# Table des matières

# 1 Les limites des fonctions

## 1.1 Introduction

- Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$

Cette fonction n'est pas définie pour $x = 2$. Autrement dit, si nous remplaçons dans l'énoncé de cette fonction $x$ par 2, nous obtenons une **forme indéterminée** $\frac{0}{0}$.

Calculons maintenant à l'aide d'une calculatrice les valeurs de $f(x)$ pour $x$ proche de 2 :

| x | f(x) |
|---|---|
| 1.9 | 1.203333333 |
| 1.99 | 1.320033333 |
| 1.999 | 1.332000333 |
| 1.9999 | 1.333200003 |
| 1.99999 | 1.333320000 |
| 1.999999 | 1.333332000 |

| x | f(x) |
|---|---|
| 2.1 | 1.470000000 |
| 2.01 | 1.346700000 |
| 2.001 | 1.334667000 |
| 2.0001 | 1.333466670 |
| 2.00001 | 1.333346667 |
| 2.000001 | 1.333334670 |

Apparemment, plus $x$ est proche de 2, plus $f(x)$ est proche de $1.3333\cdots$

Ce résultat peut être affiné en factorisant le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{x^2 \cdot (x-2)}{3 \cdot (x-2)}$$

En simplifiant par $(x-2)$, nous obtenons une nouvelle fonction que nous appellerons $\tilde{f}(x)$.

Cette fonction $\tilde{f}(x) = \dfrac{x^2}{3}$ permet de calculer la **limite** de la fonction $f(x)$ pour $x$ **tendant vers** 2 :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \tilde{f}(2) = \frac{4}{3}$$

ce qui se note aussi

$$\lim_{2} \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{4}{3}$$

De manière générale, on écrira donc :

$$\lim_{a} f(x) = L$$

Intuitivement, le calcul de la limite d'une fonction $f(x)$ signifie que nous pouvons calculer $f(x)$ en choisissant $x$ aussi proche que l'on veut de $a$ (mais différent de $a$) ; les valeurs de $f(x)$ sont alors proches de $L$.

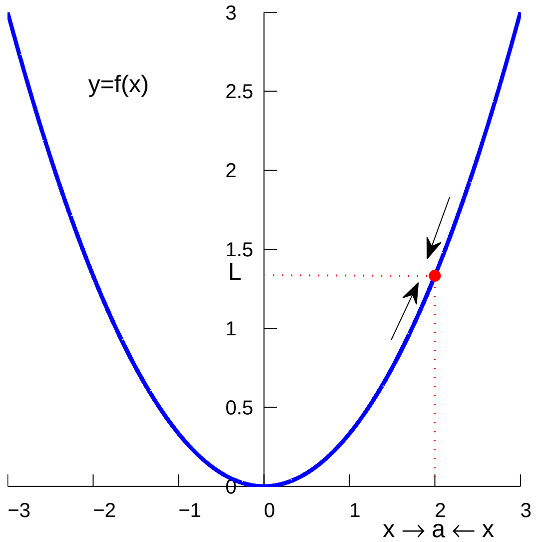


FIGURE 1 – $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{3x-6}$

- Examinons maintenant graphiquement le cas $\lim\limits_{0} \frac{1}{x}$.

Les deux branches du graphe, de chaque côté de la valeur $x = 0$, ne convergent pas vers une valeur réelle commune. Puisque les limites à gauche et à droite de 0 de la fonction ne sont pas identiques, on ne peut que conclure que $\lim\limits_{0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

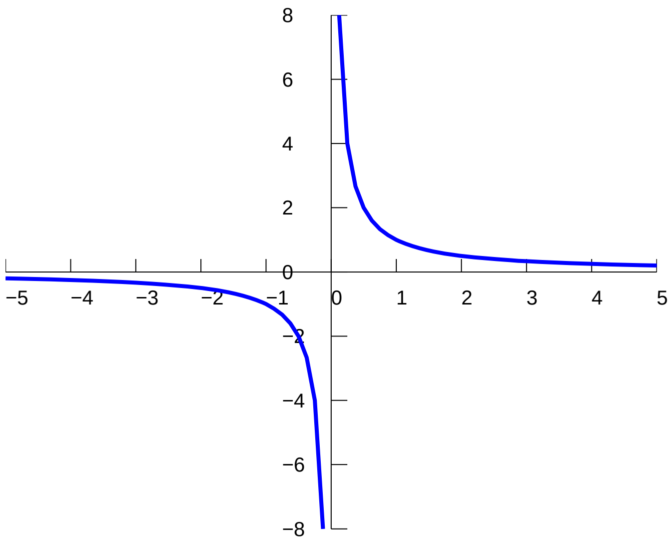

FIGURE 2 – $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{0} \frac{1}{x} \quad \nexists$$

- Voyons maintenant le cas de la fonction $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Le domaine de cette fonction étant $[2, \rightarrow]$, on ne peut s'approcher de 2 par la gauche ; la limite à gauche n'a donc pas de sens. Par contre, la limite à droite en $x = 2$ vaut 0. Au final, on décide que la limite n'existe pas car elle n'est pas calculable des deux côtés de la valeur choisie ($x = 2$).

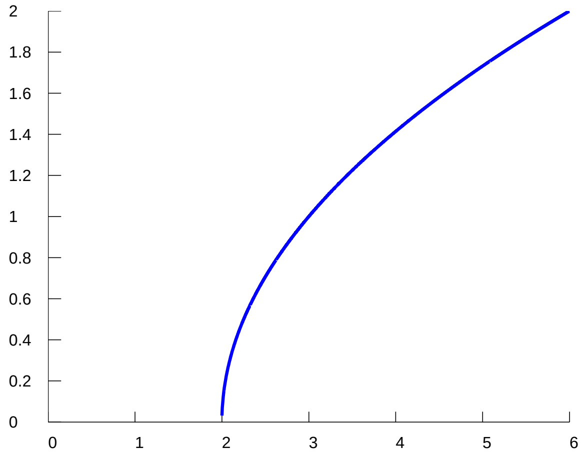


FIGURE 3 – $f(x) = \sqrt{x-2}$

## 1.2 Définition de la limite

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $a$,
sauf peut-être $a$ lui-même et soit $L$ un nombre réel.

L'assertion $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{a} f(x) = L$

signifie que pour tout $\varepsilon$ réel strictement positif,
il existe un $\delta$ réel strictement positif tel que

$0 < |x-a| < \delta$, alors $|f(x) - L| < \varepsilon$

ou encore

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+) \quad (\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+) \quad (\forall x \in ]a-\delta, a+\delta[) \quad : \quad (f(x) \in ]L-\varepsilon, L+\varepsilon[)$$

### 1.2.1 Vérification numérique

Au moyen de la définition de la limite, démontrons que $\lim\limits_{4} (3x-5) = 7$.

Pour ce faire, il nous faut démontrer que quelque soit $\varepsilon$ réel strictement positif, on peut trouver un $\delta$ réel strictement positif tel que si

$0 < |x-4| < \delta \quad$ alors $\quad |(3x-5)-7| < \varepsilon \quad$ ou encore $\quad |3x-12| < \varepsilon$.

Or si l'on veut $|3x-12| < \varepsilon$, on veut $3|x-4| < \varepsilon$ ou encore $|x-4| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Chaque fois que l'on choisira $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, $0 < |x-4| < \delta$ impliquera bien $|x-4| < \frac{\varepsilon}{4}$ , ce qui à son tour impliquera $|(3x-5)-7| < \varepsilon$.

### 1.2.2 Limites unilatérales et limite bilatérale

Le théorème suivant décrit la relation entre les limites unilatérales (gauche et droite) et la limite bilatérale :

$$\lim_a f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a^-} f(x) = L = \lim_{a^+} f(x)$$

### 1.2.3 Unicité de la limite

Si une fonction admet une limite quand $x$ tend vers $a$, cette limite est unique :

$$\lim_a f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_a f(x) = M, \qquad \text{alors} \quad L = M$$

Supposons $L \neq M$ et par exemple $L < M$ et considérons $\varepsilon < \frac{M-L}{2}$.

Les intervalles $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ et $]M-\varepsilon, M+\varepsilon[$ sont alors disjoints.

Or $\lim_a f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in ]a-\delta, a+\delta[ \quad f(x) \in ]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$
et $\lim_a f(x) = M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in ]a-\delta, a+\delta[ \quad f(x) \in ]M-\varepsilon, M+\varepsilon[$

donc $f(x) \in ]L-\varepsilon, L+\varepsilon[ \cap ]M-\varepsilon, M+\varepsilon[ = \Phi$

$f(x)$ appartient donc à un ensemble vide, ce qui contredit l'hypothèse $L < M$. De même, $L > M$ conduit à une absurdité, donc $L = M$. Si une limite existe en un point, elle est unique.

## 1.3 Techniques de calculs des limites

Devoir vérifier chaque limite au départ de la définition serait un travail fastidieux et supposerait la réponse connue. Nous prendrons comme point de départ les résultats suivants :

Quelque soit le réel $a$ :

- si $f$ est la fonction constante $f(x) = k$, on a : $\lim_a k = k$
- si $f$ est la fonction identité $f(x) = x$, on a : $\lim_a x = a$

En effet :

- $\forall x \in ]a-\delta, a+\delta[ \quad |f(x)-k| = |k-k| = 0$
  Or $\quad 0 < \varepsilon, \quad$ donc $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad$ on a
  $\forall x \in ]a-\delta, a+\delta[ \quad f(x) \in ]k-\varepsilon, k+\varepsilon[$

- $\forall x \in ]a-\delta, a+\delta[ \quad |f(x)-a| = |a-a| = 0$
  et la conclusion est la même.

Beaucoup de fonctions sont des sommes, des différences, des produits ou des quotients d'autres fonctions. Pour ces fonctions, nous admettrons les propriétés suivantes :

Si $\lim_a f(x) = L$ et $\lim_a g(x) = M$
Alors

- $\forall k \in \mathbb{R}, \quad \lim_a k \cdot f(x) = k \cdot L$
- $\lim_a (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
- $\lim_a (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- Si $M \neq 0, \quad \lim_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$
- $\forall n \in Q : \quad \lim_a [f(x)]^n = [\lim_a f(x)]^n = L^n$

*Exemples* :

$$\lim_a (mx+p) = m \lim_a x + \lim_a p = ma + p$$
$$\lim_a x^2 = \lim_a x \lim_a x = a \cdot a = a^2$$

### 1.3.1 Fonctions polynômes

Si $f(x)$ est un polynôme et $a$ un nombre réel alors $\lim_a f(x) = f(a)$.

*Exemple* :

$$\begin{aligned}
\lim_{-2} (5x^3 + 3x^2 - 6) &= \lim_{-2} (5x^3) + \lim_{-2} (3x^2) - \lim_{-2} 6 \\
&= 5 \lim_{-2} (x^3) + 3 \lim_{-2} (x^2) - 6 \\
&= 5(-2^3) + 3(-2^2) - 6 \\
&= 5(-8) + 3(4) - 6 \\
&= -34
\end{aligned}$$

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme est la même que son terme de plus haut degré.

Exemple :

$$\lim_{+\infty} (4x^3 - x^2 + 5) = \lim_{+\infty} 4x^3 = +\infty$$

### 1.3.2 Fonctions fractions rationnelles et irrationnelles

- Soit $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ et $a$ un réel.

Si $D(a) \neq 0$, alors $\lim_{a} f(x) = \lim_{a} \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{N(a)}{D(a)}$.

Exemples :

$$\lim_{3} \frac{x^2+7x-1}{x^2-4} = \frac{3^2+7\cdot 3-1}{3^2-4} = \frac{29}{5}$$

$$\lim_{3} \frac{2\sqrt{x+6}-x}{\sqrt{x+13}} = \frac{2\sqrt{9}-3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

Si $N(a) = D(a) = 0$, alors $N(x) = (x-a)\cdot P(x)$ et $D(x) = (x-a)\cdot Q(x)$

et $\lim_{a} f(x) = \lim_{a} \dfrac{N(x)}{D(x)} = \lim_{a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Exemples :

$$\lim_{3} \frac{x^2+7x-30}{x^2-9} \quad \boxed{\tfrac{0}{0}} \quad = \lim_{3} \frac{(x-3)(x+10)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{3} \frac{(x+10)}{(x+3)} = \frac{13}{6}$$

A noter que si $f(x) = \dfrac{x^2+7x-30}{x^2-9}$, alors la fonction $\tilde{f}(x) = \dfrac{x+10}{x+3}$ est la prolongée continue de $f$ au point 3. Il s'agit du nom donné au résultat de la simplification de $f(x)$ qui permet de « lever » l'ambiguïté de la division zéro par zéro.

Dans le cas des fonctions irrationnelles, l'indétermination de type $\frac{0}{0}$ peut être levée en utilisant le principe des binômes conjugués pour trouver la prolongée continue de la fonction étudiée.

$$\lim_{3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3} \quad \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{3} \frac{(x+6)-x^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} \\ &= \lim_{3} \frac{(-x^2+x+6)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} \\ &= \lim_{3} \frac{(-(x-3)(x+2))}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} \\ &= \lim_{3} \frac{-x-2}{\sqrt{x+6}+x} \\ &= \frac{-5}{6} \end{aligned}$$

Si uniquement $D(a) = 0$, alors la limite peut donner, si elle existe, $+\infty$ ou $-\infty$.
Un tableau de signe de la fonction permet de déterminer le signe du résultat.

*Exemple* :

$$\lim_{3} \frac{x^2-8}{x^2-2x-3} \quad \boxed{\frac{qqch}{0}}$$

| $x$ | | $-2\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $2\sqrt{2}$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-8$<br>$x^2-2x-3$ | +<br>+ | 0<br>+ | -<br>+ | -<br>0 | -<br>- | 0<br>- | +<br>- | +<br>0 | +<br>+ |
| $\frac{x^2-8}{x^2-2x-3}$ | + | 0 | - | \| | + | 0 | - | \| | + |

$$\lim_{3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{3^+} f(x) = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{3} f(x) \nexists$$

- Limites à l'infini de $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$.

- Si le degré de $D(x) >$ degré de $N(x)$, alors $\lim_{\pm\infty} f(x) = 0$.
- Si le degré de $D(x) <$ degré de $N(x)$, alors $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Si le degré de $D(x) =$ degré de $N(x)$, alors $\lim_{\pm\infty} f(x) =$ un réel.
  (Ce réel est le rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé)

*Exemples* :

$$\lim_{+\infty} \frac{2x^2-5}{3x^2+x-2} = \lim_{+\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{+\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{-\infty} \frac{2x^2-5}{3x^2+x-2} = \lim_{-\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{-\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{9x^2-4}}{4x-3} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{4x} = \lim_{+\infty} \frac{3x}{4x} = \lim_{+\infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{-\infty} \frac{\sqrt{9x^2-4}}{4x-3} = \lim_{-\infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{4x} = \lim_{-\infty} \frac{-3x}{4x} = \lim_{-\infty} \frac{-3}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{2x^2-5}{3x^3+4} = \lim_{+\infty} \frac{2x^2}{3x^3} = \lim_{+\infty} \frac{2}{3x} = 0$$

$$\lim_{-\infty} \frac{2x^2-5}{3x^3+4} = \lim_{-\infty} \frac{2x^2}{3x^3} = \lim_{-\infty} \frac{2}{3x} = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{2x^2-5}{3x-1} = \lim_{+\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{+\infty} \frac{2x}{3} = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} \frac{2x^2-5}{3x-1} = \lim_{-\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{-\infty} \frac{2x}{3} = -\infty$$

### 1.3.3 Théorème du SANDWICH

On suppose $f(x) < h(x) < g(x) \quad \forall x \in ]a-\delta, a+\delta[$

Si $\lim_{a} f(x) = L = \lim_{a} g(x)$ alors $\lim_{a} h(x) = L.$

<u>*Exemple*</u> : $\lim_{0} \frac{\sin x}{x}$

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

En divisant pas $\sin x$ :

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$$

En inversant :

$$1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \cos x$$

Or $\lim_0 1 = 1$ et $\lim_0 \cos x = 1$ donc $\lim_0 \frac{\sin x}{x} = 1.$

## 1.4 Asymptotes

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \to y = f(x)$.

- La droite $AH \equiv y = p$ est une asymptote horizontale du graphe de $f$ ssi

$$\lim_{\pm\infty} f(x) = p \quad (p \in \mathbb{R})$$

- La droite $AV \equiv x = q$ est une asymptote verticale du graphe de $f$ ssi

$$\lim_{q} f(x) = \pm\infty \quad (q \in \mathbb{R})$$

- La droite $AO \equiv y = mx + p$ est une asymptote oblique du graphe de $f$ ssi

$$\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad (p \in \mathbb{R}_0) \quad \text{et} \quad \lim_{\pm\infty} (f(x) - mx) = p \quad (p \in \mathbb{R})$$

ou encore si

$$f(x) = mx + p + \frac{h(x)}{g(x)} \qquad \text{(division euclidienne)}$$

Dans la pratique :

- Les fonctions polynômes n'admettent jamais d'asymptotes.
- Les fonctions rationnelles :
  - admettent des $AV \equiv x = q$ pour toutes les valeurs $q$ qui annulent le dénominateur sans annuler le numérateur.
  - admettent une $AH$ si le degré du numérateur est plus petit ou égal au degré du dénominateur.
  - admettent une $AO$ si (Degré numérateur) - (Degré dénominateur) = 1.
- Les fonctions irrationnelles sont à voir au cas par cas.
- Les fonctions périodiques n'admettent ni $AH$, ni $AO$.

*Exemples* :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3x - 4}$$

$AH \equiv y = 1$
$AV \equiv x = -4$
$AV \equiv x = 1$

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 3x - 4}$$

$AH \equiv y = 0$

$AV \equiv x = -4$
$AV \equiv x = 1$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 8}{x^2 + 3x - 4}$$

$A0 \equiv y = 2x + 1$
$AV \equiv x = -4$
$AV \equiv x = 1$

$$\text{Remarque : } f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 8}{x^2 + 3x - 4} = 2x + 1 + \frac{x - 4}{x^2 + 3x - 4}$$