Didactique mathématique

Maggy Schneider

Les fonctions exponentielles

François Bertrand

Il existe deux types de formulation des problèmes faisant apparaître une croissance exponentielle :

- une approche plus discrète où la progression géométrique est immédiate : le rapport des images est donné pour un intervalle de temps. Exemple : Une population de bactéries triple tous les deux jours.
- une approche plus continue où la croissance exponentielle est décrite en terme de variation : référence à la propriété des dérivées des fonctions exponentielles. Exemple : La variation de charge par unité de temps est proportionnelle à la quantité de charge encore présente dans le condensateur.

Ces deux problématiques sont assez différentes mais décrivent un même type de fonctions ; dans l'enseignement usuel, elles sont souvent peu mises en évidence d'emblée.

La question est d'orchestrer un cours autour de ces deux formulations en les articulant à un moment donné et en évitant de recourir à la simple constatation des tableaux numériques.

AESS en sciences mathématiques

2014-2015

Les fonctions exponentielles

Deux scientifiques observent la reproduction de bactéries en laboratoire. Le premier constate que, toutes les heures, la quantité de bactéries est multipliée par un facteur k. Le second observe que l'augmentation du nombre de bactéries au cours d'un intervalle de temps est proportionnelle tant à la durée de l'intervalle qu'au nombre de bactéries relevé au début de l'intervalle. Qui a raison ? Déterminez la fonction décrivant l'évolution du nombre de bactéries au cours du temps et représentez là graphiquement si $k = 1,25$.

Observations du premier scientifique :

A partir des observations du premier scientifique, on a

$N(t) = k \cdot N(t-1)$

où $N(t-1)$ et $N(t)$ représentent le nombre de bactéries à deux heures consécutives.

Or, $N(t-1)$ est lui-même égal à $k \cdot N(t-2)$. D'où

$N(t) = k \cdot k \cdot N(t-2)$
$N(t) = k^2 \cdot N(t-2)$

Ainsi, en remontant les pas de temps jusqu'à l'instant initial, on a alors

$N(t) = k^t \cdot N(t-t)$
$N(t) = k^t \cdot N(0)$

Notons N_0 le nombre de bactéries à l'instant initial.
Le nombre de bactéries au temps t en heures est alors donné par :

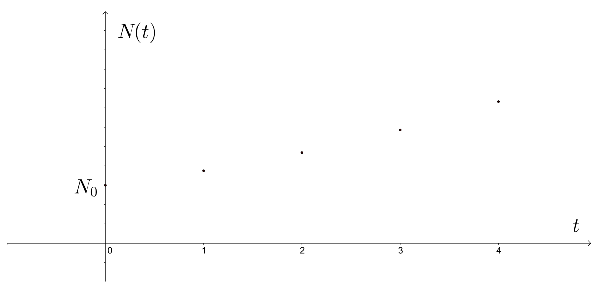
$N(t) = N_0 \cdot k^t$

On calcule quelques valeurs de la fonction en vue de la représenter graphiquement :

• $N(0) = N_0 \cdot 1,25^0 = N_0$ en définissant $k^0 = 1$ pour respecter $N(0) = N_0$.

• $N(1) = N_0 \cdot 1,25^1 = 1,25 \cdot N_0$

• $N(2) = N_0 \cdot 1,25^2 = 1,5625 \cdot N_0$



Si au lieu de chaque heure, on voulait connaître le nombre de bactéries à chaque minute ?
Considérons alors $N(t_{min})$ représentant le nombre de bactéries au temps t en minutes :

$N(t_{min}) = N_0 \cdot (k_{min})^{t_{min}}$

Comme une heure vaut 60 minutes, il faut nécessairement que

$N(t) = N(60 \cdot t_{min})$

On en déduit que :

$(k_{min})^{60} = k$

D'où

$k_{min} = \sqrt[60]{k} = k^{\frac{1}{60}}$
En effet, $k = k^{60 \cdot 1/60} = k^{1/60+1/60+1/60+\cdots} = \left[k^{1/60}\right]^{60}$

Donc

$N(t_{min}) = N_0 \cdot \left(k^{\frac{1}{60}}\right)^{t_{min}}$

Ainsi, par exemple

$N(t_{min} = 30) = N_0 \cdot \left(k^{\frac{1}{60}}\right)^{30} = N_0 \cdot k^{\frac{30}{60}} = N_0 \cdot k^{\frac{1}{2}}$

Et comme $t_{min} = 30$ correspond à $t = \frac{1}{2}$, l'expression

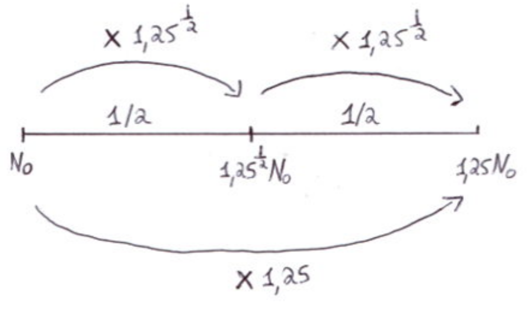
$N(t) = N_0 \cdot k^t$ reste donc valable pour des valeurs fractionnaires de t.

- $N(1/2) = N_0 \cdot 1,25^{1/2} \approx 1,1180 \cdot N_0$

- $N(2/3) = N_0 \cdot 1,25^{2/3} \approx 1,1604 \cdot N_0$

En fait, physiquement, une fraction de la variable t pourrait être vue comme entière dans une autre unité de référence. Le changement d'unités modifie alors le rapport k observé entre deux temps entiers consécutifs dans l'unité considérée.

Si je considère une unité d'une demi heure, alors le rapport entre $N(t)$ et $N(t-1)$ n'est effectivement plus $1,25$ mais bien $1,25^{\frac{1}{2}}$



Et si on veut connaître t avant le moment initial ? Soit t négatif.
Cela reviendrait à calculer le nombre de bactéries à un temps positif
si le chronomètre avait été déclenché plus tôt.

On souhaite par exemple connaître $N(-2)$, soit $N(t^* = 0) = N_0^*$
si le temps avait été déclenché 2 secondes plus tôt.
Ainsi, en $t = 0$, $N_0 = N_0^* \cdot k^2$ *puisque* $t^* = t + 2$. *Donc*

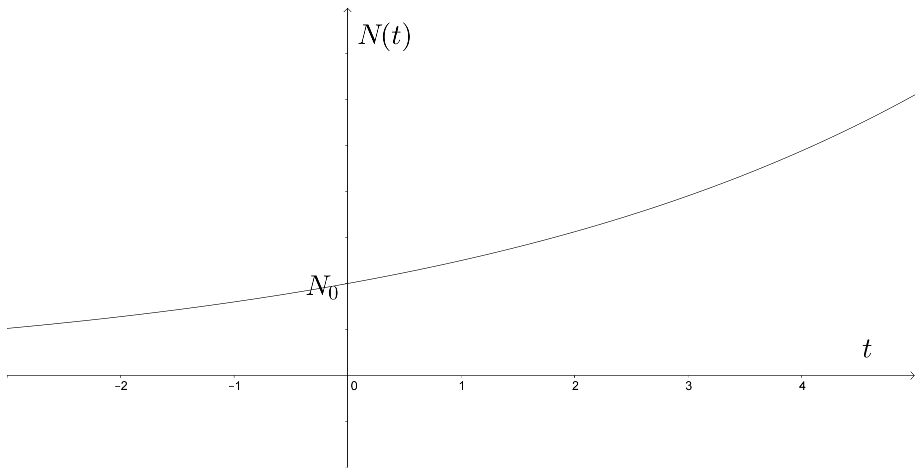
$N(-2) = N(t^* = 0) = N_0^* = N_0 \cdot k^{-2} = N_0 \cdot \frac{1}{k^2}$
En effet, $k^0 = 1 = k^{2-2} = k^2 \cdot k^{-2}$

L'expression $N(t) = N_0 \cdot k^t$ reste donc valide pour des valeurs négatives de t.

• $N(-2) = N_0 \cdot 1,25^{-2} = N_0 \cdot 1/1,25^2 = 0,64 \cdot N_0$

• $N(-2/5) = N_0 \cdot 1,25^{-2/5} \approx 0,9146 \cdot N_0$

L'allure du graphe exprimant le nombre de bactéries en fonction du temps est alors le suivant :



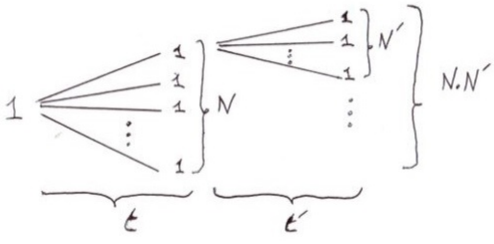
En considérant que N_0 est l'unité de référence pour dénombrer les bactéries ($\rightarrow N_0 = 1$),
on a ainsi

$$N(t) = k^t$$

Un temps t' après le temps t, on aura :

$N(t + t') = k^{t+t'} = k^t \cdot k^{t'} = N(t) \cdot N(t')$

Ainsi, si une bactérie en donne N après le temps t et N' après le temps t',
elle en donnera $N \cdot N'$ après le temps $t + t'$. La croissance est dite exponentielle.



La fonction qui vient d'être déterminée est de la forme $f(x) = a^x$; nous l'appellerons *fonction exponentielle* en base a (ou k dans l'exemple). Cette expression est valable pour n'importe quelle valeur de x (soit n'importe quel temps dans l'exemple, $t \in \mathbb{R}$). La forme $f(x) = b \cdot a^x$ est un multiple d'une fonction exponentielle lorsque b (soit N_0 dans l'exemple) n'est pas unitaire.

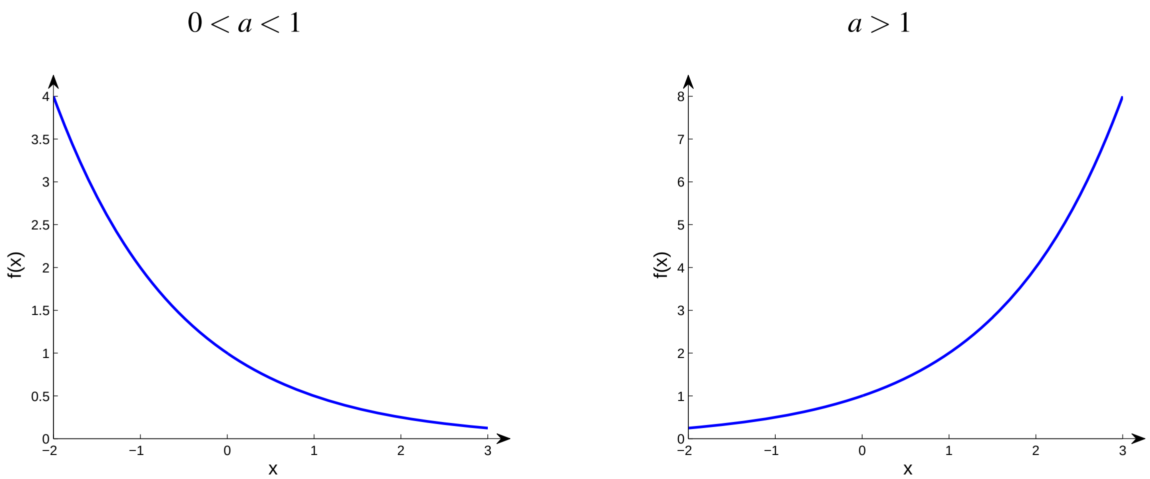
La fonction exponentielle en base a, a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, est notée $\exp_a$ et est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a^x = \exp_a x \qquad a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$f(x) = a^x \quad \text{vérifie} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

Ce type de fonction permet de décrire des phénomènes suivant une progression géométrique : un facteur multiplicatif constant est observé sur des intervalles de temps égaux. A noter que le facteur multiplicatif est a pour un intervalle unitaire.

Dans le cas où $a > 1$, la fonction est strictement croissante. Pour $0 < a < 1$, elle est strictement décroissante. Le cas $a = 1$ conduirait à la fonction constante 1, elle n'est pas considérée comme fonction exponentielle. Ainsi, toute fonction exponentielle étant strictement croissante ou décroissante, elle établit une bijection entre les valeurs de la variable x et ses images y (à un x correspond un seul y et inversement).



Fonction exponentielle de base a (avec $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) : $\exp_a$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \exp_a(x) = a^x$$

$$\text{dom} \ \exp_a = \mathbb{R}$$

$$\text{im} \ \exp_a = \mathbb{R}_0^+$$

Quel que soit a, on a comme point particulier : $(0;1)$
O_x est une asymptote horizontale : $AH \equiv y = 0$
Il n'y a pas d'autres asymptotes.

$0 < a < 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

$\exp_a$ est une fonction strictement décroissante

$a > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

$\exp_a$ est une fonction strictement croissante

Observations du second scientifique :

Considérons maintenant les observations faites par le second scientifique.
Selon lui, on observe que l'augmentation du nombre de bactéries au cours d'un intervalle de temps est proportionnelle tant à la durée de l'intervalle qu'au nombre de bactéries relevé au début de l'intervalle.

Traduit mathématiquement, on a sur un intervalle $[t, t+\Delta t]$:

$$N(t+\Delta t) - N(t) = C \cdot N(t) \cdot \Delta t$$

Or, si Δt tend vers 0, on a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = C \cdot N(t)$$

Ce qui n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction $N(t)$

$$N'(t) = C \cdot N(t)$$

La question est donc de trouver une fonction vérifiant cette équation différentielle.
Et si les deux scientifiques avaient raison ?
Alors, c'est que la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ vérifie $f'(x) = C \cdot f(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - a^0)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - a^0}{h}$$

$$= a^x \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right) = a^x \cdot f'(0) = C \cdot a^x$$

C'est bien le cas !

Ainsi, le taux de variation d'une fonction exponentielle est directement proportionnel à l'image de la fonction ; c'est l'effet boule de neige.

La fonction exponentielle $f(x) = a^x$ est une fonction dont la fonction dérivée est un multiple de la fonction elle-même :

$$(a^x)' = C \cdot a^x$$

C étant un nombre réel constant pour une même exponentielle.

Il existe une fonction exponentielle f dont la base est telle que $f'(x) = f(x)$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle népérienne et la base en question est notée e. Cette fonction s'écrit $exp_e(x)$ ou simplement e^x.

$$\exp_e : x \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ \exp_e(x) = e^x$$

Le nombre e est appelé nombre d'Euler, il est défini par

$$e = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \approx 2,71828$$

Cette expression est déduite de $(e^x)' = e^x$.

$$\begin{array}{rrcl}
 & (e^x)' & = & e^x \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{e^{x+h} - e^x}{h}\right) & = & e^x \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{h \to 0} \left(e^x \dfrac{(e^h - 1)}{h}\right) & = & e^x \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{e^h - 1}{h}\right) & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{m \to +\infty} \left(\dfrac{e^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}\right) & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{m \to +\infty} e^{\frac{1}{m}} & = & \lim\limits_{m \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{m} \\
\Leftrightarrow & e & = & \lim\limits_{m \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m
\end{array}$$