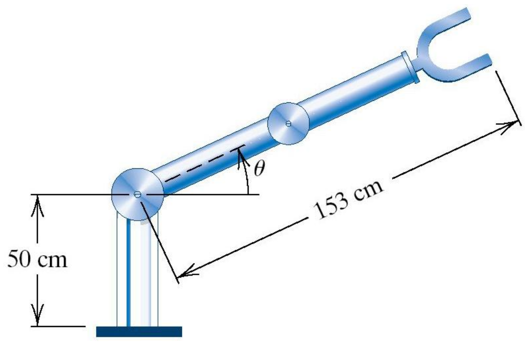
Problèmes sur les fonctions trigonométriques

1. L'articulation de l'épaule d'un robot est motorisée de façon à ce que l'angle θ augmente à une vitesse constante de $\pi/12$ radians par seconde à partir d'un angle initial $\theta = 0$. Supposons que l'articulation du coude est maintenue rigide et que le bras a une longueur constante de 153 centimètres, comme sur la figure. Lorsque $\theta = 0$, $h = 50\ cm$.
   (a) Construisez le tableau qui énumère l'angle θ et la hauteur h de la main du robot chaque seconde lorsque $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.
   (b) Une augmentation constante de l'angle θ entraîne-t-elle une augmentation constante de la hauteur de la main ?
   (c) Déterminez la distance totale parcourue par la main.



Solution :

$t[s]$	$\theta(t) = v \cdot t$	$h(\theta) = 50 + 153 \sin\theta\ [cm]$
0	0	50
1	$\pi/12$	89,6
2	$\pi/6$	126,5
3	$\pi/4$	158,2
4	$\pi/3$	182,5
5	$5\pi/12$	197,8
6	$\pi/2$	203

$\rightarrow$ Une augmentation constante de l'angle θ ne conduit pas à une augmentation constante de la hauteur de la main. La distance totale parcourue par la main vaut $153 \cdot \pi/2 = 240,3\ cm$.

2. Le phénomène des marées, montée et descente des eaux chaque jour à intervalles réguliers, est très complexe mais peut être modéliser par une fonction bien connue. Le tableau suivant donne le relevé, heure par heure, de la hauteur de l'eau dans le port d'Ostende pour une période de 24 heures :

Temps [heure]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Profondeur [mètre]	$3,19$	$4,9$	$5,06$	$4,81$	$4,03$	$2,96$	$1,87$	$0,88$	$0,28$	$0,44$
Temps [heure]	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Profondeur [mètre]	$1,07$	$1,66$	$2,53$	$4,44$	$4,97$	$4,71$	$4,07$	$3,12$	$2,2$	$1,01$
Temps [heure]	20	21	22	23	24	1				
Profondeur [mètre]	$0,16$	$-0,12$	$0,45$	$1,11$	$1,95$	$3,81$				

(a) Reportez les données sur un graphique représentant l'évolution de la profondeur au cours du temps.

(b) Déterminez une fonction $P(t) = a\sin(b \cdot t + c) + d$ approchant les données du tableau.

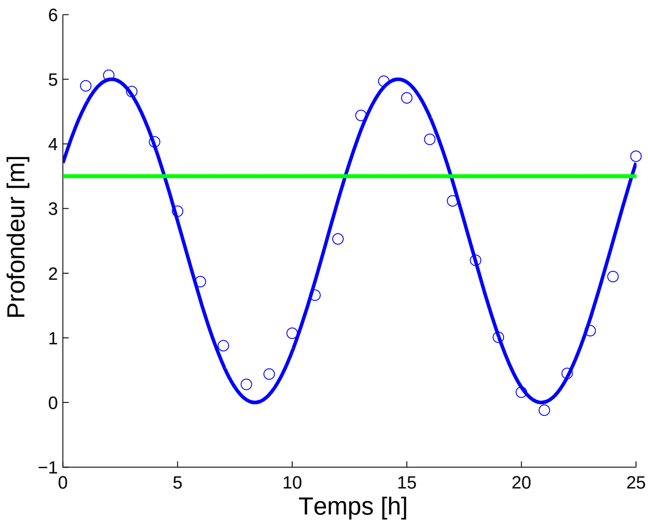
(c) Si les bateaux ne peuvent circuler dans le port lorsque la profondeur est inférieure à $3,5$ m, quand les bateaux peuvent-ils circuler ?

Solution :

$$P(t) = a \cdot \sin(bt + c) + d$$

avec

- $a = \dfrac{\frac{5{,}06-0{,}28}{2} + \frac{4{,}97+0{,}12}{2}}{2} = 2,5$
- $b = \dfrac{2\pi}{\frac{(14-2)+(21-8)}{2}} = \dfrac{2\pi}{12,5}$
- $c = \dfrac{1 \cdot 2\pi}{12,5} = \dfrac{2\pi}{12,5}$
- $d = \dfrac{\frac{5{,}06+0{,}28}{2} + \frac{4{,}97-0{,}12}{2}}{2} = 2,5$



Il reste à résoudre une inéquation pour déterminer quand les bateaux pourront circuler.

$$P(t) = a\sin(b.t + c) + d$$

$$P(t) = 2.5\sin\left(\frac{2\pi}{12.5}t + \frac{2\pi}{12.5}\right) + 2.5$$

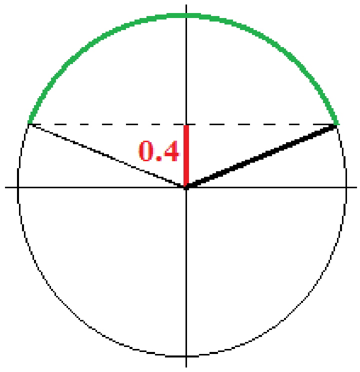
Les bateaux ne peuvent circuler dans le port que lorsqu'il y a une hauteur d'eau suffisante. Celle-ci doit être de minimum 3.5m. Déterminez les moments de la journée pendant lesquels la navigation dans le port est permise.

Solution :

Les bateaux peuvent naviguer si $P(t) \geq 3.5m$:

$$2.5\sin\left(\frac{2\pi}{12.5}t + \frac{2\pi}{12.5}\right) + 2.5 \geq 3.5$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{12.5}t + \frac{2\pi}{12.5}\right) \geq 0.4$$



$$\Leftrightarrow \arcsin(0.4) + 2k\pi \leq \frac{2\pi}{12.5}t + \frac{2\pi}{12.5} \leq \pi - \arcsin(0.4) + 2k\pi$$

$\Leftrightarrow \arcsin(0.4) + 2k\pi \leq \frac{2\pi}{12.5}t + \frac{2\pi}{12.5}$	$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{12.5}t + \frac{2\pi}{12.5} \leq \pi - \arcsin(0.4) + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \frac{12.5}{2\pi}.\left[\arcsin(0.4) + 2k\pi - \frac{2\pi}{12.5}\right] \leq t$	$\Leftrightarrow t \leq \frac{12.5}{2\pi}.\left[\pi - \arcsin(0.4) + 2k\pi - \frac{2\pi}{12.5}\right]$
$\Leftrightarrow -0.18 + 12.5 * k \leq t$	$\Leftrightarrow t \leq 4.43 + 12.5 * k$

$$\Leftrightarrow -0.18 + 12.5 * k \leq t \leq 4.43 + 12.5 * k$$

Pour $k = 0$:

$$-0.18h \leq t \leq 4.43h$$

Pour $k = 1$:

$$12.32h \leq t \leq 16.93h$$

Les bateaux pourront donc circuler dans le port entre 23h49 et 04h26, et entre 12h19 et 16h56.

3. Un parc d'attractions possède une grande roue de 20 m de diamètre dont le centre est situé à 12 m du sol. La roue fait un tour en deux minutes. Au temps $t = 0$, le point P se trouve au plus bas et la roue tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de manière uniforme.
   (a) Calculez les coordonnées x et y du point P pour $t_1 = 1/2\ min$, $t_2 = 2/3\ min$ et $t_3 = 1\ min$.
   (b) Calculez $x(t)$ et $y(t)$ pour t quelconque.
   (c) Construisez les graphiques des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
   (d) Si une personne souffre de vertige au-dessus de $10m$, quand aura-t-elle le vertige ?

Solution :

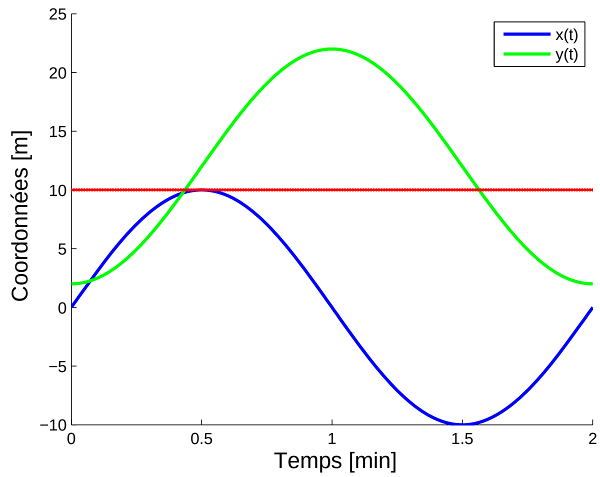
Si la roue fait 1 *tour* (soit 2π) en 2 min, sa vitesse angulaire est $\omega = \pi/min$. En une demi-minute, le point P a donc parcouru $1/4$ de tour. Il a fait $1/3$ de tour en $2/3$ de minutes et $1/2$ tour en une minute. Les coordonnées du point P à ces différentes temps sont :

$$P(1/2\ min) = (10; 12)$$
$$P(2/3\ min) = (5\sqrt{3}; 17)$$
$$P(1/2\ min) = (0; 22)$$

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ correspondent aux équations paramétriques d'un cercle centré en $(0; 12)$ et dont le rayon vaut 10 m :

$$\begin{cases} x(\theta(t)) = & 10\sin(\theta(t)) \\ y(\theta(t)) = & 12 - 10\cos(\theta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = & 10\sin(\pi t) \\ y(t) = & 12 - 10\cos(\pi t) \end{cases}$$



On résout l'inéquation suivante pour déterminer quand la personne est sujette au vertige :

$$12 - 10\cos(\pi t) \geqslant 10$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi t) \leqslant 0,2$$

$$\arccos(0,2) + 2k\pi \leqslant \pi t \leqslant 2\pi - \arccos(0,2) + 2k\pi$$

$$\frac{1}{\pi}\arccos(0,2) + 2k \leqslant t \leqslant 2 - \frac{1}{\pi}\arccos(0,2) + 2k$$

$$0,435 + 2k \leqslant t[min] \leqslant 1,564 + 2k$$

4. Analysons le mouvement de la pipette d'une roue qui roule sans glisser sur une voie horizontale. Supposons que le rayon de la roue est de $0,7\ m$ et qu'elle fait un tour complet en une seconde.
   (a) Où se trouve la pipette après un tour complet, après un demi-tour, un quart de tour ?
   (b) Dessinez la trajectoire de la pipette (au départ, elle est au sol).
   (c) Donnez $x(t)$ et $y(t)$. Représentez ces fonctions.

Solution :

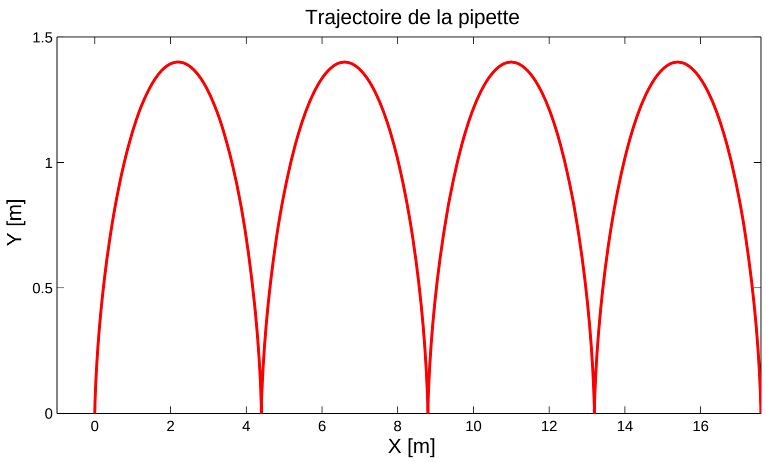
Après un tour complet, la pipette est à nouveau au sol. Après un demi-tour, l'ordonnée est maximale et vaut le diamètre de la roue tandis que l'abscisse est égale à la distance parcourue par le mobile. A la fin du premier quart de tour, l'ordonnée vaut le rayon tandis que l'abscisse est inférieure à la distance parcourue par le mobile.

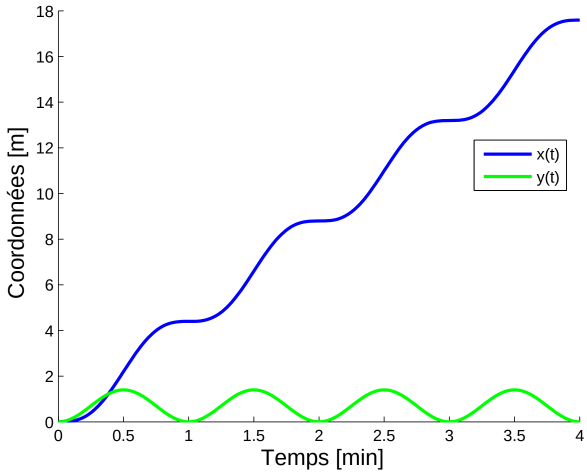
La trajectoire de la pipette est donnée par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = & vt - R\sin(\omega t) \\ y(t) = & R(1-\cos(\omega t)) \end{cases}$$

où R est le rayon de la roue, v est la vitesse du mobile ($2\pi \cdot R$) et ω la vitesse angulaire des rayons.

$$\begin{cases} x(t) = & R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y(t) = & R(1-\cos(\omega t)) \end{cases}$$





5. Un son est une vibration de l'air. Cette vibration correspond à un changement de pression d'air en fonction du temps. Un son pur (ou son simple) correspond à une onde sinusoïdale dont la fréquence et l'amplitude maximale sont constantes au cours du temps, c'est le cas d'un son produit par un diapason. Néanmoins, la plupart des sons que nous percevons dans notre environnement sont complexes : ils résultent de la superposition de plusieurs sons simples de fréquences et d'amplitudes différentes. Considérons deux sons simples de même intensité et dont la fréquence de l'un vaut le double de l'autre ($y = \sin t$ et $y = \sin 2t$).

   (a) Si ces deux sons sont émis au même instant, quelle est la courbe qui représente le son composé des deux sons simples ?

   (b) Est-ce encore une sinusoïde ?

   (c) Représentez graphiquement cette courbe. Pour ce faire, recherchez ses points d'intersection avec l'axe du temps et ses *extrema* (solutions de $\cos t + 2\cos 2t = 0$).

   (d) *Pour aller plus loin* : Que se passe-t-il si les 2 fréquences sont proches l'une de l'autre ?

Solution :

Le premier son pur est représenté par une sinusoïde d'équation

$$y = \sin t$$

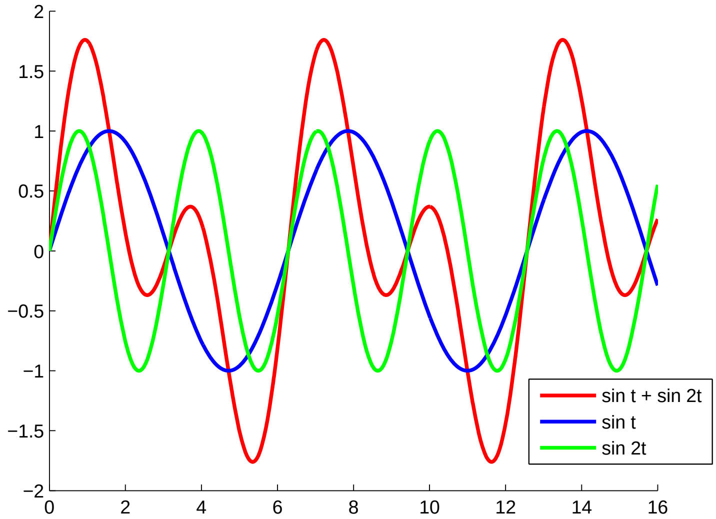
On fait subir à celle-ci une compression de facteur $1/2$ parallèlement à l'axe des abscisses pour obtenir la représentation du second son :

$$y = \sin 2t$$

Le son composé des deux sons purs est obtenu en additionnant les deux sinusoïdes :

$$y = \sin t + \sin 2t$$

Le graphe de cette nouvelle fonction peut être obtenu en additionnant les ordonnées des deux termes point par point.



La courbe n'est plus une sinusoïde. Toutefois, la fonction reste périodique ; sa période est la même que celle de $\sin t$. La superposition conserve donc la fréquence du son de plus petite fréquence.

Pour tracer la courbe $y = \sin t + \sin 2t$ de manière plus précise, on recherche ses points d'intersection avec les axes et ses *extrema*. Les points d'intersections sont les points d'abscisse dont l'ordonnée est nulle :

$$\sin t + \sin 2t = 0$$

Comme $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, on a

$$\sin t(1 + 2\cos t) = 0$$

D'où $\sin t = 0$ ou $\cos t = -\frac{1}{2}$. Il en résulte que dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, les solutions sont $0, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$.

Quant aux *extrema*, ils sont les solutions de

$$\cos t + 2\cos 2t = 0$$

(Il s'agit en fait de déterminer les racines de la dérivée de la fonction.)

Comme $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, cette équation est équivalente à

$$\cos t + 2(2\cos^2 t - 1) = 0$$

ou

$$4\cos^2 t + \cos t - 2 = 0$$

C'est une équation du second degré en $\cos t$. En posant $\cos t = u$:

$$4u^2 + u - 2 = 0$$

Les solutions de cette équations sont

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{8} = -0,843 \text{ et } 0,593$$

Les abscisses des *extrema* et les ordonnées correspondantes sont alors

$$t_1 = \arccos(0,593) = 0,936\ s \quad \to y(t_1) = 1,76 \quad \text{(maximum)}$$

$$t_1 = \arccos(-0,843) = 2,574\ s \quad \to y(t_2) = -0,369 \quad \text{(minimum)}$$

$$t_3 = 2\pi - 2,574 \approx 3,710\ s \quad \to y(t_3) = 0,369 \quad \text{(maximum)}$$

$$t_4 = 2\pi - 0,396 \approx 5,347\ s \quad \to y(t_4) = -1,76 \quad \text{(minimum)}$$

Pour aller plus loin : Considérons deux ondes de fréquences très proches mais non identiques. Pour simplifier, nous supposons qu'elles ont même amplitude et que les constantes de phase sont nulles.

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t)$$

$$y_2 = A\sin(\omega_2 t)$$

$$y_{tot} = A\left(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right)$$

Formule de SIMPSON :

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Donc

$$y_{tot} = 2A\sin\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right)$$

$$y_{tot} = 2A\sin\left(2\pi\frac{f_1+f_2}{2}t\right)\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right)$$

La superposition des deux ondes produit une onde qui vibre à la fréquence $\frac{f_1+f_2}{2}$ (c'est-à-dire la moyenne des deux ondes composantes).

L'amplitude de cette vibration est donnée par

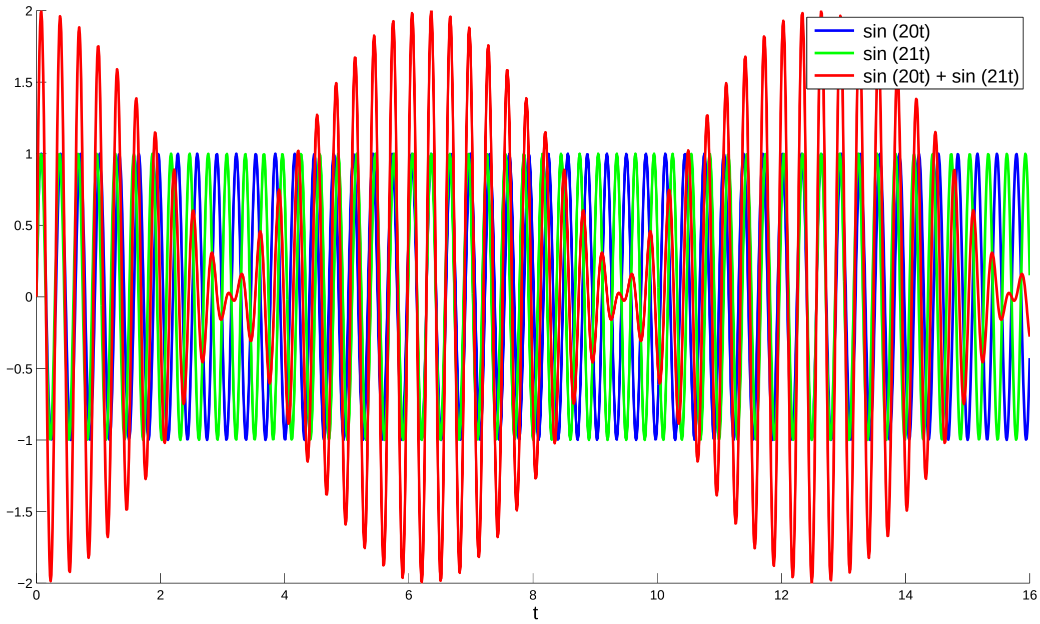
$$2A\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right)$$

Cette amplitude varie de 0 à $2A$ avec une fréquence de $\frac{f_1-f_2}{2}$.

Un battement se produit toutes les fois où

$$2A\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right) = \pm 1$$

autrement dit, deux battements se produisent par cycle.



Le phénomène de battement est un exemple important d'interférence. Ce phénomène se produit lorsque deux sources sonores sont de fréquences très proches mais non identiques. Les ondes sonores émises interfèrent les unes avec les autres et l'onde résultante varie périodiquement en amplitude, donc le niveau sonore croît et décroît alternativement.

6. Au moment précis où le Soleil se lève à Liège, il se lève évidemment aussi ailleurs. Mais où précisément ? Pour le savoir, on va utiliser la formule suivante, valable pour tous les lieux où le Soleil se lève au même instant :

$$\cos(h-\lambda) = -\tan(\delta)\tan(\Phi)$$

Cette formule relie quatre nombres, λ, Φ, δ et h :

- λ et Φ sont les coordonnées géographiques du lieu :
  - λ est la longitude, comptée positivement vers l'Est et négativement vers l'Ouest ;
  - Φ est la latitude, comptée positivement vers le Nord et négativement vers le Sud.
- h et δ sont les coordonnées horaires du Soleil (elles ne dépendent pas du lieu mais de la date) :
  - h est l'angle horaire ;
  - δ est la déclinaison.

Le 13 octobre, le Soleil se lève à 7h57 à Liège ($\lambda = 5^o 34'\ E$; $\Phi = 50^o 38'\ N$). Ce jour-là, la déclinaison vaut $\delta = -8^o$.

(a) Déterminez avec votre calculatrice la valeur de h.

(b) Déterminez avec votre calculatrice la valeur de λ à partir de celles de h, δ et Φ, pour des latitudes $\Phi = -60^o, -50^o, -40^o, \ldots, 50^o, 60^o$.

(c) Positionnez dans un repère les points de coordonnées $(\lambda; \Phi)$, et reliez-les par une courbe. Assombrissez la partie de la Terre plongée dans la nuit.

(d) Quelle est, sur le globe terrestre, la forme de la frontière entre le jour et la nuit ?

Solution :

Pour calculer l'angle horaire, il faut résoudre (angles avec même unité ! Ici, en radian) :

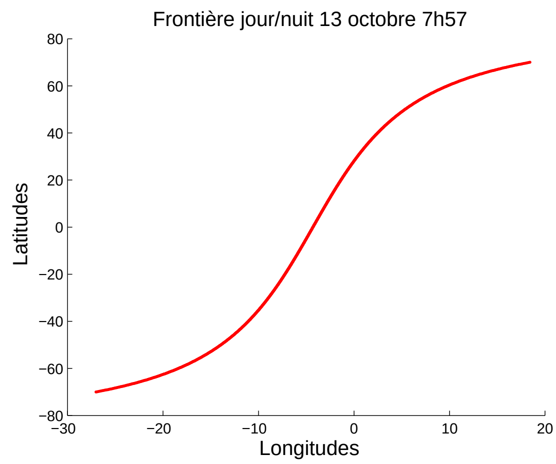
$$\cos(h - 0.0972) = -\tan(-0.1396) \cdot \tan(0.8837)$$

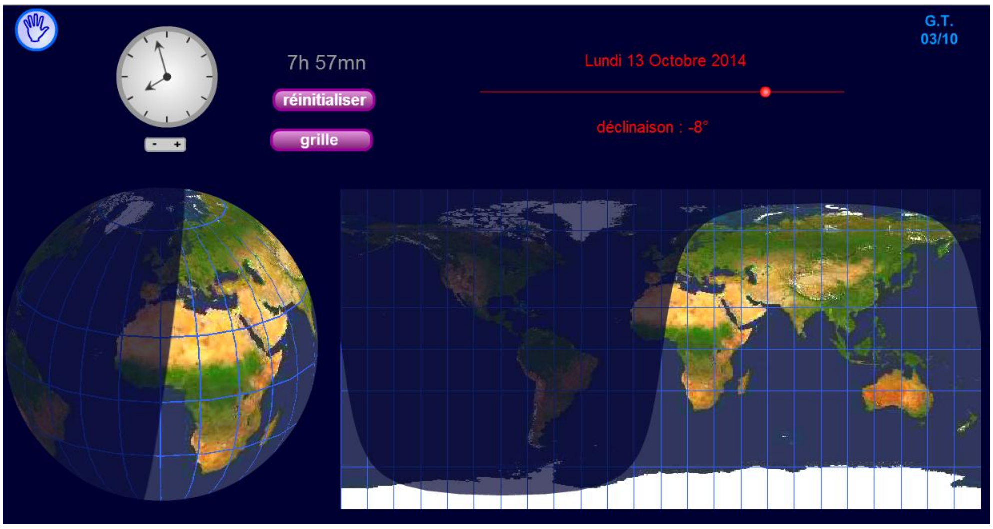
$$h = 0.0972 + \arccos(-\tan(-0.1396) \cdot \tan(0.8837)) = 1.4958$$

On peut maintenant calculer les latitudes et longitudes où le Soleil se lève en même temps qu'à Liège le 13 octobre :

$$\lambda = 1.4958 - \arccos(-\tan(-0.1396) \cdot \tan(\Phi))$$

Φ [°]	λ [°]
-60	-18.3855
-50	-13.9387
-40	-11.0693
-30	-8.9509
-20	-7.2289
-10	-5.7168
0	-4.2968
10	-2.8768
20	-1.3647
30	0.3574
40	2.4758
50	5.3452
60	9.7919





`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Soleil/Mouvement/ensoleillement.html`

Sur le globe, la frontière entre le jour et la nuit est bien sûr un cercle. Il fait jour à l'est de la courbe.