JANVIER 1974

VF-22

VIBRATIONS ASYMETRIQUES D'UNE COQUE DE REVOLUTION AUTOUR D'UN ETAT D'EQUILIBRE THERMOELASTIQUE

A. HUCK

A. MOL

S. IDELSOHN

J.F. DEBONGNIE

1. Considérations géométriques

1.1. Le système d'axes est défini par deux coordonnées décrivant le feuillet moyen et une troisième, prise selon la normale (fig. 1).

Pour le feuillet moyen, nous utiliserons les variables suivantes :

r distance à l'axe

s coordonnée curviligne de la courbe génératrice

ϕ angle de la tangente à la génératrice avec la verticale.

Dès lors, les coordonnées d'un point quelconque sont :

$$\begin{cases} X = (r + z\cos\phi)\cos\theta \\ Y = (r + z\cos\phi)\sin\theta \\ Z = -\int \cos\phi \, ds + z\sin\phi \end{cases} \qquad (1.1)$$

1.2. La base des vecteurs contravariants est donnée par dérivation du point $\vec{P} = (X, Y, Z)$

$$\vec{h}_s = \frac{\partial\vec{P}}{\partial s} = \begin{bmatrix} (\frac{dr}{ds} - z\sin\phi\frac{d\phi}{ds})\cos\theta \\ (\frac{dr}{ds} - z\sin\phi\frac{d\phi}{ds})\sin\theta \\ -\cos\phi + z\cos\phi\frac{d\phi}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi\,(1 - z\frac{d\phi}{ds})\cos\theta \\ \sin\phi\,(1 - z\frac{d\phi}{ds})\sin\theta \\ -\cos\phi\,(1 - z\frac{d\phi}{ds}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}_\theta = \frac{\partial\vec{P}}{\partial\theta} = \begin{bmatrix} -(r + z\cos\phi)\sin\theta \\ (r + z\cos\phi)\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

$$\vec{h}_z = \frac{\partial\vec{P}}{\partial z} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$

Les normes de ces vecteurs sont respectivement

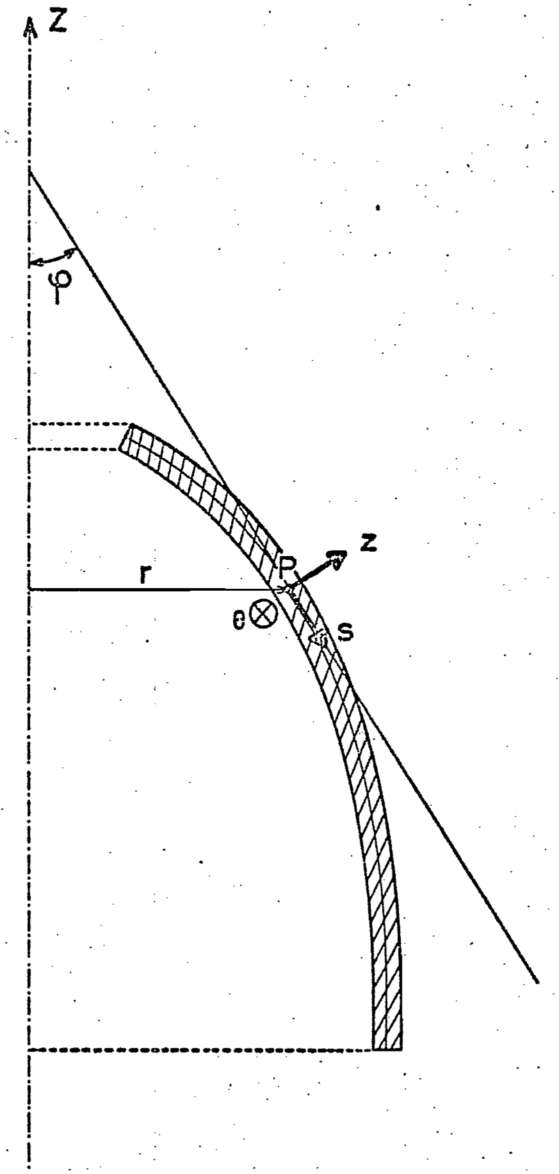

FIGURE 1

$$h_s = \left(1 - z\frac{d\phi}{ds}\right) \quad ; \quad h_\theta = (r + z\cos\phi) \quad ; \quad h_z = 1 \qquad (1.3)$$

1.3. Base du feuillet moyen

$$\vec{a}_s = (\vec{h}_s)_{z=o} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\phi \end{bmatrix} \quad ; \quad a_s = 1$$

$$\vec{a}_\theta = (\vec{h}_\theta)_{z=o} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad a_\theta = r \qquad (1.4)$$

$$\vec{a}_z = (\vec{h}_z)_{z=o} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta = \vec{h}_z \\ \sin\phi \end{bmatrix} \quad ; \quad a_z = 1$$

La base conjuguée est donc :

$$\vec{a}^s = \vec{a}_s \quad ; \quad \vec{a}^\theta = \frac{1}{r^2}\vec{a}_\theta = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\cos\theta}{r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}^z = \vec{a}_z \qquad (1.5)$$

1.4. Tenseur de courbure

Le tenseur de courbure permet d'obtenir les rayons de courbure. Il est défini par

$$b^\alpha_\beta = -\vec{a}^\alpha \cdot D_\beta \vec{a}_3 \qquad \text{et} \qquad b^\alpha_\beta = \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \qquad (1.6)$$

$$D_s \vec{a}_3 = \frac{d\alpha}{ds} \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\theta \\ -\sin\phi\sin\theta \\ -\cos\phi \end{bmatrix} = -\frac{d\phi}{ds}\vec{a}_s \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{R_{ss}} = -\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R_s}$$

$$\frac{1}{R_{s\theta}} = 0 \quad ;$$

$$D_\theta \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} -\cos\phi\sin\theta \\ +\cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\cos\phi}{r}\vec{a}_\theta \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{R_{\theta\theta}} = \frac{\cos\phi}{r}\vec{a}_\theta \cdot \vec{a}^\theta = \frac{\cos\phi}{r} = \frac{1}{R_\theta}$$

$$\frac{1}{R_{\theta s}} = 0 \quad .$$

Le système est donc principal de courbure et

$$\frac{1}{R_s} = -\frac{d\phi}{ds} \quad ; \quad \frac{1}{R_\theta} = \frac{\cos\phi}{r} \quad . \qquad (1.7)$$

Ces valeurs peuvent être réintroduites dans (1.3).
Il vient alors :

$$h_s = (1 + \frac{z}{R_s}) \quad ; \quad h_\theta = r\,(1 + \frac{z}{R_\theta}) \quad ; \quad h_z = 1 \qquad (1.8)$$

Le système est orthogonal et droitier. On peut donc écrire :

$$J = h_s\, h_\theta\, h_z = r\,(1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta}) \quad .$$

1.5. Dérivation des h_s, h_θ, h_z ; calcul des dérivées covariantes

Les dérivées des coefficients métriques sont

$$\frac{\partial h_s}{\partial s} = z\,\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{R_s})$$

$$\frac{\partial h_s}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial h_s}{\partial z} = \frac{1}{R_s}$$

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(r + z\cos\phi) = \frac{dr}{ds} - z\sin\phi\,\frac{d\phi}{ds} = \frac{dr}{ds}(1 + \frac{z}{R_s})$$

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial h_\theta}{z} = \frac{r}{R_\theta}$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial z} = 0 \quad . \qquad (1.9)$$

On peut alors calculer les dérivées covariantes. Mises sous la forme "physique", elles s'écrivent

$$\frac{Du_i}{Dx_k} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{u_k}{h_i h_k}\frac{\partial h_k}{\partial x_i} \qquad \text{si } i \neq k$$

$$\frac{1}{h_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_{s\neq i} \frac{u_s}{h_i h_s}\frac{\partial h_i}{\partial x_s} \qquad \text{si } i = k \tag{1.10}$$

Ces formules nous donnent successivement

$$\frac{Du_s}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}}\left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_z}{R_s}\right)$$

$$\frac{Du_s}{D\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\frac{dr}{ds}\right)$$

$$\frac{Du_s}{Dz} = \frac{\partial u_s}{\partial z}$$

$$\frac{Du_\theta}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}}\frac{\partial u_\theta}{\partial s}$$

$$\frac{Du_\theta}{D\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_s}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{u_z}{R_\theta}\right)$$

$$\frac{Du_\theta}{Dz} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$\frac{Du_z}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}}\left(\frac{\partial u_z}{\partial s} - \frac{u_s}{R_s}\right)$$

$$\frac{Du_z}{D\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R_\theta}\right)$$

$$\frac{Du_z}{Dz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{1.11}$$

1.7. De ces expressions, on déduit facilement les déformations en un point quelconque de la coque :

$$\varepsilon_{ss} = \frac{Du_s}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}}\left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_z}{R_s}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_z}{R_\theta} + \frac{u_s}{r}\frac{dr}{ds}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{s\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}}\frac{\partial u_\theta}{\partial s} + \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\frac{dr}{ds}\right)$$

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}}\left(\frac{\partial u_z}{\partial s} - \frac{u_s}{R_s}\right)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R_\theta}\right) \tag{1.12}$$

Jusqu'à présent, nous n'avons fait qu'exprimer les propriétés du système d'axes, sans hypothèse aucune sur le champ de déplacements. Pour étudier une coque, il y a lieu de choisir une structure en z des déplacements.

2. Choix d'un champ de déplacements

2.1. On fait les hypothèses

$$u_s = u + \alpha z$$

$$u_\theta = v + \beta z \qquad (2.1)$$

$$u_z = w$$

En termes de u , v , w , α , β , les dérivées covariantes s'écrivent :

$$\frac{Du_s}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s}\right) + z \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right]$$

$$\frac{Du_s}{D\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} \left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\frac{dr}{ds}\right) + z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r}\frac{dr}{ds}\right) \right]$$

$$\frac{Du_s}{Dz} = \alpha$$

$$\frac{Du_\theta}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} \left[\frac{\partial v}{\partial s} + z \frac{\partial \beta}{\partial s} \right]$$

$$\frac{Du_\theta}{D\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} \left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{w}{R_\theta}\right) + z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{r}\frac{dr}{ds}\right) \right]$$

$$\frac{Du_\theta}{Dz} = \beta$$

$$\frac{Du_z}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}\right) - z \frac{\alpha}{R_s} \right]$$

$$\frac{Du_z}{D\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} \left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta}\right) - z \frac{\beta}{R_\theta} \right] \qquad (2.2)$$

$$\frac{Du_z}{Dz} = 0$$

2.2. On peut transformer légèrement les deux dérivées de u_z :

$$\frac{Du_z}{Ds} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}\right) - \alpha \left(1 + \frac{z}{R_s}\right) + \alpha \right]$$

$$= \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} \left[\alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right] - \alpha$$

$$\frac{Du_z}{D\theta} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} \left[\beta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \right] - \beta \qquad (2.3)$$

Ces relations nous amènent à définir les grandeurs suivantes :

$$\bar{\varepsilon}_{ss} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} \quad ; \quad \bar{X}_{ss} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

$$\bar{\gamma}_\theta = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\frac{dr}{ds}\right) \quad ; \quad \bar{\delta}_\theta = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r}\frac{dr}{ds}\right)$$

$$\bar{\gamma}_s = \frac{\partial v}{\partial s} \quad ; \quad \bar{\delta}_s = \frac{\partial \beta}{\partial s}$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{w}{R_\theta} \quad ; \quad \bar{X}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{r}\frac{dr}{ds} \qquad (2.4)$$

$$\overline{\gamma}_{sz} = \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}$$

$$\overline{\gamma}_{\theta z} = \beta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta}$$

Le choix des notations sera justifié par les expressions des déformations.

2.3. Muni de ces définitions, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{Du_s}{Ds} &= \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} (\overline{\varepsilon}_{ss} + z\,\overline{X}_{ss}) \\
\frac{Du_s}{D\theta} &= \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} (\overline{\gamma}_\theta + z\,\overline{\delta}_\theta) \\
\frac{Du_s}{Dz} &= \alpha \\
\frac{Du_\theta}{Ds} &= \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} (\overline{\gamma}_s + z\,\overline{\delta}_s) \\
\frac{Du_\theta}{D\theta} &= \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} (\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\overline{X}_{\theta\theta}) \qquad (2.5) \\
\frac{Du}{Dz} &= \beta \\
\frac{Du_z}{Ds} &= \frac{\overline{\gamma}_{sz}}{1+\frac{z}{R_s}} - \alpha \\
\frac{Du_z}{D\theta} &= \frac{\overline{\gamma}_{\theta z}}{1+\frac{z}{R_\theta}} - \beta \\
\frac{Du_z}{Dz} &= 0
\end{aligned}$$

Les déformations deviennent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} (\overline{\varepsilon}_{ss} + z\,\overline{X}_{ss}) \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} (\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\overline{X}_{\theta\theta}) \\
\varepsilon_{zz} &= 0 \qquad (2.6) \\
\gamma_{s\theta} &= \frac{1}{1+\frac{z}{R_\theta}} (\overline{\gamma}_\theta + z\,\overline{\delta}_\theta) + \frac{1}{1+\frac{z}{R_s}} (\overline{\gamma}_s + z\,\overline{\delta}_s) \\
\gamma_{sz} &= \frac{\overline{\gamma}_{sz}}{1+\frac{z}{R_s}} \\
\gamma_{\theta z} &= \frac{\overline{\gamma}_{\theta z}}{1+\frac{z}{R_\theta}}
\end{aligned}$$

2.4. Il est clair que sur le feuillet moyen,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= \overline{\varepsilon}_{ss} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \overline{\varepsilon}_{\theta\theta} \\
\varepsilon_{zz} &= 0 \\
\gamma_{s\theta} &= \overline{\gamma}_\theta + \overline{\gamma}_s \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\gamma_{sz} = \overline{\gamma}_{sz}$$

$$\gamma_{\theta z} = \overline{\gamma}_{\theta z}$$

ce qui justifie a posteriori les notations adoptées.

3. Equations d'équilibre

3.1. Calculons la variation première de l'énergie de déformation :

$$\delta U = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_0^{2\pi} r d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\ \sigma_{ss}\ \delta\ \varepsilon_{ss} + \sigma_{\theta\theta}\ \delta\ \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{s\theta}\ \delta\ \gamma_{s\theta}$$

$$+ \tau_{sz}\ \delta\ \gamma_{sz} + \tau_{\theta z}\ \delta\ \gamma_{\theta z}\ ]\ (1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta})\ dz$$

$$\delta U = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_0^{2\pi} r d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\ \sigma_{ss}\ (1 + \frac{z}{R_\theta})\delta(\overline{\varepsilon}_{ss} + z\ \overline{X}_{ss}) + \sigma_{\theta\theta}\ (1 + \frac{z}{R_s})$$

$$\delta\ (\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\ \overline{X}_{\theta\theta}) + \tau_{s\theta}(1 + \frac{z}{R_\theta})\delta(\overline{\gamma}_s + z\ \overline{\delta}_s) + \tau_{s\theta}\ (1 + \frac{z}{R_s})\delta(\overline{\gamma}_\theta + z\ \overline{\delta}_\theta)$$

$$+ \tau_{sz}\ (1 + \frac{z}{R_\theta})\ \delta\ \overline{\gamma}_{sz} + \tau_{\theta z}\ (1 + \frac{z}{R_s})\ \delta\ \overline{\gamma}_{z}\ ]\ dz$$

Cette expression introduit naturellement les forces généralisées suivantes :

$$N_{ss} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss}\ (1 + \frac{z}{R_\theta})\ dz$$

$$M_{ss} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\ \sigma_{ss}\ (1 + \frac{z}{R_\theta})\ dz$$

$$N_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta}(1 + \frac{z}{R_s})\ dz$$

$$M_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\ \sigma_{\theta\theta}\ (1 + \frac{z}{R_s})\ dz$$

$$N_{s\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{s\theta}\ (1 + \frac{z}{R_\theta})\ dz$$

$$M_{s\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\ \tau_{s\theta}\ (1 + \frac{z}{R_\theta})\ dz$$

$$N_{\theta s} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{s\theta}\ (1 + \frac{z}{R_s})\ dz \qquad (3.1)$$

$$M_{\theta s} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\ \tau_{s\theta}\ (\ 1 + \frac{z}{R_s})\ dz$$

$$Q_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{sz}\ (1 + \frac{z}{R_\theta})\ dz$$

$$Q_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\theta z}\ (1 + \frac{z}{R_s})\ dz\ .$$

Il vient alors

$$\delta U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{s_1}^{s_2} [N_{ss}\ \delta\ \overline{\varepsilon}_{ss} + N_{\theta\theta}\ \delta\ \overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + N_{s\theta}\ \delta\ \overline{\gamma}_s + N_{\theta s}\ \delta\ \overline{\gamma}_\theta$$

$$+ Q_s\ \delta\ \overline{\gamma}_{sz} + Q_\theta\ \delta\ \overline{\gamma}_{\theta z} + M_{ss}\ \delta\ \overline{X}_{ss} + M_{\theta\theta}\ \delta\ \overline{X}_{\theta\theta} + M_{s\theta}\ \delta\ \overline{\delta}_s + M_{\theta s}\ \delta\ \overline{\delta}_\theta$$

Ecrivons cette équation en termes des déplacements :

$$\delta U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{s_1}^{s_2} \Big[N_{ss}\ \delta\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s}\right) + N_{\theta\theta}\ \delta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R_\theta} + \frac{u}{r}\frac{dr}{ds}\right) + N_{s\theta}\ \delta\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

$$+ N_{\theta s}\ \delta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\frac{dr}{ds}\right) + Q_s\ \delta\left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}\right)$$

$$+ Q_\theta\ \delta\left(\beta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta}\right) + M_{ss}\ \delta\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) + M_{\theta\theta}\ \delta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{r}\frac{dr}{ds}\right)$$

$$+ M_{s\theta}\,\delta\left(\frac{\partial \beta}{\partial s}\right) + M_{\theta s}\ \delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r}\frac{dr}{ds}\right) \Big]\ r ds \quad .$$

3.2. Comme mise en charge, nous considérerons une pression, supposée appliquée sur le feuillet moyen. Son énergie potentielle s'écrit :

$$\delta P = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{s_1}^{s_2} q\ \delta\ w\ r ds \quad . \qquad (3.2)$$

L'équilibre est donc régi par l'équation

$$\delta U - \delta P = 0 \quad . \qquad (3.3)$$

Varions les différents paramètres du champ de déplacements :

$$\delta u \rightarrow - \frac{\partial (r\ N_{ss})}{\partial s} + N_{\theta\theta}\frac{dr}{ds} - \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{\theta s}) - r\frac{Q_s}{R_s} = 0 \quad ,$$

soit

$$+ \frac{\partial\ N_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial\ N_{\theta s}}{\partial \theta} - (N_{\theta\theta} - N_{ss})\frac{1}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{Q_s}{R} = 0 \quad . \qquad (E.1)$$

$$\delta v \rightarrow - \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial s}(r\ N_{s\theta}) - N_{\theta s}\frac{dr}{ds} - r\frac{Q_\theta}{R_\theta} = 0 \quad ,$$

soit

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + (N_{s\theta} + N_{\theta s})\frac{1}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{Q_\theta}{R_\theta} = 0 \quad . \qquad (E.2)$$

$$\delta w \rightarrow r\frac{N_{ss}}{R_s} + r\frac{N_{\theta\theta}}{R_\theta} - \frac{\partial}{\partial s}(r\ Q_s) - \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - q = 0$$

soit

$$\frac{\partial Q_s}{\partial s} + Q_s\frac{1}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \left(\frac{N_{ss}}{R_s} + \frac{N_{\theta\theta}}{R_\theta}\right) + q = 0 \quad . \qquad (E.3)$$

$$\delta \alpha \rightarrow rQ_s - \frac{\partial}{\partial s}(\ r\ M_{ss}) + M_{\theta\theta}\frac{dr}{ds} - \frac{\partial}{\partial \theta}(M_{\theta s}) = 0 \quad ,$$

soit

$$\frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}(M_{ss} - M_{\theta\theta}) - Q_s = 0 \quad . \qquad (E.4)$$

$$\delta \beta \rightarrow rQ_\theta - \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial s}(r\ M_{s\theta}) - M_{\theta s}\frac{dr}{ds} = 0 \quad ,$$

soit

$$\frac{1}{r}\frac{M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}(M_{s\theta} + M_{\theta s}) - Q_\theta = 0 \quad . \qquad (E.5)$$

3.3. <u>Conditions aux limites</u>

$$\delta u \rightarrow \Big[\ r\ N_{ss}\ \delta u\ \Big]_{s_1}^{s_2} = 0 \qquad (L.1)$$

$$\Big[\ N_{\theta s}\ \delta u\ \Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \qquad (L.2)$$

$$\delta v \rightarrow \Big[\ N_{\theta\theta}\ \delta v\ \Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \qquad (L.3)$$

$$\Big[\ r\ N_{s\theta}\ \delta v\ \Big]^{s_2} = 0 \qquad (L.4)$$

$$\delta w \rightarrow \Big[r\, Q_s\, \delta w \Big]_{s_1}^{s_2} = 0 \qquad \text{(L.5)}$$

$$r \Big[Q_\theta\, \delta w \Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \qquad \text{(L.6)}$$

$$\delta\alpha \rightarrow \Big[r\, M_{ss}\, \delta\alpha \Big]_{s_1}^{s_2} = 0 \qquad \text{(L.7)}$$

$$\Big[M_{\theta s}\, \delta\alpha \Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \qquad \text{(L.8)}$$

$$\delta\beta \rightarrow \Big[r\, M_{s\theta}\, \delta\beta \Big]_{s_1}^{s_2} = 0 \qquad \text{(L.9)}$$

$$\Big[M_{\theta\theta}\, \delta\beta \Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \qquad \text{(L.10)}$$

On notera que

$$\left.\begin{aligned} \delta u(\theta_1) &= \delta u(\theta_2) \\ \delta v(\theta_1) &= \delta v(\theta_2) \\ \delta w(\theta_1) &= \delta w(\theta_2) \end{aligned}\right\} \quad \text{condition de fermeture}$$

d'où

$$N_{\theta s}(\theta_r) - N_{\theta s}(\theta_1) = 0$$

$$N_{\theta\theta}(\theta_2) - N_{\theta\theta}(\theta_1) = 0$$

$$Q_\theta(\theta_2) - Q_\theta(\theta_1) = 0$$

$$M_{\theta s}(\theta_2) - M_{\theta s}(\theta_1) = 0$$

$$M_{\theta\theta}(\theta_r) - M_{\theta\theta}(\theta_1) = 0$$

?

4. Equations constitutives

4.1. Nous utiliserons la matrice de Hooke généralisée de l'état plan de contrainte

$$\sigma_{ss} = \frac{E_s}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} (\varepsilon_{ss} + \nu_{s\theta}\, \varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_\theta}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\, \varepsilon_{ss})$$

$$\tau_{s\theta} = G_{s\theta}\, \gamma_{s\theta} \qquad (4.1)$$

$$\tau_{sz} = G_{sz}\, \gamma_{sz}$$

$$\tau_{\theta z} = G_{\theta z}\, \gamma_{\theta z}$$

Il faut évidemment que

$$\frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{\theta\theta}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ss}\, \partial \varepsilon_{\theta\theta}} = \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \varepsilon_{ss}} \;.$$

ce qui entraîne

$$\nu_{s\theta}\, E_s = \nu_{\theta s}\, E_\theta \qquad (4.2)$$

4.2. Utilisons les paramètres du feuillet moyen : les relations (2.6) nous permettent d'écrire

$$\sigma_{ss} = \frac{E_1}{1-\nu_{s\theta}\, \nu_{\theta s}} \left[\frac{\overline{\varepsilon}_{ss} + z\, \overline{X}_{ss}}{1 + \frac{z}{R_s}} + \nu_{s\theta}\, \frac{\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\, \overline{X}_{\theta\theta}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_\theta}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \left[\frac{\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\bar{X}_{\theta\theta}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} + \nu_{\theta s} \frac{\bar{\varepsilon}_{ss} + z\,\bar{X}_{ss}}{1 + \frac{z}{R_s}} \right]$$

$$\tau_{s\theta} = G_{s\theta} \left[\frac{\bar{\gamma}_s + z\,\bar{\delta}_s}{1 + \frac{z}{R_s}} + \frac{\bar{\gamma}_\theta + z\,\bar{\delta}_\theta}{1 + \frac{z}{R_\theta}} \right]$$

$$\tau_{sz} = G_{sz} \left[\frac{\bar{\gamma}_{sz}}{1 + \frac{z}{R_s}} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = G_{\theta z} \left[\frac{\bar{\gamma}_{\theta z}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} \right] \qquad (4.3)$$

Remplaçant ces valeurs dans les expressions (3.1), on obtient successivement :

$$\left\{ \begin{matrix} N_{ss} \\ M_{ss} \end{matrix} \right\} = \frac{E_s}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} \frac{\bar{\varepsilon}_{ss} + z\,\bar{X}_{ss}}{1 + \frac{z}{R_s}} \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz \right.$$

$$\left. + \nu_{s\theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\bar{X}_{\theta\theta}\, dz \right]$$

$$\left\{ \begin{matrix} N_{\theta\theta} \\ M_{\theta\theta} \end{matrix} \right\} = \frac{E_\theta}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[(\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\bar{X}_{\theta\theta}) \frac{1 + \frac{z}{R_s}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} + \nu_{\theta s} (\bar{\varepsilon}_{ss} + z\,\bar{X}_{ss}) \right] \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} dz \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} N_{s\theta} \\ M_{s\theta} \end{matrix} \right\} = G_{s\theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[(\bar{\gamma}_s + z\,\bar{\delta}_s) \frac{1 + \frac{z}{R_\theta}}{1 + \frac{z}{R_s}} + (\bar{\gamma}_\theta + z\,\bar{\delta}_\theta) \right] \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} dz$$

$$\left\{ \begin{matrix} N_{\theta s} \\ M_{\theta s} \end{matrix} \right\} = G_{s\theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[(\bar{\gamma}_\theta + z\,\bar{\delta}_\theta) \frac{1 + \frac{z}{R_s}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} + (\bar{\gamma}_s + z\,\bar{\delta}_s) \right] \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} dz$$

$$Q_s = G_{sz} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\bar{\gamma}_{sz} \frac{1 + \frac{z}{R_\theta}}{1 + \frac{z}{R_s}} \right] dz$$

$$Q_\theta = G_{\theta z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\bar{\gamma}_{\theta z} \frac{1 + \frac{z}{R_s}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} \right] dz$$

4.3. Dans ces expressions apparaissent les primitives suivantes :

$$I_o = \int \frac{dz}{1 + \frac{z}{R}} = R\, \ell n \left(1 + \frac{z}{R}\right)$$

$$I_1 = \int \frac{z\, dz}{1 + \frac{z}{R}} = R^2 \left[\frac{z}{R} - \ell n \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right]$$

$$I_2 = \int \frac{z^2 dz}{1 + \frac{z}{R}} = R^3 \left[\frac{z^2}{2R^2} - \frac{z}{R} + \ell n \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right]$$

$$I_3 = \int \frac{z^3 dz}{1 + \frac{z}{R}} = R^4 \left[\frac{z^3}{3R^3} - \frac{z^2}{2R^2} + \frac{z}{R} - \ell n \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right]$$

Pour $\left| \frac{z}{R} \right| < 1$, on peut adopter le développement de TAYLOR

$$\ell n(1 + \frac{z}{R}) = \frac{z}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{R}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{R}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{R}\right)^5 - \dots$$

où, provisoirement, nous nous arrêterons au cinquième ordre, ce qui suppose $\left| \frac{h}{R} \right|^6 << 1$.
Il vient alors

$$I_o = z - \frac{z^2}{2R} + \frac{z^3}{3R^2} - \frac{z^4}{4R^3} + \frac{z^5}{5R^4}$$

$$I_1 = R^2 \left[\frac{z}{R} - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{2R^2} - \frac{z^3}{3R^3} + \frac{z^4}{4R^4} \right] = \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3R} + \frac{z^4}{4R^2} - \frac{z^5}{5R^3}$$

$$I_2 = \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4R} + \frac{z^5}{5R^2}$$

$$I_3 = z^4 - \frac{z^5}{5R}$$

Intégrant de $-\frac{h}{2}$ à $\frac{h}{2}$, on obtient, en gardant les mêmes notations I_i

$$I_o = h + \frac{h^3}{12R^2} + \frac{h^5}{16} \doteq h + \frac{h^3}{12R^2}$$

$$I_1 = -\frac{h^3}{12R} - \frac{h^5}{80R^3}$$

$$I_2 = \frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80R^2}$$

$$I_3 = -\frac{h^5}{80R}$$

Introduisons ces valeurs. Il vient :

$$N_{ss} = \frac{E_s}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \{ \bar{\varepsilon}_{ss} \left[h + \frac{h^3}{12R_s}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right)\right] + \nu_{s\theta}\, \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}\, h + \bar{X}_{ss} \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \}$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{E_\theta}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \{ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \left[h + \frac{h^3}{12R_\theta}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right)\right] + \nu_{\theta s}\, \bar{\varepsilon}_{ss}'\, h + \bar{X}_{\theta\theta} \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \}$$

$$N_{s\theta} = G_{s\theta} \{ \bar{\gamma}_s \left[h + \frac{h^3}{12R_s}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \right] + \bar{\delta}_s \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) + \bar{\gamma}_\theta\, h \}$$

$$N_{\theta s} = G_{s\theta} \{ \bar{\gamma}_\theta \left[h + \frac{h^3}{12R_\theta}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \right] + \bar{\delta}_\theta \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) + \bar{\gamma}_s\, h \}$$

$$M_{ss} = \frac{E_s}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \{ \bar{\varepsilon}_{ss} \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) + \bar{X}_{ss} \left[\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80R_s}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \right] + \nu_{s\theta}\, \bar{X}_{\theta\theta} \frac{h^3}{12}$$

$$M_{\theta\theta} = \frac{E_\theta}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \{ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) + \bar{X}_{\theta\theta} \left[\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80R_\theta}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \right] + \nu_{\theta s}\, \bar{X}_{ss} \frac{h^3}{12}$$

$$M_{s\theta} = G_{s\theta} \{ \bar{\gamma}_s \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) + \bar{\delta}_s \left[\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80R_s}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \right] + \bar{\delta}_\theta \frac{h^3}{12} \}$$

$$M_{\theta s} = G_{s\theta} \{ \bar{\gamma}_\theta \frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) + \bar{\delta}_\theta \left[\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80R_\theta}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \right] + \bar{\delta}_s \frac{h^3}{12} \}$$

$$Q_s = G_{sz} \{ \bar{\gamma}_{sz} \left[h + \frac{h^3}{12R_\theta}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \right] \}$$

$$Q_\theta = G_{sz} \{ \bar{\gamma}_{\theta z} \left[h + \frac{h^3}{12R_s}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \right] \}$$

En négligeant tous les termes en

$$\frac{h^2}{R_\alpha R_\beta} \quad \text{devant } 1 ,$$

on obtient la matrice de Hooke 10 x 10 (tableau 1).

4.4. Si, de plus, on fait l'hypothèse que

$\left| h \left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \right|$ est très petit (cette condition sera précisée plus loin), on peut grouper les déformations :

$$\overline{\gamma}_{s\theta} = \overline{\gamma}_s + \overline{\gamma}_\theta$$

$$\overline{X}_{s\theta} = \overline{\delta}_s + \overline{\delta}_\theta$$

Les couplages moments/déformations "de membrane" et résultantes "de membrane"/courbures disparaissent. Ceci rétablit la symétrie des efforts :

$$N_{s\theta} = N_{\theta s}$$

$$M_{s\theta} = M_{\theta s}$$

On obtient ainsi la matrice de Hooke 8 x 8 du tableau II.

TABLEAU I - MATRICE DE HOOKE 10 x 10 $\quad \left(\left| \frac{h}{R} \right|^2 \ll 1 \right)$

$\frac{E_s h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$	$\frac{\nu_{s\theta} E_s h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$			$\frac{E_s h^3\left(\frac{1}{R_\theta}-\frac{1}{R_s}\right)}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$					
$\frac{\nu_{\theta s} E_\theta h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$	$\frac{E_\theta h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$				$\frac{E_\theta h^3\left(\frac{1}{R_s}-\frac{1}{R_\theta}\right)}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$				
		$G_{s\theta} h$	$G_{s\theta} h$			$\frac{G_{s\theta} h^3\left(\frac{1}{R_\theta}-\frac{1}{R_s}\right)}{12}$			
		$G_{s\theta} h$	$G_{s\theta} h$				$\frac{G_{s\theta} h^3\left(\frac{1}{R_s}-\frac{1}{R_\theta}\right)}{12}$		
$\frac{E_s h^3\left(\frac{1}{R_\theta}-\frac{1}{R_s}\right)}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$				$\frac{E_s h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$	$\frac{\nu_{s\theta} E_s h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$				
	$\frac{E_\theta h^3\left(\frac{1}{R_s}-\frac{1}{R_\theta}\right)}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$			$\frac{\nu_{\theta s} E_\theta h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$	$\frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$				
		$\frac{G_{s\theta} h^3\left(\frac{1}{R_\theta}-\frac{1}{R_s}\right)}{12}$				$\frac{G_{s\theta} h^3}{12}$	$\frac{G_{s\theta} h^3}{12}$		
			$\frac{G_{s\theta} h^3\left(\frac{1}{R_s}-\frac{1}{R_\theta}\right)}{12}$			$\frac{G_{s\theta} h^3}{12}$	$\frac{G_{s\theta} h^3}{12}$		
								$G_{sz} h$	
									$G_{\theta z} h$

(Rappel : $\nu_{s\theta} E_s = \nu_{\theta s} E_\theta$)

TABLEAU II - MATRICE DE HOOKE 8 x 8

$\frac{E_s h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$	$\frac{\nu_{s\theta} E_s h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$						
$\frac{\nu_{\theta s} E_\theta h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$	$\frac{E_\theta h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$						
		$G_{s\theta} h$					
			$\frac{E_s h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$	$\frac{\nu_{s\theta} E_s h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$			
			$\frac{\nu_{\theta s} E_\theta h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$	$\frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}$			
					$G_{s\theta}\frac{h^3}{12}$		
						$G_{sz} h$	
							$G_{\theta z} h$

$(\nu_{s\theta} E_s = \nu_{\theta s} E_\theta)$

4.5. Conditions d'utilisation de la matrice de Hooke 8 x 8

Examinons les équations

$$N_{ss} = \frac{E_s h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \left[\bar{\varepsilon}_{ss} + \nu_{s\theta}\,\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \bar{X}_{ss} \right]$$

$$\rightarrow \left| \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \bar{X}_{ss} \right| << \left| \bar{\varepsilon}_{ss} + \nu_{s\theta}\,\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \right| \qquad (1)$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{E_\theta h}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \left[\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\bar{\varepsilon}_{ss} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\varepsilon}\right) \bar{X}_{\theta\theta} \right]$$

$$\rightarrow \left| \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \bar{X}_{\theta\theta} \right| << \left| \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\bar{\varepsilon}_{ss} \right| \qquad (2)$$

$$N_{s\theta} = G_{s\theta} h \left[\bar{\gamma}_{s\theta} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \bar{\delta}_s \right]$$

$$\rightarrow \left| \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \bar{\delta}_s \right| << \left| \bar{\gamma}_{s\theta} \right| \qquad (3)$$

$$N_{\theta s} \rightarrow \left| \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \bar{\delta}_\theta \right| << \left| \bar{\gamma}_{s\theta} \right| \qquad (4)$$

$$M_{ss} \rightarrow \left| \left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \bar{\varepsilon}_{ss} \right| << \left| \bar{X}_{ss} + \nu_{s\theta}\,\bar{X}_{\theta\theta} \right| \qquad (5)$$

$$M_{\theta\theta} \rightarrow \left| \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \right| << \left| \bar{X}_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\bar{X}_{ss} \right| \qquad (6)$$

$$M_{s\theta} \rightarrow \left| \left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \overline{\gamma}_s \right| << \left| \overline{X}_{s\theta} \right| \qquad (7)$$

$$M_{\theta s} \rightarrow \left| \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \overline{\gamma}_\theta \right| << \left| \overline{X}_{s\theta} \right| \qquad (8)$$

Si l'on admet que $\overline{\varepsilon}_{ss}$, $\overline{\varepsilon}_{\theta\theta}$, $\overline{\gamma}_{s\theta}$, $\overline{\gamma}_{\theta z}$, $\overline{\gamma}_{sz}$ sont du même ordre de grandeur ;

que $\overline{X}_{ss}$, $\overline{X}_{\theta\theta}$, $\overline{X}_{s\theta}$ sont de l'ordre de grandeur de $\frac{\overline{\varepsilon}_{ss}}{h}$,

cette condition revient à écrire

$$\left| h \left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \right| << 1 \quad .$$

Dans le cas de la sphère ($R_s = R_\theta$) et dans le cas du plan $\left(\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_\theta} = 0\right)$,

l'usage de la matrice de Hooke 8 x 8 est rigoureux.

Il sera suffisamment approché chaque fois que

$$\left.\begin{aligned} &\left| \frac{h}{12} \left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s}\right) \right| << \min_{i,j} \frac{h\,\overline{X}_{ij}}{\overline{\varepsilon}_{ij}} \\ &\qquad << \min_{i,j} \frac{\overline{\varepsilon}_{ij}}{h\,\overline{X}_{ij}} \end{aligned}\right\} \; \underline{\text{simultanément}}.$$

Il s'agit d'un critère a posteriori, permettant de vérifier si l'application de la matrice simplifiée était correcte.

5. Vibrations autour d'un état d'équilibre thermoélastique

5.1. Base théorique

Considérons une structure de référence relâchée.

La position d'équilibre est caractérisée par des déplacements d'équilibre u_i^o.

Lors de vibrations, la structure subit de nouveaux déplacements u_i.

Nous appelerons $\overline{u}_i$ les déplacements totaux $u_i^o + u_i$.

Le tenseur de Green prend la forme

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left[D_j (u_i + u_i^o) + D_i (u_j^o + u_j) + D_i (u_m^o + u_m) D_j (u_m^o + u_m) \right]$$

$$= \gamma_{ij}(0) + \gamma_{ij}(1) + \gamma_{ij}(2) \,, \qquad (5.1)$$

avec

$$\gamma_{ij}(0) = \frac{1}{2} (D_i u_j^o + D_j u_i^o + D_i u_m^o D_j u_m^o)$$

$$\gamma_{ij}(1) = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i + D_i u_m^o D_j u_m + D_j u_m^o D_i u_m)$$

$$\gamma_{ij}(2) = \frac{1}{2} D_i u_m D_j u_m \quad . \qquad (5.2)$$

La densité d'énergie libre de la structure peut s'écrire sous la forme

$$W = - C_{ij}^{k\ell} \overline{\alpha}_{k\ell} T \gamma_{ij} + \frac{1}{2} C_{ij}^{k\ell} \gamma_{ij} \gamma_{k\ell} \quad , \qquad (5.3)$$

où $\overline{\alpha}_{k\ell}$ est défini lors d'une dilatation libre par :

$$\gamma_{k\ell}(T) = \overline{\alpha}_{k\ell} T \quad . \qquad (5.4)$$

A ce sujet, on notera que la définition classique des dilatations thermiques,

$$D_i\, u_j(T) = \alpha_{ij}\, T \quad , \qquad (5.5)$$

est reliée à la précédente par l'équation

$$\bar{\alpha}_{k\ell} = \frac{1}{2}\,(\alpha_{k\ell} + \alpha_{\ell k} + \alpha_{ki}\,\alpha_{\ell i}) \quad . \qquad (5.6)$$

La relation (5.1) entraîne

$$W = W_o - C^{k\ell}_{ij}\,\bar{\alpha}_{k\ell}\, T\, \gamma_{ij} + \frac{1}{2}\, C^{k\ell}_{ij}\,[\,\gamma_{k\ell}(o) + \gamma_{k\ell}(1) + \gamma_{k\ell}(2)\,]\;\gamma_{ij} \qquad (5.7)$$

De cette expression, on peut déduire les tensions de Kirchhoff-Trefftz par la relation

$$s_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \quad , \qquad (5.8)$$

où l'on ignore la symétrie de γ_{ij} . Ce qui donne

$$s_{ij} = -\, C^{k\ell}_{ij}\,\bar{\alpha}_{k\ell}\, T + C^{k\ell}_{ij}\,[\,\gamma_{k\ell}(o) + \gamma_{k\ell}(1) + \gamma_{k\ell}(2)\,]$$

5.2. L'équilibre est caractérisé par les relations

$$u_i = 0 \quad . \qquad (5.9)$$

Dans cet état, les tensions sont donc

$$s^o_{ij} = C^{k\ell}_{ij}\,[\,\gamma_{k\ell}(o) - \bar{\alpha}_{k\ell}\, T\,] \qquad (5.10)$$

Ceci permet de transformer l'expression de l'énergie :

$$W = W_o + \frac{1}{2}\, C^{k\ell}_{ij}\,\gamma_{ij}(o)\,\gamma_{k\ell}(o) - C^{k\ell}_{ij}\,\bar{\alpha}_{k\ell}\, T\,\gamma_{ij}(o)$$

$$+\, s_{ij}\,\gamma_{ij}(1) + s^o_{ij}\,\gamma_{ij}(2) + \frac{1}{2}\, C^{k\ell}_{ij}\,\gamma_{ij}(1)\,\gamma_{k\ell}(1)$$

$$+\, O\,(Du^3) + O\,(Du^4) \quad ,$$

soit, négligeant les termes d'ordre supérieur au second :

$$W = W(o) + s^o_{ij}\,\gamma_{ij}(1) + s^o_{ij}\,\gamma_{ij}(2) + \frac{1}{2}\, C^{k\ell}_{ij}\,\gamma_{ij}(1)\,\gamma_{k\ell}(1) \qquad (5.11)$$

Examinons le terme du premier ordre : il peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\, s^o_{ij}\,[\,D_i u_j + D_j u_i + D_i u^o_m\, D_j u_m + D_j u^o_m\, D_i u_m\,] =$$

$$\frac{1}{2}\, s^o_{ij}\,[\,D_i u_m\,(\delta_{mj} + D_j u^o_m) + D_j u_m\,(\delta_{mi} + D_i u^o_m)\,] =$$

$$\frac{1}{2}\,[\,s^o_{ij}\,(\delta_{mj} + D_j u^o_m)\, D_i u_m + s^o_{ij}\,(\ _{mi} + D_i u^o_m)\, D_j u_m\,] =$$

$$= t^o_{im}\, D_i u_m \quad . \qquad (5.12)$$

t^o_{im} étant le tenseur des tensions de PIOLA.
Par conséquent,

$$W = W(o) + t^o_{ij}\, D_i u_j + s^o_{ij}\,\gamma_{ij}(2) + \frac{1}{2}\, C^{k\ell}_{ij}\,\gamma_{ij}(1)\,\gamma_{k\ell}(1) \qquad (5.13)$$

5.3. <u>Elimination des termes linéaires</u>

Les vibrations sont régies par le principe de HAMILTON

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\; [\int_R (T-W)\, dR + \int_R \rho g_i\, u_i\, dR + \int_{S_2} \bar{t}_i\, u_i\, dS\,] = 0 \qquad (5.14)$$

D'autre part, la position d'équilibre dépend du principe statique de variation des déplacements. Les déplacements de vibration sont nécessairement des perturbations admissibles, puisque les conditions d'appui n'ont pas changé. Le principe, écrit en termes des tensions de PIOLA, s'écrit alors

$$\int_R t^o_{ij}\, D_i\, u_j\, dR - \int_R \rho g_i\, u_i\, dR - \int_{S_2} \overline{t}_i\, u_i\, dS = 0 \qquad (5.15)$$

Par conséquent, on peut réduire le principe de HAMILTON à la forme

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \{ \int_R [\, T - W(2)\,]\, dR \} = 0 \qquad (5.16)$$

On notera que, jusqu'ici, nous n'avons fait aucune hypothèse concernant l'ordre de grandeur des déplacements initiaux d'équilibre.

5.4. Simplification du second terme de W(2)

Considérons le terme

$$\frac{1}{2}\, C^{k\ell}_{ij}\, \gamma_{ij}(1)\, \gamma_{k\ell}(1) \quad ,$$

où

$$\gamma_{ij}(1) = \frac{1}{2} [\, D_i\, u_m\, (\delta_{mj} + D_j\, u^o_m) + D_j\, u_m\, (\delta_{mi} + D_i\, u^o_m)\,]$$

Dans la suite, nous supposerons le terme initial négligeable, ce qui revient à dire

$$|\, D_i\, u_j\, | << 1 \qquad \text{pour} \qquad i = j \qquad (5.17)$$

$$|\, D_i\, u_j\, | << \qquad \text{pour} \qquad i \neq j \qquad (5.18)$$

La première condition est généralement vérifiée. Par cont la seconde est une restriction dont il faut vérifier la validité.

On peut alors traiter le problème en écrivant

$$W(2) = \frac{1}{2}\, s^o_{ij}\, D_i\, u_m\, D_j\, u_m + \frac{1}{2}\, C^{k\ell}_{ij}\, D_i\, u_j\, D_k\, u_\ell \quad , \qquad (5.19)$$

Le second terme est celui d'une analyse linéaire classique.
Le premier amène à définir une "matrice de stabilité".
Rappelons que les inégalités (5.17) et (5.18) sont aussi les conditions d'utilisation de la théorie linéaire de l'élasticité qui remplace les équations d'équilibre de rotation

$$t_{im}\, (\delta_{mj} + D_m\, u_j) = t_{jm}\, (\delta_{mi} + D_m\, u_i)$$

par la symétrie des tensions.

Pour transcrire ces restrictions dans la théorie des coques, il suffit de remplacer les dérivées classiques par les dérivées covariantes.
Alors, les inégalités (5.17) s'écrivent, compte tenu de (2.4) :

$$|\, \overline{\varepsilon}^o_{ss}\, | + h\, |\, \overline{X}^o_{ss}\, | << 1$$
$$|\, \overline{\varepsilon}^o_{\theta\theta}\, | + h\, |\, \overline{X}^o_{\theta\theta}\, | << 1 \quad , \qquad (5.20)$$

et les conditions (5.18) :

$$|\, \overline{\gamma}^o_s\, | + h\, |\, \overline{\delta}^o_s\, | <<$$

$$|\, \overline{\gamma}^o_\theta\, | + h\, |\, \overline{\delta}^o_\theta\, | <<$$

$$|\, \alpha^o\, | << \qquad (5.21)$$

$$|\, \beta^o\, | <<$$

$$|\, \overline{\gamma}^o_{sz}\, |$$

$$|\, \gamma^o_{\theta z}\, | <<$$

5.2. Calcul de la matrice de stabilité complète

Il s'agit de calculer

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^o_{ij}\, \gamma^{(2)}_{ij} \;(1 + \frac{z}{Rs})(1 + \frac{z}{R_\theta})dz \qquad (5.22)$$

La première étape consiste à calculer les $\gamma^{(2)}_{ij}$.

Les expressions des dérivées covariantes ont été trouvées en (2.5).

$$\gamma^{(2)}_{ss} = \frac{1}{2}\left[(\frac{Du_s}{Ds})^2 + (\frac{Du_\theta}{Ds})^2 + (\frac{Du_z}{Ds})^2\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(\overline{\varepsilon}_{ss} + z\,\overline{X}_{ss})^2}{(1 + \frac{z}{R_s})^2} + \frac{(\overline{\gamma}_s + z\,\overline{\delta}_s)^2}{(1 + \frac{z}{R_s})^2} + (\frac{\overline{\gamma}_{sz}}{1 + \frac{z}{R_s}} - \alpha)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1 + \frac{z}{R_s})^2}\left[(\overline{\varepsilon}_{ss} + z\,\overline{X}_{ss})^2 + (\overline{\gamma}_s + z\,\overline{\delta}_s)^2 + \overline{\gamma}_{sz}^{\,2}\right] - \frac{\alpha\overline{\gamma}_{sz}}{1 + \frac{z}{R_s}} + \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\gamma^{(2)}_{s\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{Du_s}{Ds}\frac{Du_s}{D\theta} + \frac{Du}{Ds} + \frac{Du}{Ds}\frac{Du}{D\theta} + \frac{Du_z}{Ds}\frac{Du_z}{D\theta}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta})}\left[(\overline{\varepsilon}'_{ss} + z\,\overline{X}_{ss})(\overline{\gamma}_\theta + z\,\overline{\delta}_\theta) + (\overline{\gamma}_s + z\,\overline{\delta}_s)(\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\overline{X}_\theta + \overline{\gamma}_{sz}\,\overline{\gamma}_{\theta z}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\overline{\gamma}_{\theta z}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} - \frac{1}{2}\,\frac{\beta\overline{\gamma}_{sz}}{1 + \frac{z}{R_s}} + \frac{1}{2}\alpha\beta$$

$$\gamma^{(2)}_{sz} = \frac{1}{2}\left[\frac{Du_s}{Ds}\frac{Du_s}{Dz} + \frac{Du_\theta}{Ds}\frac{Du_\theta}{Dz} + \frac{Du_z}{Ds}\frac{Du_z}{Dz}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + \frac{z}{R_s}}\left[(\overline{\varepsilon}_{ss} + z\,\overline{X}_{ss})\,\alpha + \beta\,(\overline{\gamma}_s + z\,\overline{\delta}_s)\right]$$

$$\gamma^{(2)}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\left[(\frac{Du_s}{D\theta})^2 + (\frac{Du_\theta}{D\theta})^2 + (\frac{Du_z}{D\theta})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1 + \frac{z}{R_\theta})^2}\left[(\overline{\gamma}_\theta + z\,\overline{\delta}_\theta)^2 + (\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\overline{X}_{\theta\theta})^2 + \overline{\gamma}^{\,2}_{\theta z}\right] - \frac{\beta\overline{\gamma}_{\theta z}}{1 + \frac{z}{R_\theta}} + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$\gamma^{(2)}_{\theta z} = \frac{1}{2}\left[\frac{Du_s}{D\theta}\frac{Du_s}{Dz} + \frac{Du_\theta}{D\theta}\frac{Du_\theta}{Dz} + \frac{Du_\theta}{D\theta}\frac{Du_z}{Dz}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + \frac{z}{R_\theta}}\left[\alpha(\overline{\gamma}_\theta + z\,\overline{\delta}_\theta) + \beta\,(\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} + z\,\overline{X}_{\theta\theta})\right]$$

$$\gamma^{(2)}_{zz} = \frac{1}{2}\left[(\frac{Du_s}{Dz})^2 + (\frac{Du_\theta}{Dz})^2 + (\frac{Du_z}{Dz})^2\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\alpha^2 + \beta^2\right]$$

5.3. L'énergie quadratique des tensions initiales est

$$\sigma^o_{ij}\,\gamma^{(2)}_{ij} = \sigma^o_{11}\,\gamma^{(2)}_{11} + \sigma^o_{22}\,\gamma^{(2)}_{22} + \sigma^o_{33}\,\gamma^{(2)}_{33} + 2\,\sigma^o_{12}\,\gamma^{(2)}_{12} + 2\,\sigma^o_{13}\,\gamma^{(2)}_{13}$$

$$+ 2\,\sigma^o\,\gamma^{(2)}$$

Nous intégrerons sur l'épaisseur, c'est-à-dire que nous calculerons

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^o_{ij}\,\gamma^{(2)}_{ij}\left[1+\frac{z}{R_\theta}\right]\left[1+\frac{z}{R_s}\right] dz \tag{5.23}$$

<u>Terme relatif à σ_{ss}</u>

$$\frac{1}{2}\int \sigma_{ss}\,\frac{1+\frac{z}{R_\theta}}{1+\frac{z}{R_s}}\left[(\bar\varepsilon^2_{ss}+\bar\gamma^2_s+\bar\gamma^2_{sz}) + 2z\,(\bar\varepsilon_{ss}\,\bar X_{ss}+\bar\gamma_s\,\bar\delta_s)\right.$$

$$\left. + z^2\,(\bar X^2_{ss}+\bar\delta^2_s)\right] dz$$

$$+\frac{1}{2}\int \sigma_{ss}\,(1+\frac{z}{R_\theta})\,dz\,\left[-2\,\alpha\bar\gamma_{sz}\right] + \frac{1}{2}\alpha^2\int s_{ss}\,(1+\frac{z}{R_s})(1+\frac{z}{R_\theta})\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\{\,N^{\theta/s}_{ss}\,(\bar\varepsilon^2_{ss}+\bar\gamma^2_s+\bar\gamma^2_{sz}) + 2\,M^{\theta/s}_{ss}\,(\bar\varepsilon_{ss}\,\bar X_{ss}+\bar\gamma_s\,\bar\delta_s)$$

$$+\mathcal{M}^{\theta/s}_{ss}\,(\bar X^2_{ss}+\bar\delta^2_s)$$

$$-2\,N^\theta_{ss}\,\alpha\bar\gamma_{sz} + N^{s\theta}_{ss}\,\alpha^2\,\}$$

où

$$N^{\theta/s}_{ss} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss}\,\frac{1+\frac{z}{R_\theta}}{1+\frac{z}{R_s}}\,dz$$

$$N^\theta_{ss} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss}\,(1+\frac{z}{R_\theta})\,dz$$

$$N^{s\theta}_{ss} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss}\,(1+\frac{z}{R_s})(1+\frac{z}{R_\theta})\,dz$$

et de même pour M_{ss} et $\mathcal{M}_{ss}$, moment d'ordre 2.

<u>Terme relatif à $s_{s\theta}$</u>

$$\frac{1}{2}\{\,2\,N^1_{s\theta}\,(\bar\varepsilon_{ss}\,\bar\gamma_\theta+\bar\gamma_s\,\bar\varepsilon_{\theta\theta}+\bar\gamma_{sz}\,\bar\gamma_{\theta z}) + 2\,M^1_{s\theta}\,(\bar\varepsilon_{ss}\,\bar\delta_\theta+\bar X_{ss}\,\bar\gamma_\theta+\bar\gamma_s\,\bar X_{\theta\theta}+\bar\delta$$

$$+2\mathcal{M}^1_{s\theta}\,(\bar X_{ss}\,\bar\delta_\theta+\bar\delta_s\,\bar X_{\theta\theta}) - 2\,N^s_{s\theta}\,\alpha\bar\gamma_{\theta z} - 2\,N^\theta_{s\theta}\,\beta\bar\gamma_{sz} + 2\,N^{s\theta}_{s\theta}\,\alpha\beta\,\}$$

<u>Terme relatif à s_{sz}</u>

$$\frac{1}{2}\{\,2\,Q^\theta_s\,(\bar\varepsilon_{ss}\,\alpha+\bar\gamma_s\,\beta) + 2\,M^\theta_{sz}\,(\alpha\,\bar X_{ss}+\beta\,\bar\delta_s)$$

<u>Terme relatif à $s_{\theta\theta}$</u>

$$\frac{1}{2}\{\,N^{s/\theta}_{\theta\theta}(\bar\gamma^2_\theta+\bar\varepsilon^2_{\theta\theta}+\bar\gamma^2_{\theta z}) + 2\,M^{s/\theta}_{\theta\theta}(\bar\gamma_\theta\,\bar\delta_\theta+\bar\varepsilon_{\theta\theta}\,\bar X_{\theta\theta}) + \mathcal{M}^{s/\theta}_{\theta\theta}(\bar\delta^2_\theta+\bar X^2_{\theta\theta})$$

$$-2\,N^s_{\theta\theta}\,\beta\bar\gamma_{\theta z} + N^{s\theta}_{\theta\theta}\beta^2\,\}$$

<u>Terme relatif à $s_{\theta z}$</u>

$$\frac{1}{2}\{\,2\,Q^s_\theta\,(\alpha\,\bar\gamma_\theta+\beta\,\bar\varepsilon_{\theta\theta}) + 2\,M^s_{\theta z}\,(\alpha\,\bar\delta_\theta+\beta\,\bar X_{\theta\theta})\,\}$$

<u>Terme relatif à s_{zz}</u>

$$\frac{1}{2}\{\,N^{s\theta}_{zz}\,(\alpha^2+\beta^2)\,\} \tag{5.24}$$

Dans ces formules, les $\mathcal{M}_{ij}$ sont des moments du second ordre du type

$$\mathcal{M}_{ij}^{s\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\, z^2 \left(1 + \frac{z}{R_s}\right)\left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz$$

On obtient ainsi la matrice de stabilité générale du tableau III.
Les termes barrés sont ceux qui ont un correspondant dans la matrice des modules d'élasticité. Les tensions sont nécessairement beaucoup plus petites que ceux-ci, ce qui entraîne que l'on peut négliger ces termes dans la matrice de stabilité.

5.4. Conditions d'équilibre statique. Distribution de température

5.4.1. La position d'équilibre statique sera posée axisymétrique, c'est-à-dire que les déplacements initiaux vérifieront les équations suivantes :

$$\begin{cases} w^o = w^o(s) \\ u^o = u^o(s) \\ \alpha^o = \alpha^o(s) \\ v^o = 0 \\ \beta^o = 0 \end{cases} \qquad (5.25)$$

Dès lors, les équations de compatibilité (2.4) entraînent

$$\bar{\gamma}_\theta = \bar{\gamma}_s = \bar{\delta}_\theta = \bar{\delta}_s = \bar{\gamma}_{\theta z} = 0 \qquad (5.26)$$

Par les relations tensions-déformations (Tableau I), on obtient facilement

$$N^o_{s\theta} = N^o_{\theta s} = M^o_{s\theta} = M^o_{\theta s} = Q^o_\theta = 0 \qquad (5.26)$$

5.4.2. Pour ce qui est des températures, nous les supposerons linéaires en z :

$$T = T_o + z\, T_1 \qquad (5.27)$$

TABLEAU III - MATRICE DE STABILITE COMPLETE

	$\bar{\varepsilon}_{ss}$	$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$	$\bar{\gamma}_s$	$\bar{\gamma}_\theta$	$\bar{\chi}_{ss}$	$\bar{\chi}_{\theta\theta}$	$\bar{\delta}_s$	$\bar{\delta}_\theta$	$\bar{\gamma}_{sz}$	$\bar{\gamma}_{\theta z}$	α	β
$\bar{\varepsilon}_{ss}$	$N_{ss}^{\theta/s}$			$N_{s\theta}^{1}$	$M_{ss}^{\theta/s}$		$M_{s\theta}^{1}$				Q_s^θ	
$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$		$N_{\theta\theta}^{s/\theta}$	$N_{s\theta}^{1}$			$M_{\theta\theta}^{s/\theta}$	$M_{s\theta}^{1}$					Q_θ^s
$\bar{\gamma}_s$			$N_{ss}^{\theta/s}$			$M_{s\theta}^{1}$	$M_{ss}^{\theta/s}$					Q_s^θ
$\bar{\gamma}_\theta$				$N_{\theta\theta}^{s/\theta}$	$M_{s\theta}^{1}$			$M_{\theta\theta}^{s/\theta}$			Q_θ^s	
$\bar{\chi}_{ss}$					$\mathcal{M}_{ss}^{\theta/s}$			$\mathcal{M}_{s\theta}^{1}$			M_{sz}^θ	
$\bar{\chi}_{\theta\theta}$						$\mathcal{M}_{\theta\theta}^{s/\theta}$	$\mathcal{M}_{s\theta}^{1}$				$M_{\theta z}^s$	
$\bar{\delta}_s$			SYM.				$\mathcal{M}_{ss}^{\theta/s}$					M_{sz}^θ
$\bar{\delta}_\theta$								$\mathcal{M}_{\theta\theta}^{s/\theta}$			$M_{\theta z}^s$	
$\bar{\gamma}_{sz}$									$N_{ss}^{\theta/s}$	$N_{s\theta}^{1}$	$-N_{ss}^\theta$	$-N_{s\theta}^\theta$
$\bar{\gamma}_{\theta z}$										$N_{\theta\theta}^{s/\theta}$	$-N_{s\theta}^s$	$-N_{\theta\theta}^s$
α											$N_{ss}^{s\theta}+N_{zz}^{s\theta}$	$N_{s\theta}^{s\theta}$
β												$N_{\theta\theta}^{s\theta}+N_{zz}^{s\theta}$

Les directions principales du tenseur des coefficients de dilatation coïncideront obligatoirement avec les vecteurs de base de la coque.
Dans ce cas, on peut écrire :

$$\sigma_{ss}(T) = \frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\,(T_o + z\,T_1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(T) = \frac{E_\theta(\alpha_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\alpha_{ss})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\,(T_o + z\,T_1) \tag{5.28}$$

On est donc conduit à définir les forces thermiques

$$N_{ss}(T) = \frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T_o + z\,T_1)(1 + \frac{z}{R_\theta})\,dz =$$

$$\frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,h + T_1\,\frac{h^3}{12\,R_\theta}\right]$$

et, similairement :

$$M_{ss}(T) = \frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,\frac{h^3}{12\,R_\theta} + T_1\,\frac{h^3}{12}\right]$$

$$N_{\theta\theta}(T) = \frac{E_\theta(\alpha_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\alpha_{ss})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,h + T_1\,\frac{h^3}{12\,R_s}\right]$$

$$M_{\theta\theta}(T) = \frac{E_\theta(\alpha_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\alpha_{ss})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,\frac{h^3}{12\,R_\theta} + T_1\,\frac{h^3}{12}\right] \tag{5.29}$$

Il est également possible de calculer

$$N^{s\theta}_{ss}(T) = \frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T_o + z\,T_1)(1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta})\,dz =$$

$$\frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,(h + \frac{h^3}{12\,R_s\,R_\theta} + T_1\,\frac{h^3}{12}\,(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta})\right] \tag{5.30}$$

et

$$N^{s\theta}_{\theta\theta}(T) = \frac{E_\theta(\alpha_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\alpha_{ss})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,(h + \frac{h^3}{12\,R_s\,R_\theta}) + T_1\,\frac{h^3}{12}\,(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta})\right] \tag{5.31}$$

soit, approximativement

$$N^{s\theta}_{ss}(T) = \frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,h + T_1\,\frac{h^3}{12}\,(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta})\right] \tag{5.32}$$

$$N^{s\theta}_{\theta\theta}(T) = \frac{E_\theta(\alpha_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\alpha_{ss})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}\left[T_o\,h + T_1\,\frac{h^3}{12}\,(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta})\right] \tag{5.33}$$

Dans le cas où

$$\left|\frac{h}{12}\,(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta})\cdot T_1\,h\right| \ll |T_o|\,, \tag{5.34}$$

on peut confondre $N^{s\theta}_{ss}(T)$ et $N_{ss}(T)$ ainsi que $N^{s\theta}_{\theta\theta}(T)$ et $N_{\theta\theta}(T)$.
Si

$$\left|\frac{h}{12}\,(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta})\right|$$

est vraiment petit, on peut non seulement les confondre, mais utiliser les

$$N_{ss}(T) = k_s\, T_o\, h$$

$$M_{ss}(T) = k_s\, T_1 \frac{h^3}{12}$$

$$N_{\theta\theta}(T) = k_\theta\, T_o\, h \qquad (5.35)$$

$$M_{\theta\theta}(T) = k_\theta\, T_1 \frac{h^3}{12}$$

où

$$k_s = \frac{E_s(\alpha_{ss} + \nu_{s\theta}\,\alpha_{\theta\theta})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}}$$

$$k_\theta = \frac{E_\theta(\alpha_{\theta\theta} + \nu_{\theta s}\,\alpha_{ss})}{1 - \nu_{s\theta}\,\nu_{\theta s}} \qquad (5.36)$$

5.4.3. Dans la matrice de stabilité, on voit apparaître des efforts inconnus. En effet,

a) $N^{\theta}_{ij} \neq N^{s}_{ij} \neq N^{1}_{ij} \neq N^{s\theta}_{ij} \neq N^{s/\theta}_{ij}$ etc ...

b) $\mathcal{M}_{ij}$, moment du second ordre, est inconnu.

Développons les tensions en séries de puissances de z :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(o) + z\,\sigma_{ij}(1) + z^2\,\sigma_{ij}(2) + z^3\,\sigma_{ij}(3) + \dots \qquad (5.37)$$

Alors,

$$N^{s\theta}_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\left(1 + \frac{z}{R_s}\right)\left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz =$$

$$N^{s\theta}_{ij} = \sigma_{ij}(o)\left[h + \frac{h^3}{12\,R_s\,R_\theta}\right] + \sigma_{ij}(1)\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) + \sigma_{ij}(2)\frac{h^3}{12}\left(1 + \frac{3\,h^2}{20\,R_s\,R_\theta}\right)$$

$$+ \sigma_{ij}(3)\,\frac{h^5}{80}\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) + \dots$$

Si l'on néglige les termes en $\frac{h^2}{R_s\,R_\theta}$ par rapport à 1, ainsi que tous les termes en $h\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right)$, on obtient

$$N^{s\theta}_{ij} = \sigma_{ij}(o)\,h + \sigma_{ij}(2)\,\frac{h^3}{12} \qquad (5.38)$$

N^{θ}_{ij} s'obtient formellement en posant $\frac{1}{R_s} = 0$. On tombe sur la même valeur. De même pour tous les autres. Ainsi, à condition de négliger les termes en $h\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right)$, on peut confondre tous les N_{ij}.

Par un raisonnement analogue, on trouve

$$M^{s\theta}_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\; z\left(1 + \frac{z}{R_s}\right)\left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz =$$

$$= \sigma_{ij}(o)\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) + \sigma_{ij}(1)\,\frac{h^3}{12} + \sigma_{ij}(2)\,\frac{h^5}{80}\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right)$$

$$+ \sigma_{ij}(3)\,\frac{h^5}{80}$$

$$M^{s\theta}_{ij} \simeq \sigma_{ij}(1)\,\frac{h^3}{12} + \sigma_{ij}(3)\,\frac{h^5}{80} = M_{ij} \qquad (5.39)$$

$$\mathcal{M}^{s\theta}_{ij} = \sigma_{ij}(o)\,\frac{h^3}{12} + \sigma_{ij}(1)\,\frac{h^5}{80}\left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{1}{R_s}\right) + \sigma_{ij}(2)\,\frac{h^5}{80} + \sigma_{ij}(3)\,\frac{h^7}{448}\left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{1}{R_s}\right)$$

$$\mathcal{M}^{s\theta}_{ij} \simeq \sigma_{ij}(o)\,\frac{h^3}{12} + \sigma_{ij}(2)\,\frac{h^5}{80} = \quad {}_{ij} \qquad (5.40)$$

<ins>Si l'on admet</ins> que $\sigma_{ij}(2)$ est très petit, il vient

TABLEAU IV

	$\bar{\varepsilon}_{ss}$	$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$	$\bar{\gamma}_{s}$	$\bar{\gamma}_{\theta}$	$\bar{\chi}_{ss}$	$\bar{\chi}_{\theta\theta}$	$\bar{\delta}_{s}$	$\bar{\delta}_{\theta}$	$\bar{\gamma}_{sz}$	$\bar{\gamma}_{\theta z}$	α	β
$\bar{\varepsilon}_{ss}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_s^o	0
$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{\gamma}_{s}$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q_s^o
$\bar{\gamma}_{\theta}$				0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{\chi}_{ss}$					0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{\chi}_{\theta\theta}$						0	0	0	0	0	0	0
$\bar{\delta}_{s}$							0	0	0	0	0	0
$\bar{\delta}_{\theta}$			SYM					0	0	0	0	
$\bar{\gamma}_{sz}$									0	0	$-N_{ss}^o$	
$\bar{\gamma}_{\theta z}$										0	0	$-N_{\theta\theta}^o$
α											N_{ss}^o	
β												$N_{\theta\theta}^o$

$$N_{ij} = \sigma_{ij}(o)\, h$$

$$\mathcal{M}_{ij} = \sigma_{ij}(o)\, \frac{h^3}{12} = \frac{h^2}{12} N_{ij} \quad , \tag{5.41}$$

Ce qui entraîne $\mathcal{M}_{s\theta} = 0$, car $N_{s\theta} = 0$.

Quant à N_{zz}, l'analyse statique le suppose nul <u>a priori</u>.

4.4. Les considérations qui précèdent mènent à une énergie quadratique des tensions initiales de la forme

$$\frac{1}{2} \{ N_{ss}^o \alpha^2 + N_{\theta\theta}^o \beta^2 - 2 N_{ss}^o \alpha \bar{\gamma}_{sz} - 2 N_{\theta\theta}^o \beta \bar{\gamma}_{\theta z} + 2 Q_s^o (\alpha \bar{\varepsilon}_{ss} + \beta \bar{\gamma}_s) \} \tag{5.42}$$

correspondant à la matrice de stabilité du tableau IV.

Si l'on note les valeurs respectives de $\bar{\varepsilon}_{ss}$, $\bar{\gamma}_s$, $\bar{\gamma}_{sz}$, $\bar{\gamma}_{\theta z}$ tirées de (2.4), on obtient :

$$\frac{1}{2} \{ - N_{ss}^o \alpha \left[2(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}) + \alpha \right] - N_{\theta\theta}^o \beta \left[\beta + 2(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta}) \right]$$

$$+ 2 Q_s^o \left[\alpha(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s}) + \beta \frac{\partial v}{\partial s} \right] \} = \tag{5.43}$$

Dans le cas d'une approximation de KIRCHHOFF-LOVE, on aurait

$$\bar{\gamma}_{sz} = \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} = 0$$

$$\bar{\gamma}_{\theta z} = \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} = 0$$

$$Q_s^o = G_{sz}\, h\, \bar{\gamma}_{sz}^o = 0$$

L'expression (5.) deviendrait dans ce cas :

$$+ N^o_{ss} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}\right)^2 + N^o_{\theta\theta} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta}\right)^2 \quad , \qquad (5.44)$$

soit

$$\left(u\ ,\ v\ ,\ \frac{\partial w}{\partial s}\ ,\ \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \begin{bmatrix} \frac{N^o_{ss}}{R_s^2} & & -\frac{N^o_{ss}}{R_s} & \\ & \frac{N^o_{\theta\theta}}{R_\theta^2} & & -\frac{N^o_{\theta\theta}}{rR_\theta} \\ -\frac{N^o_{ss}}{R_s} & & N^o_{ss} & \\ & -\frac{N^o_{\theta\theta}}{rR_\theta} & & \frac{N^o_{\theta\theta}}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Pour R_s et R_θ très grands, on retrouverait l'expression familière des plaques de KIRCHHOFF :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\ \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \begin{bmatrix} N^o_{ss} & \\ & \frac{N^o_{\theta\theta}}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial s}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \begin{bmatrix} N^o_{ss} & \\ & N^o_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

5.6. CONCLUSION

L'analyse des vibrations de la coque doit se faire en deux stades :

1) étude thermoélastique statique, par la théorie linéaire de l'élasticité.
Cette étape fournit les tensions initiales;

2) étude vibratoire. Pour celle-ci, il y a lieu d'ajouter à la raideur classique un terme dit de stabilité :

$$W = \frac{1}{2}\, q'\, K\, q + \frac{1}{2}\, q'\, S\, q \quad .$$

Contrairement aux problèmes de stabilité, S est connue exactement, et non pas à un facteur inconnu près (charge critique).

Remarque - Non linéarité de l'énergie potentielle de pression

KOITER (6) fait remarquer que le travail virtuel d'une force de pression est non linéaire. En effet, dans la déformation, la surface est modifiée.
Pour une même portion de surface "matérielle", la surface "spatiale" peut augmenter ou diminuer, ce qui modifie la mise en charge. KOITER ne considère que le cas d'une pression constante. Dans le cas de l'interaction d'un fluide, la pression diffère d'un point à l'autre et sa valeur dépend du mouvement.
Supposant de petites oscillations, on peut raisonnablement négliger l'effet d'accroissement de surface, contrairement au cas de la stabilité. Cela revient à dire comme KALNINS (2) que la vibration se fait pratiquement sans extension.

6. TENSEUR D'INERTIE

Il s'agit d'exprimer l'énergie cinétique par unité de surface, en termes des déplacements généralisés u, v, w, α, β , sous la forme

$$\frac{1}{2} \dot{U}' \, J \, \dot{U} \quad , \tag{6.1}$$

où J est le tenseur d'inertie et U le vecteur

$$U' = (u \, , v \, , w \, , \alpha \, , \beta) \quad . \tag{6.2}$$

L'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \, (\dot{u}_s^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2)(1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta}) \, dz =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \, [(\dot{u} + \dot{\alpha} \, z)^2 + (\dot{v} + \dot{\beta} \, z)^2 + \dot{w}^2] \, (1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta}) \, dz \tag{6.3}$$

Il suffit donc de calculer

- $A_o = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \, (1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta}) \, dz = h + \frac{h^3}{12 \, R_s \, R_\theta}$

- $A_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \, (1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta}) \, dz = \frac{h^3}{12} (\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta})$

- $A_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 (1 + \frac{z}{R_s})(1 + \frac{z}{R_\theta}) \, dz = \frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80 \, R_s \, R_\theta}$ (6.4)

On obtient ainsi la matrice suivante :

$$J = \begin{bmatrix} \rho \, A_o & & & \rho \, A_1 & \\ & \rho \, A_o & & & \rho \, A_1 \\ & & \rho \, A_o & & \\ \rho \, A_1 & & & \rho \, A_2 & \\ & \rho \, A_1 & & & \rho \, A_2 \end{bmatrix}$$

Si l'on néglige $\frac{h^2}{R_s \, R_\theta}$ devant 1; si, de plus, on admet que $| \, h \, (\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}) \, |$ est très petit, on obtient une matrice découplée

$$J = \begin{bmatrix} \rho \, h & & & & \\ & \rho \, h & & & \\ & & \rho \, h & & \\ & & & \rho \, \frac{h^3}{12} & \\ & & & & \rho \, \frac{h^3}{12} \end{bmatrix}$$

Dans le cas du développement en série de Fourier, la matrice est simplement multipliée par π lors de l'intégration sur la circonférence.

7. Développement en série de Fourier du champ de déplacements

7.1. On considère des déformations périodiques en :

$$
\begin{aligned}
u(s,\theta) &= u_n(s)\ \cos(n\theta + \psi) \\
v(s,\theta) &= v_n(s)\ \sin(n\theta + \psi) \\
w(s,\theta) &= w_n(s)\ \cos(n\theta + \psi) \qquad (7.1) \\
\alpha(s,\theta) &= \alpha_n(s)\ \cos(n\theta + \psi) \\
\beta(s,\ ) &= \beta_n(s)\ \sin(n\theta + \psi)
\end{aligned}
$$

La phase initiale permet de décrire des phénomènes où seul apparaît v (torsion : dans ce cas, $n = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$).

Le choix ci-dessus donne des déformations dont tous les termes ont la même phase.

7.2. Dans le cas d'une coque conique, $\frac{1}{R_s} = 0$ et $\frac{1}{R_\theta} = \frac{\cos\phi}{r}$.

On peut remplacer $\frac{dr}{ds}$ par $\sin\phi$.

Les déformations, pour l'harmonique de rang n, sont :

$$\overline{\varepsilon}_{ss} = \frac{du_n}{ds}\ \cos(n\theta + \psi) = \overline{\varepsilon}_{ss}(n)\ \cos(n\theta + \psi)$$

$$\overline{\varepsilon}_{\theta\theta} = \left[\frac{n}{r} v_n + \frac{w_n \cos\phi + u_n \sin\phi}{r}\right] \cos(n\theta + \psi) = \overline{\varepsilon}_{\theta\theta}(n) \cos(n\theta + \psi)$$

$$\overline{X}_{ss} = \frac{d\alpha_n}{ds} \cos(n\theta + \psi) = \overline{X}_{ss}(n) \cos(n\theta + \psi)$$

$$\overline{X}_{\theta\theta} = \left[\ \frac{n}{r}\beta_n + \frac{\alpha_n}{r}\sin\phi\right] \cos(n\theta + \psi) = \overline{X}_{\theta\theta}(n)\ \cos(n\theta + \psi)$$

$$\overline{X}_{s\theta} = \left[\frac{d\beta_n}{ds} - \frac{n}{r}\alpha_n - \frac{\beta_n}{r}\sin\phi\right] \sin(n\theta + \psi) = \overline{X}_{s\theta}(n)\ \sin(n\theta + \psi)$$

$$\overline{\gamma}_{sz} = \left[\frac{d\overline{w}_n}{ds} + \overline{\alpha}_n\right] \cos(n\theta + \psi) = \overline{\gamma}_{sz}(n)\ \cos(n\theta + \psi)$$

$$\overline{\gamma}_{\theta z} = \left[-\frac{n}{r}\overline{w}_n - \frac{\overline{v}_n}{r}\cos\phi + \overline{\beta}_n\right] \sin(n\theta + \psi) = \overline{\gamma}_{\theta z}(n)\ \sin(n\theta + \psi)$$

$$\overline{\delta}_\theta = \left[-\frac{n}{r}\alpha_n - \frac{\beta}{r}\sin\phi\right] \sin(n\theta + \psi) = \overline{\delta}_\theta(n)\ \sin(n\theta + \psi)$$

$$\overline{\delta}_s = \frac{d\beta_n}{ds}\ \sin(n\theta + \psi) = \overline{\delta}_s(n)\ \sin(n\theta + \psi)$$

$$\overline{\gamma}_s = \frac{dv_n}{ds}\ \sin(n\theta + \psi) = \overline{\gamma}_s(n)\ \sin(n\theta + \psi)$$

$$\overline{\gamma}_\theta = \left[-\frac{n}{r}u_n - \frac{v_n}{r}\sin\phi\right] \sin(n\theta + \psi) = \overline{\gamma}_\theta(n)\ \sin(n\theta + \psi)$$

L'énergie de déformation sera alors intégrée sur la circonférence.

Dans ce calcul, on verra apparaître les intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta + \psi)\ d\theta \begin{cases} = 0 & \text{si } n = 0\ ,\ \psi = 0 \\ = 2\pi & \text{si } n = 0\ ,\ \psi = \frac{\pi}{2} \\ = \pi & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta + \psi)\ d\theta \begin{cases} = 2\pi & \text{si } n = 0\ ,\ \psi = 0 \\ = 0 & \text{si } n = 0\ ,\ \psi = \frac{\pi}{2} \\ = \pi & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\ (n\theta + \psi)\ \cos(n\theta + \psi)\ d\theta = 0$$

On obtient alors l'énergie par unité de longueur de la courbe génératrice, qui vaut l'énergie par unité de surface multipliée par π .

Il en est de même des termes de stabilité.

REFERENCES

1. B. FRAEIJS de VEUBEKE
   "Non linear theory of shells"
   Rapport LTAS, SA-21

2. A. KALNINS
   "Static, free vibrations and stability. Analysis of thin, elastic shells of revolution"
   Technical Report AFFDL-TR-68-144

3. E. REISSNER
   "On some problems in shell theory"
   Structural Mechanics, Pergamon Press, 1960, pp. 74-114

4. J.K. KNOWLES and E. REISSNER
   "A derivation of the equations of shell theory for general orthogonal coordinates"
   Journal of Mathematics and Physics, vol. XXXV, pp. 351-358, 1956

5. J.H. PERCY, T.H.H. PIAN, S. KLEIN and D.R. NAVARATNA
   "Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution"
   AIAA Journal, vol. 3, n° 11, pp. 2138-2145

6. W.T. KOITER
   "General equations of elastic stability for thin shells"
   Proceedings - Symposium on the theory of shells in honor of Lloyd Hamilton Donnell, University of Houston, Houston, Texas, 1967

7. P.M. NAGHDI
   "Foundations of elastic shell theory"
   Progress in Solid Mechanics, vol. IV, North Holland Publishing Company, Amsterdam

8. A.P. KABAILA and B. FRAEIJS de VEUBEKE
   "The analysis of equilibrium bifurcation problems by finite element methods"
   Rapport LTAS, SA-19