Analyse combinatoire

Police des commentaires et analyse
Police du cours des élèves.

Planning :
- *Cours 1 : Principe de multiplication + notation factorielle + Arrangements sans et avec répétitions*
- *Cours 2 : Permutations sans et avec répétitions + Combinaison*
- *Cours 3 : Synthèse + exercices*
- *Cours 4 : Suite des exercices*

Le cours est donné dans l'enseignement général de transition dans une classe d'une vingtaine d'élèves de 6e année Math 4h. Ces séances de cours visent à fournir aux élèves des outils de dénombrement pour divers types de groupements : arrangements avec et sans répétitions, permutations et combinaisons simples. Pour établir les formules correspondantes, des problèmes simples pouvant être représentés sous forme d'arbre sont utilisés. Les formules sont ensuite démontrées et appliquées. Au préalable, le principe de multiplication est expliqué et la notation factorielle introduite. Ces séances de cours seront suivies (avec leur professeur) par les propriétés des formules de combinaisons, le triangle de Pascal et le binôme de Newton. Plus tard, les formules établies seront utilisées pour le calcul de probabilité.

L'analyse combinatoire traite principalement des **problèmes de dénombrement**. Dénombrer, c'est calculer le nombre de possibilités de grouper un certain nombre d'éléments d'un ensemble fini donné. Il existe divers types de groupement selon qu'on utilise tout ou une partie des éléments, qu'on considère ou non l'ordre dans lequel on les choisit, qu'on puisse ou non réutiliser les mêmes éléments.

1 Principe de multiplication

Il s'agit d'un principe fondamental en analyse combinatoire.

Considérons n opérations successives. Si la k^{e} opération ($1 \leqslant k \leqslant n$) peut se dérouler de m_k manières différentes, alors les n opérations peuvent être effectuées dans l'ordre indiqué de $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ manières différentes.

Ce principe est expliqué au travers de la question fondamentale du nombre de groupements pouvant être effectués avec les éléments d'en ensemble donné sur base des trois critères : l'ordre considéré ou non, tous les éléments considérés ou non et répétitions possibles ou non. Cet exemple, en plus d'illustrer le principe de multiplication, avait pour objectif de montrer une vision globale des divers types de groupements qui allaient être considérés par la suite ; les élèves pouvant ainsi se situer par rapport à cet arbre au fil de l'avancement du cours (comme conseillé en didactique générale). A posteriori, il s'est avéré que cette explication fut assez longue et fastidieuse et qu'elle ne permettait pas de poser des questions intelligentes aux élèves afin que ceux-ci travaillent par eux-mêmes. Ce ne serait donc pas à refaire. La vision globale serait alors uniquement donnée au moment de la synthèse.

<u>Exemple</u> : Si une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

2 Notation factorielle

La notation factorielle facilitant l'écriture de certaines formules de dénombrement, celle-ci doit être expliquée. Au départ, j'avais prévu de l'introduire au moment où on la rencontrerait pour la première fois (pour faciliter l'écriture de la formule des arrangements sans répétition). Sur demande du maître de stage, elle constitua une section à part entière. Néanmoins, il est apparu que cela retarda encore la mise en activité des élèves autour d'un problème. A posteriori, je crois que le déroulement du cours ne devrait pas forcément suivre l'ordre des feuilles élèves. Il me semble que les feuilles distribuées devraient surtout faciliter l'étude pour les élèves ; dans cette optique, il est logique de faire apparaître le principe de multiplication et la notation factorielle comme des sections indépendantes. Par contre, pendant le cours, les notions seraient agencées dans un ordre plus naturel (c'est-à-dire au moment où elles sont nécessaires).

Pour faciliter l'écriture du produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n, on utilise la notation factorielle : $n!$, qui se lit « factorielle de n » ou « n factorielle ».

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Exemple : $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Par convention, $0! = 1$.

On remarque la relation de récurrence : $n! = n \cdot (n-1)!$

Exemple : $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

La factorielle permet aussi d'écrire plus simplement des produits de naturels consécutifs du type : $n \cdot (n-1) \cdots (p+1) \cdot p$ (avec $n > p$) sous la forme d'un quotient :

$$n \cdot (n-1) \cdots (p+1) \cdot p = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (p+1) \cdot p \cdot (p-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(p-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(p-1)!}$$

Exemple : $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \dfrac{10!}{5!}$

3 Arrangement sans répétition

De manière assez classique, on commence par les arrangements sans répétition avec un problème de tirage :

Exemple : De combien de manières différentes peut-on tirer successivement, sans remise, trois boules dans une urne qui contient quatre boules numérotées de 1 à 4 ? Représenter, sous forme d'arborescence, les tirages pour lesquels la première boule tirée est la boule n°1 :

1er tirage	**2e tirage**	**3e tirage**	**Résultats**

Sachant que la première boule tirée puisse aussi être la n°2 ou la n°3 ou la n°4, combien y a-t-il au total de tirages possibles différents ?

Les élèves doivent construire eux-mêmes l'arbre. Il s'agit d'un outil de résolution généralement apprécié des élèves. Cependant, on indique les limites de cet outil pour un grand nombre d'éléments et d'évènements ; d'où la nécessité d'élaborer des formules. Pour ce faire, on invite les élèves à réfléchir sur le nombre d'éléments parmi lesquels ils ont à choisir à chaque tirage et l'application du principe de multiplication pour trouver le nombre de groupements possibles. De ce cas particulier, on induit la formule générale que l'on demande de simplifier grâce à la notation factorielle.

Définition

Un arrangement sans répétition de p éléments parmi n est une liste ordonnée de p éléments, distincts, choisis dans un ensemble de n éléments donnés.
Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n est noté A_n^p.

Formule

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad (p \leqslant n)$$

En effet, pour choisir un élément parmi n éléments distincts donnés, il y a n possibilités ; pour en choisir un deuxième, il y a $n-1$ possibilités puisque le premier élément ne peut plus être pris en compte (pas de répétition). Le choix consécutif (ordre) de deux objets distincts se fait donc de $n(n-1)$ façons.

En poursuivant, pour choisir le p^{e} élément, il ne reste plus que $n-(p-1)$ éléments et donc $n-p+1$ choix possibles.

D'où

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

En utilisant la notation factorielle, on a

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Quelques exemples de problèmes sont donnés pour que les élèves puissent s'exercer à reconnaître quand il faut utiliser la formule des arrangements sans répétition. On avertit du fait que les difficultés surviendront plus tard lorsque tous les types de groupements seront mélangés. En attendant, ils doivent uniquement identifier ce que valent n et p et se familiariser avec l'opération factorielle sur leur calculatrice.

Exemples :

a) De combien de façons peut-on jouer un tiercé sur une course de 10 chevaux ?

b) Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres différents formés à partir des chiffres 1, 2, 5, 7, 8 et 9 ?

c) Dans le local d'une classe, il y a 20 bancs individuels. De combien de manières différentes les 12 élèves de la classe peuvent-ils se placer ?

4 Arrangement avec répétitions

On introduit maintenant la possibilité de répétition aux arrangements. Il n'y a qu'un mot qui change par rapport au problème précédent. C'est la première question posée.

Exemple : De combien de manières différentes peut-on tirer successivement, avec remise, trois boules dans une urne qui contient quatre boules numérotées de 1 à 4 ? Représenter, sous forme d'arborescence, les tirages pour lesquels la première boule tirée est la boule n°1 :

1er tirage	**2e tirage**	**3e tirage**	**Résultats**

Au total, combien y a-t-il de tirages possibles différents ?

Définition

Un arrangement avec répétition de p éléments parmi n est une liste ordonnée de p éléments, distincts ou non, choisis dans un ensemble de n éléments donnés.
Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est noté B_n^p.

Formule

$$B_n^p = n^p$$

En effet, puisque la répétition des éléments est possible, il y a n possibilités pour choisir chacun des p éléments parmi les n éléments. Il y a donc n^p groupements possibles.

Exemples :

a) Combien peut-on écrire de nombre de 3 chiffres distincts de 0 ?

b) Combien existe-t-il de possibilités de tirer, dans un ordre donné et avec remise, 4 boules d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10 ?

c) Combien peut-on former de plaques d'immatriculation constituées de 3 lettres puis 3 chiffres ?

5 Permutation sans répétition

La question suivante est de savoir comment se simplifient les formules des arrangements lorsque tous les éléments sont considérés. Le nouveau type de groupement est appelé permutation.

Exemple : De combien de manières différentes peut-on classer 3 personnes par ordre de préférence ? Représenter sous forme d'arborescence les choix possibles (noter par exemple A, B et C les 3 personnes) :

1er choix	**2e choix**	**3e choix**	**Résultats**

Au total, combien y a-t-il de classements possibles ?

Définition
Une permutation sans répétition de n éléments est une liste de ces n éléments distincts.
Le nombre de permutations sans répétition de n éléments est noté P_n.

Formule

$$P_n = n!$$

En effet, une permutation de n objets est un arrangement de n objets parmi n :

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Exemples :

a) De combien de façons 6 élèves peuvent-ils se disposer en file indienne ?

b) De combien de façons peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier parmi 3 personnes sachant qu'une personne ne peut pas cumuler de fonction ?

6 Permutation avec répétitions

Exemple : Combien existe-t-il d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ?

Définition
Une permutation avec répétitions de n éléments dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, $\cdots$ n_p sont identiques, avec $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ est une liste ordonnée de ces n éléments.

Formule

$$P(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

7 Combinaison sans répétition

Enfin, on s'interroge sur le cas où l'ordre des éléments n'a pas d'importance.

Exemple : De combien de manières peut-on choisir 2 délégués parmi 5 personnes ? Ecrire les différentes possibilités si les personnes sont notées A, B, C, D et E :

> **Définition**
> Une combinaison sans répétition de p éléments parmi n est une partie de p éléments choisis parmi les n éléments.
> Le nombre de combinaisons sans répétition de p éléments parmi n est noté C_n^p.
>
> **Formule**
>
> $$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

En effet, pour arranger p éléments parmi n, on les combine p à p puis on permute dans chaque combinaison les p éléments qui s'y trouvent. On a donc l'égalité $A_n^p = C_n^p \cdot P_p$. Ainsi, le nombre de combinaisons sans répétition est donné par

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

L'égalité $A_n^p = C_n^p \cdot P_p$ est montrée sur un exemple : Les combinaisons de 3 lettres parmi 4 sont abc, bcd, cda, abd. Les permutations de abc sont abc, acb, bac, bca, cab, cba. Les permutations de toutes les combinaisons donnent tous les arrangements sans répétition.

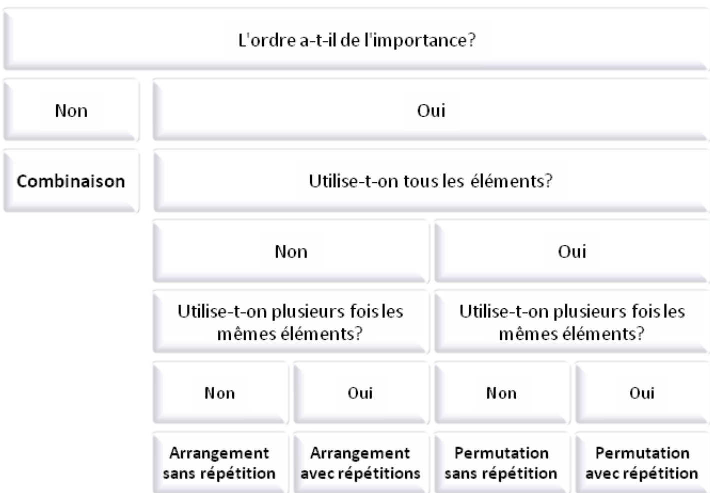
Exemples :

a) Combien de bulletins de Lotto différents est-il possible de remplir (6 numéros à choisir parmi 42) ?

b) Avec 10 personnes, combien de groupes de 3 personnes peut-on constituer ?

8 Synthèse

Tous les groupements vus sont synthétisés au tableau sous forme d'arbre décisionnel. Les formules à utiliser sont écrites sur les dernières branches de l'arbre.



Ce type d'arbre doit aider les élèves à repérer quelle formule utiliser en fonction des critères repérés dans un problème donné. Le principe de multiplication (et d'addition) ne doit pas être oublié pour un problème de dénombrement direct ou lorsque le problème fait appel à une succession de groupements de divers types.

9 Exercices

1. De combien de façons 10 invités peuvent-ils s'asseoir sur 4 chaises ?
2. De combien de façons différentes peut-on distribuer 3 médailles (or, argent, bronze) dans une finale d'un 100 mètres à 8 coureurs ?
3. Un restaurant affiche sur sa carte 3 entrées, 4 plats et 5 desserts. Combien de menus différents peut-on constituer ?
4. De combien de façons peut-on placer 15 personnes en file indienne ?
5. D'une classe de 12 élèves, on doit extraire un groupe de 4 élèves.
   a) De combien de façons peut-on le faire ?
   b) Et si on exclut toujours un élève déterminé ?
   c) Et si on inclut toujours un élève déterminé ?
6. De combien de façons peut-on placer 6 boules de couleurs différentes parmi 10 dans 6 caisses numérotées (1 boule par caisse) ?
7. Une classe de 15 élèves gagne 2 entrées gratuites pour un spectacle. De combien de façons peut-on répartir les places ?
8. Avec trois couleurs, de combien de façons peut-on former un drapeau composé de 3 rectangles verticaux de couleurs différentes ?
9. Le jeu de Master-Mind se compose de 8 pions de couleurs différentes. On en choisit 5 dans un ordre donné et de couleurs différentes. Combien y a-t-il de choix possibles ?
10. Une personne désire prêter un livre à chacun de ses trois amis. Sachant qu'elle a 5 livres différents, de combien de manières peut-elle procéder ?
11. Parmi 50 professeurs et 600 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comprenant 4 professeurs et 3 élèves. De combien de façons peut-on procéder ?
12. De combien de manières différentes peut-on dédoubler une classe de 30 élèves en deux classes de 15 élèves ?
13. Quel est le nombre d'anagrammes du mot « MATHEMATIQUES » ?
14. Combien y a-t-il de mains de 8 cartes possibles avec un jeu de 52 cartes ?
15. Avec 12 députés et 8 sénateurs :
    a) De combien de façons peut-on former une commission de 4 députés et 3 sénateurs ?
    b) De combien de façons peut-on former une commission de 4 personnes avec au moins 1 député ?
    c) De combien de façons peut-on former une commission de 4 personnes avec au plus 2 sénateurs ?
16. En lançant trois fois un dé, combien y a-t-il de résultats possibles ?
17. De combien de manières différentes 11 élèves peuvent-ils former une équipe de 11 joueurs de football ? Et si on attribue à chacun une position ?
18. Combien de codes d'accès de 4 chiffres peut-on former sur un digicode (0 à 9) ?
19. Au pied du sapin de Noël, il y a 5 cadeaux pour 5 personnes, de combien de manières peut-on les répartir ?

20. De combien de façons peut-on partager 9 jouets différents entre 3 enfants de sorte que chaque enfant reçoive exactement 3 jouets ?
21. Calculer n quand
    a) $A_n^2 = 72$
    b) $A_n^4 = 42 \cdot A_n^2$
    c) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

Les élèves ont travaillé individuellement sur ces problèmes et je passais entre les bancs pour répondre aux questions et envoyer les élèves un par un au tableau pour corriger les problèmes. Avant de donner la réponse, ils doivent dire pourquoi ils ont utilisé telle ou telle formule. Cette manière de procéder était assez efficace pour mettre les élèves au travail.

Sources :

- *Cqfd Math 6e, M.* ANNOYE, *J.-L.* GILON, *A.* VAN EERDENBRUGGHE, *J.* WILLEME, *De Boeck, 2014*
- *Cours de 6e 6h de N. et J.* MIÉWIS, *Collège Saint-Louis*