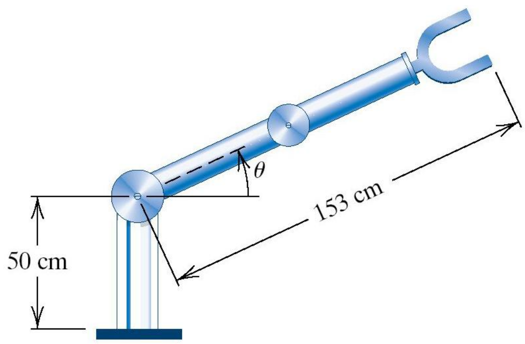
Problèmes sur les fonctions trigonométriques

1. L'articulation de l'épaule d'un robot est motorisée de façon à ce que l'angle θ augmente à une vitesse constante de $\pi/12$ radians par seconde à partir d'un angle initial $\theta = 0$. Supposons que l'articulation du coude est maintenue rigide et que le bras a une longueur constante de 153 centimètres, comme sur la figure. Lorsque $\theta = 0$, $h = 50\ cm$.
   (a) Construisez le tableau qui énumère l'angle θ et la hauteur h de la main du robot chaque seconde lorsque $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.
   (b) Une augmentation constante de l'angle θ entraîne-t-elle une augmentation constante de la hauteur de la main ?
   (c) Déterminez la distance totale parcourue par la main.



2. Le phénomène des marées, montée et descente des eaux chaque jour à intervalles réguliers, est très complexe mais peut être modéliser par une fonction bien connue. Le tableau suivant donne le relevé, heure par heure, de la hauteur de l'eau dans le port d'Ostende pour une période de 24 heures :

Temps [heure]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Profondeur [mètre]	3,19	4,9	5,06	4,81	4,03	2,96	1,87	0,88	0,28	0,44
Temps [heure]	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Profondeur [mètre]	1,07	1,66	2,53	4,44	4,97	4,71	4,07	3,12	2,2	1,01
Temps [heure]	20	21	22	23	24	1				
Profondeur [mètre]	0,16	−0,12	0,45	1,11	1,95	3,81				

   (a) Reportez les données sur un graphique représentant l'évolution de la profondeur au cours du temps.
   (b) Déterminez une fonction $P(t) = a\sin(b \cdot t + c) + d$ approchant les données du tableau.
   (c) Si les bateaux ne peuvent circuler dans le port lorsque la profondeur est inférieure à $3,5\ m$, quand les bateaux peuvent-ils circuler ?

3. Un parc d'attractions possède une grande roue de 20 m de diamètre dont le centre est situé à 12 m du sol. La roue fait un tour en deux minutes. Au temps $t = 0$, le point P se trouve au plus bas et la roue tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de manière uniforme.

(a) Calculez les coordonnées x et y du point P pour $t_1 = 1/2\ min$, $t_2 = 2/3\ min$ et $t_3 = 1\ min$.
(b) Calculez $x(t)$ et $y(t)$ pour t quelconque.
(c) Construisez les graphiques des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
(d) Si une personne souffre de vertige au-dessus de $10m$, quand aura-t-elle le vertige ?

4. Analysons le mouvement de la pipette d'une roue qui roule sans glisser sur une voie horizontale. Supposons que le rayon de la roue est de $0,7\ m$ et qu'elle fait un tour complet en une seconde.
   (a) Où se trouve la pipette après un tour complet, après un demi-tour, un quart de tour ?
   (b) Dessinez la trajectoire de la pipette (au départ, elle est au sol).
   (c) Donnez $x(t)$ et $y(t)$. Représentez ces fonctions.

5. Un son est une vibration de l'air. Cette vibration correspond à un changement de pression d'air en fonction du temps. Un son pur (ou son simple) correspond à une onde sinusoïdale dont la fréquence et l'amplitude maximale sont constantes au cours du temps, c'est le cas d'un son produit par un diapason. Néanmoins, la plupart des sons que nous percevons dans notre environnement sont complexes : ils résultent de la superposition de plusieurs sons simples de fréquences et d'amplitudes différentes. Considérons deux sons simples de même intensité et dont la fréquence de l'un vaut le double de l'autre ($y = \sin t$ et $y = \sin 2t$).
   (a) Si ces deux sons sont émis au même instant, quelle est la courbe qui représente le son composé des deux sons simples ?
   (b) Est-ce encore une sinusoïde ?
   (c) Représentez graphiquement cette courbe. Pour ce faire, recherchez ses points d'intersection avec l'axe du temps et ses *extrema* (solutions de $\cos t + 2\cos 2t = 0$).
   (d) *Pour aller plus loin* : Que se passe-t-il si les 2 fréquences sont proches l'une de l'autre ?

6. Au moment précis où le Soleil se lève à Liège, il se lève évidemment aussi ailleurs. Mais où précisément ? Pour le savoir, on va utiliser la formule suivante, valable pour tous les lieux où le Soleil se lève au même instant :
$$\cos(h-\lambda) = -\tan(\delta)\tan(\Phi)$$
   Cette formule relie quatre nombres, λ, Φ, δ et h :
   - λ et Φ sont les coordonnées géographiques du lieu :
     - λ est la longitude, comptée positivement vers l'Est et négativement vers l'Ouest ;
     - Φ est la latitude, comptée positivement vers le Nord et négativement vers le Sud.
   - h et δ sont les coordonnées horaires du Soleil (elles ne dépendent pas du lieu mais de la date) :
     - h est l'angle horaire ;
     - δ est la déclinaison.

   Le 13 octobre, le Soleil se lève à 7h57 à Liège ($\lambda = 5^o34'\ E$; $\Phi = 50^o38'\ N$). Ce jour-là, la déclinaison vaut $\delta = -8^o$.
   (a) Déterminez avec votre calculatrice la valeur de h.
   (b) Déterminez avec votre calculatrice la valeur de λ à partir de celles de h, δ et Φ, pour des latitudes $\Phi = -60^o, -50^o, -40^o, \ldots, 50^o, 60^o$.
   (c) Positionnez dans un repère les points de coordonnées $(\lambda;\Phi)$, et reliez-les par une courbe. Assombrissez la partie de la Terre plongée dans la nuit.
   (d) Quelle est, sur le globe terrestre, la forme de la frontière entre le jour et la nuit ?