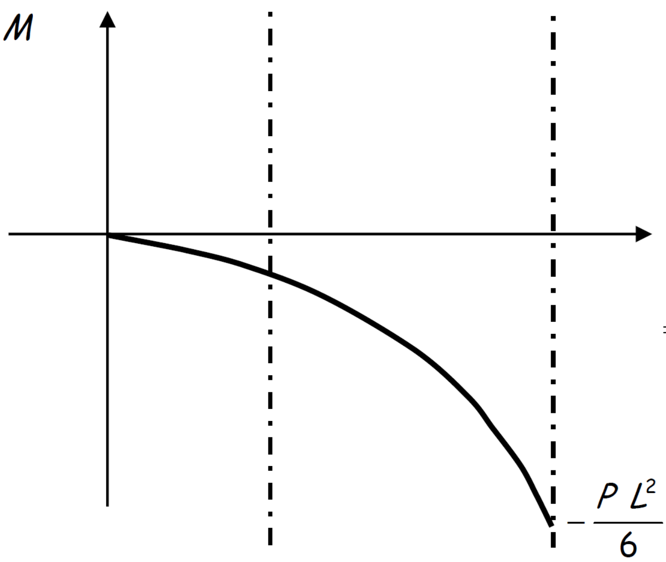


La charge en x est donnée par

$$\frac{q}{p} = \frac{x}{L} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{P \cdot x}{L}$$

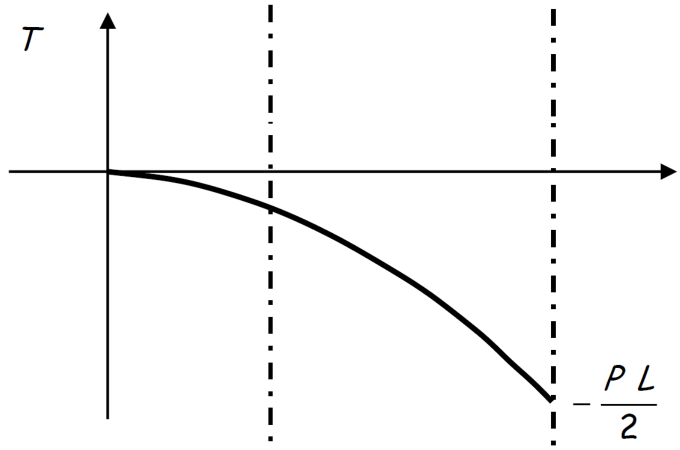
où P est la charge atteinte à l'encastrement.

A noter que la résultante de la charge linéairement croissante agissant sur une longueur x s'applique à une distance $\frac{x}{3}$ de A_x.



$$M + \frac{P \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0$$

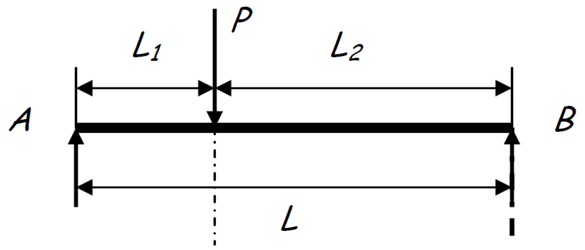
$$\Rightarrow \quad M = -\frac{P \cdot x^3}{6L} \quad \text{(Fonction du 3}^{\text{e}}\text{ degré)}$$



$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -\frac{P \cdot x^2}{2L} \quad \text{(Fonction du 2}^{\text{e}}\text{ degré)}$$

7.2 Poutre sur deux appuis

7.2.1 Une force concentrée



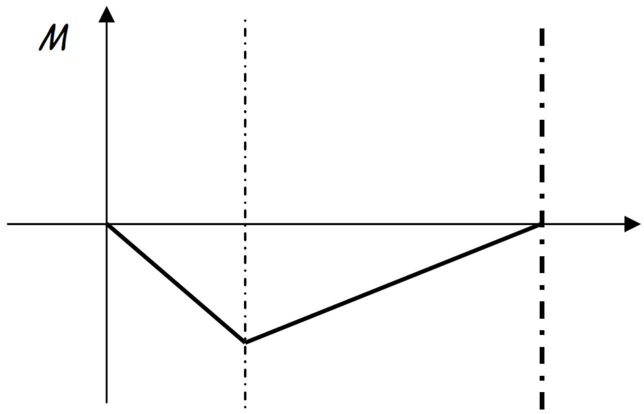
Equilibre vertical :

$$P = R_A + R_B$$

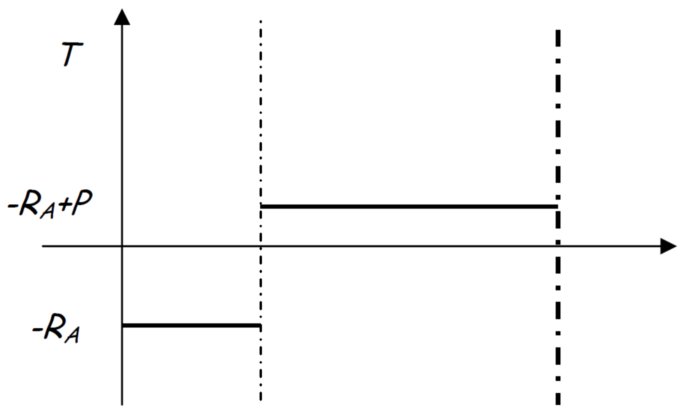
Equilibre de rotation en A :

$$R_A \cdot 0 + P \cdot L_1 - R_B \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_A = \frac{P \cdot L_2}{L} \quad ; \quad R_B = \frac{P \cdot L_1}{L}$$



- si $x < L_1$: $M = +R_A \cdot x$
- si $x = L_1$: $M = +R_A \cdot L_1$
- si $x > L_1$: $M = +R_A \cdot x - P \cdot (x - L_1)$



$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} +R_A & \text{si} \quad x \leqslant L_1 \\ +R_A - P & \text{si} \quad x > L_1 \end{cases}$$

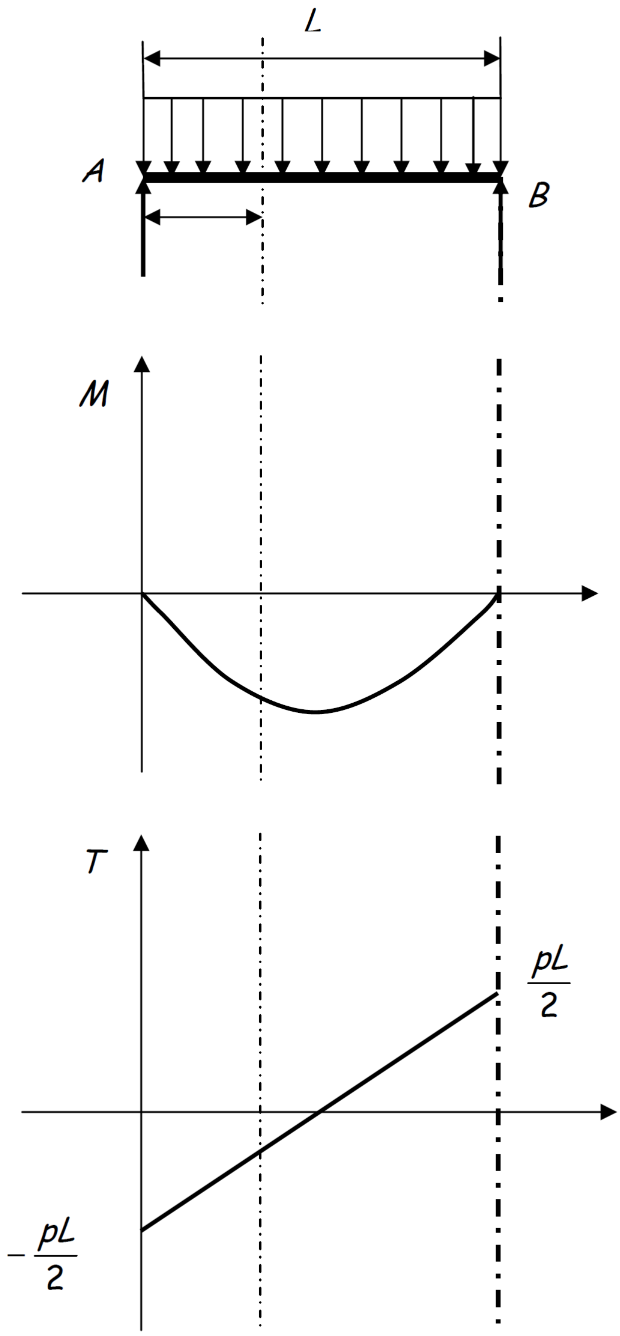
Le moment est maximal en $x = L_1$ et vaut :

$$\frac{P \cdot L_1 \cdot L_2}{L}$$

Si la charge se trouve au milieu de la poutre, le moment de flexion maximal vaut

$$\frac{P \cdot L}{4}$$

7.2.2 Charge uniformément répartie



$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = \frac{p \cdot L}{2}$$

$$\begin{aligned} M &= -p \cdot x \frac{x}{2} + R_A \cdot x \\ &= -p \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{p \cdot L}{2} \\ &= \frac{p \cdot x}{2}(L - x) \end{aligned}$$

$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -p \cdot x + \frac{p \cdot L}{2} = p \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)$$

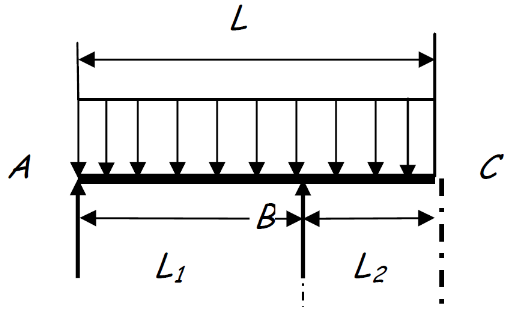
Le moment est extremum en $x = \frac{L}{2}$ et vaut :

$$\frac{p \cdot L^2}{8}$$

A cet endroit, l'effort tranchant est nul.

7.3 Poutre avec porte-à-faux

7.3.1 Charge uniformément répartie



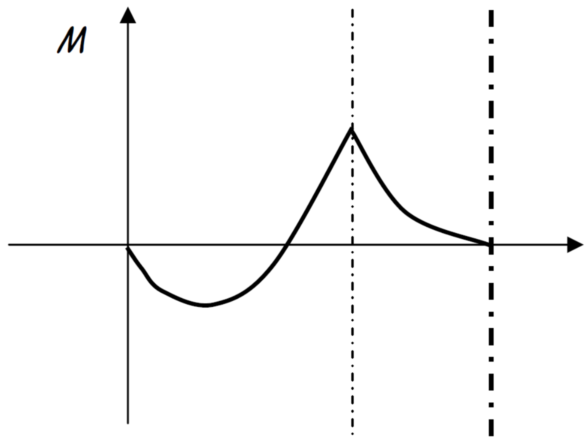
Equilibre vertical :

$$R_A + R_B = pL$$

Equilibre rotation :

$$R_B \cdot L_1 = \frac{pL^2}{2} \quad \to R_B = \frac{pL^2}{2L_1}$$

$$\to R_A = pL - \frac{pL^2}{2L_1} = pL \cdot \frac{(L_1 - L_2)}{2L_1}$$



- si $x < L_1$:

$$M = +R_A \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = +R_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

- si $x = L_1$:

Calcul par la gauche :

$$M = pL \cdot \frac{(L_1 - L_2)}{2L_1} \cdot L_1 - \frac{p \cdot L_1^2}{2} = \frac{pL_1}{2} \cdot \left(\frac{(L_1 + L_2) \cdot (L_1 - L_2) - L_1^2}{L_1} \right) = -p \cdot \frac{L_2^2}{2}$$

Calcul par la droite :

$$M = -p \cdot L_2 \cdot \frac{L_2}{2} = -p \cdot \frac{L_2^2}{2}$$

- si $x > L_1$:

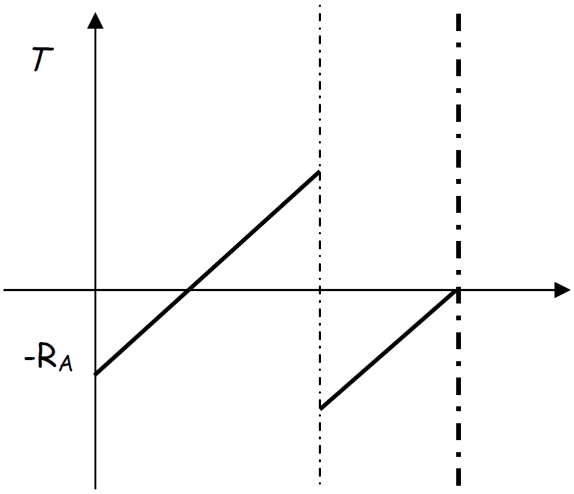
Calcul par la gauche :

$$M = +R_A \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2} + R_B \cdot (x - L_1) = -\frac{p \cdot x^2}{2} + (R_A + R_B) \cdot x - R_B \cdot L_1$$

$$= -\frac{p \cdot x^2}{2} + (pL) \cdot x - \frac{pL^2}{2} = -p \cdot (Lx - \frac{L^2}{2} - \frac{x^2}{2}) = -\frac{p \cdot (L - x)^2}{2}$$

Ou calcul par la droite (! calcul de la distance avec $L - x$ au lieu de x !) :

$$M = -\frac{p \cdot (L - x)^2}{2}$$



$$T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} -p \cdot x + R_A & \text{si} \quad x < L_1 \\ -p \cdot x + R_A + R_B & \text{si} \quad x > L_1 \end{cases}$$

La déformée présente un point d'inflexion là où le moment est nul, c'est-à-dire en $x = \dfrac{2 \cdot R_A}{p}$.

Le moment de flexion présente un extremum en $x = \dfrac{R_A}{p}$. Ce moment vaut $+\dfrac{R_A^2}{2 \cdot p}$. L'effort tranchant est nul à cet endroit.