Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire traite principalement des **problèmes de dénombrement**. Dénombrer, c'est calculer le nombre de possibilités de grouper un certain nombre d'éléments d'un ensemble fini donné.

Il existe divers types de groupement selon qu'on utilise tout ou une partie des éléments, qu'on considère ou non l'ordre dans lequel on les choisit, qu'on puisse ou non réutiliser les mêmes éléments.

1 Principe de multiplication

Il s'agit d'un principe fondamental en analyse combinatoire.

Considérons n opérations successives. Si la k^{e} opération ($1 \leqslant k \leqslant n$) peut se dérouler de m_k manières différentes, alors les n opérations peuvent être effectuées dans l'ordre indiqué de $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ manières différentes.

Exemple : Si une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

2 Notation factorielle

Pour faciliter l'écriture du produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n, on utilise la notation factorielle : $n!$, qui se lit « factorielle de n » ou « n factorielle ».

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Exemple : $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Par convention, $0! = 1$.

On remarque la relation de récurrence : $n! = n \cdot (n-1)!$

Exemple : $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

La factorielle permet aussi d'écrire plus simplement des produits de naturels consécutifs du type : $n \cdot (n-1) \cdots (p+1) \cdot p$ (avec $n > p$) sous la forme d'un quotient :

$$n \cdot (n-1) \cdots (p+1) \cdot p = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (p+1) \cdot p \cdot (p-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(p-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(p-1)!}$$

Exemple : $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \dfrac{10!}{5!}$

3 Arrangement sans répétition

Exemple : De combien de manières différentes peut-on tirer successivement, sans remise, trois boules dans une urne qui contient quatre boules numérotées de 1 à 4 ? Représenter, sous forme d'arborescence, les tirages pour lesquels la première boule tirée est la boule n°1 :

1er tirage	**2e tirage**	**3e tirage**	**Résultats**

Sachant que la première boule tirée puisse aussi être la n°2 ou la n°3 ou la n°4, combien y a-t-il au total de tirages possibles différents ?

Définition
Un arrangement sans répétition de p éléments parmi n est une liste ordonnée de p éléments, distincts, choisis dans un ensemble de n éléments donnés.
Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n est noté A_n^p.

Formule

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad (p \leqslant n)$$

En effet, pour choisir un élément parmi n éléments distincts donnés, il y a n possibilités ; pour en choisir un deuxième, il y a $n-1$ possibilités puisque le premier élément ne peut plus être pris en compte (pas de répétition). Le choix consécutif (ordre) de deux objets distincts se fait donc de $n(n-1)$ façons.

En poursuivant, pour choisir le p^{e} élément, il ne reste plus que $n-(p-1)$ éléments et donc $n-p+1$ choix possibles.

D'où

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

En utilisant la notation factorielle, on a

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemples :

a) De combien de façons peut-on jouer un tiercé sur une course de 10 chevaux ?

b) Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres différents formés à partir des chiffres 1, 2, 5, 7, 8 et 9 ?

c) Dans le local d'une classe, il y a 20 bancs individuels. De combien de manières différentes les 12 élèves de la classe peuvent-ils se placer ?

4 Arrangement avec répétitions

Exemple : De combien de manières différentes peut-on tirer successivement, avec remise, trois boules dans une urne qui contient quatre boules numérotées de 1 à 4 ? Représenter, sous forme d'arborescence, les tirages pour lesquels la première boule tirée est la boule n°1 :

1er tirage	**2e tirage**	**3e tirage**	**Résultats**

Au total, combien y a-t-il de tirages possibles différents ?

> **Définition**
> Un arrangement avec répétition de p éléments parmi n est une liste ordonnée de p éléments, distincts ou non, choisis dans un ensemble de n éléments donnés.
> Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est noté B_n^p.
>
> **Formule**
>
> $$B_n^p = n^p$$

En effet, puisque la répétition des éléments est possible, il y a n possibilités pour choisir chacun des p éléments parmi les n éléments. Il y a donc n^p groupements possibles.

Exemples :

a) Combien peut-on écrire de nombre de 3 chiffres distincts de 0 ?

b) Combien existe-t-il de possibilités de tirer, dans un ordre donné et avec remise, 4 boules d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10 ?

c) Combien peut-on former de plaques d'immatriculation constituées de 3 lettres puis 3 chiffres ?

5 Permutation sans répétition

Exemple : De combien de manières différentes peut-on classer 3 personnes par ordre de préférence ? Représenter sous forme d'arborescence les choix possibles (noter par exemple A, B et C les 3 personnes) :

1er choix	**2e choix**	**3e choix**	**Résultats**

Au total, combien y a-t-il de classements possibles ?

Définition
Une permutation sans répétition de n éléments est une liste de ces n éléments distincts.
Le nombre de permutations sans répétition de n éléments est noté P_n.

Formule

$$P_n = n!$$

En effet, une permutation de n objets est un arrangement de n objets parmi n :

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Exemples :

a) De combien de façons 6 élèves peuvent-ils se disposer en file indienne ?

b) De combien de façons peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier parmi 3 personnes sachant qu'une personne ne peut pas cumuler de fonction ?

6 Permutation avec répétitions

Exemple : Combien existe-t-il d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ?

Définition
Une permutation avec répétitions de n éléments dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, $\cdots$ n_p sont identiques, avec $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ est une liste ordonnée de ces n éléments.

Formule

$$P(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

7 Combinaison sans répétition

Exemple : De combien de manières peut-on choisir 2 délégués parmi 5 personnes ? Ecrire les différentes possibilités si les personnes sont notées A, B, C, D et E :

Définition
Une combinaison sans répétition de p éléments parmi n est une partie de p éléments choisis parmi les n éléments.
Le nombre de combinaisons sans répétition de p éléments parmi n est noté C_n^p.

Formule

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

En effet, pour arranger p éléments parmi n, on les combine p à p puis on permute dans chaque combinaison les p éléments qui s'y trouvent. On a donc l'égalité $A_n^p = C_n^p \cdot P_p$. Ainsi, le nombre de combinaisons sans répétition est donné par

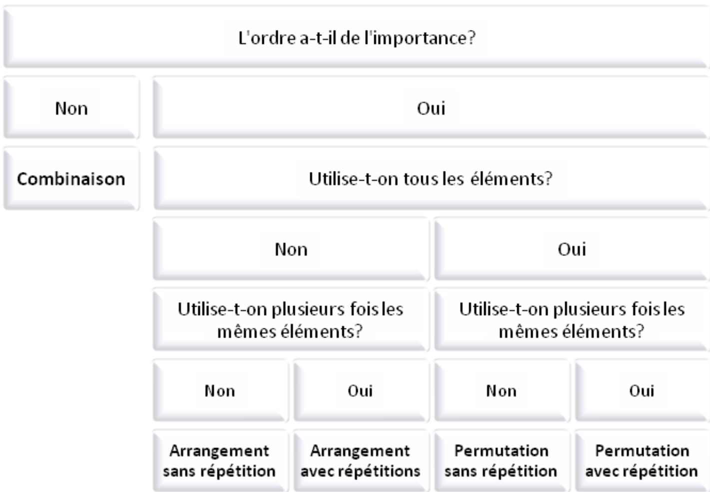
$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Exemples :

a) Combien de bulletins de Lotto différents est-il possible de remplir (6 numéros à choisir parmi 42) ?

b) Avec 10 personnes, combien de groupes de 3 personnes peut-on constituer ?

8 Synthèse



9 Exercices

1. De combien de façons 10 invités peuvent-ils s'asseoir sur 4 chaises ?
2. De combien de façons différentes peut-on distribuer 3 médailles (or, argent, bronze) dans une finale d'un 100 mètres à 8 coureurs ?
3. Un restaurant affiche sur sa carte 3 entrées, 4 plats et 5 desserts. Combien de menus différents peut-on constituer ?
4. De combien de façons peut-on placer 15 personnes en file indienne ?
5. D'une classe de 12 élèves, on doit extraire un groupe de 4 élèves.
   a) De combien de façons peut-on le faire ?
   b) Et si on exclut toujours un élève déterminé ?
   c) Et si on inclut toujours un élève déterminé ?
6. De combien de façons peut-on placer 6 boules de couleurs différentes parmi 10 dans 6 caisses numérotées (1 boule par caisse) ?
7. Une classe de 15 élèves gagne 2 entrées gratuites pour un spectacle. De combien de façons peut-on répartir les places ?
8. Avec trois couleurs, de combien de façons peut-on former un drapeau composé de 3 rectangles verticaux de couleurs différentes ?
9. Le jeu de Master-Mind se compose de 8 pions de couleurs différentes. On en choisit 5 dans un ordre donné et de couleurs différentes. Combien y a-t-il de choix possibles ?
10. Une personne désire prêter un livre à chacun de ses trois amis. Sachant qu'elle a 5 livres différents, de combien de manières peut-elle procéder ?
11. Parmi 50 professeurs et 600 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comprenant 4 professeurs et 3 élèves. De combien de façons peut-on procéder ?
12. De combien de manières différentes peut-on dédoubler une classe de 30 élèves en deux classes de 15 élèves ?
13. Quel est le nombre d'anagrammes du mot « MATHEMATIQUES » ?
14. Combien y a-t-il de mains de 8 cartes possibles avec un jeu de 52 cartes ?
15. Avec 12 députés et 8 sénateurs :
    a) De combien de façons peut-on former une commission de 4 députés et 3 sénateurs ?
    b) De combien de façons peut-on former une commission de 4 personnes avec au moins 1 député ?
    c) De combien de façons peut-on former une commission de 4 personnes avec au plus 2 sénateurs ?
16. En lançant trois fois un dé, combien y a-t-il de résultats possibles ?
17. De combien de manières différentes 11 élèves peuvent-ils former une équipe de 11 joueurs de football ? Et si on attribue à chacun une position ?
18. Combien de codes d'accès de 4 chiffres peut-on former sur un digicode (0 à 9) ?
19. Au pied du sapin de Noël, il y a 5 cadeaux pour 5 personnes, de combien de manières peut-on les répartir ?
20. Calculer n quand
    a) $A_n^2 = 72$
    b) $A_n^4 = 42 \cdot A_n^2$
    c) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$