Psychologie éducationnelle de l'adolescent
et du jeune adulte

Annick FAGNANT

Transférer des concepts théoriques à sa (future) pratique

François BERTRAND

AESS en sciences mathématiques

2014-2015

Apports de la psychologie cognitive

Concept : Le transfert

Explication : Le transfert de connaissances consiste à employer celles-ci dans un contexte différent de celui dans lequel les connaissances ont été acquises. Pour faciliter la recontextualisation des connaissances dans la situation nouvelle, on veillera à décontextualiser celles-ci du milieu de découverte (voir approche méthodologique).

Exemple en mathématique : De la tangente d'une courbe à la vitesse instantanée (ou inversement) en passant par la dérivée (voir annexe 1).

En mathématique, l'équation d'une tangente fait intervenir le calcul de dérivée. En physique, la vitesse d'un mobile en un instant est aussi la dérivée de la fonction liant la position du mobile au temps. Comme on le voit, la notion de dérivée intervient dans des contextes apparemment très différents. Pour autant, le passage d'un contexte à l'autre n'est pas surprenant lorsqu'on se rappelle de la définition d'une dérivée (« limite d'un taux de variation »).

Approche méthodologique : L'approche en trois étapes : contextualisation, décontextualisation et recontextualisation.

La notion de dérivée est abordée par un premier contexte comme celui de la tangente à une courbe. Puis, pour faciliter le transfert de la notion de dérivée vers un nouveau contexte, l'enseignant procède à une phase de décontextualisation lors de laquelle la définition de la dérivée est extraite du contexte initial. Une série de formules facilitant le calcul des dérivées découle de cette définition.

Ensuite, de nouveaux problèmes faisant intervenir les dérivées sont abordés (études de fonctions, vitesses instantanées, problème d'optmisation,$\cdots$) pour élargir le champ d'application des dérivées. C'est assez classique dans les cours de mathématique du secondaire.

Critique : Malheureusement, peu d'élèves font finalement le lien entre les différents contextes. Ils se contentent de voir ceux-ci comme différentes situations où le calcul des dérivées est applicable. Historiquement, ce sont pourtant ces « applications » mêmes qui ont donné naissance à l'objet mathématique « dérivée ». En soi, ne pas avoir conscience du renversement didactique qui s'est opéré vis-à-vis de la chronologie de la découverte des mathématiques n'est pas préjudiciable à la bonne compréhension de l'outil mathématique. Par contre, ne pas faire le lien entre les contextes traduit le fait que la plupart des élèves oublient le sens même de la dérivée pour n'en retenir que les automatismes de calcul. Ces automatismes sont évidement nécessaires pour la rapidité et la justesse des calculs mais ils ne sont pas suffisants pour la compréhension de ce qui est fait. Ainsi, face à un nouveau contexte, s'il ne leur est pas dit que le calcul des dérivées est applicable, ils ne sauront qu'ils peuvent l'utiliser. D'où la nécessité d'une phase d'institutionnalisation lors de laquelle la décontextualisation est amorcée par l'enseignant lui-même.

Apports du (socio)constructivisme

Concept : Le conflit cognitif (PIAGET)

Explication : Le conflit cognitif est un déséquilibre éprouvé par l'apprenant suite à l'inadéquation de sa manière de faire ou de penser (« schèmes ») avec une situation qui lui résiste ; *i.e.* les schèmes existants du sujet sont mis en défaut. Pour trouver l'équilibre, le sujet doit transformer ses schèmes initiaux afin de les rendre opérants ; c'est l'accomodation.

Exemple en mathématique : [1] La division du cercle en régions (voir annexe 2). Le problème est le suivant : on dispose n points sur un cercle et l'on trace tous les segments possibles rejoignant ces points. On demande quel est le nombre de parts découpées dans le cercle en fonction du nombre de points n ?

La piste généralement privilégiée par l'élève est d'ajouter les points un à un sur le cercle pour ensuite compter successivement les régions formées. Il compte 1 région pour 1 point, 2 régions pour 2 points, 4 régions pour 3 points, 8 régions pour 4 points et 16 régions pour 5 points. Il est alors tenté de conclure que les nombres de régions sont des puissances de 2 et que la formule recherchée est 2^{n-1}. Ce qui est faux ! En effet, on lui demandera de vérifier la formule dans le cas $n = 6$: il cherchera 32 régions mais n'en trouvera que 31 sur le graphique !

Pour établir sa formule, l'élève ne peut se contenter de l'observation facile de la suite de quelques nombres. S'il n'abandonne pas, il remettra en cause sa façon de procéder en essayant de comprendre ce qu'implique d'ajouter un nœud sur le nombre de cordes et ce qu'implique chaque corde supplémentaire sur le nombre de régions formées. Il déduira alors la bonne relation (voir solution en annexe). Par ce cheminement, l'élève aura fait appel à des théories relevant du dénombrement d'objets (matière au programme de la fin du secondaire). Grâce à ces nouveaux outils, il retrouvera un équilibre cognitif.

Approche méthodologique : La situation-problème. C'est l'approche utilisée dans l'exemple précédent : on confronte l'élève à une situation dans laquelle il peut s'engager grâce à ses connaissances préalables mais qu'il ne peut résoudre de manière satisfaisante sans développer de nouveaux outils. C'est une approche relativement fréquente en mathématique puisque c'est de la sorte que les théories mathématiques se sont historiquement construites et continuent à se développer.

Critique : La situation-problème permet d'aborder une nouvelle matière de manière assez concrète et dévolue à l'élève, ce qui est généralement bénéfique pour sa motivation. Toutefois, il faut veiller à ce que celle-ci ne s'estompe pas rapidement suite à l'échec de l'application des connaissances antérieures. Cet échec pourrait démobiliser certains alors que c'est une étape normale dans le processus d'apprentissage.

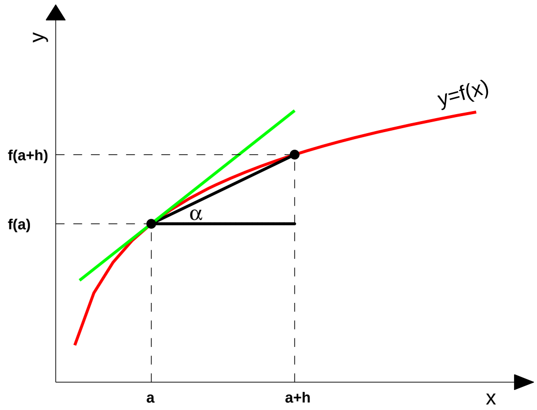
Il est aussi probable que la situation elle-même ne suffise pas à l'apprentissage. Dans ce cas, les interactions entre pairs et avec l'enseignant doivent remobiliser l'élève à la tâche mais surtout lui permettre de structurer sa compréhension du problème par le langage. Cette perspective dépasse le constructivisme de PIAGET en introduisant une dimension sociale à l'apprentissage, on parle alors de socioconstructivisme.

Enfin, il faut noter que la matière est abordée de manière très contextualisée avec une situation-problème. Il arrive d'ailleurs que certains élèves ne voient pas réellement le rapport entre l'activité d'introduction et les exercices qui suivront la théorie. Cette activité, qui nécessite d'y consacrer du temps, apparaît alors comme une perte de temps aux yeux des élèves. C'est pourquoi, il est nécessaire de passer par une phase d'institutionnalisation (les savoirs mis en jeu sont identifiés par l'enseignant) pour aider les élèves à décontextualiser les savoirs pour mieux les recontextualiser par la suite (voir concept précédent).

1. Le premier exemple qui vient à l'esprit est la situation de l'agrandissement du puzzle proposée par BROUSSEAU : les élèves ont tendance à agrandir les pièces du puzzle avec un modèle additif. Pour ne pas déformer le puzzle, les élèves doivent découvrir la proportionnalité. Cet exemple bien connu se trouve dans le syllabus du cours.

Annexe 1

Le nombre dérivé de la fonction f en un point est le coefficient angulaire de la tangente au graphe de la fonction en ce point. Le signe de ce nombre détermine la croissance ou la décroissance de f.



$$\tan\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tangente en (a,f(a)) $\equiv y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Si la fonction f décrit le mouvement d'un mobile en liant l'espace au temps, alors f' donne la fonction liant la vitesse au temps et f'' donne la fonction liant l'accélération au temps.

Exemple : la fonction décrivant le mouvement de chute libre d'un corps est donnée par (où g est l'attraction terrestre)

$$f = e(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad ; \qquad f' = v(t) = gt \quad ; \qquad f'' = a(t) = g$$

Annexe 2

Chords and regions

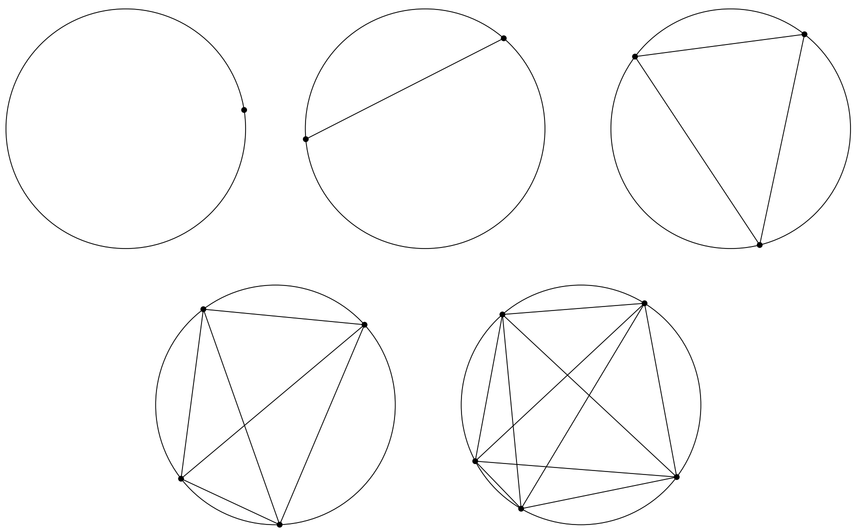
Andrew Jobbings
www.arbelos.co.uk

27 December 2008

Place n points on a circle and draw all the chords which connect the points. Suppose that no three chords meet inside the circle (that is, the chords are in *general position*). How many regions are formed inside the circle?

Pattern spotting

For the first few values of n we get the following figures.



Counting the regions, we obtain the following table.

Points	Regions
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

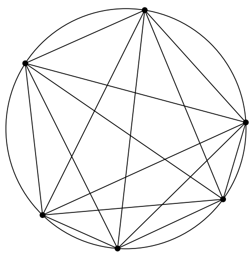
Notice that the numbers of regions in the table are all powers of 2:

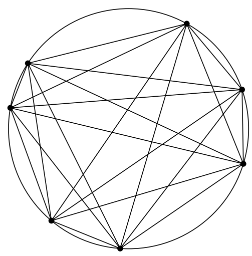
$$1 = 2^0; \quad 2 = 2^1; \quad 4 = 2^2; \quad 8 = 2^3 \quad \text{and} \quad 16 = 2^4.$$

Having 'spotted' this pattern, the temptation now is to declare that the number of regions is always a power of 2, and to state that for n points there are 2^{n-1} regions. Unfortunately, there are two difficulties with this approach:

1. The statements have not been justified. How do we know that the pattern will continue for every value of n?
2. The statements are *wrong*!

Though the second of these points applies in this example—showing that spotting a pattern is risky even when just trying to discover the form of a result—the first point is the more important one. Whatever the context, 'pattern spotting' alone can never prove anything, and such an approach is never appropriate in a mathematical proof without some rigourous justification that the pattern continues for ever.





To see that the proposed statements are incorrect, consider the case $n = 6$, shown on the left above. There are 31 regions in the figure, whereas $2^{6-1} = 2^5 = 32$. The figure on the right above verifies that the problem continues when $n = 7$, where there are 57 regions.

The actual formula

To find the actual formula for the number of regions we have to work harder.

Result *The number of regions formed is*

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

□

The two terms with brackets are binomial coefficients, which means that

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \quad \text{and} \quad \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

Using these expressions it is possible to find a polynomial formula for the number of regions, namely $\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$.

Instead, we shall give two proofs of the result by using the fact that the binomial coefficient $\binom{n}{r}$ is equal to the number of ways of choosing r objects from a set of n (different) objects.

Proof 1 We shall count the number of regions by considering drawing the chords one by one.

When it is drawn each new chord crosses a number of regions, dividing each of them into two. The number of extra regions created is thus equal to the number of regions crossed, which is one more than the number of chords crossed. Since the new chord cannot pass through a previously drawn point of intersection, the number of chords crossed is equal to the number of interior points of intersection on the new chord. Hence the number of extra regions created is one plus the number of interior points of intersection on the new chord

Therefore the total number of extra regions obtained by drawing all the chords is equal to the number of chords (the total of the 'ones') added to the total number of interior points of intersection.

How many chords are there? Each chord is determined by two points on the circle, and there are $\binom{n}{2}$ ways to choose two of these n points. Hence there are $\binom{n}{2}$ chords.

How many points of intersection are there inside the circle? Each is determined by choosing four of the n points on the circle, and there are $\binom{n}{4}$ ways to do this. Hence there are $\binom{n}{4}$ interior points of intersection.

So the number of extra regions obtained by drawing all the chords is $\binom{n}{2} + \binom{n}{4}$. But there is one region to start with (the interior of the circle), so that

$$\text{the number of regions} = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

■

A more sophisticated proof uses Euler's formula to find a relation between the number of points, lines and regions in the diagram. To do this we consider the diagram to be a graph in the plane, whose vertices are the original points together with the points of intersection of the chords.

Euler's formula *Let V be the number of vertices, E the number of edges and F the number of faces of a planar graph. Then $V - E + F = 2$.*

Proof 2 (using Euler's formula) The number of 'faces' is equal to the number of regions, except that there is also a face formed by the region outside the circle.

To find the number of 'vertices', we first note that there are n on the circle—the original points. As we found in the first proof above there are $\binom{n}{4}$ points of intersection inside the circle, so there are $n + \binom{n}{4}$ vertices altogether.

To find the number of 'edges', first note that there are n edges which are circular arcs. We count the other edges by dealing separately with interior points and points on the circle.

Four edges meet at each of the $\binom{n}{4}$ interior vertices, making $4\binom{n}{4}$ edges. There are $\binom{n}{2}$ chords, as shown in the first proof above, and each chord corresponds to two edges meeting the circle, making $2\binom{n}{2}$ edges. We have thus counted $2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4}$ edges, but each of them has been counted twice in this process, once for each of the vertices at its ends.

Hence there are $n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$ edges altogether.

We now have expressions for the numbers of faces, vertices and edges. Substituting these expressions into Euler's formula, we get

$$\left\{n + \binom{n}{4}\right\} - \left\{n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}\right\} + \{\text{the number of regions} + 1\} = 2,$$

which rearranges to give

$$\text{the number of regions} = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

■