Analogies entre deux querelles relatives à l'enseignement des mathématiques en Belgique

par Jacques Bair

Mots clés : infinicole ou infinifuge ; mathématique moderne ; savoir savant et savoir à enseigner ; mathématiques pures ou appliquées ; enseignement utilitaire ou métapragmatique ; enseignement heuristique ou déductiviste ; esprit liégeois.

Résumé. Depuis la création du royaume de Belgique, l'enseignement de base des mathématiques a connu dans ce pays deux importantes querelles : la guerre entre infinicoles et infinifuges au début du 19^{e} siècle et la guerre des mathématiques modernes durant la seconde moitié du 20^{e} siècle.
Ces deux épisodes historiques présentent des analogies qui vont être analysées dans cet article.
Sont en présence deux clans avec des visions différentes sur la nécessité ou non de renouveler le savoir à enseigner, de modifier l'approche didactique, d'accorder de l'importance à l'aspect utilitaire de la discipline.
Au surplus, dans les deux cas, le camp des conservateurs et des adeptes d'un enseignement simple et axé sur les applications était emmené avec ardeur par un liégeois, professeur à l'Université de Liège ; on pourrait y voir une manifestation de l'« esprit liégeois ».

En Belgique, l'enseignement des mathématiques a toujours été présent tant dans l'enseignement élémentaire (en primaire et en secondaire) que dans la plupart des filières de l'enseignement supérieur (à l'Université ou en Hautes Ecoles). Dans le premier cas seulement, il doit suivre des programmes confectionnés par le pouvoir organisateur selon les niveaux atteints et les orientations choisies; par contre, dans le second cas, ce sont les Institutions qui fixent éventuellement les programmes d'études en laissant d'ailleurs une grande liberté académique à leurs enseignants quant au choix de la matière à enseigner.

Depuis la naissance du pays (en 1830), il y eut, dans l'enseignement obligatoire, de nombreux changements de programmes. Cette situation est tout à fait normale, car la société évolue sans cesse : extension de la durée des études, élargissement de l'accès à l'enseignement supérieur, importance accrue accordée à la didactique, évolution du savoir et de la technologie, en particulier dans les moyens de communication et de transmission des savoirs, nouvelles aspirations sociétales, changements dans les mentalités, transformation de l'économie et nouveaux besoins de formation, habitudes et modes dans les matières à enseigner, préférences de concepteurs de programmes, …

Souvent, les changements de programmes se réalisent en douceur, de façon assez graduelle et somme toute assez naturelle. Mais, à deux reprises, on enregistra dans le passé ce que l'on pourrait appeler une « guerre des maths » qui donna lieu à d'âpres débats, souvent passionnés, opposant deux 'clans' : d'une part, certains préconisaient l'introduction d'une mathématique nouvelle suivant d'assez près les travaux de recherche de mathématiciens quasi contemporains, tandis que, d'autre part, leurs adversaires semblaient rester fidèles à des mathématiques plus anciennes. Ces deux « guerres » furent ce que l'on pourrait aujourd'hui appeler :

- la « guerre entre infinicoles et infinifuges », en abrégé GII. Elle se déroula dans la première moitié du 19^{e} siècle. Elle opposa des infinicoles aux infinifuges ; les premiers restaient attachés aux idées des fondateurs de l’analyse (donc surtout de Newton et de Leibniz) ayant introduit le concept d’infiniment petit et prônaient l'utilisation d'infinitésimaux dans l'enseignement de l'analyse élémentaire ; leurs opposants au contraire rejetaient cette idée en privilégiant une approche non plus actuelle mais bien potentielle de l’infini (qui sera ultérieurement formalisée par la présentation weierstrassienne de l’analyse).

- la « guerre des maths modernes », notée en raccourci GMM. Elle divisait les professeurs de mathématiques en deux clans : ceux qui voulaient introduire dans l’enseignement obligatoire des mathématiques nouvelles basées sur la théorie des ensembles et sur des structures, et ceux qui rejetaient cette vision de l'enseignement de base des mathématiques.

Le déroulement de la querelle GII a été exposé notamment dans l'article [Bockstaele 1965] Les deux camps en présence étaient emmenés, d’une part, par J.-N. Noël, professeur à l'Université de Liège, à la tête des infinicoles, et d’autre part, par E. Lamarle, professeur à l'Université de Gand, le leader des infinifuges. Des biographies des deux principaux protagonistes ont été réalisées notamment dans [Bair – Mawhin 2019] pour le leader des infinicoles et dans [Mansion 1913] pour celui des infinifuges.
La GMM opposait d’une part une ‘troupe’ emmenée G. Papy, professeur à l'Université de Bruxelles, et, d’autre part, celle des opposants dont un des principaux leaders était H-G. Garnir, professeur à l'Université de Liège. Cet épisode de l'histoire est décrit dans divers travaux, en particulier dans [De Bock-Vanpaemel 2019], [Mawhin 2004], [Noël 2019a et 2019b]. Des biographies relatives aux leaders des deux camps peuvent être trouvées, par exemple avec les articles [Butzer – Mawhin 2002] pour H.-G. Garnir et [Kaufman – Martin – Ferguson 2012] pour G. Papy.

Nous ne reviendrons sur le déroulement de ces deux querelles ni sur les œuvres et les personnalités des principaux intervenants, mais nous voudrions mettre en évidence certains points communs qui semblent relier ces deux épisodes de l’histoire. Un de ceux qui a retenu initialement notre attention est que, dans chacune des deux situations, des liégeois ont joué un rôle primordial dans la lutte. Nous approfondissons la comparaison en analysant les points de vue épistémologique et didactique.

Réformateurs vs conservateurs

Souvent, on s’étonne de l’existence de recherches contemporaines en mathématiques : l’idée selon laquelle il n’y a plus rien de nouveau à trouver en mathématiques est prégnante. Certes, il est vrai que, en mathématiques et contrairement aux autres disciplines scientifiques, ce qui a été démontré ne sera jamais remis en doute. Par exemple, deux plus deux sera toujours égal à quatre en théorie des nombres et le théorème de Pythagore sera toujours d’application dans un triangle rectangle en géométrie euclidienne plane. Même si une théorie mathématique semble bien établie, elle peut générer des découvertes supplémentaires, car il est possible de trouver des démonstrations originales de résultats anciens (c'est le cas par exemple pour le théorème de Pythagore qui peut être démontré par des centaines de preuves différentes), de se placer dans des contextes nouveaux (pour continuer notre exemple emblématique, on peut travailler dans des espaces de dimension supérieure à celle du plan ou encore travailler dans des géométries non euclidiennes), d'inventer des concepts neufs (notamment des nombres nouveaux), … C'est ainsi que les mathématiques se sont développées fortement depuis l'Antiquité et s'enrichissent encore aujourd'hui de multiples résultats nouveaux. On peut même affirmer que les publications des mathématiciens n'ont jamais été aussi nombreuses que de nos jours.

Comment une telle croissance peut-elle être expliquée ? Une raison fondamentale réside précisément dans l'importance des résultats obtenus, dans la multiplicité des directions dans lesquelles les mathématiciens ont travaillé, dans l'abstraction qu'ils ont recherchée afin d'atteindre une grande généralité et ainsi être capables de résoudre des problèmes variés : il est clair que la diversité des concepts introduits et des pistes suivies peut générer de nouvelles questions auxquelles peuvent répondre des personnes de mieux en mieux formées pour autant qu'elles fassent preuve de suffisamment de compétences et de créativité. A cette cause première et générale de l'augmentation du savoir mathématique s'ajoutent de façon concomitante d'autres motifs qui sont davantage de nature sociologique, telles que pêle-mêle : la massification des études (notamment supérieures) et leur amélioration globale, l'affaiblissement d'une économie primaire ou secondaire au profit du tertiaire, les progrès technologiques facilitant l'information et la transmission du savoir, l'importance accordée à la recherche dans les universités, …

Ainsi, ce que l'on appelle en didactique le « savoir savant » (SS, en abrégé) en mathématiques est devenu colossal ; il s'est fortement spécialisé et aborde désormais des questions de plus en plus pointues. Aucun mathématicien contemporain n'est capable (faute de temps et de compétences) de prendre connaissance et de maîtriser tout ce SS. En conséquence, il n'est pas possible de nos jours de vouloir transmettre tout le SS à des étudiants. Il convient alors de choisir, dans chaque situation envisagée, ce que l'on nomme le « savoir à enseigner », SàE en abrégé ; celui-ci comprend, comme on peut aisément le deviner, la matière qui doit effectivement être enseignée aux élèves, ainsi que des règles plus ou moins précises sur la façon de l'enseigner ; il est consigné dans des programmes, des directives , … et est mis au point par des personnes impliquées dans l'enseignement comme des chercheurs en mathématiciens, des professeurs sur le terrain, des pédagogues et didacticiens professionnels, des inspecteurs, des utilisateurs, …, toutes ces personnes formant ce que l'on appelle parfois « la noosphère » dans le jargon de la didactique.
Le SàE ne peut donc être qu'une partie du SS, éventuellement transformée de manière adéquate (mais laissons de côté cet aspect du problème relatif à ce que les didacticiens appellent la « transposition », c'est-à-dire l'adaptation du savoir pour faire l'objet d'un enseignement efficace). Les deux querelles que nous étudions proposent, pour un public déterminé, un SàE résultant d'une certaine

façon de concevoir l'évolution des mathématiques. En effet, dans les deux épisodes historiques que nous envisageons, deux clans s'opposent

- d'une part, celui des « réformateurs ». Ils prônent l'idée selon laquelle l'enseignement des mathématiques doit suivre d'aussi près que possible les progrès récents du SS. Par exemple, G. Papy défend cette conception en écrivant « la recherche mathématique produit la science. L'enseignement le distribue. Inutile de produire, si l'on ne distribue pas. L'histoire a souvent montré que souvent des résultats importants ne sont pas transmis aux générations futures. […] La recherche mathématique n'a de portée sociale que via l'enseignement ; elle en est solidaire et tributaire à tous les niveaux. L'enseignement fait rayonner la recherche et la fournit en hommes. » [Papy 1968, p. 1] ;

- d'autre part, celui des « conservateurs ». Ils s'en tiennent à un enseignement de concepts classiques en commençant par ceux de base qui ont été construits progressivement par le passé. Très schématiquement, on peut imaginer que pour eux la construction des mathématiques peut être, métaphoriquement et de manière simpliste, comparée à celle d'un mur construit par un maçon. Celui-ci fixe tout d'abord sur le sol une série de briques collées (par du ciment) entre elles de manière à former ce que nous appellerons le « premier étage » du mur ; puis il pose sur celles-ci de nouvelles briques pour constituer un « deuxième étage » ; ensuite, il progresse de la même manière pour les étages ultérieurs, chacun de ceux-ci étant situé au-dessus d'un étage de moindre hauteur. Dans le cas des mathématiques, les briques sont les affirmations vraies, le ciment qui les lie entre elles étant le raisonnement logique composé essentiellement de syllogismes du type suivant « si les hypothèses sont vraies et si elles impliquent une thèse, alors cette dernière est aussi vraie » ; le « premier étage » comprend des axiomes admis comme vrais, tandis que les étages suivants sont formés, grâce à une succession de syllogismes et de définitions nouvelles, de théorèmes qui sont automatiquement vrais.

Dans la GII qui avait pour objet l'enseignement de base en analyse, les conservateurs défendaient l'usage des infiniment petits, suivant en cela les fondateurs de la discipline, Newton et Leibniz, ainsi que leurs successeurs immédiats. Ce choix était principalement dicté, en plus de la conformité avec les travaux fondateurs, par la simplicité de la compréhension des concepts et leur efficacité pour résoudre des problèmes rencontrés dans des domaines divers (géométrie, physique, économie, …).
Par contre, les réformateurs préconisaient l'élimination des infiniment petits et suivaient en cela une tendance de leur époque amorcée au début du 18^{e} siècle, notamment par Cauchy qui, dans certains de ses travaux, utilisait des variables tendant vers zéro. Le passage des infiniment petits à des limites était essentiellement dicté par un souci d'une plus grande rigueur. Ainsi, E. Lamarle, qui était le leader des infinifuges dans la GII en Belgique, écrivit un essai dans les Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège en visant l'objectif suivant : « constater, s'il en est besoin, l'insuffisance des méthodes généralement adoptées pour les développements de l'analyse transcendante ; présenter ensuite une conception

abstraite, exempte des inconvénients signalés dans l'emploi des méthodes ordinaires [utilisant des infiniment petits] et réunissant néanmoins leurs principaux avantages ». (p. 222)

Dans la GMM, où il s'agissait d'assurer la formation de base dans les enseignements primaire et secondaire, les réformateurs proposèrent une présentation de toutes les mathématiques basée sur le concept d'ensemble (et ses corolaires d'application et de fonction) et dès lors sur le rôle fondamental des structures ; ils adaptaient en cela des résultats récents fournis notamment par des mathématiciens du groupe N. Bourbaki qui cherchaient à reconstruire, en partant de (presque) rien, toutes les mathématiques dans le langage de la théorie des ensembles. Ils pensaient, contrairement aux conservateurs, que certaines constructions anciennes des mathématiques peuvent ne pas être enseignées. Ainsi, G. Papy argumentait que « le plus grand enseignement de l'histoire de la science est peut-être que celle-ci ne se complique pas toujours en progressant. Petit à petit, la recherche mathématique a mis en évidence de concepts unitaires et simplificateurs qui permettent de passer sous silence des résultats antérieurs fragmentaires et compliqués. […] Une des difficultés de l'enseignement traditionnel de la mathématique, et notamment des débuts de la géométrie métrique, provient du fait que l'on se place d'emblée dans une situation compliquée. L'enfant a de la peine à en discerner les structures logiques. » [Papy 1968, pp. 7, 9].
Les conservateurs, quant à eux, restaient fidèles à l'enseignement traditionnel, notamment en ce qui concerne la géométrie. Ils estimaient que les *Eléments* d'Euclide constituent toujours une base incontournable pour la formation de l'esprit des élèves, notamment avec les démonstrations auxquelles ils initient à un bon raisonnement scientifique. Mentionnons néanmoins que H.-G. Garnir n'était pas opposé à la théorie des ensembles ainsi qu'en témoigne son ouvrage-phare au niveau didactique, à savoir son cours d'analyse intitulé « fonctions de variables réelles » : le premier chapitre de cet ouvrage est entièrement consacré aux ensembles, avec une section sur « les relations entre les éléments et les sous-ensembles d'un ensemble donné ». L'auteur justifiait ce choix en écrivant en exergue du chapitre initial : « l'analyse trouve dans la théorie des ensembles le langage concis nécessaire à sa précision. Cette théorie fournit également des notations sténographiques qui sont actuellement d'un usage universel. Les considérations relatives à la dénombrabilité des ensembles interviennent dans la théorie de l'intégration » [Garnir 1963, p. 1]. Dans ses cours universitaires oraux dispensés à l'époque de la GMM, le professeur liégeois faisait passer l'idée que cette théorie permet d'unifier les mathématiques en considérant par exemple les ensembles de nombres en arithmétique, des polynômes en algèbre, des points en géométrie, … ; mais, il estimait non souhaitable de parler d'ensembles, de relations, de structures, … à des jeunes apprenants n'ayant pas suffisamment de vécu en mathématiques.

Avec le recul qui est le nôtre aujourd'hui, on pourrait s'interroger sur les résultats enregistrés à moyen et à long terme par les réformateurs et par les conservateurs.
Dans la GII, ce sont les infinifuges qui l'ont emporté en Belgique. Les méthodes de Cauchy et de Weierstrass ont été introduites dans l'enseignement de l'analyse par Eugène Catalan (1814-1894) à l'Université de Liège, Philippe Gilbert (1832-1892) à l'Université catholique de Louvain et Paul Mansion (1844-1919) à l'Université de Gand : sous l'impulsion de ce dernier, la méthode des limites a été préconisée, dans l'enseignement secondaire belge, tant

pour les mesures d'aires et de volume en géométrie, que pour les rudiments du 'calculus' (ou calcul différentiel et intégral). Il est toutefois à noter que, depuis la fin du siècle dernier avec les travaux de Robinson, les idées des conservateurs ont ressurgi, avec l'apparition d'un enseignement de l'analyse non standard qui remettait à l'honneur les infiniment petits, tout en ayant résolu les problèmes de rigueur mis en évidence par les réformateurs. Désormais, l'analyse peut être enseignée de façon inattaquable par deux approches différentes (cfr [Mawhin 1985] et [Bair-Mawhin-Pétry 2020]) : celle classique des réformateurs et celle non standard des « conservateurs réformés ».
Dans la GMM, les idées des réformateurs ont été introduites officiellement dans les programmes à partir de l'année 1968-1969. Selon N. Rouche « le virage des maths en 1968 a été nécessaire sans aucun doute. […] Mais on a introduit inutilement une mathématique trop formelle, trop symbolisée. […] Le manque à gagner fondamental se situait du côté de l'intuition et de la géométrie fort sacrifiée par la réforme » (cité dans [Mawhin 2004, pp. 19-20]). Comme il est signalé dans un rapport du Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, « cette réforme de la mathématique moderne a donné lieu à de nombreuses analyses et critiques dont il n'est pas possible de rendre compte en détail ici. Dans les pays comme la France, les Etats-Unis et la Belgique où elle a été appliquée vigoureusement, elle a conduit à des déboires reconnus même par certains de ses promoteurs principaux. Elle a donc été partout suivie d'autres réformes ». De fait, la GMM fut suivie d'une réforme en 1978, puis par la création de la Commission Danblon (voir [SBPM 1991], pp. 199-236) chargée d'analyser en profondeur la situation créée par les réformes successives et d'émettre des recommandations pour l'avenir, par la naissance du GEM (Groupe d'Enseignement Mathématique) initialement dirigé par N. Rouche. En résumé, la GMM a donné lieu à une réforme spectaculaire visant à moderniser l'enseignement des mathématiques, mais elle fut suivie par une contre-réforme qui en revenait d'assez près aux idées des conservateurs. Depuis lors, des améliorations ont certes été apportées aux programmes, mais elles sont relativement mineures; elles tiennent parfois compte de l'évolution du SS, comme avec l'introduction d'éléments de statistique dans le secondaire.

En définitive, les deux querelles analysées donnent finalement des verdicts contradictoires : on pourrait donner comme « vainqueurs », à moyen terme, les réformateurs dans la GII et les conservateurs dans la GMM. Il semble donc qu'en matière de l'enseignement des mathématiques, il n'existe aucune loi générale et immuable en ce qui concerne le SàE : la didactique est bien un art difficile qui doit s'adapter aux personnes concernées et aux circonstances rencontrées !

Abstrait vs concret

A leur origine, les mathématiques ont été créées par l'homme pour résoudre des problèmes de la vie courante : ainsi sont nés les nombres pour compter les objets et la géométrie pour mesurer la superficie de champs. Par la suite, les théories mathématiques se sont développées à partir de concepts abstraits obtenus en ne retenant que certaines caractéristiques essentielles liées aux objets utilisés ; mais, leurs applications ont sans cesse fait l'objet d'études spécifiques. De la sorte, on a commencé à distinguer les mathématiques développées pour

elles-mêmes, encore appelées ‘pures’, des mathématiques appliquées, que F. Bacon (1561-1626) notamment qualifient de ‘mixtes’ [Bacon 1605, p. 130].
Cette distinction fut assez tenace et donna même lieu à une certaine hiérarchisation des mathématiciens, les ‘purs’ se sentant assez souvent ‘supérieurs’ aux appliqués. Elle fut notamment présente dans les deux querelles analysées.

Dans la GII, les infinicoles attachent une importance primordiale aux applications. Pour preuve, J.-N. Noël estimait que « l’emploi explicite des grandeurs infinitésimales, dans les mathématiques élémentaires, a de plus le grand avantage de permettre d’appliquer plus tôt ces dernières à d’importantes recherches de physique, de chimie et de mécanique. […] On peut affirmer, avec entière certitude, que non-seulement la théorie infinitésimale est démontrée, mais qu’elle est à la base de l’enseignement le plus clair, le plus simple, le plus rigoureusement logique des sciences Physiques et Mathématiques, tant pour les théories que pour les applications ». ([Noël 1855a], pp. 127-128). Il est intéressant de remarquer que même certains adversaires des infinicoles estimaient que « l’analyse infinitésimale conservait une grande supériorité dans les applications » ([Pâque 1861], p. 145).
Par contre, la préoccupation majeure des infinifuges est de nature théorique. Ainsi, E. Lamarle a exposé son essai sur l’analyse mathématique avec cet objectif : « constater, s’il en est besoin, l’insuffisance des méthodes généralement adoptées pour les développements de l’analyse transcendentale ; présenter ensuite une conception abstraite, exempte des inconvénients signalés dans l’emploi des méthodes ordinaires et réunissant néanmoins leurs principaux avantages » ([Lamarle 1845-46], p. 221). Mentionnons tout de même que les infinifuges n’oublient pas les applications ; ainsi, Pâque, un disciple de Lamarle, a écrit un mémoire apologétique dans lequel il présente comme suit l’analyse de son maître : « d’une rigueur absolue dans tous ses principes, cette conception [celle de Lamarle] offre toujours dans les applications, une promptitude et une facilité au moins égale à celles du calcul infinitésimal » ([Pâque 1861], pp. 145-146).
Dans la GMM, les conservateurs s’opposent à la théorie nouvelle proposée par leurs opposants en mettant en évidence la côté abstrait de celle-ci et la difficulté de son utilisation dans les applications. Il faut savoir que H.-G. Garnir, un de leurs leaders, était un physicien de formation. Son groupe estimait que les MM ont « une présentation précocement axiomatique, dès lors relativement abstraite et très éloignée du calcul et des applications. Un tel enseignement exagérément forme le risque de créer chez les élèves des difficultés d’application purement gratuites ; il ne préparerait l’immense majorité des élèves ni à la vie culturelle ou professionnelle ni aux études universitaires » ([Noël 2019a], p. 67). De fait, malgré de multiples leçons dans des classes expérimentales pendant une dizaine d’années précédant la mise en œuvre de la réforme, il est vite apparu que la théorie nouvelle était fort abstraite, éloignée du vécu des élèves ; c’est d’ailleurs pour cela que la réforme fut abandonnée assez rapidement. Signalons toutefois, que les réformateurs prétendaient être favorables aux applications ; ainsi, G. Papy lui-même estimait que « la mathématique s’introduit dans tous les domaines et la société nous demande aujourd’hui, de l’enseigner non plus à une minorité d’élus lais à tous les adolescents, comme un outil, dont ils auront probablement besoin plus tard » [Papy 1986, p. 3]. Sa vision utilitaire n’était toutefois pas orientée directement vers la pratique, mais pouvait être qualifiée par le néologisme ‘métapragmatique’ ; en effet, il clarifiait son point de vue

en se référant à la position du français G. Choquet : « La mathématique d'aujourd'hui met en évidence des grandes structures algébriques, topologiques et des structures 'carrefours' (dixit Choquet) 'algébrico-topologiques'. […] Dans la pédagogie moderne, on évite de les faire apparaître comme des sortes de luxes a posteriori qui éclairent, sans être indispensables. Les structures sont introduites peu à peu, progressivement, comme éléments moteur de la construction de l'édifice. […] Si l'élève a fait l'effort de se procurer une machine-outil, il faut qu'il se persuade, par expérience, qu'en disposant d'elle, il est devenu plus puissant et peut résoudre des problèmes qu'il lui était impossible d'élucider auparavant » [Papy 1968, pp. 10-11].

Désormais, les mathématiciens contemporains semblent ne plus différentier vraiment mathématiques pures et appliquées, ainsi qu'en témoigne Albert Cohen affirmant : « je pense qu'il n'existe pas de frontière entre mathématiques pures et appliquées » (source : https://lejournal.cnrs.fr/articles/il-ny-a-pas-de-frontiere-entre-maths-pures-et-appliquees). C. C.Villani semble confirmer, dans [Cartier *et al* 2019], cette pensée lorsqu'il estime que « la vraie révolution [à propos de la GMM] correspond à la chute du mur qui séparait les mathématiques pures des mathématiques appliquées. »

Enseignement heuristique vs point de vue déductiviste

Des spécialistes en didactique ont mis en évidence l'existence de plusieurs façons d'enseigner les mathématiques. Très schématiquement, on peut en distinguer deux fondamentales :

a) le point de vue <u>horizontal</u>, encore appelé par certains <u>heuristique</u>, qui « *s'occupe du contexte, des sources familières des mathématiques, qui pousse aux observations, aux manipulations ; un enseignement heuristique s'efforce de rapprocher la construction des concepts des chantiers de preuves où ils sont nécessaires ou au moins très utiles ; un tel enseignement tend à répondre par avance à la question si fréquente : à quoi ça sert ?* ([Crem 1985, pp. 32 – 33, 37]) ; *il consiste surtout à faire travailler les élèves dans des contextes du monde réel, physique ou social* » ([Rouche, Plot 109, p. 2]).
b) le point de vue <u>vertical</u>, encore qualifié de <u>déductiviste</u>, qui est « *celui de l'architecture déductive des mathématiques, des enchaînements d'axiomes, définitions, lemmes, théorèmes et corollaires, celui qui privilégie le sens interne aux mathématiques ; un enseignement déductiviste ne fait la place qu'à la genèse des théories, aux contextes problématiques où elles exhibent leur fonctionnement et leur sens, et à l'activité mathématique autonome des élèves ;* ([Crem 1985, pp. 33 et 5]), *il ne se soucie pas des applications, des multiples liens que les mathématiques entretiennent avec le monde réel, physique ou social* » ([Rouche, Plot 109, p. 2]).

Les approches possibles pour présenter des mathématiques sont nombreuses ; par exemple, on peut distinguer quatre grands types d'enseignement selon la présence ou l'absence de chacune des composantes horizontale et verticale (cfr [Crem 1985, pp. 32 – 33]) :

	Composante horizontale	Composante verticale
Enseignement mécaniste	NON	NON
Enseignement empiriste	OUI	NON
Enseignement structuraliste	NON	OUI

Enseignement réaliste	OUI	OUI

Bien entendu, les types d'enseignement peuvent faire intervenir ces deux points de vue horizontal ou vertical avec une intensité variable.

Très schématiquement, on peut affirmer que, dans les deux querelles qui sont étudiées dans cette note, l'approche privilégiée par les conservateurs (à savoir donc les infinicoles dans la GII et les opposants à la théorie des ensembles dans la GMM) est plus heuristique que déductiviste, alors que le contraire est constaté pour les réformateurs.

Esprit liégeois

En tant que liégeois de cœur, nous allons nous intéresser aux personnes qui peuvent être cataloguées comme ayant fait partie de la Cité Ardente (au moins pendant une période de leur vie) et qui ont joué un rôle de premier plan dans les deux querelles considérées. Remarquons-le d'emblée, il y eut des liégeois dans les deux camps de chacune des deux batailles.

Dans la GII, le leader des infinifuges, à savoir le français E. Lamarle qui était professeur à l'Université de Gand, était épaulé par son disciple A.-J.-N. Pâque qui avait étudié à l'Université de Gand mais qui enseigna par la suite à l'Athénée de Liège ; à ce titre, il fut membre de la Société des Sciences de Liège et publia dans les Mémoires de cette Société savante un travail au sein duquel il expliquait la méthode de son maître en prétendant « prouver l'imperfection logique de l'analyse infinitésimale » [Pâque 1861]. Ce document donna lieu à une réplique immédiate du leader des infinicoles J.-N. Noël ; ce dernier estimait qu'« une réfutation directe devient ici nécessaire » ; c'est pourquoi, celui-ci publia également dans la même revue des *Notes sur l'Analyse infinitésimale* » [Noël 1861b] où il critiquait ouvertement les idées de « Mr P. ».

Dans la GMM, les adeptes des MM avaient été rassemblés, par leur leader G. Papy, au sein du CBPM (Centre Belge de la Pédagogie de la Mathématique) dont le but était « l'étude, l'amélioration et la réforme de l'enseignement de la mathématique, et, en particulier, la promotion, le développement et la diffusion de l'enseignement de la mathématique moderne » (cité dans [Mawhin 2004]). Deux mathématiciens de l'Université de Liège rejoignirent le CBPM dès ses débuts. D'une part, Octave Rozet (1907-1983) : il enseignait principalement les géométries analytique et différentielle, mais il ne sembla pas jouer un rôle majeur dans la GMM, probablement parce qu'il avait des préoccupations publiques en dehors de sa charge académique. D'autre part, Henri Breny (1923-1991). Ce professeur, qui a véritablement lancé la statistique et les probabilités à l'Université de Liège [Bair 2019], a été « entraîné dans le sillage de Georges Papy sans renoncer le moins du monde à son indépendance d'esprit ; il a consacré beaucoup d'efforts à préciser la manière dont les probabilités et la statistique pouvaient s'insérer dans l'enseignement secondaire, et occasionnellement à donner son avis sur d'autres thèmes pédagogiques, notamment sur la mesure des angles » [Jongmans –Seneta 1992, p. 48]. Mais ces deux mathématiciens de l'Université de Liège semblaient bien isolés au sein de leur Institut ; leurs collègues, emmenés par l'analyste H.-G. Garnir et ses collaborateurs, dont J. Gobert, M. Dewilde, J. Schmets et J. Etienne, semblaient tous opposés aux MM de manière plus ou moins virulente. Ainsi en témoigne un article rédigé par A.

Pirard (1910-1995), qui fut Doyen de la Faculté des Sciences (de 1974 à 1978) ; en collaboration avec son collègue P. Godfroid (1903-2000) de l'Ecole Royale Militaire, il publia, en 1980 dans un grand quotidien belge (à savoir « La Libre Belgique »), une critique violente de la réforme résumée par le titre évocateur « Les désastres de la mathématique moderne ». Les autres mathématiciens comme F. Jongmans, L. Nollet, A. Lavis, C. Heuchenne, …, semblaient plutôt d'accord avec les positions prises par leurs collègues analystes, mais intervenaient assez peu dans le débat public. A titre d'exemple, voici une réaction humoristique donnée par Jongmans ; elle paraît assez représentative de la position de la majorité des mathématiciens liégeois ; dans l'avant-propos de son cours *Notions de Mathématique à l'usage des sciences humaines*, il écrivait : « l'usage que nous faisons de la mathématique dite ''moderne'' pourra sembler chétif par comparaison avec certains livres français ou même avec les programmes actuels de l'enseignement secondaire belge. Sans vouloir rallumer une guerre dont la principale différence avec celle de Troie est un enjeu nettement moins séduisant qu'Hélène, nous avons quelque sujet d'alarme devant la démarche incertaine de jeunes esprits trop tôt enivrés par l'élixir d'abstraction » [Jongmans-Varlet 1975]. Un autre opposant acharné à l'introduction des MM dans l'enseignement de base fut le hennuyer Léon Derwidué (1914-1971). Il fit ses études universitaires à l'Université de Liège ; il y devint licencié en sciences mathématiques (1934) et docteur en sciences (1945) ; il y enseigna de 1941 à 1953, avant d'être nommé professeur aux Facultés Polytechniques de Mons. Il fut initialement un spécialiste en géométrie algébrique, puis s'intéressa aux équations différentielles et à l'analyse numérique [Mawhin 2004].

Attardons-nous sur les deux liégeois qui furent, selon nous, les plus influents dans les deux querelles sur l'enseignement des mathématiques, à savoir J.-N. Noël et H.-G. Garnir. Tous deux présentent manifestement des similitudes.
En effet, ils ont été à la tête des conservateurs qui s'opposaient à l'introduction de mathématiques nouvelles pour l'époque, en rejetant des mathématiques à leurs yeux trop abstraites et en insistant sur l'application des théories enseignées pour traiter efficacement des problèmes concrets (spécialement en physique).
Ils étaient tous deux d'extraordinaires pédagogues charismatiques, reconnus par leurs pairs et par les étudiants. J.-N. Noël a impacté durablement l'enseignement secondaire luxembourgeois et c'est d'ailleurs grâce à la notoriété acquise au Luxembourg qu'il fut nommé professeur à l'Université de Liège à un âge relativement avancé ; de son côté, H.-G. Garnir était probablement le professeur qui avait le plus d'influence sur les étudiants commençant des études universitaires en mathématiques à l'Université de Liège.
Tous deux prônaient un enseignement simple, précis, clair et complet ; ils excellaient dans la rédaction d'ouvrage à l'intention de leurs étudiants. Ainsi, Garnir préfaçait son cours d'analyse en ces termes révélateurs : « Sa rédaction résulte d'impératifs pédagogiques. Il est en effet peu indiqué d'enseigner l'analyse d'une manière strictement déductive et rigoureuse, pendant les deux années dévolues aux candidatures. Un tel enseignement serait rebutant par son caractère abstrait et artificiel. Le mieux semble être d'esquissé d'abord les faits fondamentaux en mettant l'accent sur les grandes techniques de calcul et sans trop insister sur les concepts raffinés ou les démonstrations difficiles, puis de revenir, en seconde étude, sur les parties laissées en suspens. Cette manière de procéder ne se conçoit que si l'étudiant dispose

d’un texte complet qui lui permette de faire le point à tout instant, de compléter ses connaissances et plus tard, d’en réaliser la synthèse » [Garnir 1963, p. III].
En plus de leur conception pédagogique commune, les deux mathématiciens présentaient apparemment des traits de personnalité similaires : une soif de liberté et une grande indépendance d’esprit, un certain sens de la révolte et quelquefois de l’insolence, une tendance à défendre avec persuasion les idées personnelles et à ne pas se laisser influencer par une idéologie étrangère, peut-être aussi un certain esprit frondeur. En d’autres termes, on pourrait penser que ces deux mathématiciens incarnaient d’une certaine façon le fameux ’’esprit liégeois’’[1]. Celui-ci est dépeint dans ces extraits trouvés sur des pages appartenant à un site de l’Université de Liège où est expliquée l’histoire de la ville : « Aujourd'hui, avec ses 200 000 habitants, Liège est la plus grande agglomération wallonne. (…) Huit siècles d'histoire au sein d'une Principauté indépendante de l'Empire germanique ont contribué à forger "l'esprit liégeois" : fier et tenace, volontiers railleur et frondeur, chaleureux et accueillant. (…) Le mot liberté a, pour ses habitants, toujours résonné avec une sonorité particulière. C’est cet attachement à la liberté que symbolise encore le Perron[2]. (…) C'est en son nom qu'ils ont de tout temps revendiqué, contesté, résisté. (…) Une marionnette, célèbre dans la "Cité ardente", résume ces traits de caractère, c'est Tchantchès dont la verve caustique en a égratigné plus d'un avec sa langue qu'il ne sait pas tenir en poche, ce qui lui a valu à maintes reprises de se fourvoyer dans des situations inextricables. Tchantchès [est] à l'image des Liégeois...leur tête est de bois mais leur langue ne l'est pas. Au point parfois de désunir leurs efforts... Mais c'est aussi cet entêtement qui leur a permis d'obtenir très tôt du prince-évêque des chartes garantissant des droits importants pour les personnes et pour les corporations de métiers » (source : http://www2.ulg.ac.be/liege/pages/explique_histoire.html).

Bibliographie

Bacon F. (1605). *Du progrès et de la promotion des savoirs*. Editions Galimard (1991), 375 pages.

Bair J. (2018). *Deux siècles de statistique à l’Université de Liège*. Atelier des Presses de l’Université de Liège, 108 pages.

Bair J. – Mawhin J. (2019). Le mathématicien Jean-Nicolas Noël (1783-1867). Un didacticien infinicole du XIXe siècle. *Revue des Questions scientifiques*, 190(1-2), 27-59.

Bair J. – Mawhin J. – Pétry A. (2020). Eclairage non standard pour l’enseignement de l’analyse. A paraître dans *Festschrift en l'honneur de Philippe Nabonnand*, en voie de publication.

[1] Alors que H.-G. Garnir est un ‘pur liégeois’ né à Jemeppe-sur-Meuse, J.-N. Noël est un français d’origine qui a vécu en France et au Luxembourg avant de devenir liégeois d’adoption et de coeur ; il a vécu toute sa fin de vie dans la région liégeoise ; il y a joué un rôle important puisqu’il fut Recteur de l’Université en 1842-1843 et fut un des fondateurs de la Société des Sciences de Liège qu’il a présidée à trois reprises (en 1844, 1845 et 1848).
[2] Monument emblématique de la ville, situé sur la place du marché ; il symbolise l'attachement des Liégeois à leurs libertés.

Bockstaele P. (1965). Negentiende-eeuwse discussies in België over de fundering van de analyse. *Scientiarum Historia : Tijdschrift voor de Geschiedenis van de Wettenschappen*, 7(1), 185-201.

Butzer P. – Mawhin J. (2002). Henri-Georges Garnir, *Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 41-53.

Cartier P. – Dhombres J. – Heinzmann G. – Villani C. (2019). *Conversation sur les mathématiques*. Flammarion, 336 pages.

Crem (1985). *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai sur l'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement mathématique*. Rapport de recherches. Nivelles, 327 pages.

De Bock D. – Vanpaemel G. (2019). *Rods, Sets and Arrows. The Rise and Fall of Modern Mathematics in Belgium*, Springer Nature Switzerland, 293 pages.

Garnir H.-G. (1963). *Fonctions de variables réelles*, tome 1, Librairie universitaire & Gauthier-Villars, Louvain & Paris, 518 pages.

Jongmans F. – Seneta E. (1992). In Memoriam Henri Breny (1923-1991). *Mathématique et Pédagogie*, 89 (1-1), 23-43.

Jongmans F. – Varlet J. (1975). Notions de Mathématique à l'usage des sciences humaines, tome I, Université de Liège, 179 pages.

Kaufman T. - Martin E. - Ferguson I. (2012) , Georges Papy: A Mathematics Educator for the Ages, *Institute for Mathematics and Computer Science* (IMACS); consultable à l'adresse électronique https://www.eimacs.com/blog/2012/01/georges-papy-mathematics-educator-gifted-math-curriculum/.

Lamarle E. (1845-46). Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante. *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, série 1, vol. 2, 221-348.

Mansion P. (1913). A.H.E. Lamarle, *Liber Memorialis. Notices biographiques*, vol. II, Gand, 1913 p. 87-91, https://lib.ugent.be/fulltxt/MEM10/000/000/161/MEM10-000000161_1913.pdf.

Mawhin J. (1985). La méthode infinitésimale en analyse. Dans *Mathématiques à venir*. Supplément au *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 115, 63-65.

Mawhin J. (2004). Cinquante ans de mathématiques en Belgique : un survol, *Mathématique et Pédagogie*, 145, 3-22.

Noël G. (2019a). Regards sur les Mathématiques Modernes, *Losanges*, 45, 66-67.

Noël G. (2019b). Regards sur un conflit au sein de la SBPM, *Losanges*, 46, 69-70.

Noël J.-N. (1861). Notes sur l'analyse infinitésimale. *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, série 1, vol 16, 411-426.

Noël J.-N. (1855). Théorie infinitésimale appliquée. *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, série 1, vol 10, 25-136.

Papy G. (1968). *Arlon 10. Place du Calcul dans un enseignement moderne de la mathématique,* compte-rendu des dixièmes journées d'Arlon, 140 pages.

Paque A.-J.-N. (1861). Examen de diverses méthodes employées pour l'établissement et le développement des calculs transcendants. *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, série 1, vol. 16, 145-196.

Rouche N. (2004). Huit points de vue pour repenser son enseignement en mathématiques. *Plot*, nouvelle série, n° 6, 2-5.

SBPMef (1991). *Enseigner la mathématique ?* Livre blanc sur l'enseignement des mathématiques en Communauté française de Belgique, Mons, 280 pages.

Treffers A. (1986). *Three dimensions : a model of theory and goal description in mathematics instructions.* The *Wiskobas project*, Kluwer, Dordrecht, 347 pages.