



**Aerospace Structures**  
rue Ernest Solvay, 21 - B-4000 Liège (BELGIUM)

**UNIVERSITY  
OF  
LIEGE**

**Report OF-43**

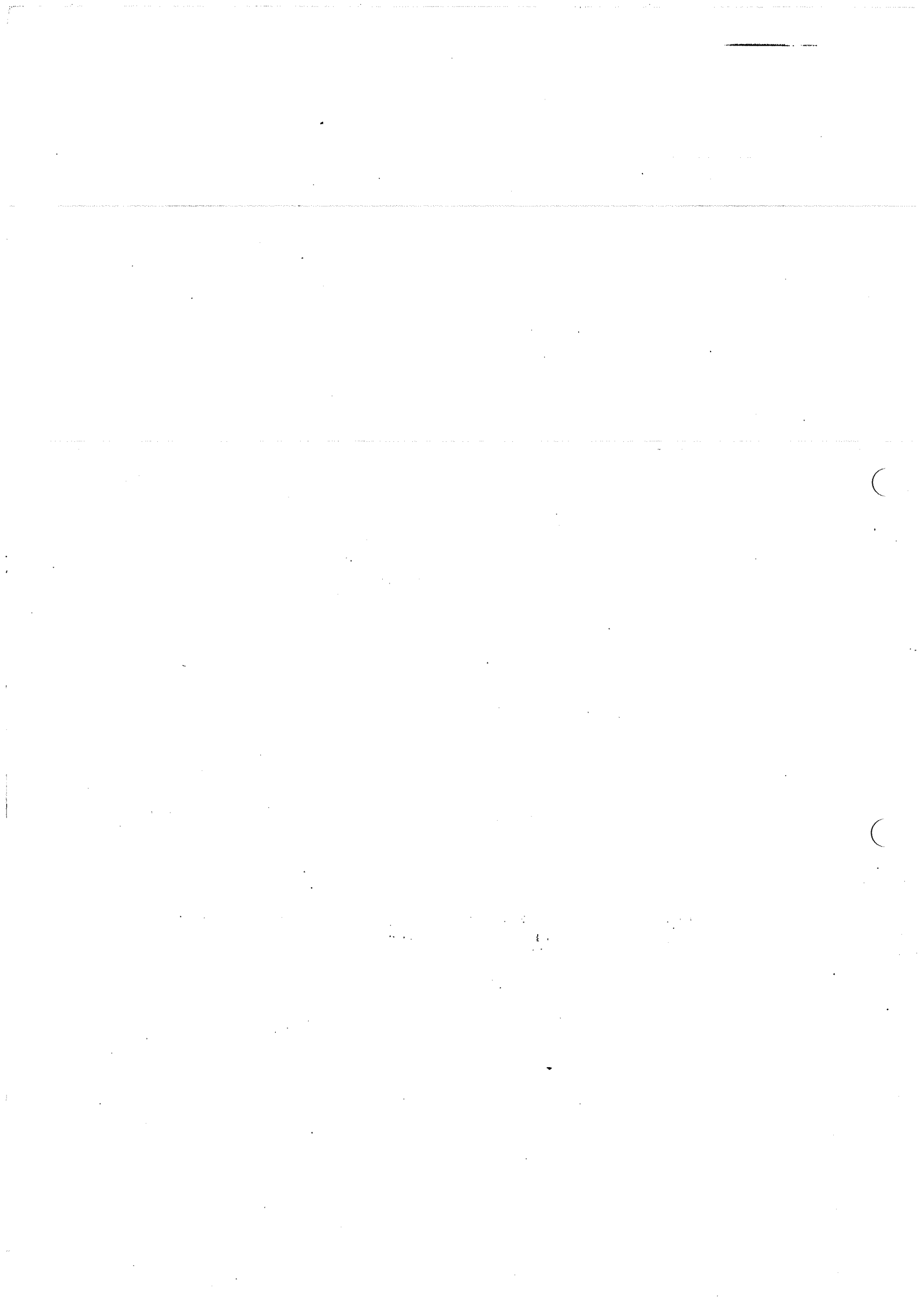
# INTRODUCTION A L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

par

Pierre DUYSINX

LTAS, Structures Aéronautiques  
Institut de Mécanique C3  
Université de Liège  
21 rue Solvay  
B-4000 LIEGE  
Belgique  
e-mail: P.Duysinx@ulg.ac.be

Exposé donné lors des Journées Thématiques Industrie-Recherche  
"CONCEPTION OPTIMALE DE FORME ET DE TOPOLOGIE"  
au Pôle Universitaire Leonard de Vinci  
Paris La Défense, les 18-19-20 juin 1996



## 1. INTRODUCTION

### 1.1 Définition et buts de l'optimisation topologique des structures

On peut scinder les techniques d'optimisation structurale selon la nature des données que l'on modifie. Historiquement, chaque type de données a été abordée par l'optimisation selon un ordre croissant de difficulté et de généralité (voir figure 1).

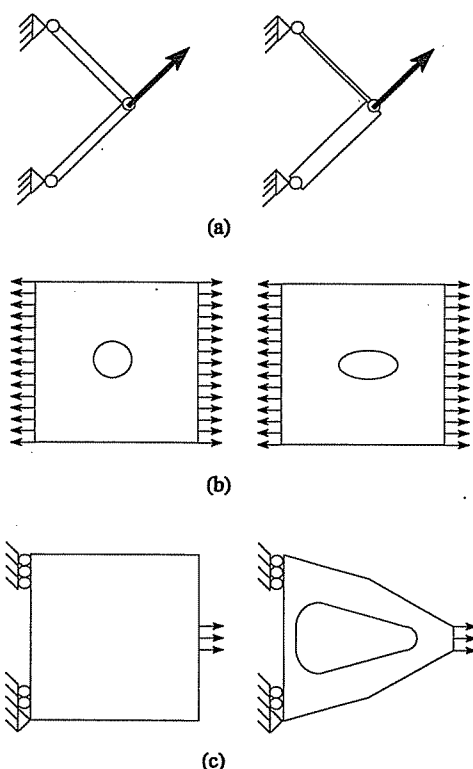


Figure 2 : Les 3 classes de problèmes d'optimisation des structures. (a) Dimensionnement (b) Forme (c) Topologie

Le *dimensionnement automatique* des structures (figure 1-a) ne permet de modifier que la section droite ou l'épaisseur transversale des composants d'une structure dont la forme et la topologie sont fixées. Aucune modification du modèle géométrique n'est possible.

L'*optimisation de forme* (figure 1.b) admet des changements de forme compatibles avec une topologie fixée au préalable. L'optimisation de forme classique modifie la représentation paramétrique des frontières du domaine. En faisant bouger les frontières des domaines, on peut rechercher une meilleure solution parmi l'ensemble de toutes les structures obtenues par transformation homéomorphe de la structure originale. Dans ce cas, il est clair que l'on peut admettre un changement des dimensions transversales aussi bien qu'une modification de la configuration de la structure, mais il n'est certainement pas permis d'altérer la connectivité ou la nature des membres structuraux.

Enfin, l'*optimisation topologique* (figure 1-c) permet de modifier plus fondamentalement la nature de la structure. Cette fois, la géométrie de la pièce est envisagée sans aucun a priori sur la connectivité des domaines ou des membres structuraux présents dans la solution. Optimiser la topologie conduit

naturellement à déterminer d'une certaine manière la forme ou les dimensions transversales optimales de la structure, de sorte que certains auteurs lui attribuent aussi le nom d'*optimisation de forme généralisée*.

De façon générique, le terme de topologie dérive du mot anglais "*topology*" où il désigne la *géométrie de position* ou *de situation*, encore appelée "*analysis situs*" par Poincaré. En mathématiques, ce mot désigne "*la partie de la géométrie qui étudie les propriétés qualitatives et les positions relatives des êtres géométriques, indépendamment de leur forme et de leur grandeur*". Pour le mécanicien, la topologie d'une structure recouvre l'ordonnement de ses membres et de ses joints structuraux ou encore la connectivité du domaine occupé par la matière et donc, par corollaire, le nombre et la position des perforations du domaine. Parfois, il est d'usage d'appeler topologie d'autres données d'arrangement relatif comme la séquence d'empilement de plis dans un laminé.

La topologie d'une structure étant une des premières décisions du processus de conception, on dispose, à ce moment, de peu d'informations; on ne connaît souvent que certaines sollicitations prédominantes d'un côté et les fixations possibles de l'autre. Dès lors, dans de nombreuses applications, l'**optimisation topologique** a pour but de déterminer la nature et la connectivité des éléments constitutifs d'une structure dans un problème où seuls les conditions aux limites et le domaine spatial où il est possible de placer la structure, sont spécifiés.

La topologie nécessite une approche différente selon que l'on ait formulé ou non des hypothèses complémentaires sur la nature de la solution. Le problème de topologie se pose en des termes différents selon que l'on présuppose une modélisation en membres structuraux discrets (généralement unidimensionnels : poutres, barres) ou bien continus (structures bidimensionnelles et tridimensionnelles : volumes, coques, plaques, membranes). Si la structure a été préalablement discrétisée avec des poutres ou des barres, la notion de topologie regroupe l'ensemble des données 2 concernant "l'ordonnement" et la connectivité de ses membres ou de ses joints structuraux. L'optimisation consiste alors à extraire d'un ensemble prédéterminé de membres structuraux potentiels reliant un réseau de joints structuraux et couvrant le domaine de conception, appelé *univers structural*, un sous-ensemble optimal de composants destinés à former la structure recherchée. La figure 3 présente le problème d'une structure en porte-à-faux, souvent connu sous le nom de problème de Michell. Le domaine rectangulaire est chargé dans son coin inférieur droit tandis que tous les noeuds du côté gauche sont fixés. La figure 4 présente l'univers structural et le sous-ensemble de barres formant le treillis optimal obtenu par Beckers et Fleury (1994).

L'optimisation topologique des milieux continus que nous considérons ici ne fait aucune hypothèse préalable sur la nature des composants structuraux de la solution. Le domaine disponible est un milieu continu et on désire en extraire un sous-domaine occupé par la structure. Dans une procédure de résolution numérique, le domaine de conception est "discrétisé" en éléments finis, mais il n'est pas naturellement discret comme l'univers structural. Au départ, on n'introduit donc aucune restriction sur la nature de la solution. De même, a priori, on ne choisit pas le type d'éléments structuraux de la solution (barres ou poutres). Bien au contraire, la forme, le type ainsi que les dimensions transversales des composants structuraux présents dans la structure optimale sont suggérés par le résultat du processus sans spécifier en aucune manière une représentation paramétrique de la forme ou des dimensions de la structure. L'approche "milieu continu", permet de varier la connectivité du domaine, de séparer ou de réunir des domaines structuraux, de générer ou de réduire des domaines constitutifs en vue d'en dégager la silhouette idéale. Comme nous le verrons, le problème continu est généralement traité sous la forme d'une répartition optimale de la matière disponible. Pour déterminer numériquement la distribution de matière, on recouvre le domaine disponible avec un maillage. Le sous-domaine réellement occupé par le matériau s'obtient en optimisant la densité locale au sein de chaque élément. La figure 5 montre la discrétisation en éléments finis et la distribution de matière



optimale obtenue pour un problème équivalent au treillis de Michell (figure 4). Le noir représente le solide et le blanc, le vide. Le volume de matière admissible vaut, cette fois, 50% de celui du domaine de conception. Comme on le voit, les solutions de type treillis ou membrane peuvent s'interpréter de façon identique.

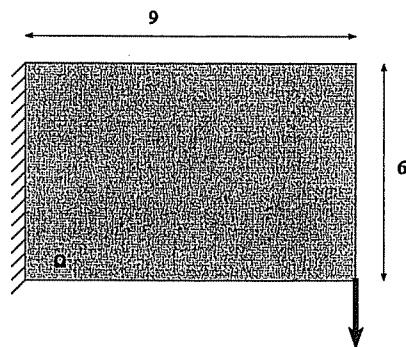


Figure 3: Définition du problème de Michell

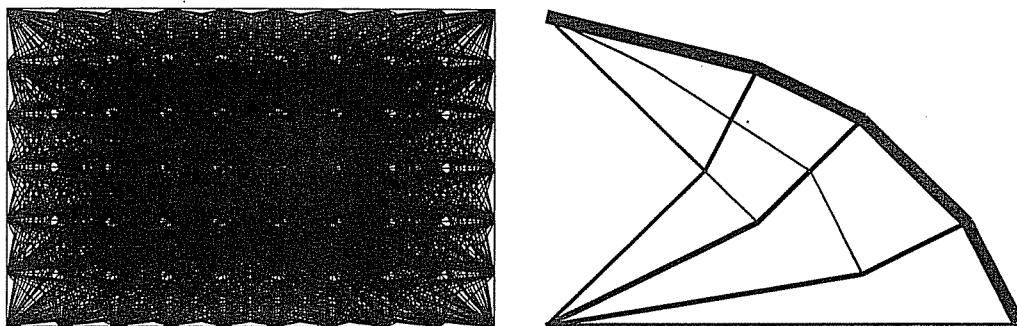


Figure 4 : Optimisation topologique de treillis de barres

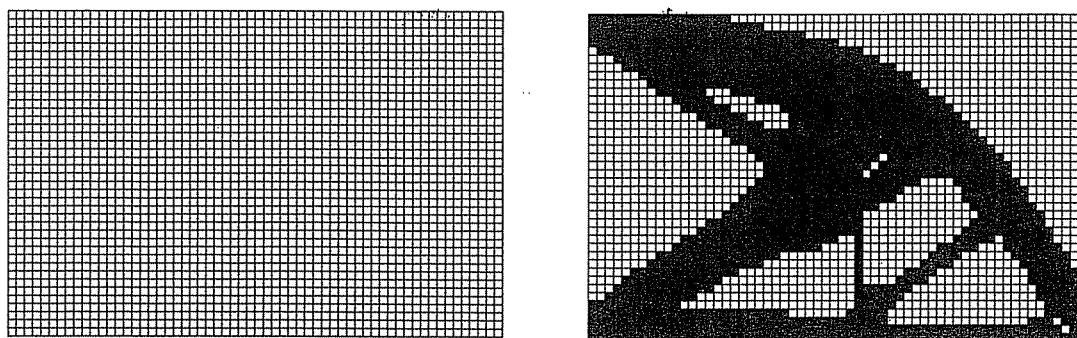


Figure 5 : Optimisation de la topologie par l'approche "milieu continu"

La topologie abordée sous le biais d'une approche des milieux continus tient compte de la concentration de contraintes entre les membres structuraux, ce qui est totalement ignoré par la modélisation en treillis. Ceci conduit à une coalescence des fins réseaux de barres. On peut cependant démontrer (Bendsøe et Haber, 1993) que l'approche treillis est un cas limite de l'approche des milieux continus lorsque la fraction de matière à redistribuer tend vers zéro.

## 1.2 Position du problème

Avec les techniques d'optimisation de forme et de dimensionnement, on est contraint de rester dans une classe de solutions fixées par le choix de la topologie initiale. En effet, par simple transformation homéomorphe du domaine, il n'est pas possible de sortir de la classe de solutions fixées au départ. Pour s'affranchir du choix préalable d'une topologie initiale, Bendsøe et Kikuchi (1988) ont proposé de transformer le problème de conception en un problème de distribution de matière.

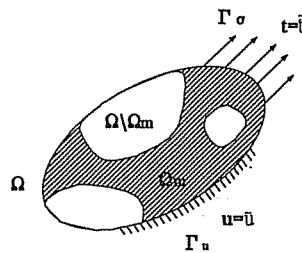


Figure 6 : Définition du problème de topologie

Hélas, lorsqu'on l'envisage sous forme discrète (présence ou non de matériau), le problème de répartition optimale de matériau n'est pas un problème bien posé. Les solutions numériques calculées dépendent des maillages utilisés. Comme on peut le constater sur l'exemple des figures 6 et 7. Dans la première distribution de matière, on distingue une structure en demi-cercle qui s'appuie sur les fondations. Quatre rayons la relient à la charge. La seconde distribution n'est pas la première carte de densité dont la résolution aurait été améliorée par le raffinement du maillage. On voit toujours la structure en demi-cercle, mais on compte sept rayons. Les topologies des deux solutions sont donc différentes. Si on raffinait progressivement le maillage, on verrait apparaître un nombre de plus en plus grand de rayons et on atteindrait la solution de Michell (1904) composée d'un nombre infini de rayons.

Le deuxième fait intéressant est l'apparition spontanée de zones où le vide et le solide se mêlent à la manière d'un matériau composite. La solution tend à recréer au niveau du maillage macroscopique une sorte de microstructure. Ceci peut être compris physiquement. Si on est prêt à introduire un nombre de plus en plus grand de trous en augmentant le raffinement du maillage, on doit être prêt à considérer aussi la limite des distributions de matériaux, c'est-à-dire des distributions de matériau composite orthotrope poreux. Ce type de solution est, cependant, naturel et les exemples ne manquent pas pour illustrer ce concept d'une manière intuitive. Prenons l'exemple d'un domaine rectangulaire soumis à des forces de traction appliquées uniformément sur deux de ses côtés. On recherche la forme optimale de la structure permettant de relier les deux faces opposées sollicitées. Le volume de matière est borné à 50 % du volume du domaine de conception. Le solide de base est un matériau isotrope.

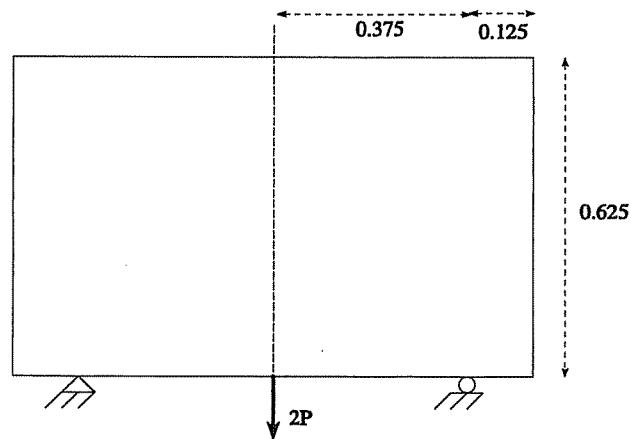


Figure 7 : Problème de la "roue"

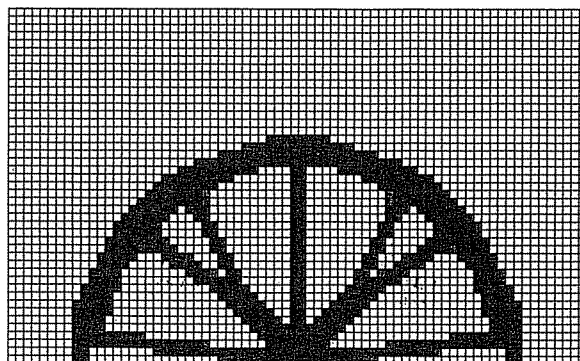
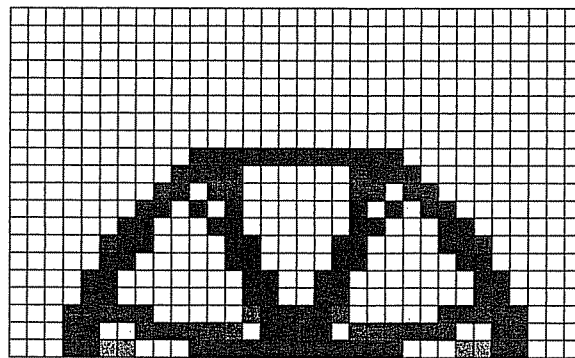


Figure 8 : Non-convergence de la solution numérique vis-à-vis du choix du maillage

Si on accepte de rechercher la solution parmi l'ensemble des structures possédant un nombre infini de perforations, la configuration optimale est celle où le domaine entier est recouvert par une infinité de fibres alignées perpendiculairement aux faces chargées, avec une proportion de vide et de solide donnée par la borne sur le volume de matière admissible. La structure optimale n'appartient plus aux structures conventionnelles formées de matériaux isotropes. En effet, bien qu'au niveau microscopique,

la structure soit constituée de deux matériaux isotropes distincts, au niveau macroscopique, l'observateur voit un matériau composite orthotrope de densité intermédiaire constitué de fibres unidirectionnelles. D'un point de vue géométrique, le périmètre des solutions augmente avec le nombre de trous, pour tendre vers l'infini lorsque le nombre de trous devient lui-même arbitrairement grand.

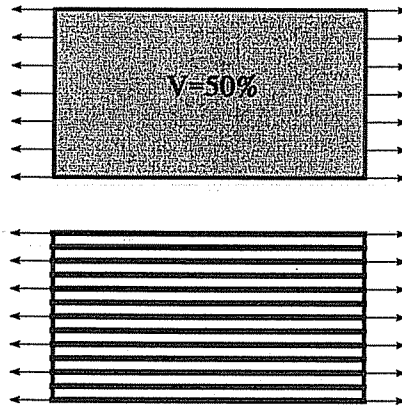


Figure 9 : Exemple de structure optimale orthotrope obtenue à partir d'une distribution de matière isotrope

En conséquence, il est normal de travailler a priori avec la classe de tous les matériaux composites poreux réalisables à partir de vide et du matériaux de base.

On peut montrer aussi que l'introduction de ces matériaux composites est suffisante pour assurer l'existence et l'unicité de la solution. On parle de *relaxation du problème de conception*.

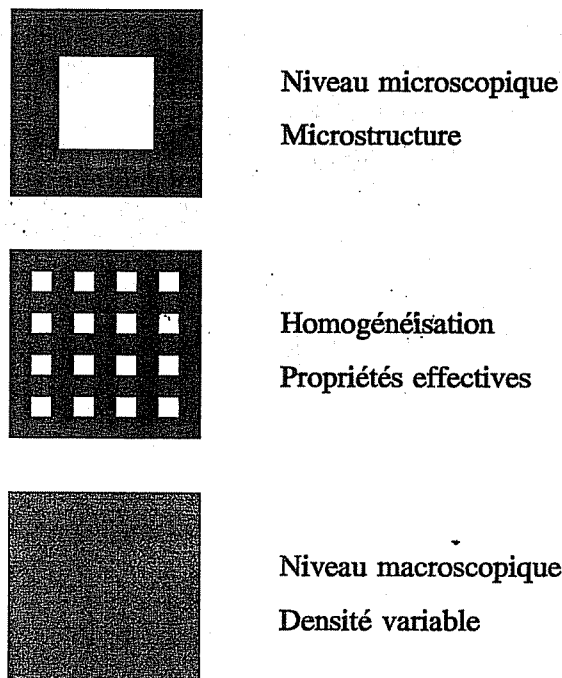


Figure 10 : Processus de régularisation du problème de topologie

Il est encore important de modéliser et de calculer les propriétés effectives de ces matériaux composites poreux avec une microstructure. Cette tâche fait l'objet de la *théorie de l'homogénéisation* (Sanchez-Palencia, 1980, Bensoussan *et al.*, 1978, Bergman *et al.*, 1983). On est alors à même de générer la relation fonctionnelle qui donne les raideurs effectives en fonction des paramètres de densité locale. Il est important de voir que l'utilisation des propriétés homogénéisées est consistante avec la formulation discrète du problème de topologie, car elle permet de considérer le comportement macroscopique moyen de la structure lorsque le nombre de trous augmentent et que parallèlement leur taille diminue.

En pratique, il est impossible de considérer toutes les microstructures poreuses. Aussi, dans un calcul numérique, on choisit une famille de microstructures que l'on peut décrire en fonction d'un nombre fini de paramètres microgéométriques qui constitueront les variables de conception du problème. Comme le matériau est orthotrope, il faut également considérer parmi les variables de conception, l'angle d'orthotropie qui a une influence importante sur la raideur locale. Au niveau microscopique, on considère une microstructure poreuse de paramètres à déterminer. Le processus d'homogénéisation permet de connaître les propriétés équivalentes du matériau poreux. Au niveau macroscopique, le problème de conception se traite alors comme une répartition de matériaux de densité variable.

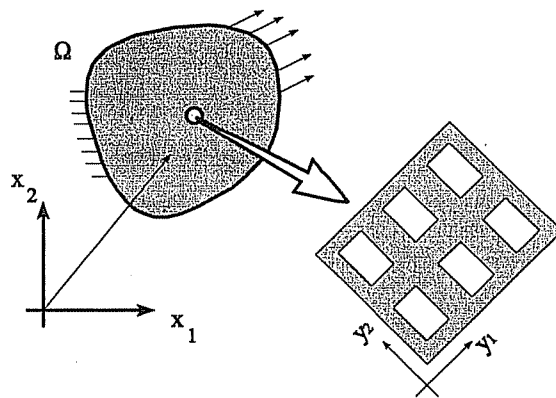


Figure 11 : Introduction de microstructures et de micro-perforations

L'introduction de matériaux composites poreux présente également l'avantage de transformer le problème de conception en une distribution de matériau poreux de densité variable entre le vide et le solide. Ce problème d'optimisation ressemble formellement à un problème de dimensionnement dans les variables de porosité et d'angle.

### 1.3 Formulation du problème de topologie

Bien que le problème de topologie puisse être transformé en une sorte de dimensionnement de densité variable, le problème reste difficile à résoudre. Un calcul précis des contours de la distribution de matière demande des maillages fins et, donc, un très grand nombre de variables de conception. La résolution du problème est coûteuse.

*Le problème de compliance minimale*

Par conséquent, le problème de topologie est étudié sous une forme relativement simple afin de réduire au plus possible les efforts de calcul. Jusqu'à présent, le problème de la structure de topologie optimale est souvent étudié suivant un critère de raideur maximale. Le critère de raideur moyen adopté est celui de l'énergie potentielle des charges extérieures encore appelé compliance.

Si  $g$  désigne les charges extérieures,  $q$  les déplacements généralisés,  $K$  la matrice de raideur,  $V$  le volume de matière,  $\mu$  le vecteur des variables de microstructure, et  $\theta$  les angles d'orthotropie, le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \theta} \quad & g^T q \\ \text{s.t.} \quad & V \leq \bar{V} \\ & Kq = g \end{aligned} \quad (1)$$

où le volume est classiquement défini par l'intégrale de la densité locale  $\rho(x)$  sur le volume de référence :

$$V = \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = \sum_e^{ne} \rho_e V_e \quad (2)$$

Si le choix du volume comme fonction de coût est relativement naturel, il n'est pas toujours aussi facile de comprendre le choix de la compliance. Celui-ci se justifie surtout par l'efficacité et la simplicité de son analyse de sensibilité.

*Problème avec périmètre borné*

Si le problème de conception n'est pas relaxé ou suffisamment relaxé par l'introduction d'une microstructure adéquate, Ambrosio et Buttazzo (1993) ont démontré que problème redevient régulier si l'on ajoute une pénalisation sur le périmètre de la distribution de matière. Ceci signifie que si le problème est résolu sous forme discrète ou bien si on emploie une microstructure suboptimale qui ne relaxe pas assez le problème, une borne sur le périmètre constitue un moyen pour assurer la stabilité de la solution (avec le maillage par exemple).

Si  $P$  désigne le périmètre, le problème de raideur maximale avec un volume et un périmètre borné s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \theta} \quad & g^T q \\ \text{s.t.} \quad & V \leq \bar{V} \\ & P \leq \bar{P} \\ & Kq = g \end{aligned} \quad (3)$$

Si la densité est variable, Haber, Jog et Bendsøe (1994) proposent de remplacer la notion élémentaire de périmètre par la notion de la *variation totale* de la fonction de densité  $\rho$ . Cette dernière mesure converge à la limite vers la valeur du périmètre géométrique lorsque le volume de matière de densité intermédiaire  $0 < \rho < 1$  tend vers zéro. La variation totale d'une fonction scalaire peut encore s'écrire comme l'intégrale du module de son gradient. Cette fonction n'est pas dérivable et on la remplace par

l'approximation suivante, valable pour une fonction de densité continue par morceaux :

$$P(\rho) = \int_{\Omega \setminus \Gamma_j} \sqrt{\nabla \rho^T \nabla \rho + \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^2} - \frac{\epsilon}{h} d\Omega + \int_{\Gamma_j} \sqrt{\langle \rho \rangle^2 + \epsilon^2} - \epsilon d\Gamma \quad (4)$$

$\Gamma_j$  désigne l'ensemble des points où la densité  $\rho$  subit une discontinuité.  $\langle \rho \rangle$  est le saut de densité à travers  $\Gamma_j$ . Le paramètre  $\epsilon$  garantit la différentiabilité de la fonction périmètre; il s'agit d'un nombre petit mais positif  $0 < \epsilon < 1$ . Le paramètre  $h$  représente une dimension caractéristique du maillage tel que le diamètre d'un élément fini.

Pour une densité constante par éléments finis, le périmètre est évalué en calculant les sauts de densité au travers des interfaces entre les éléments. Si le problème est plan, l'expression du périmètre ne fait intervenir que le saut de densité aux interfaces des éléments :

$$P = \sum_k l_k \left( \sqrt{\langle \rho \rangle_k^2 + \epsilon^2} - \epsilon \right) \quad (5)$$

où  $\langle \rho \rangle_k$  est le saut de densité à travers l'interface  $k$  de longueur  $l_k$ . Comme la forme analytique est relativement simple, il est aisé de déterminer la dérivée du périmètre si on connaît la sensibilité des densités d'élément.

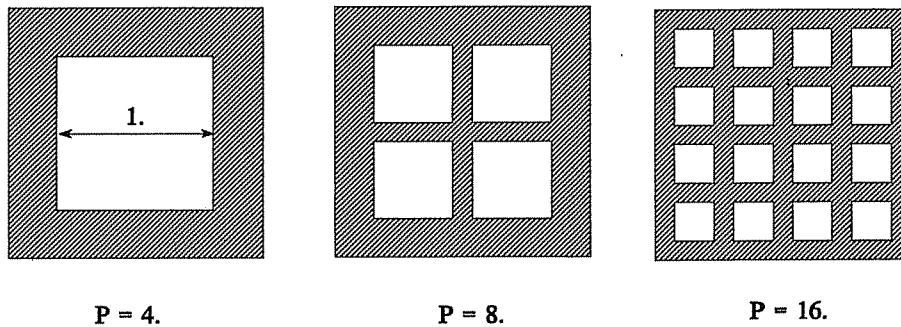


Figure 12 : Influence du nombre de perforations sur le périmètre

On peut comprendre facilement le rôle de la contrainte sur le périmètre. Le problème est régularisé en excluant, de l'espace de conception, les oscillations et les variations à haute fréquence de la fonction caractéristique de la distribution de densité. La figure 11 présente trois solutions avec le même rapport vide-solide. Les perforations en nombre croissant présentent la même surface totale. Le périmètre total de la solution augmente avec le nombre de trous et, de manière équivalente, il décroît avec leur taille. Cet exemple élémentaire montre que les solutions avec une faible valeur du périmètre possèdent des trous de grande taille tandis que des distributions de densité qui oscillent rapidement sur l'espace, introduisent un grand périmètre. Si la distribution de matière donne lieu à l'apparition d'une microstructure au niveau du maillage macroscopique, le périmètre total augmente. A la limite, lorsque la taille des perforations devient de plus en plus fine, le périmètre de la solution devient infini. Il est évident qu'une borne finie sur le périmètre de la solution exclut les distributions de microperforations de l'espace de conception. En outre, la valeur du périmètre maximal autorise un contrôle sur le nombre et la taille des trous présents dans la topologie optimale, sans pour autant influencer leur forme propre et leur disposition relative.

Haber *et al.* (1994) et Duysinx (1996) ont montré que cette approche était plus intéressante pour l'ingénieur. On peut introduire, en toute rigueur, une pénalisation importante des densités intermédiaires, ce qui améliore la séparation entre les zones de vide et de solide. De plus, le périmètre permet de contrôler le nombre et la taille des perforations et des membres structuraux. Généralement, les solutions que l'on obtient sont directement transcriposables en une conception pragmatique. Il est facile d'en déduire un modèle CAO en vue de poursuivre le processus de conception avec une optimisation de forme ou de dimensionnement.

### Le traitement de plusieurs cas de charge

Considérons une structure sollicitée par des chargements en nombre  $nc$ . Notons les grandeurs relatives à chaque cas de chargement par un indice supérieur. Le cas de charge  $k$  ( $k=1,..,nc$ ) est caractérisé par les charges  $g^k$  qui donnent lieu aux déplacements  $q^k$  et à la compliance  $g^k \cdot q^k$

Díaz et Bendsøe (1992) proposent de minimiser une combinaison linéaire convexe des compliances relatives à chaque sollicitation pour un volume de matière donné :

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \theta} \quad & \sum_{k=1}^{nc} w^k g^k \cdot q^k \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V} \\ & \cdot K q^k = g^k \quad (k=1, nc) \end{aligned} \quad (6)$$

Pour notre part, nous préférons recourir à une formulation de type "min-max" qui correspond à prendre en compte la souplesse la plus défavorable :

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \theta} \quad & \max_{k=1, nc} g^k \cdot q^k \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V} \\ & \cdot K q^k = g^k \quad (k=1, nc) \end{aligned} \quad (7)$$

### Le problème de résistance

La structure de topologie optimale pourrait reposer sur le respect d'un critère local de rupture ou de plastification de la matière. On pourrait concevoir que la structure de meilleure topologie soit celle qui uniformise l'état de tension sur le domaine de conception. Supposons que l'on puisse définir un critère de contrainte local caractérisé par une contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$ , le problème de conception serait la recherche de la distribution de matière qui réduirait le maximum de cette contrainte équivalente pour un volume de matière donné :

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \theta} \quad & \max_{\forall x \in \Omega} \bar{\sigma}(x) \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V} \\ & \cdot K q = g \end{aligned} \quad (8)$$

La première difficulté qu'il convient de résoudre dans ce cas est de définir un critère de contrainte locale de façon adéquate. A ce jour, la définition d'un critère macroscopique objectif n'est pas disponible. On peut néanmoins démontrer (Bendsøe, Díaz et Kikuchi, 1993, Rozvany, 1995) que pour un seul cas de charge, la topologie obtenue avec un critère de tension est identique (à un facteur



d'échelle près) à celle obtenue pour le problème de compliance. Par contre, la topologie peut être modifiée si on considère simultanément des restrictions de tension et de souplesse ou si on considère plusieurs cas de chargement.

### Problème des vibrations libres

La prédiction de la topologie des structures peut être examinée sous son aspect vibratoire. Dans bien des situations, le comportement vibratoire d'un composant mécanique est primordial. Lorsqu'il est confronté à ce type de problème, l'ingénieur est, par exemple, amené à relever la fréquence propre fondamentale d'une structure. Le problème de conception peut aussi se poser en termes de relocalisation du comportement fréquentiel afin d'exclure certaines bandes de fréquence. Le choix d'une topologie structurale appropriée ou du renforcement optimal d'une pièce existante est une question d'un intérêt pratique crucial à laquelle l'optimisation topologique peut apporter une réponse originale.

On considère par exemple le problème du relèvement du comportement fréquentiel de la structure :

$$\begin{aligned} \max_{\mu, \theta} \quad & \min_{k=1, nc} \quad \omega^k \\ \text{avec} \quad & V \leq \bar{V} \\ & (K - \omega^2 M) q = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Ce type de problème est traité d'une manière fort semblable aux problèmes de compliance. On remarquera cependant que ce sont les problèmes de renforcement optimal qui sont les mieux conditionnés.

#### 1.4 Exemple : naissance d'une topologie

Le problème de conception est inspiré d'un problème de dimensionnement de treillis 3 barres sous trois cas de charge résolu par Sheu et Schmit (1972) et ensuite adapté à la topologie par Fukushima, Suzuki et Kikuchi (1993). On désire savoir si la configuration avec trois bars est bien la configuration optimale pour ce treillis.

Comme on le voit à la figure 13, le domaine de conception est un rectangle de dimensions 2x1m capable de contenir le treillis trois barres de la structure originale. Une des longueurs est encastree tandis que les différents cas de charge sont appliqués au centre du côté opposé. L'intensité des efforts appliqués vaut respectivement  $P_1=20$  N,  $P_2=30$  N et  $P_3=40$  N.

On choisit une loi de raideur-densité très simple dans laquelle la pénalisation des densités intermédiaires est réalisée par une fonction de type puissance:  $E = \mu^p E^0$  et  $\rho = \mu \rho^0$ . Le matériau choisi est un matériau standard de type acier :  $E^0=100$ . GPa et  $\nu=0.3$ .

On minimise la compliance maximale sur les trois cas de charge. Le problème est mis sous sa forme différentiable. Sous cette forme, le problème d'optimisation comprend quatre contraintes et la résolution peut être abordée sans difficulté avec l'optimiseur CONLIN (Fleury 1989b, 1991b). Dans le sous-problème d'optimisation, chaque compliance est remplacée par un développement mixte CONLIN. Comme le matériau est isotrope, il n'y a pas de variable d'angle d'orthotropie et le problème de l'orientation optimale est évité, sans nuire à la qualité du résultat comme nous le verrons.

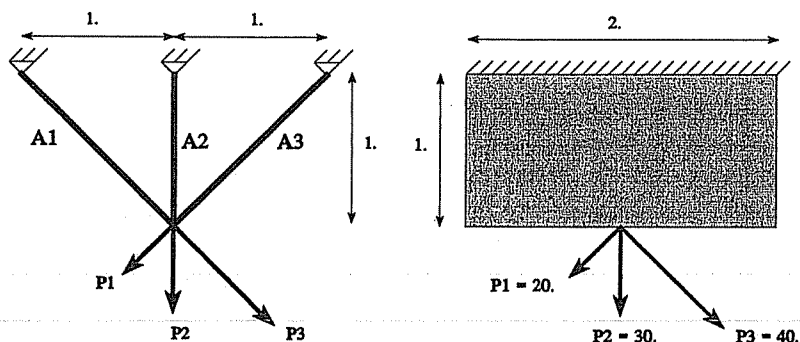


Figure 13 : Problème de topologie correspondant au treillis 3 barres

La figure 14 présente l'évolution des fonctions objectives au cours des itérations, alors que la figure 15 donne la modification des variables de conception entre deux itérations au cours du processus d'optimisation. La figure 16 montre l'évolution de la distribution de densité au fur et à mesure que l'optimisation progresse. Dans les premières itérations, c'est le cas de charge 3 qui possède la force d'intensité la plus importante et qui est prédominant. Ensuite, l'écart entre les trois compliances se réduit fortement et dès la dixième itération environ, les compliances des cas de charge 2 et 3 sont quasi égales et elles deviennent simultanément actives dans le problème de conception. Quant à la compliancance du premier cas de charge, elle est légèrement inférieure à celle des deux autres. Après avoir influencé la distribution de densité au cours des premières itérations, elle n'intervient plus dans la distribution finale. L'enveloppe du maximum des compliances suit une évolution relativement douce. Par contre, comme on le voit aux itérations 4 à 8, la courbe de chaque compliancance est plus accidentée. Après l'itération 20, la valeur des compliances reste quasi stationnaire. A contrario, la courbe d'évolution de la modification des variables de conception diminue lentement et de manière parfois saccadée.

La distribution de matière optimale correspond à un treillis à 2 barres; la barre A3 qui est alignée sur le premier cas de charge a disparu. La modification de topologie du treillis 3 barres aurait été impossible par un procédé d'optimisation des dimensions transversales des barres. L'optimisation topologique suggère non seulement d'enlever une barre, mais elle donne aussi une estimation des sections transversales des éléments. En première approximation, on voit que la section A1 est 5 fois plus importante que la section A2.

La présence de la bécquille entre les 2 barres est apparue après l'itération 15: Il semble qu'elle se soit formée avec le "nuage" de matière poreuse qui se trouve entre les 2 barres. Il est donc probable que cette barre soit le reflet d'un optimum local.

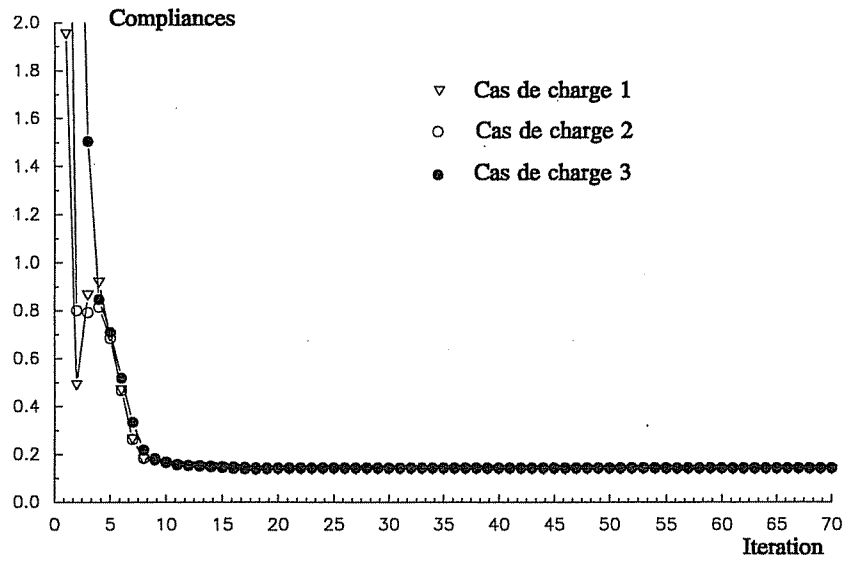


Figure 14 : Courbes d'évolution des fonctions objectifs

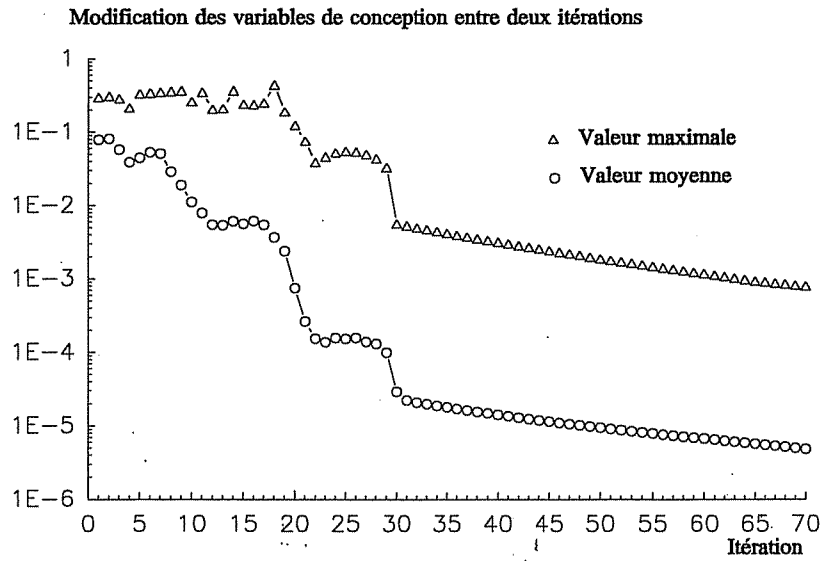


Figure 15 : Modifications des variables de conception entre deux itérations

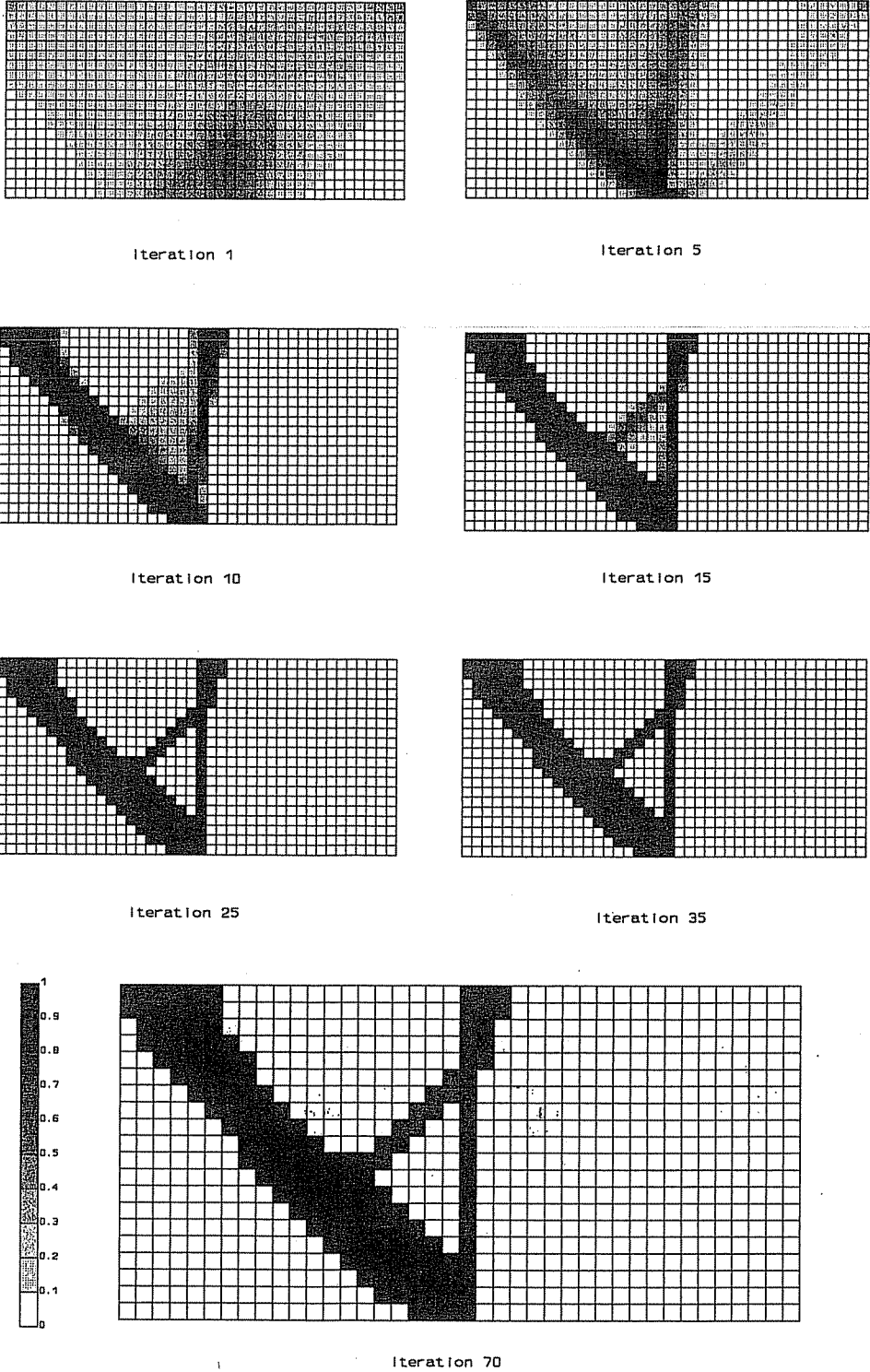


Figure 16 : Evolution de la distribution de densité au cours du processus d'optimisation

## 2. HOMOGENEISATION DES MICROSTRUCTURES POREUSES

### 2.1 Position du problème

A une échelle suffisamment petite tous les corps sont hétérogènes et formés de différents constituants. cependant, si l'échelle à laquelle l'on se place est suffisamment grande comparativement à la microstructure et si l'on peut trouver une échelle intermédiaire où l'on peut dégager des éléments de volume de référence pour pouvoir effectuer un calcul de moyenne statistiquement valable, alors on peut homogénéiser le corps, c'est-à-dire le remplacer par un corps homogène de propriétés effectives équivalentes au composite réel.

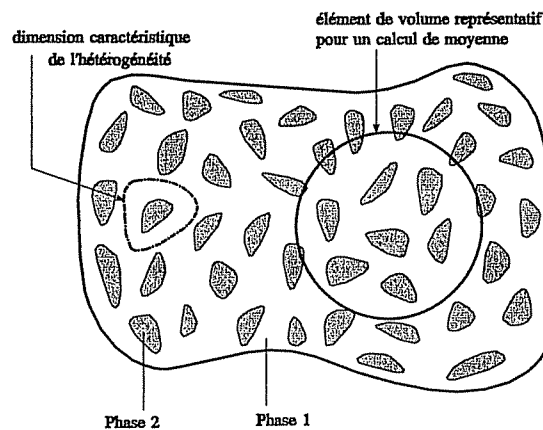


Figure 17 : Homogénéisation d'un matériau

Le problème qui nous préoccupe est de pouvoir modéliser les propriétés de solides micro-perforés. L'introduction de microstructures de porosité variable nécessaires au problème de topologie soulève trois difficultés :

- on doit disposer d'un modèle de microstructure qui permette de générer des matériaux dont la densité s'étend depuis le vide complet jusqu'au solide vierge;
- il faut pouvoir déterminer les propriétés équivalentes de ces microstructures avec précision;
- il faut déterminer le caractère optimal des propriétés effectives par rapport aux bornes minimales ou maximales d'origine variationnelle;

Comme les propriétés équivalentes sont fortement dépendantes du modèle microstructural adopté, on étudiera ensuite l'influence sur la topologie du choix de telle ou telle microstructure c'est-à-dire de la relation fonctionnelle entre la raideur et la densité.

### 2.2 Résumé de la théorie de l'homogénéisation des microstructures périodiques

La théorie de l'homogénéisation des microstructures périodiques occupe une telle place en optimisation topologique qu'il est difficile d'éviter d'en procurer au moins un résumé.

On considère un matériau élastique de structure périodique dans l'espace. La microstructure périodique est formée par la répétition d'un motif identique appelé *cellule de base*. Localement, ces périodes s'obtiennent par une homothétie de rapport  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) de l'ouvert  $Y = ]0, Y_1[ \times ]0, Y_2[$ .

Les coefficients élastiques  $E_{ijkl}^e(\mathbf{x})$  de la structure qui sont de nature périodique découlent de l'application  $\mathbf{y} \rightarrow E_{ijkl}^e(\mathbf{y})$  définie sur la cellule de base  $Y$ . En général, les coefficients élastiques sont

donnés par une fonction de deux variables spatiales  $x$  et  $y$ . La variable  $x$  décrit la variation macroscopique des coefficients élastiques sur la structure, tandis que la variable  $y$  reflète la variation périodique rapide.

$$E_{ijkl}^{\epsilon}(x) = E_{ijkl}(x, y = \frac{x}{\epsilon}) \quad (10)$$

Supposons à présent que la structure soit soumise à des forces de volume et à des tractions de surface au niveau macroscopique. Le déplacement  $u^{\epsilon}(x)$  consécutif à l'application de ce chargement subit lui aussi une composante de variation rapide. On développe la solution en série de puissances du paramètre  $\epsilon$  :

$$u^{\epsilon} = u^0(x, y) + \epsilon u^1(x, y) + \epsilon^2 u^2(x, y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\epsilon} \quad (11)$$

On peut montrer que le terme  $u^0$  ne dépend pas de la variable rapide  $y$ . Il représente le champ de déplacement macroscopique moyen. On démontre également que ce champ de déplacement est celui que l'on obtient en appliquant les forces de volume et les tractions de surface à un corps équivalent, dont les propriétés élastiques homogénéisées sont données par :

$$E_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} dY \quad (12)$$

Les champs  $\chi^{kl}$  de déformations élémentaires de la cellule de base sont les solutions  $Y$  périodiques du problème sur la même cellule de base  $Y$  :

$$\int_Y E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY \quad \forall v \in V_Y \quad (13)$$

où les champs  $v \in V_Y$  sont des déplacements virtuels,  $Y$ -périodiques et cinématiquement admissibles.

Pour un problème spatial complet, le calcul des coefficients homogénéisés demande la résolution de 6 problèmes sur la cellule élémentaire. Un problème en état plan n'en introduit que 3. La résolution de ce problème n'est cependant pas chose aisée et il est exceptionnel de trouver une solution analytique. Il est dès lors courant de recourir à une solution numérique telle que la méthode aux éléments finis.

### 2.3 Quelques microstructures utilisées en topologie

#### A/ Matériaux feuilletés de rang 2

Les matériaux feuilletés de rang  $N$  sont particulièrement important en topologie, car Avellaneda (1987) a montré qu'ils constituaient une famille optimale pour le problème du  $G$ -closure de l'énergie de déformation. En d'autres mots, pour chaque déformation, il existe un matériau feuilleté de rang  $N$  ( $N$  fini) qui soit le plus raide que l'on puisse créer avec une proportion donnée de vide et de solide. Pour

le problème plan et un seul cas de charge, on démontre que la classe des matériaux de rang 2 est suffisante.

La construction des matériaux feuilletés de rang N se réalise de manière récursive à partir du solide de base et d'un matériau feuilleté de rang N-1. L'assemblage feuilleté de lamelles des deux constituants donne lieu au matériau de rang N.

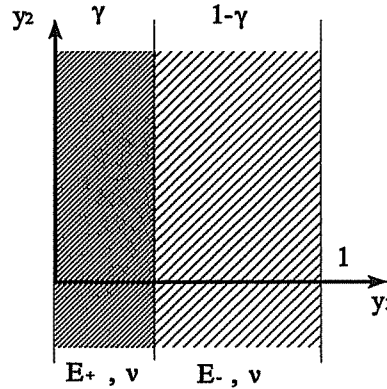


Figure 18 : Cellule de base d'un matériau feuilleté de rang 1

Le matériau de rang 1 s'obtient en étalant des bandes de solide et de vide dont les épaisseurs relatives sont  $\gamma$  et  $1-\gamma$ . Exceptionnellement, la théorie de l'homogénéisation peut être appliquée de manière analytique et Bendsøe (1989) a montré que l'on obtient la formule d'homogénéisation suivante :

$$\begin{aligned}
 E_{1111}^H &= \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1}, & E_{1122}^H &= M \left( \frac{E_{1122}}{E_{1111}} \right) \cdot \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1} \\
 E_{2222}^H &= M(E_{2222}) - M \left( \frac{E_{2211}^2}{E_{1111}} \right) + \left[ M \left( \frac{E_{2211}}{E_{1111}} \right) \right]^2 \cdot \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1} \\
 E_{1212}^H &= \left[ M \left( \frac{1}{E_{1212}} \right) \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{14}$$

où  $M(f)$  désigne la moyenne d'une fonction  $f$  sur la cellule de base :

$$M(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \tag{15}$$

Si on applique cette formule à un assemblage de bandes de vide et de solide, on obtient en état plan de tension :

$$D^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma E^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Par construction, le matériau de rang 2, s'obtient en associant des bandes de matériau de rang 1

d'épaisseur  $1-\mu$  et de bandes de solide d'épaisseur  $\mu$  comme indiqué sur la figure 19.

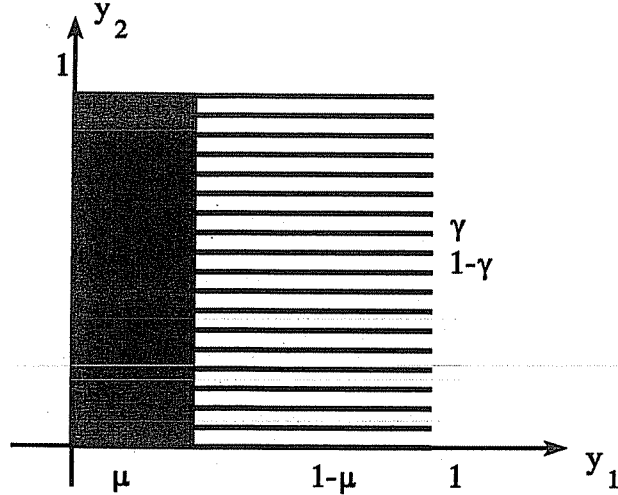


Figure 19 : Cellule de base d'un matériau feuilleté de rang 2.

Par application récursive des formules d'homogénéisation, Bendsøe (1989) a montré que les propriétés effectives de ce matériau sont les suivantes :

$$D^H(\gamma, \mu) = \frac{E}{(1-\mu) + \mu\gamma(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \gamma & \mu\gamma\nu & 0 \\ \mu\gamma\nu & \mu(1-\mu(1-\gamma)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\rho = (\gamma + \mu - \gamma\mu) \rho^0$$

Remarquons immédiatement que ce matériau ne possède aucune raideur en cisaillement et qu'il est donc instable pour tout chargement dont les contraintes principales ne seraient pas alignées avec les directions d'orthotropie c'est-à-dire les directions des étalements. Ce matériau est cependant la famille optimale pour le problème de compliance minimale sous un seul cas de charge.

Pour comparer la non linéarité de cette loi d'homogénéisation, on définit le concept de matériau pseudo-isotrope de rang 2 dont les raideurs selon les deux directions d'orthotropie sont identiques :  $D_{11} = D_{22}$ . Bien que ce matériau ne soit pas un matériau isotrope, on peut définir un matériau isotrope fictif équivalent en extension dont les modules de Young et de Poisson sont donnés par :

$$\tilde{E} = \frac{\delta}{2-\delta} E \quad , \quad \tilde{\nu} = \frac{\delta}{2-\delta} \nu \quad , \quad \delta = \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \quad (18)$$



La figure 20 montre la non linéarité des raideurs en fonction de la densité.

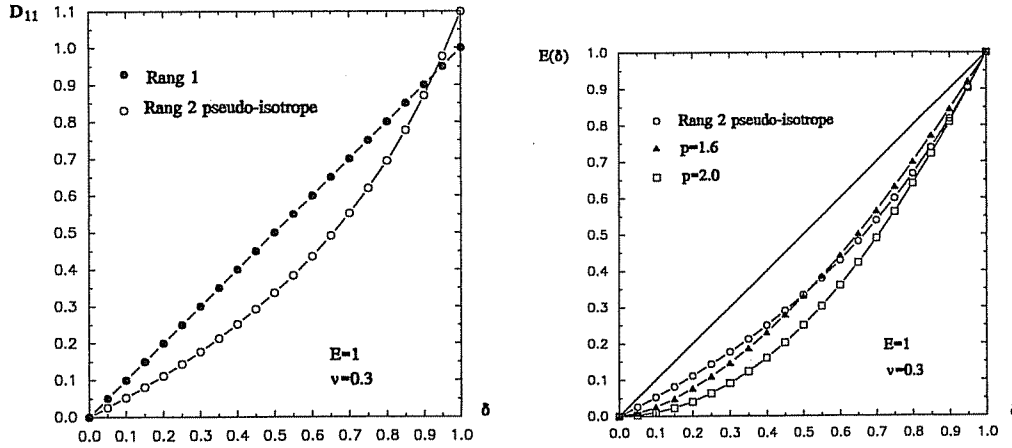


Figure 20: Non-linéarité des matériaux feuilletés de rang 2 et de rang 1

En conclusion, la raideur des laminés de rang 2 est donc linéaire à faiblement non linéaire en la densité. Pour les matériaux pseudo-isotropes, les relations raideurs-densités montrent que les densités intermédiaires se trouvent (faiblement) pénalisées.

#### B/ Loi artificielle de type puissance avec pénalisation des densité intermédiaires (SIMP)

Le modèle des épaisseurs généralisées ou matériau SIMP (Bendsøe, 1989, Mlejnek, 1993, Zhou et Rozvany, 1991) est une relation raideur/densité très simple dans laquelle la raideur dépend d'une certaine puissance  $p$  d'une variable  $\mu$  de simili densité.

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu(x)^p E^0 \\ \rho(x) &= \mu(x) \rho^0 \\ 0 \leq \mu(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad p > 1 \end{aligned} \tag{19}$$

La loi d'homogénéisation est donc supplantée par une loi de raideur arbitraire que l'on peut interpréter comme une approximation différentiable du problème discret  $[0:1]$ . Cette loi différentiable permet d'introduire facilement l'existence de densités intermédiaires entre le vide et le solide, tout en pénalisant les matériaux poreux. La loi présente également formellement une raideur semblable à un problème de plaque d'épaisseur variable.

Pour pénaliser les densités intermédiaires, on augmente graduellement la valeur de  $p$  avec évidemment  $p > 1$ . On conseille  $p=2$  ou  $p=3$  voire  $p=4$ . Le choix  $p=2$  génère généralement des structures comprenant des armatures et des zones membranaires diffusant le cisaillement par exemple. Le choix  $p=3$  ou  $p=4$  aboutit plutôt à des topologie de type vide-solide. La figure 20 ci-dessous montre l'influence de l'exposant  $p$  sur la pénalisation des densités intermédiaires. On y voit comment les matériaux SIMP donnent lieu à une raideur déraisonnablement faible pour un coût en volume donné. La matière aura tendance à ne former que des régions de vide ou de solide pour former la structure la plus efficace possible. On peut montrer que les matériaux pseudo-isotropes de rang 2 correspondent approximativement à un exposant  $p = 1.6$ .

Cette loi SIMP est très facile et très intéressante pour les applications pratiques. Il ne faut toutefois pas oublier qu'il n'y a aucun fondement microstructural et que la relaxation du problème n'est que partielle de sorte que les résultats numériques peuvent dépendre du maillage.

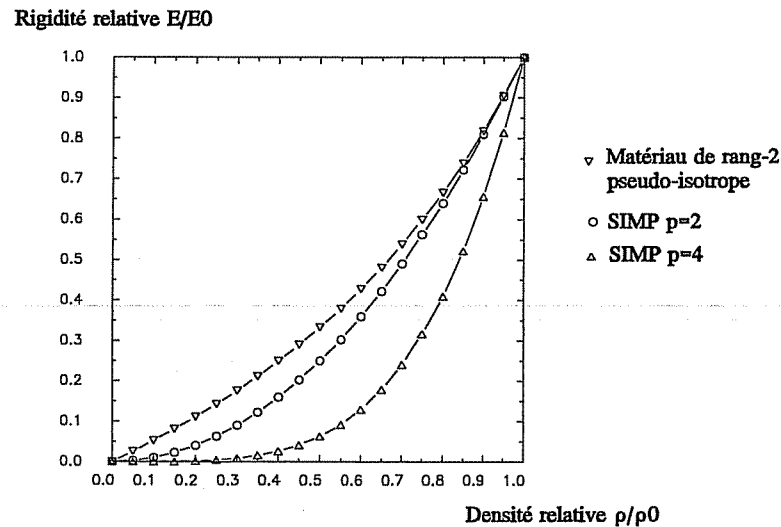


Figure 21 : Différentes lois SIMP :  $p=2$ ,  $p=4$

### C/ Loi des inclusions sphériques

Le modèle de sphères composites de Hashin (1962) est un des plus anciens modèles microstructures capable de tenir compte de micro-inclusions en fraction volumique quelconque.

Ce modèle considère des particules sphériques, de tailles graduellement décroissantes, baignées dans une matrice continue. La distribution des différentes tailles de sphère n'est cependant pas aléatoire, mais au contraire, elle suit des caractéristiques bien déterminées par la construction du modèle. A cette fin, on considère une collection de sphères composites, toutes constituées d'un cœur sphérique, la particule, et d'une couronne concentrique, la matrice. Il est supposé, par construction, que le rapport " $a/b$ " entre les rayons des particules et des couronnes est identique pour toutes les sphères composites et cela, quelle que soit leur taille. Le corps de volume  $V$  ou de surface  $S$  est rempli progressivement par des sphères composites de tailles décroissantes jusqu'à l'infini. Celles-ci ne se recouvrent pas, mais elles sont en contact tangentiel les unes avec les autres. On peut montrer que l'on peut remplir de manière dense tout le volume ou toute la surface disponible sans créer de double recouvrement.

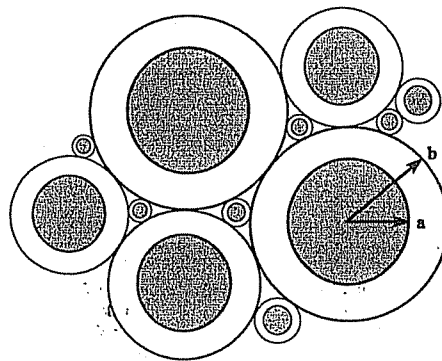


Figure 22 : Modèle des sphères composites

Le matériau étant macroscopiquement isotrope, il est complètement décrit par son module de compressibilité cubique et son module de cisaillement.

Le module de compressibilité effectif  $\kappa^*$

En état de contrainte hydrostatique, chaque sphère composite se comporte comme une sphère homogène de module de compressibilité  $\kappa^*$ . Ainsi, on peut remplacer la sphère composite par une sphère de matériau équivalent sans perturber l'état de tension dans son entourage. Comme ce remplacement peut être effectué pour toutes les sphères de différentes tailles, mais de même rapport " $a/b$ " et donc ayant le même module  $\kappa^*$ , la compressibilité cubique, homogénéisée du composite entier, est donnée par celle d'une seule sphère. Hashin (1962) a montré que le module de compressibilité cubique homogénéisé est :

$$\kappa^* = \kappa_1 + \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(4G_1 + 3\kappa_1)c_2}{(3\kappa_2 + 4G_1) - 3(\kappa_2 - \kappa_1)c_2} \quad (20)$$

où la  $c_2 = (a/b)^3$  est la fraction volumique des inclusions sphériques.

Hashin a également montré que cette valeur correspondait aux bornes variationnelles du principe variationnel de Hashin-Shtrikmann (1963) pour un composite isotrope. L'assemblage des sphères composite est donc optimal parmi tous les matériaux composites isotropes pour le module de compressibilité cubique.

Le module de cisaillement  $G^*$

La prédiction exacte du module de cisaillement avec le modèle des sphères composites n'est plus possible, car une sphère composite en cisaillement ne peut plus être remplacée par une sphère homogène sans perturber son voisinage. Il est même possible de démontrer par la théorie de la G-convergence que le module effectif réel n'atteint pas les bornes du principe variationnel de Hashin-Shtrikmann.

Pour déterminer ce module de cisaillement  $G^*$  avec précision et mettre en évidence une microstructure éventuelle qui réaliserait les propriétés optimales, on peut utiliser des *bornes précises* sur les propriétés telles que les bornes de Hashin (1962) ou de Hervé, Soltz et Zaoui (1991). On peut également recourir à des modèles approchés parmi lesquels les plus connus et les plus précis sont certainement le modèle à 3 phases ou modèle auto-consistant généralisé de Christensen et Lo (1979) ou la méthode Mori et Tanaka (1973).

Nous avons comparé la borne de Hervé, Soltz et Zaoui (1991), le modèle à 3 phases et la méthode de Mori et Tanaka pour des inclusions sphériques. La méthode de Mori-Tanaka semble la plus intéressante pour l'optimisation topologique car elle restitue une estimation analytique des deux coefficients de compressibilité cubique et de cisaillement. En outre, ces deux estimations saturent simultanément les bornes variationnelles, ce qui permet de paramétrer les modules de raideur optimaux dans la classe des matériaux composites isotropes. Si le matériau a une densité moyenne  $\delta$ , les inclusions sphériques de vides sont en proportion  $1-\delta$ , et on a la loi raideur densité selon le modèle de Mori-Tanaka est la suivante :

$$\chi = \frac{4G^0\chi^0\delta}{4G^0 + 3\chi^0(1-\delta)} \quad (21)$$

$$G = \frac{G^0(9\chi^0 + 8G^0)\delta}{(9\chi^0 + 8G^0) + (1-\delta)(6\chi^0 + 12G^0)}$$

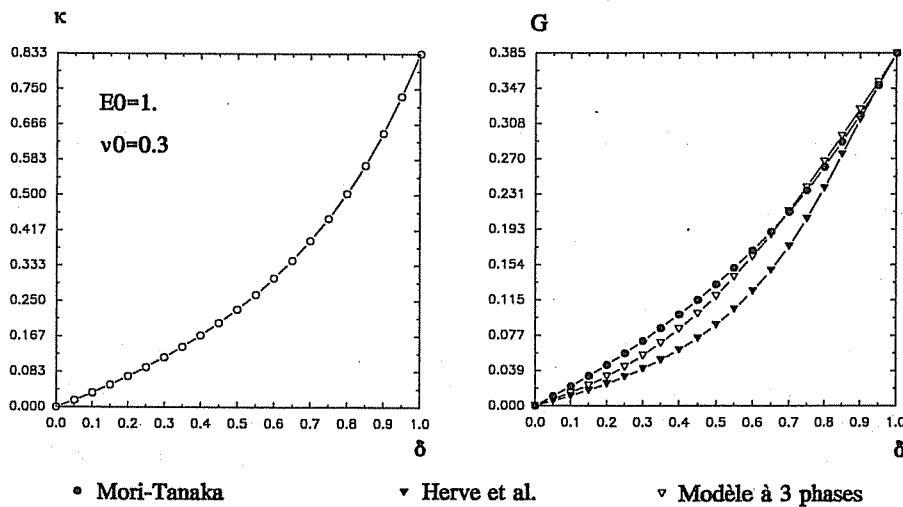
Les modules de Young et le coefficient de Poisson s'obtiennent alors par simple transformation.

$$E = \frac{9\chi G}{3\chi + G} \quad (22)$$

$$\nu = \frac{3\chi - 2G}{6\chi + 2G}$$

La figure 23 permet de comparer les résultats des trois modèles sur l'évolution du module de Young effectif et du coefficient de Poisson équivalent. On observe un très bon accord entre les 3 modèles pour le module de Young. Le module de Mori-Tanaka est le plus élevé puisqu'il vérifie les bornes de raideur. La même constatation de concordance ne peut être faite pour le coefficient de Poisson qui dépend fortement du modèle adopté. Pour une faible proportion d'inclusions, les 3 modèles concordent bien. On voit par contre une beaucoup plus grande dispersion des courbes lorsqu'on se rapproche du vide complet. La valeur asymptotique pour une densité nulle varie fortement d'un modèle à l'autre, ce qui traduit le fait que le coefficient de Poisson du vide est arbitraire.

Structure de Hashin : Inclusions Sphériques



#### D/ Loi empirique de Halpin-Tsai

Soit un composite formé de fibres longues alignées selon la direction L comme montré à la figure 24. La distribution des fibres selon les directions perpendiculaires T et T' est isotrope. Pour décrire les propriétés effectives de ce type de matériau, on dispose de plusieurs théories.

#### Modèles analytiques

On trouve plusieurs modèles analytiques pour décrire les matériaux composites à fibres longues. La description complète de leurs propriétés mécaniques demande la connaissance de 5 modules indépendants, les autres se déduisant par des relations algébriques. Les modules  $E_L$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ , et  $K_L$  se déduisent d'un modèle de cylindre composite analogue bidimensionnel du modèle des sphères composites (Hashin et Rosen, 1964). Le module de cisaillement transverse  $G_{TT}$  pose plus de problèmes. On peut en trouver une prédiction satisfaisante par le modèle auto-consistant généralisé ou

modèle à 3 phases de Christensen et Lo (1979).

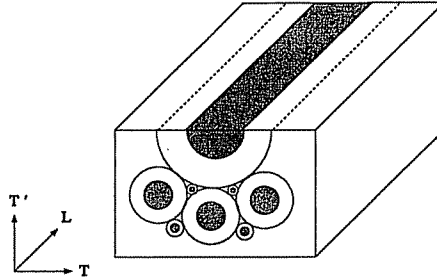


Figure 24 : Modèle des cylindres composites

### Bornes variationnelles

Sur la base de principes variationnels, Hill (1964) et Hashin (1965) ont dégagé des bornes sur les modules de raideur. On montre que ces bornes sont réalisées par les prédictions du modèles des cylindres composites et du modèles à 3 phases évoqués plus haut.

Lois d'homogénéisation empiriques et approchées.

Sur la base de nombreux résultats théoriques et expérimentaux disponibles pour estimer et décrire les propriétés des composites à fibres unidirectionnelles longues (modèles analytiques, bornes variationnelles, simulations numériques, résultats expérimentaux...), Halpin et Tsai (1969) ont proposé des équations destinées à réaliser une formulation synthétique simple. Cette loi empirique propose d'admettre qu'une bonne approximation des modules effectifs d'un matériau composite unidirectionnel est donnée par la loi suivante :

- les modules  $E_L$  et le coefficient  $\nu_{LT}$  obéissent à la loi des mélanges :

$$\begin{aligned} E_L &= E_f V_f + E_m (1 - V_f) \\ \nu_{LT} &= \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \end{aligned} \quad (23)$$

- les autres modules  $E_T$ ,  $G_T$  et  $\nu_{TT}$  sont donnés par la formule empirique :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (24)$$

$$\text{avec } \eta = \frac{M_f/M_m - 1}{M_f/M_m + \xi}$$

où  $M$ ,  $M_f$  et  $M_m$  désignent respectivement le module effectif du composite, le module des fibres et le module de la matrice. Le facteur  $\xi$  est une mesure du renforcement (ou de l'affaiblissement) apporté par les fibres. Sa valeur dépend de la géométrie et de l'arrangement des fibres.

## Un modèle de micro-perforations cylindriques

On imagine maintenant une microstructure dont les perforations cylindriques seraient perpendiculaires au plan de la structure bidimensionnelle. On suppose alors que dans un souci de généralité que la raideur effective du matériau poreux est donnée par la loi de Halpin Tsai. Pour des inclusions de vide, la raideur transversalement à ces inclusions est donnée de manière approchée par la loi empirique de Tsai et Halpin où  $\delta$  est la densité relative d'inclusions. Le module de Young est donné par la formule tandis que le coefficient de Poisson est généralement fixé. Quant à la masse volumique, elle suit simplement une évolution linéaire.

$$\frac{E}{E^0} = \frac{\xi \delta}{1 + \xi - \delta} \quad (25)$$

$$v = v^0$$

$$\rho = \delta \rho^0$$

En jouant sur le paramètre de renforcement  $\xi$ , on retrouve différentes "lois de mélange" qui pénalisent plus ou moins fortement les densités intermédiaires :

- $\xi = 0$       Loi de mélange parallèle
- $\xi = \infty$     Loi de mélange série
- $\xi = 1$       Loi de raideur diagonale d'un matériau de rang-2 pseudo-isotrope ( $D_{11} = D_{22}$ )
- $\xi = \frac{1-v}{2(1+v)}$     Raideur moyenne d'un assemblage de cylindres composites (analyse élastique).

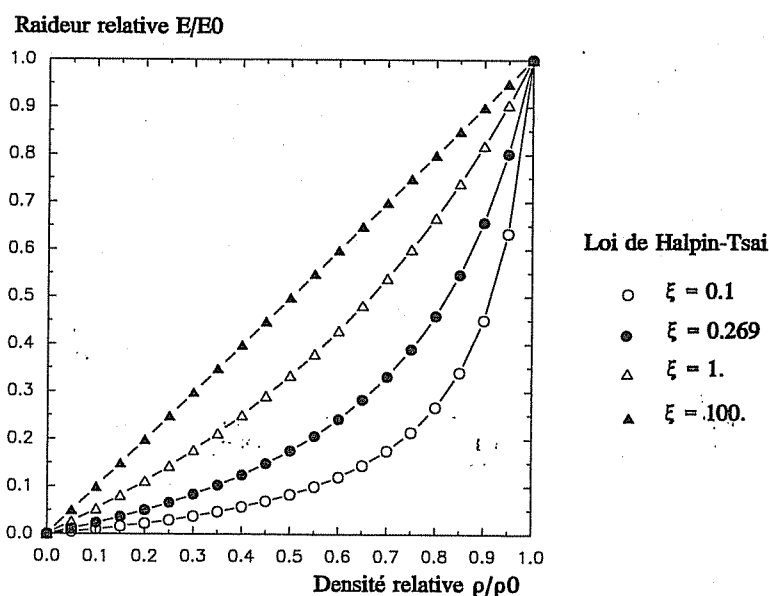


Figure 25 : Influence du paramètre  $\xi$  sur la loi de Halpin-Tsai

*E/ Loi de la double microstructure de Hashin*

Les micro-inclusions sphériques et les micro-perforations cylindriques ont les propriétés mécaniques équivalentes isotropes. Or, on sait que la solution du problème de distribution de matière est généralement orthotrope au niveau macroscopique. Nous proposons donc une autre approche qui combine les deux microstructures de Hashin pour donner naissance à un matériau composite orthotrope poreux. Comme pour les matériaux feuilletés de rang 2, sa microstructure fait appel à une construction à deux niveaux. Au niveau le plus bas, on construit une matrice poreuse de densité  $\delta_1$  relative connue. Le vide est présent sous forme de micro-inclusions sphériques. Dans un second niveau, on forme un composite unidirectionnel dont la structure transversale est ordonnancée selon la seconde structure de Hashin. La matrice est formée du matériau poreux construit dans la première étape. Les fibres sont constituées du solide de référence. La fraction volumique des fibres  $\delta_2$  constitue le second paramètre de la microstructure, de sorte qu'au total, la microstructure est décrite par deux paramètres comme le matériau de rang 2. Puisque le matériau est orthotrope, les variables de conception du matériau composite poreux sont au nombre de 3 si on y inclut l'angle d'orthotropie local.

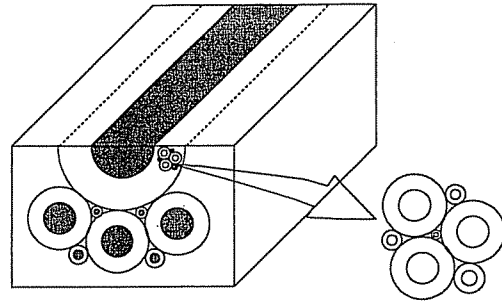


Figure 26 : Double structure de Hashin

La densité totale du composite est facile à obtenir. Elle est donnée par :

$$\rho/\rho_0 = \delta_1(1 - \delta_2) + \delta_2 = \delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2 \quad (26)$$

Cette expression est identique à la formule de la densité des matériaux feuilletés de rang 2 ou aux micro-inclusions rectangulaires.

La raideur est plus difficile à obtenir sous forme analytique, mais pour une application numérique, les coefficients d'élasticité homogénéisés s'obtiennent facilement en utilisant les formules d'homogénéisation de l'approximation de Mori et Tanaka pour le premier niveau, et les formules de Hill et Hashin, pour le second niveau. Pour l'état plan de contrainte, la matrice de Hooke est alors donnée par :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 E_T/E_L} & D_{12} &= \frac{\nu_L E_L}{1 - \nu_{LT}^2 E_T/E_L} \\ D_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 E_T/E_L} & D_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (27)$$

Lorsqu'on représente graphiquement les termes de raideur effective en fonction des paramètres de la microstructure, on est frappé par la douceur des courbes de la relation fonctionnelle. On remarque aussi que la double microstructure de Hashin possède une raideur non nulle en cisaillement. Enfin, on constate que la présence des fibres de matière renforce toujours la raideur dans la direction des fibres.

Ceci signifie que, contrairement aux matériaux feuilletés de rang 2, la direction d'orthotropie de raideur forte reste toujours dirigée selon l'axe des fibres. Ces caractéristiques de la raideur ont une influence très positive sur le processus d'optimisation numérique. D'abord, nous avons constaté que, dans les applications numériques, la vitesse de convergence du processus d'optimisation est beaucoup plus grande que celle que l'on obtient avec les matériaux de rang 2. La remise à jour de l'angle d'orthotropie est notamment beaucoup plus rapide. Ensuite, la convergence est très monotone. En conclusion, le matériau se prête bien à l'optimisation numérique.

### 2.3 Comparaison des différentes microstructures en optimisation topologiques

On compare maintenant les différents matériaux sur le critère de leur utilisation en optimisation topologique. La comparaison des différentes microstructures est effectuée sur un *benchmark* très classique dans la littérature relative à l'optimisation topologique. Il s'agit d'une poutre cantilever courte dont les dimensions sont données à la figure 27 ci contre. Toutes les données sont exprimées en unités MKS. Le module de Young et le coefficient de Poisson du solide valent respectivement  $E=100\text{GPa}$  et  $\nu=0.3$ . On adopte un maillage régulier de  $56 \times 36$  éléments finis du second degré, soit 6048 ou 2014 variables de

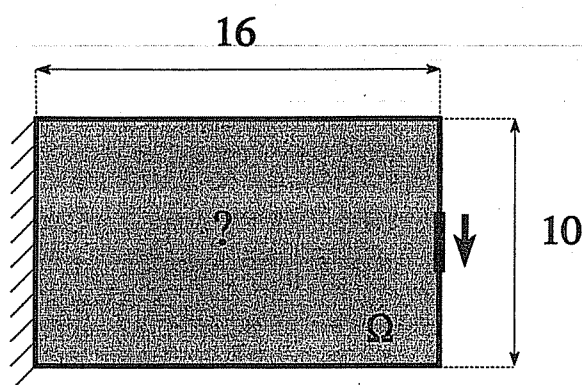


Figure 27 : Problème de la poutre cantilever courte

conception respectivement pour les matériaux orthotropes avec deux paramètres de microstructure et un angle d'orthotropie (ex. matériau feuilletés de rang 2 ou la double microstructure de Hashin) ou un seul paramètre de microstructure (ex. matériau avec des inclusions sphériques, cylindriques, ou matériau SIMP). On prend une borne de 37.5% sur le volume total admissible.

On reproduit aux figures suivantes les distributions de matières obtenues avec les différentes microstructures. On constate d'abord qu'elles sont toutes relativement concordantes. Des différences apparaissent néanmoins.

Les microstructures orthotropes (rang 2 et double microstructure de Hashin) pénalisent plus faiblement les densités intermédiaires que les microstructures isotropes. Les distributions de matière qui en résultent font une large part aux zones de densités intermédiaires et leurs contours sont donc beaucoup plus doux. La topologie qui s'en dégage est souvent plus floue. Les solutions qui sont obtenues avec les matériaux de rang 2 offrent cependant une valeur de référence pour la compliance minimale. Les matériaux en double structure poreuse sont faiblement sub-optimaux, mais cette microstructure présente l'avantage de refléter les propriétés de matériaux unidirectionnels et d'être stables sous plusieurs cas de charge.

Les microstructures isotropes permettent de générer des distributions aux topologies macroscopiques claires. On peut se rendre compte de l'influence très favorable de la pénalisation des densités intermédiaires sur la topologie et même sur la facilité de résolution du problème numérique. On remarque cependant l'apparition d'effets néfastes comme les modes parasites de distribution (distributions en damier) et l'apparition d'optimums locaux.



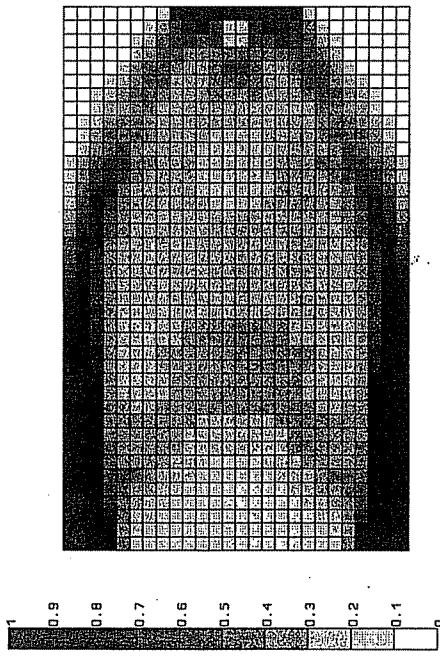


Figure 28 : Matériau lamellé de rang 2

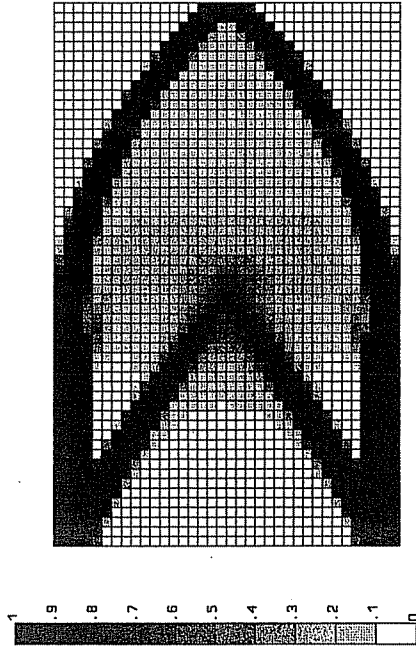


Figure 30 : Inclusions sphériques (Hashin - Mori Tanaka)

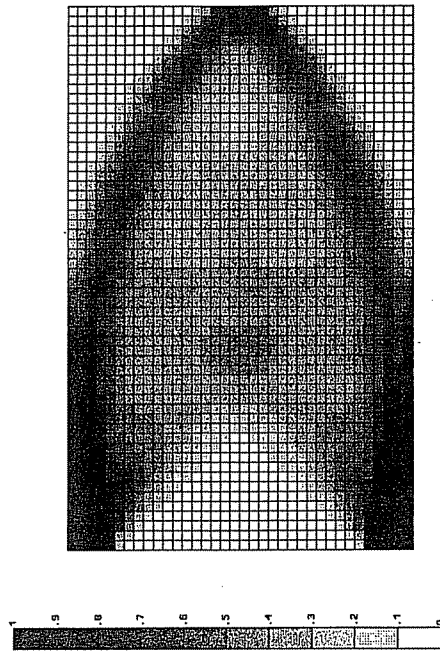


Figure 29 : Double microstructure de Hashin

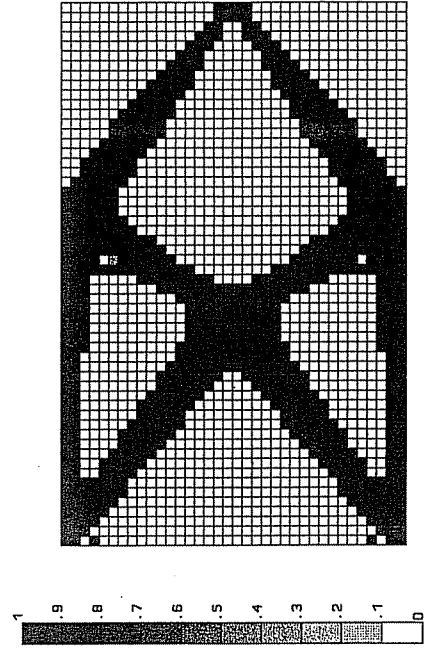


Figure 31 : Loi de type puissance ( $p=4$ )

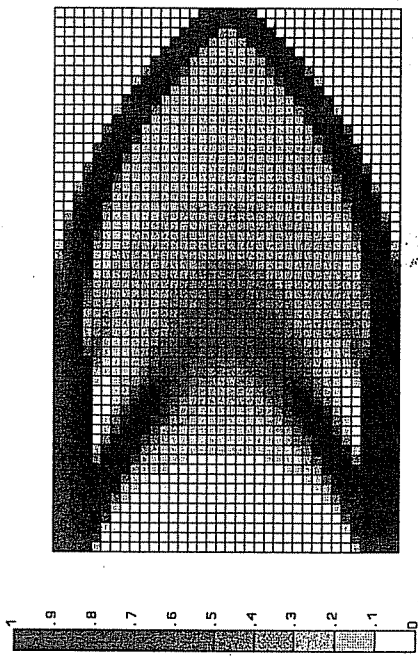


Figure 32 : Loi de Halpin Tsai  $\xi=1$

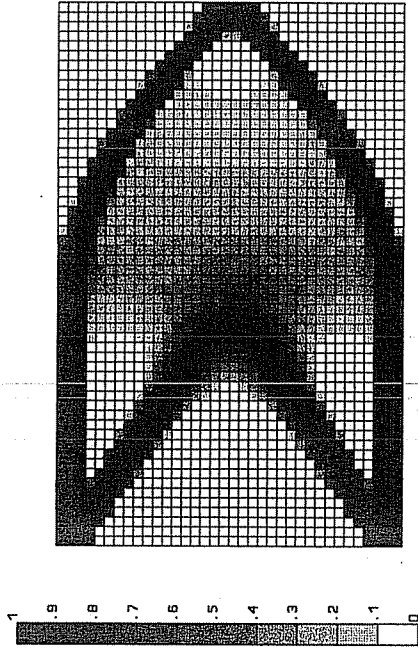


Figure 34 : Loi de type puissance ( $p=2$ )

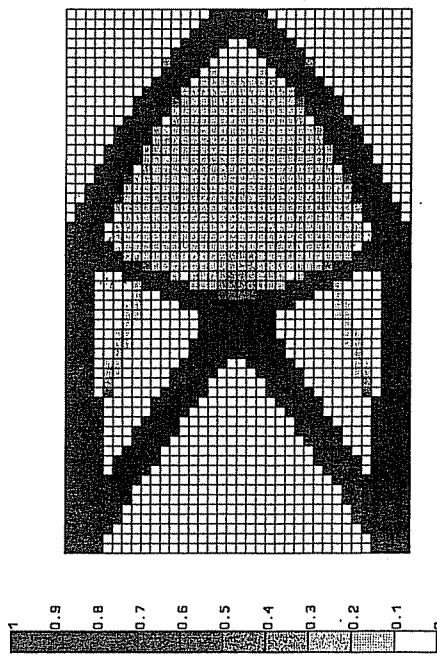


Figure 33 : Loi de Halpin Tsai  $\xi=0.269$

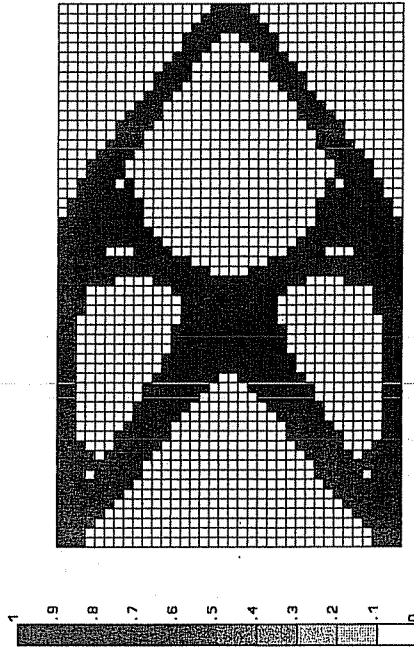


Figure 35 : Loi de type puissance ( $p=3$ )

### 3. ANALYSE DE SENSIBILITE ET CONDITIONS D'OPTIMALITE DES DISTRIBUTIONS DE MATIERE

#### 3.1 Analyse de sensibilité

##### Energie potentielle et compliance

L'équilibre statique de la structure discrétisée en éléments finis est régi par l'équation

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (28)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur du système discrétisé,  $\mathbf{q}$  représente les déplacements généralisés, inconnues du problème, et  $\mathbf{g}$  les charges conjuguées. La structure est décrite par  $n$  variables de conception que l'on note  $\mathbf{z}$ . En optimisation topologique, chacune des variables de conception peut représenter indifféremment une variable d'angle ou un paramètre de microstructure.

La *dérivée première des déplacements généralisés* s'obtient facilement en différentiant chaque membre de l'équation d'équilibre par rapport à la variable de conception  $z_i$ . Pour chaque dérivée, on résout le système additionnel :

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} \right) \quad (29)$$

Il y a plusieurs grandeurs énergétiques : d'abord, l'énergie potentielle de déformation  $U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$ , ensuite, la *compliance* ou énergie potentielle des charges  $P = \mathbf{g}^T \mathbf{q}$ , enfin, l'énergie potentielle totale de la structure  $\Pi(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) - P(\mathbf{q})$ . A l'équilibre toutes ces grandeurs sont liées par la relation de Clapeyron :

$$\Pi(\mathbf{q}) = -U(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} P(\mathbf{q}) \quad (30)$$

En conséquence, on se limite au développement des dérivées de l'énergie potentielle de déformation sachant que l'on peut facilement adapter ces résultats de dérivées aux autres grandeurs énergétiques.

Si l'on dérive l'expression de l'énergie potentielle de déformation et si l'on tient compte de la symétrie de la matrice de raideur, on a :

$$\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} \quad (31)$$

Il serait prématuré de s'arrêter à cette expression, car il est nécessaire de déterminer les dérivées de déplacements généralisés pour connaître la valeur des dérivées de l'énergie. En poursuivant, on introduit la valeur des dérivées des déplacements dans cette équation.

On obtient alors une expression beaucoup plus intéressante qui ne demande plus aucune substitution arrière :

$$\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial z_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} \quad (32)$$

L'énergie étant une grandeur globale, mais localisée :  $U = \sum U_e$ , on peut évaluer les dérivées de l'énergie élément fini par élément fini. Si, de plus, la variable de conception  $z_i$  ne porte que sur un seul élément d'indice "e", alors la dérivée première de l'énergie admet l'expression suivante qui permet le calcul au niveau de l'élément :

$$\frac{\partial U_e(\mathbf{q})}{\partial z_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial z_i} \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial z_i} \quad (33)$$

Ce résultat est généralement connu sous le nom de *principe de localisation des dérivées de l'énergie*.

La formulation qui vient d'être exposée, et qui est souvent trop peu connue, permet de gagner un temps de calcul considérable lors de l'analyse de sensibilité. Ce gain est très appréciable compte tenu de la discrétisation assez fine qui est nécessaire à la résolution du problème de topologie.

### Fréquences propres

Les vibrations libres ou les charges critiques d'instabilité de la structure sont déterminées par une équation générale aux valeurs propres du type :

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad (34)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur discrétisée, où  $\mathbf{M}$  est soit la matrice de masse, soit la matrice de stabilité, et où les valeurs propres  $\lambda$  et les vecteurs propres  $\mathbf{q}$  sont les solutions propres du problème. Pour le problème des vibrations libres, les valeurs propres s'interprètent comme le carré des pulsations propres du système et les vecteurs propres représentent les modes propres de vibration. En analyse de stabilité, la valeur propre correspond au facteur de charge pour lequel le flambement de la structure survient avec un mode donné par le vecteur propre associé.

Comme les modes propres ne sont connus qu'à un facteur multiplicatif près, on les norme généralement au moyen d'une matrice définie positive  $\mathbf{W}$ . Pour le problème des vibrations, c'est souvent la matrice de masse qui sert à définir la norme des vecteurs propres :

$$\mathbf{q}^T \mathbf{W} \mathbf{q} = 1 \quad (35)$$

Dans une analyse simplifiée, on suppose que les valeurs propres sont toutes distinctes et rangées par ordre croissant :

$$0 < \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \dots < \lambda^{(n)} \\ \mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \dots, \mathbf{q}^{(n)} \quad (36)$$

Pour connaître les dérivées premières des valeurs et des modes propres, on dérive successivement l'équation aux valeurs propres :

$$(K - \lambda^{(k)} M) \frac{\partial q^{(k)}}{\partial z_i} = \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_i} M q^{(k)} - \left( \frac{\partial K}{\partial z_i} - \lambda^{(k)} \frac{\partial M}{\partial z_i} \right) q^{(k)} \quad (37)$$

et l'équation de normalisation :

$$q^{(k)T} W \frac{\partial q^{(k)}}{\partial z_i} = -\frac{1}{2} q^{(k)T} \frac{\partial W}{\partial z_i} q^{(k)} \quad (38)$$

Il faut garder à l'esprit que la dérivation de ces équations n'a de sens que lorsque toutes les fréquences sont distinctes. Dans le cas où il existe des fréquences propres confondues, le problème est non différentiable et on ne peut plus parler que de dérivée directionnelle. Nous laisserons cependant de côté ce problème qui sort du cadre de cet exposé; on peut trouver dans la littérature des développements plus élaborés que ceux qui sont exposés ici (par exemple Haug, Komkov et Choi, 1983, ou, de manière plus simplifiée, Haftka et Adelman, 1993).

Les dérivées des valeurs propres se déduisent en prémultipliant la première des équations par le mode propre  $k$  :

$$\frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_i} = \frac{1}{m^{(k)}} q^{(k)T} \left( \frac{\partial K}{\partial z_i} - \lambda^{(k)} \frac{\partial M}{\partial z_i} \right) q^{(k)} \quad , \quad m^{(k)} = q^{(k)T} M q^{(k)} \quad (39)$$

Le nombre  $m^{(k)}$  est la masse généralisée du mode  $k$ , souvent normée à l'unité. Tout comme dans le calcul de l'énergie de déformation, on constate que la dérivée première de la valeur propre (la pulsation propre de vibration ou la charge critique d'instabilité) ne nécessite rien d'autre que la connaissance des dérivées des matrices de raideur, de masse ou de stabilité. Le calcul de la valeur propre  $k$  ne fait pas intervenir les autres modes propres; elle se détermine en fonction des seules caractéristiques du mode  $k$  : le mode propre  $k$  et la valeur propre  $k$ .

### Conclusion

L'analyse de sensibilité des grandeurs énergétiques et des fréquences propres est particulièrement simple, car elle ne nécessite la résolution d'aucun cas de charge additionnel et elle peut s'évaluer au moyen d'opérations au niveau des éléments.

### 3.2.2 Conditions d'optimalité

Quelle que soit la microstructure locale, on suppose qu'elle est complètement décrite par  $np$  paramètres:  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, np$ ), auxquels il faut adjoindre l'angle d'orthotropie  $\theta$ . Sans perte de généralité pour le raisonnement, on traitera le problème sous forme discrétisée. Si le champ des variables de conception prend une valeur constante par élément fini, chaque élément fini porte  $np$  variables de microstructure.

## Le problème fondamental

$$\begin{aligned}
& \min_{\mu_i^e, \theta^e} && \mathbf{g}^T \mathbf{q} \\
& \text{s.t.} && V \leq \bar{V} \\
& && 0 \leq \mu_i^e \leq 1
\end{aligned} \tag{40}$$

admet la fonction Lagrangienne :

$$L(\mu_i, \theta, \Lambda) = \mathbf{g}^T \mathbf{q} + \Lambda (\sum_e \rho_e V_e - \bar{V}) + \sum_e \sum_i^{np} \{ (1 - \mu_i^e) \lambda_{\mu_i^+}^e - \mu_i^e \lambda_{\mu_i^-}^e \} \tag{41}$$

Si la matrice de raideur est définie positive, on peut écrire les conditions d'optimalité relatives aux variables de conception de chaque élément fini :

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \mu_i^e} \mathbf{q}_e + 2 \mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \mu_i^e} + \Lambda \frac{\partial \rho_e}{\partial \mu_i^e} V_e + \lambda_{\mu_i^+}^e - \lambda_{\mu_i^-}^e = 0 \quad (i=1 \dots ne) \\
& -\mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \theta^e} \mathbf{q}_e = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

Si nous analysons ces conditions d'optimalité, on s'aperçoit que les variables associées à la microstructure et les variables d'angle d'orthotropie jouent un rôle différent.

D'abord, les conditions d'optimalité associées aux variables d'angle ne portent que sur la raideur locale, car la densité locale  $\rho$  et les forces de volume ne dépendent pas de l'orientation d'orthotropie  $\theta$ . Dès lors, la deuxième condition d'optimalité ne porte que sur la fonction objectif et elle correspond à l'optimum d'un problème non contraint. Puisqu'il s'agit des dérivées de l'énergie de déformation, la condition d'optimum pour les angles d'orthotropie correspond au minimum de l'énergie potentielle de déformation pour ces variables.

Ensuite, les conditions d'optimalité relatives aux variables de microstructures sont les plus complexes. Elles font intervenir à la fois l'énergie, la fonction objectif, la contrainte de volume et les contraintes de borne. L'ensemble des conditions d'optimalité relatives aux variables de la microstructure sont le reflet d'un optimum contraint.

Enfin, les paramètres de microstructure  $\mu_i$  n'apparaissent pas explicitement au sein de la troisième condition d'optimalité de l'angle d'orthotropie et réciproquement, la variable  $\theta$  est absente du système formé par les conditions d'optimum des variables microstructurales. Les conditions d'optimum des variables de densité et d'orthotropie sont évidemment couplées par la dépendance implicite des déplacements élastiques et de la matrice de raideur par rapport à toutes les variables de conception. Mais, si on "linéarise" le problème au premier ordre ou au second ordre, c'est-à-dire si on remplace chaque fonction du problème d'optimisation par une approximation séparable, le problème d'optimisation des variables d'angles est découplé du problème d'optimisation des variables de microstructure.

En conséquence, il est fort tentant de résoudre séparément les problèmes pour les deux groupes de variables, comme le suggère l'examen des conditions d'optimalité.

Le problème d'optimisation en termes des variables de microstructures est le plus complexe. C'est un problème d'optimisation non linéaire et non explicite avec une contrainte. En conséquence, il est naturel d'aborder la résolution de ce problème d'optimisation avec un algorithme de programmation mathématique. La nature du problème d'optimisation est fort semblable à un problème de dimensionnement de structure. On peut tirer parti du savoir-faire disponible pour résoudre ce type de problème d'optimisation. Comme on l'a remarqué, les conditions d'optimalité pour les angles d'orthotropie se présentent sous une forme relativement simple; elles sont équivalentes au minimum de l'énergie potentielle de déformation locale. La nature périodique des variables d'angle ainsi que la nature fortement non linéaire des formules de changement de repère (les coefficients élastiques forment un tenseur d'ordre quatre) constituent des difficultés majeures pour la résolution numérique de cette équation. Elles introduisent plusieurs extremums relatifs. La solution au problème provient de l'étude approfondie des extremums de l'énergie potentielle de déformation en état plan qui a été menée à bien, parallèlement, par Pedersen (1989, 1990 et 1993) ainsi que par Gibiansky et Cherkov (1988). Cette analyse a abouti à l'établissement d'une solution analytique remarquable. Bendsøe (1989), ensuite Suzuki et Kikuchi (1991) ont adopté cette solution comme base de la remise à jour de l'angle d'orthotropie local, selon une méthode de type critère d'optimalité. Cette technique donne des résultats très satisfaisants et l'algorithme converge rapidement vers une solution stationnaire.

### 3.3 Résolution du problème partiel d'optimisation par rapport aux variables d'angle et solution analytique du problème d'orientation optimale

Le second problème partiel que l'on doit résoudre est le problème d'optimisation relatif aux variables d'angles d'orthotropie. Si les paramètres de la microstructure y sont fixés, la solution des conditions d'optimalité du problème de topologie par rapport aux angles d'orthotropie locaux est équivalente à celle du problème du minimum de l'énergie de déformation. Pour le problème fondamental, la condition d'optimalité correspond à la solution du problème non contraint :

$$\min_{\theta} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (43)$$

La solution du problème de la distribution de l'angle d'orthotropie est toujours abordée par le biais de la solution du problème non contraint du minimum de l'énergie élastique locale.

L'étude est tout d'abord basée sur la constatation que, dans le cas d'une structure élastique linéaire, la dérivée de l'énergie potentielle élastique peut être effectuée avec un champ de déformation ou de contrainte constant :

$$\frac{dU}{dz} = - \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\varepsilon} \text{ fixés}} = \left( \frac{\partial U^c}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\sigma} \text{ fixés}} \quad (44)$$

pour toute variable de conception  $z$ . Si  $\theta_e$  est l'angle d'orthotropie local supposé constant sur le sous-domaine  $\Omega^e$  de volume  $V_e$  et de densité  $u_e$ , la dérivée de l'énergie prend la forme locale :

$$\frac{dU}{d\theta_e} = - V_e \left( \frac{\partial u_e}{\partial \theta_e} \right)_{\boldsymbol{\varepsilon} \text{ fixés}} \quad (45)$$

A présent, on dérive les conditions d'optimalité de l'énergie à champ de déformation constant. Dans les axes d'orthotropie (1,2) où les relations tensions-déformations sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

On prend la convention d'orienter l'axe de raideur maximale selon l'axe 1, défini par la condition  $D_{11} \geq D_{22}$ . On exprime l'énergie de déformation dans les axes d'orthotropie :

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} D_{11} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} D_{22} \varepsilon_{22}^2 + D_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2D_{66} \varepsilon_{12}^2 \end{aligned} \quad (47)$$

On développe ensuite les déformations en fonction des déformations principales  $\varepsilon_I$  et  $\varepsilon_{II}$  (avec la convention  $|\varepsilon_I| \geq |\varepsilon_{II}|$ ). La formule de changement de repère fait appel à l'angle  $\psi$  mesurant la rotation qui amène le repère des déformations principales  $(\varepsilon_I, \varepsilon_{II})$  sur le repère d'orthotropie (1,2) comme le montre la figure 36

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2\psi \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) - (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2\psi \\ \varepsilon_{12} = -\frac{1}{2} (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \sin 2\psi \end{cases} \quad (48)$$

On note, par  $\alpha$ , l'angle qui mesure la position du repère des déformations principales par rapport au premier axe structural  $x$  et, par  $\theta$ , l'angle entre le repère matériel et le repère structural. Les trois angles  $\alpha$ ,  $\psi$  et  $\theta$  sont évidemment liés par la relation :

$$\theta = \psi + \alpha \quad (49)$$

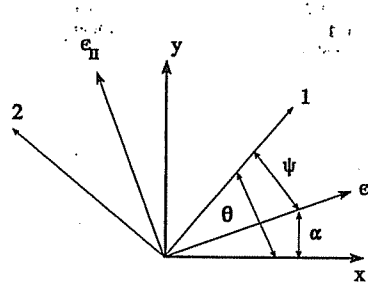


Figure 36 : Définition des repères et des angles.



On peut déterminer la dérivée première de l'énergie par rapport à l'orientation du repère d'orthotropie :

$$\frac{\partial u_e}{\partial \theta_e} = \frac{\partial u_e}{\partial \psi_e} \quad (50)$$

Lorsqu'elle est exprimée en fonction des déformations principales, il est possible de dériver l'énergie élastique par rapport à l'angle  $\psi$  en maintenant les déformations fixées :

$$\frac{\partial u_e}{\partial \psi_e} = -\frac{1}{2} (\epsilon_I + \epsilon_{II}) \sin 2\psi [\alpha (\epsilon_I + \epsilon_{II}) + \beta (\epsilon_I - \epsilon_{II}) \cos 2\psi] \quad (51)$$

avec les paramètres du matériau :

$$\alpha = D_{11} - D_{22} \quad , \quad \beta = D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - 4D_{66} \quad (52)$$

La dérivée première de l'énergie de déformation s'annule pour les angles suivants :

$$\begin{aligned} \sin \psi = 0 & \Leftrightarrow \psi = 0 \text{ ou } \psi = \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{et} & \\ \cos 2\psi = -\gamma & \text{ avec } \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\epsilon_I + \epsilon_{II}}{\epsilon_I - \epsilon_{II}} \end{aligned} \quad (53)$$

L'étude des signes de la dérivée seconde nous renseigne sur la nature des points stationnaires :

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial \psi_e^2} = -(\epsilon_I + \epsilon_{II}) [\alpha (\epsilon_I + \epsilon_{II}) \cos 2\psi + \beta (\epsilon_I - \epsilon_{II}) \cos 4\psi] \quad (54)$$

Le signe de la courbure et la nature des points stationnaires dépendent du paramètre  $\beta$ , reflet de l'importance de la raideur en cisaillement du matériau orthotrope. Le tableau 1 reproduit la synthèse des caractéristiques de chaque solution telle qu'elle est rapportée par Pedersen (1990).

Angle de stationnarité $\psi$	Faible raideur en cisaillement $\beta > 0$		Forte raideur en cisaillement $\beta < 0$	
	$0 \leq \gamma \leq 1$	$1 < \gamma$	$\gamma < -1$	$-1 \leq \gamma \leq 0$
$0^\circ$	Min. global	Min. global	Min. global	Max. local
$90^\circ$	Min. local	Max. global	Max. global	Max. global
$\cos 2\psi = -\gamma$	Max. global			Min. global

Tableau 1 : Sélection des arguments optimaux pour le critère d'optimalité du maximum/minimum de l'énergie potentielle élastique (Pedersen, 1990).

Pour de faibles raideurs en cisaillement  $\beta \geq 0$ , le minimum global de l'énergie de déformation est atteint pour l'angle  $\psi = 0$ . Ce résultat intuitif signifie que dans la configuration de raideur maximale, les axes d'orthotropie sont alignés avec les déformations principales. Les matériaux composites poreux intervenant en optimisation topologique possèdent généralement une faible raideur en cisaillement, si bien que, dans ce cas pratique très important, la solution optimale correspond à la solution intuitive

du problème.

Pour des matériaux dont la raideur en cisaillement est importante  $\beta \leq 0$ , on choisit selon la valeur du paramètre  $\gamma$ , la solution  $\psi = 0$  ou  $\psi = \pm \frac{1}{2} \arccos(-\gamma)$ .

Enfin, à l'optimum, Pedersen (1990) a également montré que dans tous les cas, les axes d'orthotropie, les axes principaux de déformation et les axes principaux de contrainte coïncident.

## 4. RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

### 4.1 Description du problème

Le but de ce chapitre est de décrire une méthode de résolution efficace du problème d'optimisation topologique. Mathématiquement, le problème à traiter est un problème d'optimisation non linéaire que l'on peut ramener à la forme générale :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \\ i=1, \dots, n}} g_0(\mathbf{x}) \\ \text{avec } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (55)$$

Les  $n$  variables  $x_i$  sont les variables de conception du problème. Leur valeur est comprise entre la borne minimale  $\underline{x}_i$  et la borne maximale  $\bar{x}_i$ . La fonction objectif est notée  $g_0(\mathbf{x})$  tandis que les  $m$  contraintes sont représentées par les fonctions  $g_j(\mathbf{x})$ .

Dans les problèmes de topologie, la fonction objectif et les contraintes désignent habituellement des réponses structurales globales, comme une compliance ou une fréquence propre, ou bien des caractéristiques géométriques telles que la masse et le périmètre. Le problème de topologie présente les difficultés propres aux problèmes d'optimisation structurale. Toutes les restrictions sur le comportement mécanique sont généralement des fonctions implicites et fortement non linéaires des variables de conception. Le coût numérique de leur évaluation, et a fortiori celui de leurs dérivées, est fort onéreux puisqu'il requiert une analyse de la structure par éléments finis.

Bien qu'il implique peu de restrictions, le problème de topologie se distingue par un nombre très important de variables de conception, ce qui amplifie la difficulté de sa résolution. Il est courant d'introduire 1.000 à 10.000 variables de conception pour résoudre un problème réel. Par contre, le nombre de contraintes est variable : il passe d'une seule contrainte sur le volume pour le problème le plus simple à une dizaine de restrictions lorsque l'on traite des problèmes avec plusieurs cas de charge ou plusieurs fréquences propres.

Il est également apparu que la valeur des variables de conception à l'optimum est tout aussi importante que la valeur de la fonction objectif, puisque le but poursuivi est de déterminer la distribution de densité. Par la même occasion, il est important de remarquer que la vitesse de convergence de la distribution de densité est beaucoup plus lente que celle de la valeur de la fonction objectif. Pour que la convergence des variables de conception soit bien établie, il est courant de dépasser les 50 analyses. Par ailleurs, l'effort le plus important est souvent consacré à la phase finale de la convergence. Après une phase de convergence rapide des distributions de matière et des valeurs de la compliance, on observe une progression très lente du processus d'optimisation pour arriver aux contours définitifs de la structure. Dès lors, le but sera d'accélérer très fortement la vitesse de convergence en réduisant cette phase terminale. Cet objectif peut être atteint en choisissant de manière soignée les approximations structurales des restrictions. Outre les approximations structurales classiques du premier ordre (CONLIN, MMA...), nous proposons également d'utiliser de nouvelles techniques d'approximation de très haute qualité basées sur des développements du second ordre (MMA second ordre ou approximation quadratique séparable). L'inconvénient de ces approximations réside dans le fait que l'évaluation des dérivées secondes est très onéreuse. Pour pallier à cet inconvénient, nous disposons

maintenant de techniques de type Quasi-Newton qui préservent la nature diagonale des approximations successives des courbures. La stratégie de type BFGS pour matrice diagonale permet d'estimer les dérivées secondes de manière très satisfaisante avec un coût de calcul minime.

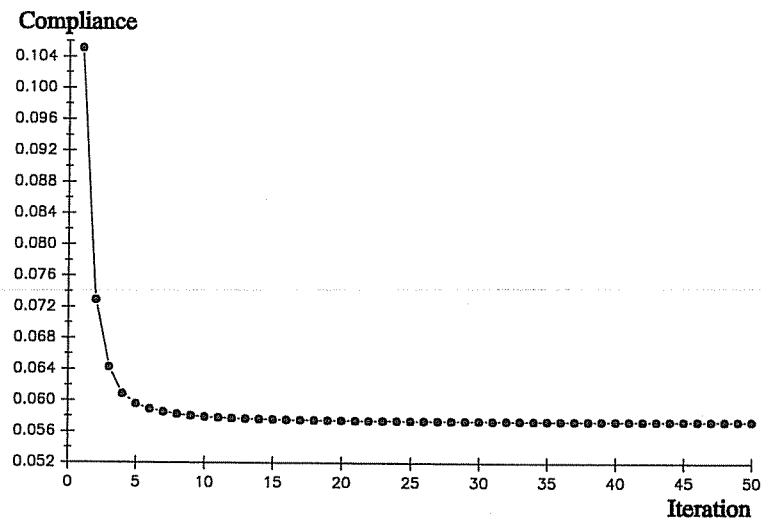


Figure 37 : Une courbe de convergence typique

#### 4.2 La stratégie de résolution : la méthode de programmation convexe séquentielle

Lorsqu'il n'y a qu'une seule contrainte, les critères d'optimalité permettent de résoudre facilement le problème d'optimisation topologique. Cette méthode de résolution présente l'avantage d'être peu sensible au très grand nombre de variables de conception. Mais, si on veut enrichir l'énoncé du problème de conception, les critères d'optimalité deviennent difficiles à généraliser. Lorsque l'on veut une procédure de résolution suffisamment flexible pour pouvoir s'adapter à une large variété de problèmes, il faut adapter une procédure plus générale basée sur les notions d'approximation séparable, de sous-problème convexe et de résolution par une méthode de programmation mathématique.

Pour perfectionner la résolution du problème de distribution de matière, il faut adopter une formulation combinant la notion d'approximation structurale, de sous-problème et d'algorithme de programmation mathématique. Cette stratégie est souvent regroupée sous le nom de *programmation séquentielle convexe*. Comme Fleury (1982) l'a montré, l'approche duale appliquée à la résolution des sous-problèmes approchés est une généralisation rigoureuse de la technique des critères d'optimalité. Il ne s'agit donc pas d'un rejet des critères d'optimalité utilisés précédemment en topologie.

La méthode de programmation mathématique est basée sur deux concepts :

- le remplacement du problème implicite par une séquence de sous-problèmes convexes explicites en utilisant des approximations des contraintes;
- la résolution des sous problèmes par une méthode de programmation mathématique : la méthode de maximisation lagrangienne ou méthode duale qui travaille dans l'espace des multiplicateurs de Lagrange associés aux restrictions du problème d'optimisation.

L'attrait de la programmation séquentielle convexe est multiple.

- La résolution duale permet de résoudre des problèmes d'optimisation avec un très grand nombre de variables de conception. De plus, la résolution duale permet de sélectionner automatiquement les contraintes actives. La maximisation Lagrangienne s'accommode d'un nombre indéterminé de contraintes.
- On peut aborder avec une procédure unique une large variété de problèmes de conception, indépendamment de leur formulation, qu'il y ait une ou plusieurs fonctions objectifs ou plusieurs restrictions. Les problèmes avec plusieurs cas de charge, plusieurs fréquences propres, une contrainte de périmètre... sont donc immédiatement accessibles. Dans l'avenir, on pourra également étudier des distributions de matière sur la base d'autres critères que la minimisation de la compliance, la maximisation de la fréquence propre fondamentale... En effet, la notion d'approximation structurale est indépendante de la nature des restrictions et de l'énoncé du problème, et la résolution duale peut fonctionner de manière fiable, telle une boîte noire, pour une grande variété de problèmes.
- On peut développer et employer de nouvelles approximations convexes de haute qualité utilisant les informations de dérivées secondes en vue d'améliorer la vitesse de convergence du processus d'optimisation.

En conclusion, l'approche de la programmation séquentielle convexe est incontournable pour les développements futurs de l'optimisation topologique : d'abord, pour qu'on puisse continuer à développer la méthode et son champ d'application, ensuite, pour qu'elle devienne une méthode de conception réellement industrielle.

### 4.3 Les méthodes duales

La maximisation Lagrangienne ou méthode duale s'impose pour résoudre les sous-problèmes d'optimisation, car le problème d'optimisation dans l'espace des variables primales est transformé en un problème de maximisation quasi non contrainte dans l'espace des multiplicateurs. L'avantage est multiple. D'abord, on remplace le problème d'optimisation avec contraintes par un problème de maximisation quasi non contrainte. Ensuite, la méthode duale constitue en elle-même une sélection automatique des contraintes actives. Enfin, on réduit très fortement la dimension du problème car la dimension de l'espace dual est donnée par le nombre de contraintes actives. Dès lors, le grand nombre de variables de conception n'est pas un obstacle dans le problème dual si les relations entre les variables primales et les variables duales sont simples à calculer. C'est généralement le cas lorsqu'on emploie des approximations convexes séparables, car on peut évaluer les relations entre les variables primales et duales de manière découplée pour chaque variable primale. Dans certains cas, on peut même établir une expression analytique et explicite de la relation entre les variables primales et duales.

### 4.4 Les approximations structurales

En optimisation structurale, la notion d'approximation est une composante essentielle de la méthode de programmation convexe séquentielle. Pour utiliser de manière performante les méthodes duales, la séparabilité est très importante afin de pouvoir résoudre des problèmes avec un très grand nombre de variables de conception. L'approximation doit être également convexe pour que le problème d'optimisation soit bien conditionné. Enfin, les approximations doivent être de haute qualité pour

augmenter la stabilité et la vitesse de convergence du processus d'optimisation. Pour une efficacité maximale, il faut choisir l'approximation structurale en fonction des propriétés particulières des réponses structurales mises en jeu. Le choix d'approximations convexes de haute qualité est favorable à l'accélération du processus d'optimisation en augmentant la précision des sous-problèmes. La suite des solutions des sous-problèmes converge alors souvent en un nombre d'itérations plus faible que 50 itérations (souvent 30 environ).

Rappelons d'abord la nature des principales approximations structurales

### Approximations du premier ordre

Les approximations structurales du premier ordre sont basées sur les dérivées premières seules. Les différents schémas de linéarisation s'obtiennent par un changement de variable particulier. La plupart sont basés sur le rôle essentiel des variables inverses.

■ L'approximation en fonction des variables inverses est obtenue en développant la fonction structurale en série de Taylor de l'inverse de la variable de conception à la puissance  $p$  :

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{p} (x_i^0)^{p+1} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \left( \frac{1}{(x_i)^p} - \frac{1}{(x_i^0)^p} \right) \quad (56)$$

Cette approximation n'est pas convexe si la dérivée est positive.

■ La méthode de linéarisation convexe (CONLIN) (Fleury and Braibant, 1986) est une technique de linéarisation mixte basée sur le signe de la dérivée première, qui ne génère que des approximations dont la courbure est strictement positive ou nulle. Indépendamment du type de fonction structurale traitée, l'algorithme sélectionne une linéarisation en termes des variables directes si la dérivée est positive, et en termes des variables inverses si la dérivée est négative.

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{\frac{\partial g}{\partial x_i} \geq 0} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) - \sum_{\frac{\partial g}{\partial x_i} \leq 0} (x_i^0)^2 \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (57)$$

■ La Méthode des Asymptotes Mobiles (MMA) (Svanberg, 1987) est une généralisation de CONLIN. Dans le schéma MMA, chaque fonction est remplacée par sa linéarisation en fonction de deux types de variables intermédiaires  $1/(U_i - x_i)$  ou  $1/(x_i - L_i)$ . Les paramètres  $U_i$  et  $L_i$  sont les asymptotes relatives à la variable  $x_i$  et ils satisfont à  $L_i < x_i < U_i$ .

$$\tilde{g}(x) = r^0 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{U_i - x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{x_i - L_i} \quad (58)$$

avec :

$$p_i = \max \left\{ 0, (U_i - x_i)^2 \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} \right\} \quad q_i = \max \left\{ 0, -(x_i - L_i)^2 \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} \right\} \quad (59)$$

Les asymptotes mobiles  $U_i$  et  $L_i$  peuvent être choisies selon des procédures heuristiques (Svanberg, 1987) ou de lissage (Zhang et Fleury, 1994).

### Approximations du second ordre

Les approximations du second ordre demandent en plus la connaissance des informations de dérivées secondes.

■ L'approximation quadratique séparable (Fleury, 1989b) est la plus simple linéarisation que l'on puisse imaginer, car elle s'obtient par développement au second ordre de la restriction. Les termes non diagonaux de la matrice Hessienne sont omis pour conserver la séparabilité. Leur influence est compensée par l'introduction de termes de courbures additionnelles.

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g(x^0)}{\partial x_i^2} + \delta_{ii} \right) (x_i - x_i^0)^2 \quad (60)$$

■ La méthode MMA du second ordre (Smaoui *et al.*, 1988) est la généralisation de la méthode MMA primitive.

$$\tilde{g}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - b_i} \quad (61)$$

La sélection automatique des asymptotes mobiles est assurée en identifiant les courbures de l'approximation avec les dérivées secondes de la fonction.

$$a_i = -(x_i^0 - b_i)^2 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) \quad b_i = x_i^0 + 2 \frac{\partial g}{\partial x_i} / \max \left( \epsilon, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right) \quad (0 < \epsilon < 1) \quad (62)$$

### Estimation des courbures par une remise à jour de type BFGS préservant la structure diagonale des itérés

Pour employer des approximations du second ordre, on doit connaître les courbures des restrictions. Pour les approximations séparables, seules les dérivées diagonales sont nécessaires. Pour les très grands problèmes, l'analyse de sensibilité est très coûteuse. Afin d'éviter le problème de l'évaluation directe des dérivées secondes, on a l'idée de construire une approximation du Hessien par une remise à jour de type Quasi-Newton. Néanmoins, la procédure de remise à jour standard engendre des approximations complètes, ce qui réintroduit le problème de taille. On se tourne donc vers une procédure de quasi-Newton capable de générer une suite d'estimations diagonales du Hessien (Duisinx and Nguyen, 1997). L'algorithme est l'adaptation aux matrices diagonales de la théorie générale des remises à jour de quasi-Newton préservant la structure creuse des itérés (Thapa, 1981).

Si on passe d'un point de l'espace de conception  $x$  à un autre point  $x^+$ , on cherche à enrichir l'approximation diagonale du Hessien  $B$  de la réponse structurale avec une procédure de type quasi-Newton. Toutes les formules de mises à jour de ce type satisfont à l'équation de quasi-Newton.

$$B^+ s = y \quad \text{où} \quad s = x^+ - x \quad \text{et} \quad y = \nabla g(x^+) - \nabla g(x) \quad (63)$$

Une des formules les plus célèbres est sans doute la formule de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno ou formule BFGS:

$$B^+ = B + U_{BFGS} \quad \text{avec} \quad U_{BFGS} = \frac{yy^T}{s^T y} - \frac{Bs s^T B}{s^T B s} \quad (64)$$

Bien que la nouvelle approximation du Hessien produit par cette formule remplisse les conditions de symétrie, qu'elle soit définie positive et qu'elle satisfasse à l'équation de quasi-Newton, elle ne préserve pas la structure creuse ou diagonale de l'itéré précédent.

On note maintenant par  $B_D^+$  et par  $B_{ND}^+$  les matrices formées avec les éléments diagonaux et non-diagonaux de la mise à jour complète  $B^+$  tandis que l'on désigne par  $\hat{B}^+$  la mise à jour diagonale qu'on cherche à mettre en évidence. En suivant les théorèmes de Thapa (1981), cette mise à jour diagonale peut être mise en évidence en définissant une matrice diagonale de correction  $E$  qui sera telle que la nouvelle approximation diagonale  $\hat{B}^+ = B_D^+ + E$  soit la plus proche, en norme Frobenius, de l'ancienne estimation du Hessien  $B_D^+$  tout en continuant à satisfaire à l'équation de quasi-Newton:  $\hat{B}^+ s = y$ . La matrice de correction  $E$  que nous recherchons est la solution du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min \|E\|_F \\ \text{s.t. } E s = B_{ND}^+ s \\ E_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (65)$$

Par analogie avec les travaux de Toint (1977), sa solution s'écrit:

$$E = \text{diag}\{2\lambda_i s_i\}$$

où le vecteur  $\lambda$  est la solution triviale d'un système linéaire lui-aussi diagonal:

$$Q\lambda = B_{ND}^+ s = y - B s - U_D s \quad \text{avec} \quad Q = \text{diag}\{s_i^2\} \quad (67)$$

Le calcul de la mise à jour de type BFGS diagonale requiert la solution de ce dernier système. En outre, il n'est même pas nécessaire de calculer les termes hors diagonaux de la mise à jour standard, puisque suivant la formule (67) seuls les termes diagonaux sont utilisés. Ainsi, la mise à jour diagonale est une technique très peu coûteuse tant sur le plan des efforts de calcul que de l'espace mémoire. Elle est donc bien adaptée aux très grands problèmes que nous traitons.

Cette stratégie a été adaptée aux problèmes d'optimisation structurale afin d'y donner lieu à une suite rapidement convergente des estimations du Hessien des réponses structurales (Duysinx and Nguyen, 1996). Un des ingrédients principaux de cette adaptation consiste à tirer parti de la réduction de la non-linéarité des réponses structurales lorsqu'on les étudie dans l'espace des variables réciproques. Pour



cette raison, les courbures sont d'abord exprimées en termes des variables réciproques après un changement de variables. On réalise la remise à jour dans cet espace auxiliaire; après quoi, les courbures actualisées sont retransformées en termes des variables originales. Cette estimation des courbures est utilisée dans l'approximation du second ordre. Comme Duysinx et Nguyen (1996) l'ont remarqué, il est également très important de bien choisir l'approximation initiale des courbures de l'approximation structurale. Au plus l'estimation initiale est meilleure, au plus la convergence sera rapide. Dans l'espace des variables réciproques, une très faible courbure initiale donne de bons résultats, car ce choix correspond à un développement en termes de variables inverses. Dans l'espace des variables de conception, on peut également choisir les courbures relatives aux approximations CONLIN ou MMA. Finalement, il est bon d'amortir les modifications trop importantes de la courbures qui pourraient être proposées par l'algorithme de remise à jour, car elles peuvent entraîner des oscillations du processus d'optimisation.

#### *Des approximations structurales liées à la nature des restrictions*

Les dérivées premières des restrictions du problème de conception possèdent des caractéristiques très intéressantes. Les dérivées du volume par rapport aux variables de microstructure sont toujours positives de sorte qu'un développement linéaire constitue une bonne approximation.

La restriction de périmètre est par contre beaucoup plus compliquée. Bien que linéaire par morceau, elle est non monotone. De plus les sauts de densité entre les éléments introduisent des couplages avec les valeurs de la densité entre les éléments voisins. Une approximation satisfaisante s'obtient en considérant une linéarisation quadratique séparable dans laquelle on introduit une estimation heuristique de la courbure (Duysinx, 1996).

Les sensibilités de la compliance sont, par contre, toujours négatives de sorte que les développements en fonction des variables inverses sont naturellement convexes. Le développement CONLIN s'est révélé particulièrement efficace. MMA est également fort intéressant également, car l'ajustement de la courbure permet d'améliorer légèrement les propriétés de convergence. Si la vitesse de progression vers l'optimum est largement satisfaisante dans les premières itérations, elle est par contre beaucoup plus lente au voisinage de l'optimum.

Pour remédier à cet inconvénient, il convient d'introduire des informations de courbure dans l'approximation. Puisque le coût des dérivées secondes est beaucoup trop important, un bon compromis consiste à utiliser l'estimation des courbures approchées par une technique de BFGS pour matrice diagonale. Cette information du second ordre est injectée dans la méthode MMA du second ordre (DQNMMA) ou dans l'approximation quadratique séparable (DQNQUA). Duysinx (1996) a pu constater un gain appréciable sur le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à l'optimum pour un coût numérique additionnel minime.

L'approximation des fréquences propres de vibration est un peu plus délicate qu'elle ne l'est pour la compliance. D'une part, le signe des dérivées des fréquences propres est indéfini. D'autre part, le phénomène de croisement de fréquences peut rendre inapplicable la méthode de Quasi-Newton, car il faut être sûr que l'on applique toujours l'actualisation sur le même mode de vibration. Il en résulte que nous utilisons, soit l'approximation CONLIN, soit la méthode MMA du premier ordre. Ces deux approximations donnent entière satisfaction. Ce fait peut s'expliquer facilement lorsque les masses non structurales sont importantes. L'influence des variables de conception intervient alors principalement au travers de la raideur et le problème d'optimisation se comporte comme un problème d'optimisation de déplacement ou de compliance. Si le problème de compliance est approché de façon réaliste par l'approximation CONLIN, cette même approximation donnera des résultats semblables pour le

problème de vibration et pour le problème de la compliance minimale.

#### 4.5 Un exemple d'utilisation comparée des différentes approximations

Nous reprenons à nouveau le problème de la poutre cantilever courte pour illustrer l'utilisation des différentes approximations convexes en optimisation topologique. On considère, cette fois, une discrétisation plus large du domaine de conception, car on prend un maillage régulier de  $40 \times 26$  éléments finis du second degré. On sélectionne une loi matérielle artificielle de type puissance (SIMP) avec un exposant  $p=3$ , parce qu'elle est très souvent utilisée pour résoudre les applications pratiques. La densité étant supposée constante sur chaque élément, le problème d'optimisation comporte 1040 variables de conception pour la discrétisation introduite. Pour la contrainte de volume, on sélectionne naturellement l'approximation linéaire qui est exacte pour ce type de microstructure. On réalise l'optimisation topologique avec différentes approximations convexes de la compliance et on compare les différentes courbes de convergence.

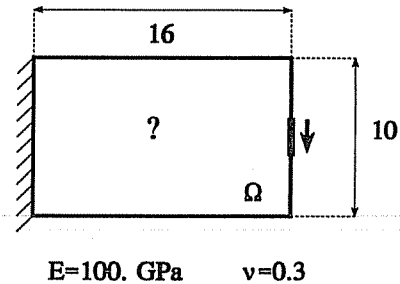


Figure 38 : Enoncé du problème de la poutre cantilever courte

Dans la première comparaison, on oppose trois approximations de la compliance. On utilise d'abord l'approximation CONLIN, qui est équivalente, ici, au développement en variables inverses  $y = 1/x$ , étant donné que toutes les dérivées premières sont négatives. Ensuite, on utilise la similitude qui existe entre le problème de distribution de matière et le dimensionnement d'une plaque d'épaisseur variable, de sorte qu'on essaie un développement en fonction des variables intermédiaires  $y = 1/x^3$ . Enfin, on fait la même expérience avec le schéma MMA généralisé muni d'une estimation des dérivées secondes par un BFGS diagonal en variables inverses (DQNMMA). Les courbes de convergence de la compliance sont présentées à la figure 39 tandis que l'histoire de la modification des variables de conception est étudiée à la figure 40.

L'approximation DQNMMA avec estimation des dérivées secondes par BFGS diagonal est l'approximation la plus performante. La fonction objectif est quasi stationnaire dès la 23<sup>ème</sup> itération. Le processus a complètement convergé après 27 itérations, car la modification maximale tombe en dessous de  $1.E-6$ . Dans les premières itérations, la courbe de convergence de l'approximation DQNMMA présente quelques cassures consécutives à des estimations encore un peu incertaines des dérivées secondes, mais la convergence vers la diagonale des dérivées secondes semble fiable malgré le grand nombre de variables de conception. On note aussi que la convergence finale est semblable à celle d'une méthode d'ordre 2, ce que l'on peut constater dans le gain de chiffres significatif.

CONLIN montre également des performances fort intéressantes. L'histoire de la convergence est parfaitement monotone et la vitesse de convergence est rapide, surtout dans les premières itérations. La fonction objectif est quasi stationnaire après 25 itérations. La convergence aux abords de l'optimum est cependant beaucoup plus lente, ce qui peut s'expliquer par le fait que l'on utilise ici un schéma du premier ordre. A partir de la 25<sup>ème</sup> itération, la résolution du sous-problème d'optimisation devient de plus en plus difficile et le processus d'optimisation est arrêté à la 30<sup>ème</sup> itération. On ne peut obtenir une modification des variables de conception inférieure à  $1.E-2$ . Cette toute petite oscillation des valeurs des variables de conception est probablement due, d'une part, à une trop faible convexité de l'approximation CONLIN et, d'autre part, au fait que CONLIN est une approximation d'ordre 1.

L'emploi de la puissance inverse de la variable crée une approximation beaucoup trop conservative. La courbe de convergence est très douce, mais la vitesse de convergence est fortement pénalisée par rapport aux deux approximations précédentes. Après 30 itérations, la fonction objectif est toujours à 10 % de sa valeur optimale et la convergence est loin d'être terminée.

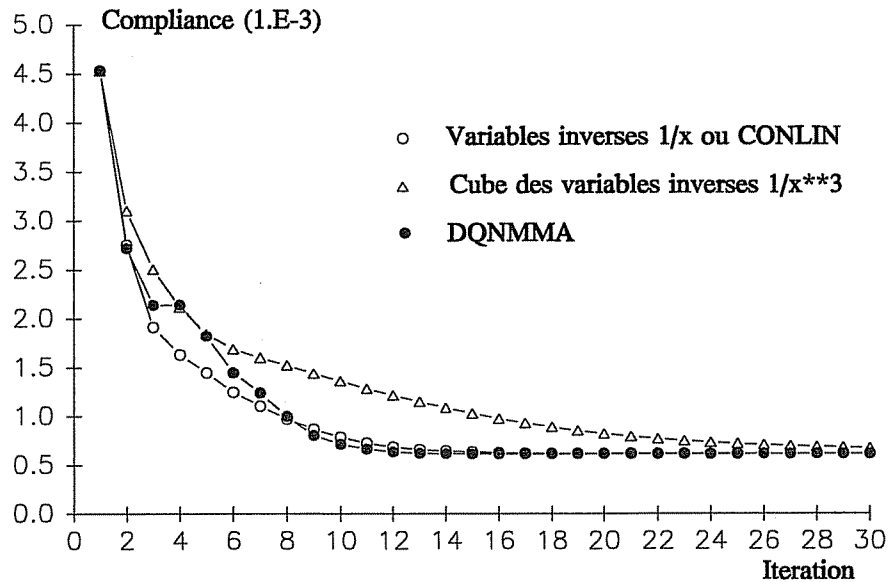


Figure 39 : Courbes de convergence pour différents schémas d'approximation

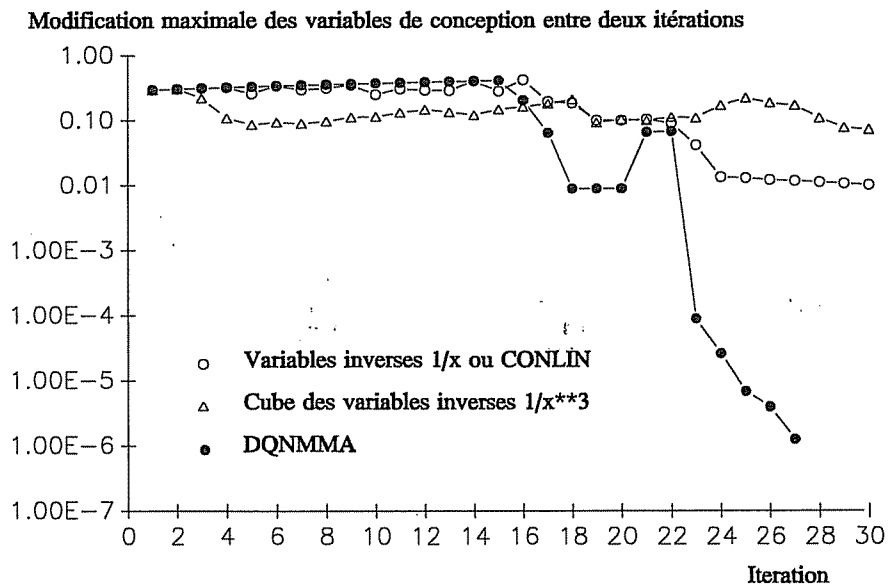


Figure 40 : Modification maximale des variables de conception au cours de l'optimisation avec CONLIN, le cube des variables inverses et DQNMMA



## 5. L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE : UN PREPROCESSEUR POUR L'OPTIMISATION DE FORME

### 5.1 La conception des structures et l'optimisation topologique

#### *De la nécessité de l'optimisation topologique dans la conception des structures de haute performance*

La topologie est un paramètre très important de la définition d'une structure. Il affecte de façon cruciale la performance que l'on attend du composant mécanique. Un mauvais choix de la connectivité des domaines et des composants élémentaires d'une pièce mécanique pénalise fortement son efficacité. Un choix malheureux de la topologie peut même empêcher l'existence d'une conception qui satisfasse à toutes les exigences du cahier des charges.

Avant la réalisation d'outils d'optimisation topologique, l'ingénieur ne pouvait compter que sur son intuition et son expérience pour choisir la silhouette générale d'une structure dont il devait créer l'architecture. Il existe donc là une demande pour disposer d'une méthode rationnelle afin de déterminer la connectivité des composants mécaniques. La méthode d'homogénéisation apporte une réponse à cette question.

Etant donnée qu'une répartition optimale de matière a tout le loisir de modifier la topologie, la forme et les dimensions de la structure, les gains que l'on peut espérer de l'optimisation topologique sont largement supérieurs à ceux que l'on obtient en employant les techniques d'optimisation de forme ou de dimensionnement séparément. Si on compare les solutions obtenues avec des techniques d'optimisation, on estime souvent que le dimensionnement automatique permet de gagner 5 à 10% sur la fonction objectif, tandis que l'optimisation de forme peut faire épargner 10 à 30% de la fonction coût. L'amélioration obtenue avec une topologie optimale ou quasi optimale peut se compter jusqu'à 100%. Ces chiffres permettent de conclure que la conception des structures de très haute performance doit passer par l'utilisation de techniques d'optimisation topologique.

#### *De la nécessité actuelle d'interpréter les résultats de l'optimisation topologique et de les compléter par d'autres techniques d'optimisation*

Comme nous le savons, l'optimisation topologique fournit la silhouette brute de la pièce à concevoir. Le processus de conception ne s'arrête cependant pas à ce stade de la conception. La structure est encore loin d'être réalisable en pratique. Le concepteur doit interpréter la distribution de matière et en déduire un autre modèle. Il faut soumettre celui-ci à l'épreuve d'autres moyens de calcul. Il faut aussi en tirer des plans afin de fabriquer et de produire la pièce mécanique souhaitée.

Les résultats de l'optimisation topologique doivent être interprétés et être complétés par d'autres techniques de conception pour plusieurs raisons.

Premièrement, la fabrication des structures comportant des microstructures poreuses est impossible à réaliser dans l'état actuel de notre technologie. Les *microstructures optimales* sont les seules qui permettent d'assurer la relaxation complète du problème de distribution de matière et, par là, l'indépendance de la solution vis-à-vis du maillage. Cependant, de par sa nature, la microstructure optimale est telle que la matière reprend au mieux les efforts afin d'offrir la raideur locale la plus élevée pour les conditions de sollicitation. La structure que l'on formerait avec cette distribution de matière serait la meilleure que l'on puisse imaginer, compte tenu des critères de conception retenus. Dans cette structure idéale, l'organisation microscopique de la matière est si parfaite que la pénalisation des matériaux composites, dont la densité est située entre le vide et le solide, est faible.

Et dans la distribution de matière optimale, il est donc normal d'observer, comme on a pu le faire, de larges zones de densité intermédiaire. A l'heure actuelle, il est impossible de produire ces microstructures optimales ou une microstructure qui s'en rapproche fortement. L'analyse de leur microgéométrie et de leurs propriétés montre aussi qu'elles sont instables pour des conditions de sollicitations autres que celles qui ont été envisagées dans la conception, de sorte qu'en pratique, la pièce mécanique, qui serait réalisée en se conformant strictement à la distribution de matière optimale et à sa microstructure, serait inutilisable. Nous avons également utilisé d'autres microstructures suboptimales dont la stabilité est meilleure. Malheureusement, pour le moment, la fabrication de ces microstructures n'est pas envisageable non plus.

Deuxièmement, la solution qui ressort du processus d'optimisation topologique n'est optimale que pour les contraintes globales qui ont été prises en compte : compliance, fréquence propre, volume et périmètre. La structure doit encore remplir d'autres contraintes, qui ne peuvent pas être prises en considération par la méthode d'homogénéisation dans l'état de son développement actuel. La conception finale doit encore satisfaire à des critères locaux de tension, de déplacement ou de stabilité, par exemple. Outre ces contraintes mécaniques, il existe aussi de nombreuses restrictions d'origine technologique. Pour adapter la solution à ces exigences mécaniques et technologiques, il faut poursuivre le processus de conception et soumettre le résultat de l'optimisation topologique à d'autres outils de conception et d'optimisation.

Troisièmement, la distribution de matière "discrétisée" ne possède pas de contours doux et lisses. Pour poursuivre le processus de conception, il faut créer un nouveau modèle de la pièce. Ce modèle est indispensable pour appliquer d'autres outils d'analyse et de conception automatique ou, tout simplement, pour dresser des plans et fabriquer la pièce. Pour cela, il faut retranscrire les contours accidentés de l'image de la distribution de densité en un modèle dont les contours sont décrits au moyen de courbes régulières, dont les propriétés matérielles sont réparties en fonction des domaines, etc.

Ainsi, dans l'état actuel de notre technologie, après la phase d'optimisation de matière, le processus de conception est loin d'être terminé. Le processus de conception se poursuit de manière classique. Mais, si tout ne fait que commencer, on commence, cette fois, sur des bases solides.

#### *La place de l'optimisation topologique dans la chaîne de conception*

L'optimisation topologique a été développée pour pallier les limitations de l'optimisation de dimensionnement et de l'optimisation de forme. La topologie de la structure est figée et elle ne peut être altérée. Le choix de la topologie doit donc être effectué avant les cycles de modification des paramètres de la frontière ou des dimensions transversales. Puisque le choix "rationnel" de la topologie doit se trouver en avant des autres phases de décision, le processus d'optimisation topologique se situe dans la phase de conception préliminaire. La topologie ne met en jeu que des données minimales nécessaires à la définition du problème : les fixations possibles, les cas de charges. Le concepteur peut jouer sur plusieurs paramètres qui influencent partiellement la distribution de matière et donc la topologie : le volume de matière admissible, le périmètre de la solution, la pénalisation des densités intermédiaires. Jusqu'à présent, la phase d'optimisation topologique est dirigée par des critères globaux : volume, périmètre, compliance, énergie potentielle, fréquence propre... Nous savons cependant que la recherche d'une structure rigide est concordante avec un critère de déplacement imposé et que le critère énergétique est en accord avec un critère de tension local. En effet, une structure dont les déplacements locaux sont importants est souple, de même qu'une structure qui possède de fortes concentrations de contrainte augmente sa compliance. Dès lors, le manque de concordance entre les critères adoptés pour l'optimisation topologique et l'optimisation de forme et de dimensionnement, n'est qu'apparent. Il existe une continuité presque "naturelle" entre les processus

d'optimisation de topologie, de forme et de dimensionnement.

Toutefois, le résultat issu de l'optimisation topologique se présente sous forme d'une distribution de matière. Le processus d'interprétation, que nous détaillerons plus tard, est nécessaire pour dégager un modèle plus précis de la structure qui soit exploitable dans les outils classiques de conception. L'habileté de l'ingénieur et son savoir-faire interviennent ici pour concilier la topologie idéale et un certain nombre de contraintes technologiques explicites ou implicites intervenant dans une "bonne" conception. Par exemple, il est courant que le contour soit décrit à l'aide de morceaux de courbe simple (segments de droite et arcs de cercle), tandis que l'épaisseur des membres est souvent limitée à une jauge minimale.

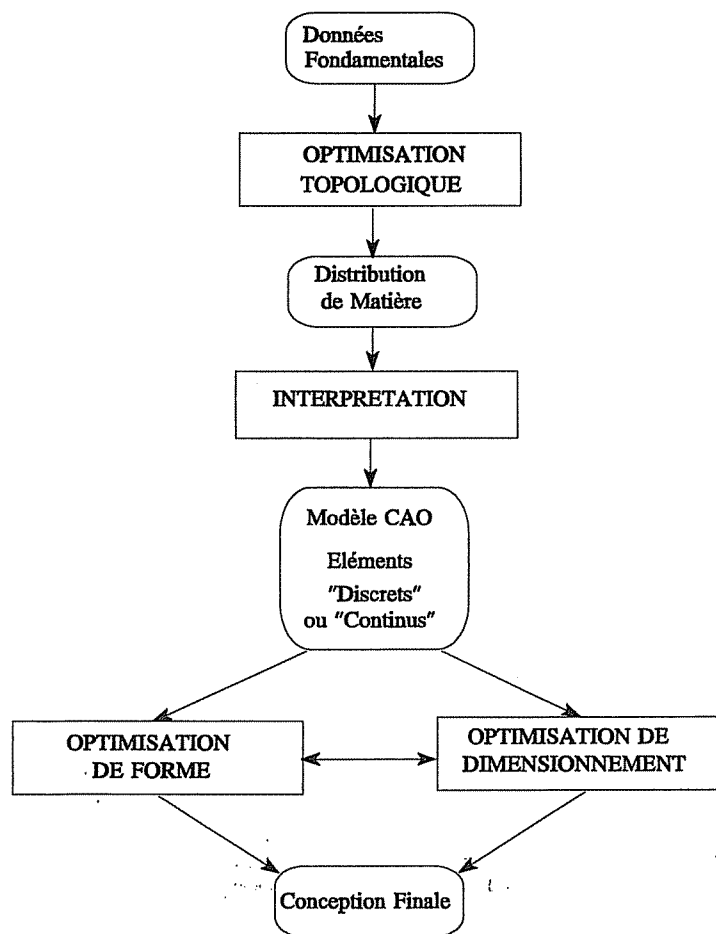


Figure 41 : Chaîne de conception intégrant l'optimisation topologique

La chaîne de conception que nous venons de décrire est représentée à la figure 41. Elle se présente sous l'aspect d'un processus linéaire. Il s'agit de compléter l'enchaînement classique de la conception de structure en plaçant l'optimisation topologique en avant des procédures d'optimisation de forme et de dimensionnement. Compte tenu de l'aspect primordial de l'information de topologie, elle est naturellement intégrée dans la phase préliminaire du processus de conception. La description de ce type d'organisation des outils de conception a été abondamment réalisée par Papalambros et Chirehdast (1990), par Bendsøe et Rodrigues (1991), par Olhoff, Bendsøe et Rasmussen (1992), par Bremicker, Chirehdast, Kikuchi et Papalambros (1992) et par Rasmussen, Thomsen et Olhoff (1993). La plupart

du temps, on opte pour cet organigramme car il est simple à mettre en oeuvre. Il ne modifie pas la séquence des processus de conception, il la complète.

A l'heure actuelle, on tente d'intégrer plus fortement les processus d'optimisation de forme et de topologie pour aborder des problèmes où la forme et la topologie interagissent fortement. Ce couplage entre la forme et la topologie optimale est présent dans les applications pour lesquelles les charges de pression, par exemple, ou une autre condition limite, varient avec la forme des frontières. La figure 42 montre un exemple où il n'est plus possible de figer la définition des charges de pression. On peut effectuer une optimisation topologique et, ensuite, une optimisation de forme de la structure. On ne peut cependant pas affirmer que la structure, dont la surface chargée a été modifiée, possède toujours la topologie optimale. La résolution des problèmes de surface libre doit être abordée avec un processus itératif. On se tourne alors vers un processus d'optimisation formé de deux boucles imbriquées schématisé à la figure 43. Le cycle d'optimisation intérieur détermine la topologie pour une forme donnée du domaine de conception. Ensuite, le cycle d'optimisation de forme est traité comme une boucle extérieure. La difficulté de l'approche couplée entre la forme et la topologie réside dans le fait que le choix de la topologie optimale est un processus non différentiable par rapport aux variables de forme.

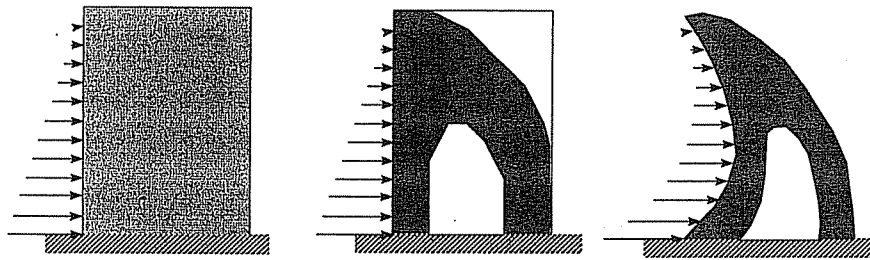


Figure 42 : Optimisation de forme et de topologie en présence de charges de pression

## 5.2 Méthodologie de la résolution du problème de topologie

Il est maintenant nécessaire de préciser la manière dont s'effectue l'optimisation topologique. La méthodologie de la conception de la topologie d'une structure peut être scindée en plusieurs étapes élémentaires que l'on résume comme suit.

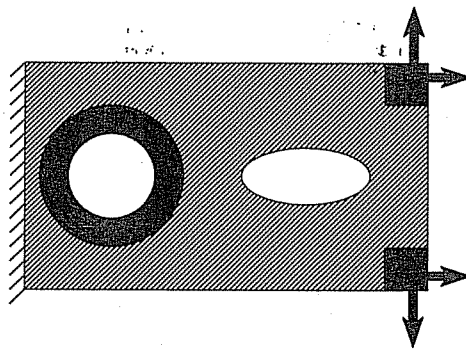


Figure 43 : Définition des domaines de conception et des domaines figés dans un problème d'optimisation topologique



### 1° Choix d'un domaine de référence approprié

On choisit un domaine de référence  $\Omega$  adapté à la définition des différentes conditions limites, qu'elles soient cinématiques (fixations ou déplacements imposés) ou statiques (tractions de surfaces). Le choix du domaine  $\Omega$  tient compte de contraintes technologiques comme les contraintes d'encombrement.

### 2° Identification des domaines de conception

On effectue une partition du domaine de référence en deux groupes :

- Les domaines de conception où l'on désire déterminer la topologie de la structure.
- Les régions de densité fixée (généralement vide ou solide plein) pour tenir compte d'une structure à renforcer, de contours extérieurs imposés ou de points d'application d'efforts déterminés...

### 3° Choix d'un matériau composite poreux

La sélection d'une microstructure poreuse est indispensable à la relaxation du problème de conception. Sans celle-ci, il serait impossible de générer une topologie et d'assurer l'existence d'une solution stable. En outre, la pénalisation des densités intermédiaires conditionne la séparation entre le vide et le solide dans la distribution de matière. On dispose de différentes familles de matériaux telles que les matériaux feuilletés de rang 2, les matériaux composites basés sur les structures de Hashin : matériaux avec des cavités sphériques ou cylindriques, une double microstructure de Hashin ou les matériaux artificiels avec une pénalisation adéquate des densités intermédiaires (SIMP).

### 4° Etablissement de la loi raideur-densité du matériau

Le calcul des constantes élastiques ou massiques effectives du matériau peut être mené à bien en utilisant la théorie de l'homogénéisation ou une analyse micromécanique consistante. On génère la relation fonctionnelle entre les paramètres de microstructure du matériau et donc, par corollaire, la densité et les propriétés mécaniques microscopiques. Cette loi de raideur-densité est généralement calculée au préalable et intégrée dans le module d'optimisation. L'utilisateur doit cependant spécifier les paramètres du matériau de référence: module de Young, coefficient de Poisson, masse volumique...

### 5° Choix d'un modèle éléments finis approprié

On définit un maillage de densité désirée ainsi que le type des éléments finis. Le degré d'approximation des champs de déplacement permet de contrôler la formation de damiers ou d'autres modes de distribution parasite. Si ce n'était pas le cas, il faut contrôler le périmètre de la solution. On définit une répartition initiale des propriétés matérielles et de la densité du matériau.

### 6° Définition des caractéristiques du problème d'optimisation

On "discrétise" le problème d'optimisation topologique de manière consistante avec la modélisation en éléments finis. On définit les variables de conception que l'on attache à chaque élément du domaine de conception. On définit également la formulation du problème d'optimisation (fonction objectif, restrictions...).

### 7° Calcul de la distribution optimale de matière sur le domaine de conception

On détermine la distribution optimale de matériau composite par un cycle d'itérations comprenant chacune :

- une analyse éléments finis,
- une analyse de sensibilité,
- une formulation d'un sous-problème sur la base d'approximation structurales,
- une résolution d'un sous-problème d'optimisation convexe avec un algorithme adapté aux caractéristiques du sous-problème d'optimisation : nombre de variables de conception, la nature, le type et le nombre des restrictions...
- une remise à jour des données du modèle.

Actuellement, le processus itératif converge généralement après 25 à 100 cycles d'optimisation.

### 8° Interprétation des résultats et génération d'une topologie concrète

Les résultats produits par le processus d'optimisation sont visualisés en vue d'être interprétés. Le concepteur peut alors dégager une topologie structurale en accord avec toutes les contraintes technologiques ou esthétiques qui lui sont imposées. La phase d'analyse topologique se termine par la génération d'un modèle CAO permettant une analyse complète de la structure. Ce modèle peut ainsi être soumis à un processus d'optimisation de forme classique.

### 5.3 Analyse et interprétation des distributions de densité

La phase d'interprétation des distributions de matière issues de l'optimisation topologique n'est pas aussi triviale qu'une réflexion trop rapide pourrait le faire croire. L'interprétation des résultats est extrêmement importante pour retirer le plus d'informations possibles de la silhouette de la structure. Lire correctement les topologies et générer une structure qui bénéficiera des données présentes dans la répartition optimale de matière, est capital pour la performance de la conception finale qui ressortira du processus d'optimisation de sa forme et de ses dimensions transversales.

#### Exploitation des résultats de topologie

Pour dégager un modèle pratique, le résultat de l'optimisation topologique doit être retravaillé, analysé, interprété. La distribution de matière est discrétisée en éléments finis. La forme de la structure apparaît sous l'aspect d'une image digitalisée où les éléments de densité variable jouent le rôle de *pixels*, le blanc et le noir représentant respectivement le vide et le solide. La frontière de la structure n'est pas admissible telle quelle. Elle est formée de segments de droite en dents de scie. Même si la frontière n'est pas difficile à distinguer, il faut créer une frontière douce et régulière de la pièce finale. Il est également nécessaire de préciser tous les paramètres de la structure. Tout d'abord, on doit décider la nature des éléments structuraux qui composeront la pièce : barres, poutres, membranes, plaques, éléments de volume. Ensuite, on doit quantifier les paramètres de sa forme : le type des courbes qui constituent les contours, la valeur des paramètres qui les décrivent. Enfin, on doit également préciser d'autres données (les caractéristiques transversales des éléments, le choix du matériau...) et leur répartition sur la structure.

L'interprétation de la solution n'est pas chose facile. D'une part, on peut se trouver en présence de larges zones où le vide et la matière sont intimement mélangés. D'autre part, le nombre et la taille des perforations peuvent être limités pour le processus de fabrication ou de production en série.

Une première situation intéressante correspond au cas où la présence des zones de matériau poreux

est réduite autant que possible. Pour cela, on sait que l'on peut employer des microstructures suboptimales qui pénalisent plus fortement les densités intermédiaires. Avec ces microstructures, il faut cependant introduire une contrainte de périmètre afin de régulariser le problème de conception. Cette contrainte sur le périmètre possède un autre avantage : elle permet de contrôler le nombre et la taille des trous dès la phase d'optimisation topologique.

Néanmoins, l'intervention humaine reste souvent indispensable pour trancher en cas d'ambiguïté lors de la phase d'interprétation et pour orienter la conception en fonction des critères explicites ou implicites de conception.

La précision des contours dépend fortement du raffinement du maillage. Une diminution de la taille des éléments augmente la résolution des détails de la distribution, mais elle accroît rapidement l'effort de calcul. Il convient donc d'acquérir une solide expérience pour analyser les résultats réalisés sur des maillages de taille aussi limitée que possible et, ainsi, épargner des efforts de calcul inutiles.

### Le processus de décision sur la nature des éléments structuraux

En fonction du volume relatif de matière admissible et en fonction de la non-linéarité de la loi raideur-densité, le résultat de l'optimisation topologique peut suggérer des éléments structuraux de plusieurs types. Lorsque le volume relatif de matière utilisée est bas, on sait que l'optimisation topologique fournit des résultats que l'on peut facilement interpréter comme des treillis de barres ou de poutres. De même, si la pénalisation des densités intermédiaires est importante, la distribution de matière forme souvent des éléments structuraux concentrés qui font penser à des portiques ou des treillis de barres. Pour adapter la structure à d'autres critères de conception, on utilisera les techniques d'optimisation déjà bien rodées : l'optimisation des sections transversales ou de la position des joints structuraux.

Lorsque l'on introduit une plus grande quantité de matière, la solution topologique présente de larges zones de matière et il est plus intéressant de dégager un modèle de type membrane ou de type plaque de la structure. On peut, alors, créer un modèle paramétrique des frontières de la structure. L'ajustement des paramètres de la description de la géométrie (à topologie fixée) s'obtient en recourant à la technique d'optimisation de forme classique.

Pour une structure tridimensionnelle, des choix semblables peuvent être réalisés. Si la matière se concentre selon des membres dont une des dimensions est beaucoup plus importante que les deux autres, on interprétera la distribution comme une barre ou une poutre. Si la matière vient se placer avec une épaisseur mince, il est préférable d'adopter un modèle de plaque ou de coque. Au contraire, si le solide se rassemble dans une région où il forme un bloc massif, on en déduira un modèle de volume.

L'utilisation de modèles bidimensionnels permet deux sortes d'interprétation des densités intermédiaires. On peut imaginer que les régions de densité moyenne sont des mousses dont la taille des porosités est variable. Pour une structure plane, la variable de conception peut être aussi regardée comme une dimension hors plan. Cette interprétation de la distribution de matière est particulièrement "naturelle" avec le modèle SIMP qui est équivalent à un problème dont la raideur dépend de la puissance  $p$  de l'épaisseur. Dans ce cas, les zones de densité intermédiaire sont des zones d'épaisseur plus faible. Dans celles-ci, l'épaisseur n'est qu'une fraction de l'épaisseur des membres qui constitue la structure principale. La structure primaire correspond évidemment aux domaines où la densité atteint celle du solide de référence. La partie de la structure que l'on affecte à une épaisseur plus faible joue le rôle structural des âmes et des voiles de cisaillement que l'on rencontre souvent dans d'autres conceptions. D'après notre expérience, ces zones plus minces sont souvent en état de sollicitation biaxial, ce qui renforce encore notre interprétation.

On remarquera que dans le modèle tridimensionnel, les zones de densité intermédiaire ne peuvent plus être interprétées comme des voiles minces. Par contre, dans ce cas, il est tout à fait justifié de penser à une mousse légère comme celle qu'on voit dans les structures sandwichs.

### Extraction d'un modèle paramétrique

Lorsque l'on veut poursuivre la conception d'une pièce massive, il faut définir un modèle paramétrique de la structure sur la base des résultats de l'optimisation topologique. La distribution de matière suggère l'existence et la position relative des différentes perforations de la structure. Il appartient cependant à l'ingénieur de décider d'éliminer ou de rassembler des trous d'importance mineure. Il faut encore préciser la définition exacte de leurs frontières. L'intervention humaine est souvent nécessaire pour choisir la paramétrisation de la frontière en courbes "douces" et régulières. Ce choix est basé sur différentes considérations. Les courbes de Bézier, les *splines*, les *B-splines* ou les *NURBS* offrent une très grande souplesse qui leur permet d'épouser les isovaleurs de la distribution de densité avec précision. Les pôles et les points de contrôle sont les variables de définition de ces courbes. Néanmoins, la pièce qui est décrite par des *splines* ou des *NURBS* pourrait être difficile à fabriquer, surtout pour une production en série. Dans ce cas, on préfère souvent n'utiliser que des courbes simples comme les segments de droite et des arcs de cercle ou d'ellipse. Après avoir choisi la description paramétrique des courbes du contour, il faut choisir la valeur des paramètres de contrôle pour ajuster le contour à la distribution de densité. Plusieurs méthodes sont possibles; on en choisira une en fonction de l'habileté du concepteur, des contraintes technologiques à respecter et des outils de conception disponibles pour interpréter les résultats.

- La méthode de manipulation interactive : la méthode la plus élémentaire consiste à créer le modèle paramétrique par simple manipulation interactive. On positionne, manuellement, les points de contrôle sur la distribution de matière optimale. Puis, par quelques essais et erreurs, on arrive à ajuster facilement les contours lissés aux isovaleurs de la distribution de matière. Cette façon de procéder possède l'avantage d'introduire facilement l'expertise du concepteur, de sorte qu'il est possible d'intégrer, simultanément, la topologie suggérée par le calcul d'homogénéisation, le savoir-faire de l'ingénieur et les contraintes technologiques.
- L'ajustement des frontières selon une "méthode des moindres carrés". Le contour de la structure est ajusté de manière automatique à une isovaleur donnée de la distribution de matière par une procédure de "moindres carrés".
- La méthode de reconnaissance d'image. La distribution de matière peut être interprétée sur la base de l'analogie qui existe avec les images digitalisées. Rappelons que dans cette analogie, chaque élément fini représente un *pixel* de l'image et la densité relative est l'équivalent de l'intensité de l'image. Le blanc est associé au vide, le noir est relatif au solide et les densités intermédiaires sont représentées par le dégradé de gris.

### 7.3.2 Exemple

On désire maintenant illustrer les principes de l'interprétation des distributions optimales de matière. A cette fin, on reprend l'exemple de la poutre cantilever courte. La figure 44 montre la distribution de densité issue du processus d'optimisation avec un matériau SIMP dont le paramètre de puissance  $p$  vaut 4. La distribution est principalement constituée de vide et de solide en des régions nettement distinctes.

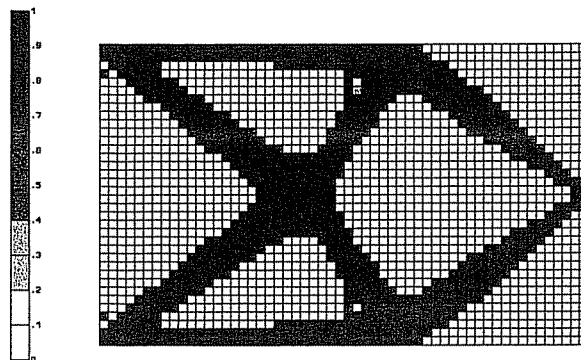


Figure 44 : Distribution de matière avec un matériau SIMP ( $p=4$ )

Plusieurs alternatives se présentent pour interpréter ce résultat. La sélection de l'une d'entre elles dépend d'un choix posé par le concepteur. La structure semble constituée d'éléments concentrés à la manière d'un treillis de barres ou d'un portique. Si ce choix est satisfaisant, on adopte le modèle en treillis de barres qui est proposé à la figure 45. Les caractéristiques de ce portique peuvent être optimisées pour tenir compte de critères de tensions locales, de déplacements, de stabilité... On dispose de techniques de dimensionnement automatique pour ajuster les sections et moments d'inertie. On peut également modifier la position des joints structuraux. L'optimisation combinée des positions de joints et des sections donne évidemment le meilleur résultat.

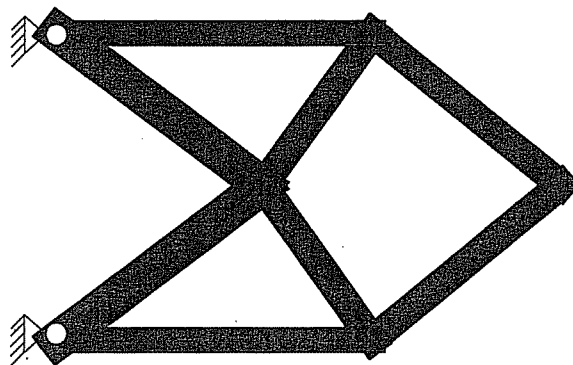


Figure 45 : Modèle en éléments de poutre

Une autre possibilité repose sur la formation d'un modèle défini par des contours paramétrés. La structure est formée par un domaine de matière continue dont le comportement est celui d'une membrane. La topologie suggère la présence de trois perforations et d'une encoche dans la fondation. La figure 46 montre un exemple de modèle de conception basé sur la distribution de matière de la figure 44. Les frontières sont formées de segments de droite, d'arcs de cercle et de courbes de Bézier. Le contour extérieur est formé de segments de droite. Les deux perforations symétriques de la partie centrale sont décrites par trois segments de droite tangents à trois cercles. La forme du trou situé à droite est représentée par deux courbes de Bézier à 6 pôles dont on assure la tangence aux raccordements. Enfin, deux courbes de Bézier à 4 pôles constituent la cavité sous l'encastrement. On ajoute deux congés de raccordement à l'encastrement pour éviter les concentrations de tensions à cet endroit. L'ajustement des paramètres de la forme du modèle CAO est réalisé de façon manuelle et interactive.

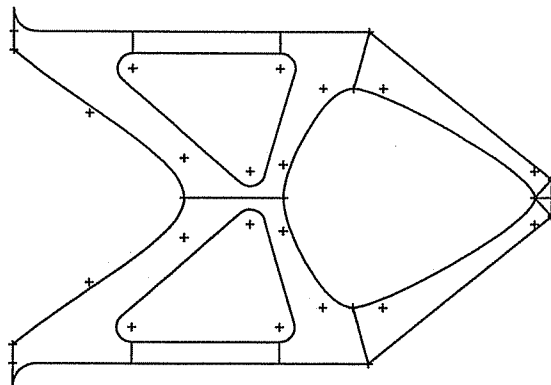


Figure 46 : Un modèle CAO après interprétation

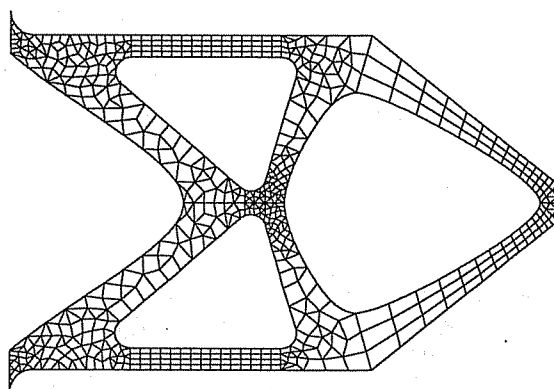


Figure 47 : Proposition d'un maillage pour le modèle

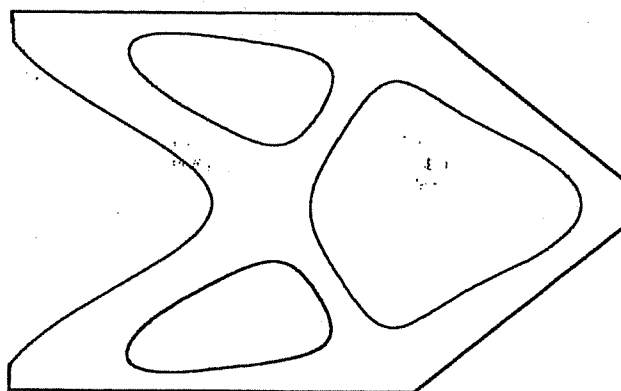
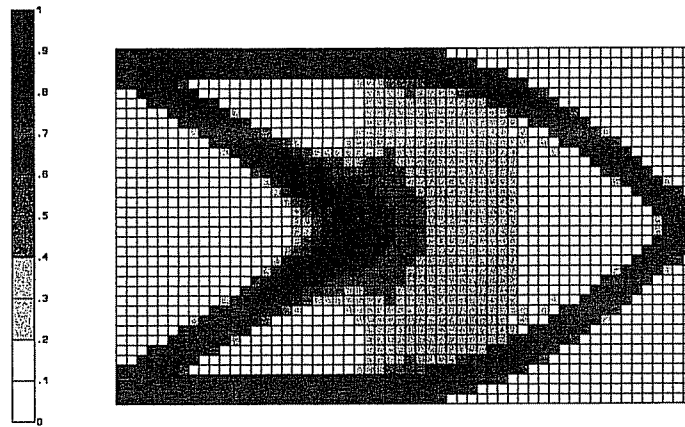


Figure 48 : Contours obtenus par la technique des moindres carrés

Outre l'interprétation interactive basée sur la visualisation des résultats, on peut mettre au point une procédure d'ajustement des paramètres selon une méthode des moindres carrés (figure 48).

Figure 49 : Distribution de matière avec un matériau SIMP ( $p=2$ )

L'interprétation des zones de densité intermédiaire pose généralement des problèmes. En guise d'exemple, on aborde l'étude de la distribution de densité relative au matériau SIMP de puissance  $p=2$ . La répartition de la matière de la figure 49 laisse entrevoir une zone poreuse au centre de la structure. Le choix d'une échelle de densité plus large permet à l'œil de séparer plus facilement les zones de différente densité. Puisque la densité et l'épaisseur jouent un rôle identique dans ce problème, on imagine que la figure 49 nous donne la répartition de la dimension hors plan. On voit alors apparaître une structure que l'on peut appeler primaire. Au centre, on distingue une structure d'épaisseur plus petite. L'épaisseur relative de cette région est comprise en 0.2 et 0.4 dans sa plus grande majorité, mais on voit aussi une zone de taille non négligeable dont la densité est située entre 0.4 et 0.6. On rassemble cette région de densité moyenne au sein d'une seule zone d'épaisseur identique, mais de valeur plus petite que celle de la structure primaire. Cette partie de la structure joue le rôle d'un voile mince, composant structural qu'on rencontre dans de nombreuses structures.

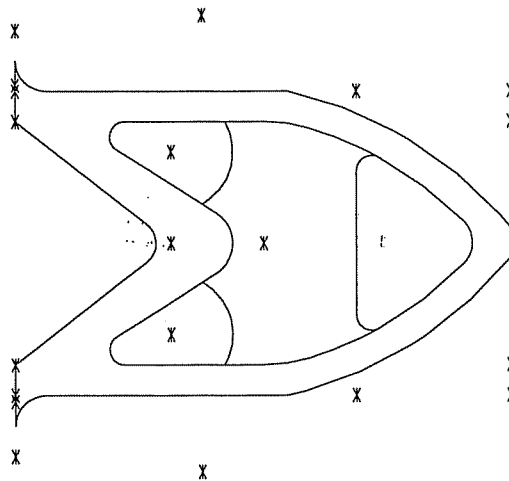


Figure 50 : Un modèle CAO de la précédente distribution

On établit un modèle C.A.O. dont la silhouette est reprise à la figure 50. Les frontières sont composées uniquement de segments de droite et d'arcs de cercle. Les paramètres de la géométrie (coordonnées, dimensions et rayon) sont ajustés manuellement pour approcher la distribution de densité au mieux.

Le modèle fait intervenir deux domaines qui possèdent chacun une épaisseur différente. La répartition des épaisseurs est présentée à la figure 51. La même figure montre une proposition de maillage. Pour satisfaire au mieux à des critères différents de la compliance minimale, on peut soumettre ce modèle à un processus d'optimisation de forme.

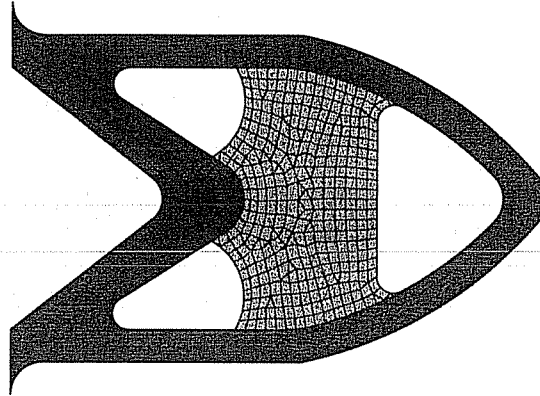


Figure 51 : Proposition d'un maillage avec la répartition des épaisseurs sur la structure



## 6. EXEMPLES D'APPLICATIONS

### 6.1 Optimisation de la topologie d'une poutre de plancher d'Airbus (MBB beam)

Le problème de la poutre MBB (Messerschmitt-Bölkow-Blohm) est un des exemples les plus connus d'application de l'optimisation topologique. Il illustre clairement les avantages du processus d'optimisation en montrant qu'il conduit à des topologies originales. Cette application a été décrite et résolue pour la première fois par Olhoff *et al.* (1992). Le problème concerne l'optimisation d'une poutre de support dans un avion de transport civil produit par un grand constructeur aéronautique allemand. La structure a pour fonction de soutenir le plancher dans le fuselage d'un avion Airbus. Les contraintes de conception sont les suivantes :

- (1) Les surfaces inférieures et supérieures du plancher doivent être planes et leur entre-distance doit rester inchangée;
- (2) La déflexion maximale au centre de la poutre ne peut excéder 9.4 mm pour une charge de 20 kN placée au milieu de la portée;
- (3) La contrainte de von Mises ne peut dépasser 385 N/mm<sup>2</sup>;
- (4) Il doit exister un nombre minimum de trous pour laisser passer le réseau de câblage électrique, hydraulique...

Le but de l'optimisation est de déterminer la forme des trous qui minimise la masse de la poutre tout en respectant les contraintes de conception.

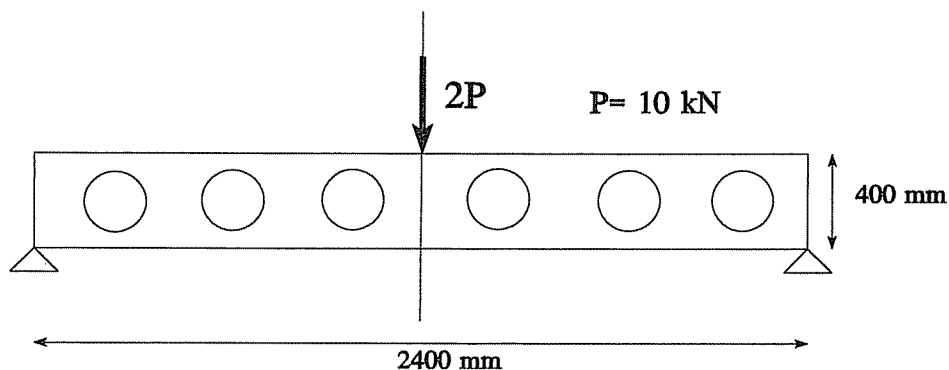


Figure 52 : Position du problème de la poutre MBB

Olhoff *et al.* (1992) rapportent qu'on ne peut trouver aucune solution classique avec l'optimisation de forme si on a une topologie composée de trois trous par demi-portée. Par exemple, l'optimisation d'un modèle avec trois trous circulaires ne permet de diminuer la déflexion sous la charge qu'au prix d'une augmentation de masse de plus ou moins 3%, alors qu'une modélisation des trous par des *B-splines* n'apporte qu'un gain de masse de 5,2%. Dans les deux cas, la contrainte de tension n'est pas activée. Pour améliorer sensiblement la solution, une nouvelle topologie est nécessaire.

Compte tenu de la symétrie de la structure, on étudie un modèle de la demi-portée. Le matériau de base est un aluminium de module de Young  $E=70.E9$  Pa, de coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ . L'épaisseur de la tôle de la poutre est également donnée :  $t=4.E-3$ m. Le volume de matière admissible est borné à 50% du volume du domaine de conception, parce que cette densité moyenne correspond environ à la masse de matière présente dans les premiers modèles d'optimisation de forme paramétrique. Le domaine de conception est discrétisé avec un maillage transfini de  $75 \times 25$  éléments de densité constante.

On réalise d'abord une optimisation topologique avec la nouvelle microstructure orthotrope que nous avons mise en évidence : la double microstructure de Hashin. On prend des éléments finis du second degré pour éviter le problème des distributions en damier. L'approximation de la compliance dans le sous-problème d'optimisation est la linéarisation mixte CONLIN. On obtient la distribution de matière de la figure 53. La microstructure est quasi optimale et la pénalisation des densités intermédiaires est faible, ce qui explique la présence d'une vaste étendue de matériaux poreux. La compliance optimale vaut  $l^* = 64,31 \text{ Nm}$ , ce qui signifie que la déflexion sous la charge est fortement réduite :  $d = 6,4 \text{ mm}$ .

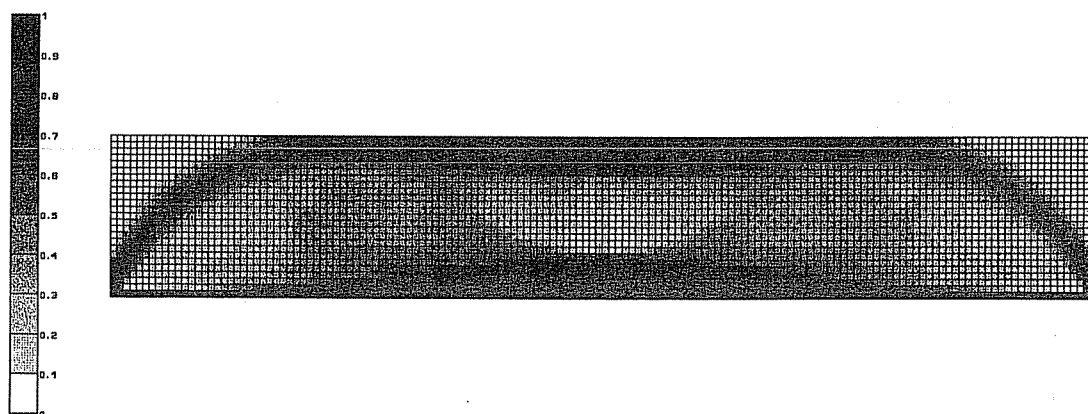


Figure 53 : Distribution de matière de double microstructure de Hashin

Cette distribution suggère une structure composée de deux semelles d'épaisseur variable reliées par une âme fabriquée en matériau composite orthotrope. Cette distribution de microstructure correspond à la solution de type analytique donnée par Zhou et Rozvany (1991) reprise à la figure 54. Le même genre de solution est obtenu en utilisant une approche du type treillis de barres ainsi que le montre la solution obtenue par M. Beckers et Fleury (1994) à la figure 55.

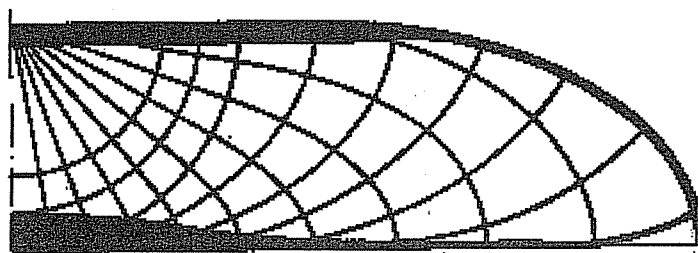


Figure 54 : Solution théorique proposée par Zhou et Rozvany (1991)

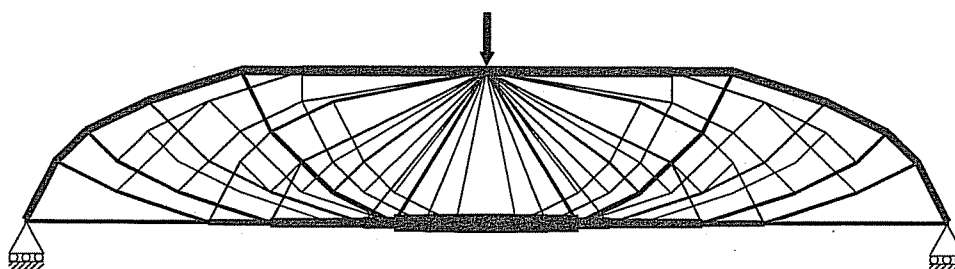


Figure 55 : Treillis optimal obtenu par M. Beckers et Fleury (1994)

Malheureusement, la distribution de double microstructure de Hashin ne permet pas de rencontrer les contraintes technologiques relatives à l'existence d'un nombre minimum de trous pour laisser passer les conduites de service. Cette solution pose également un problème de fabrication, car notre technologie actuelle ne nous permet pas de réaliser une distribution de microstructure telle que celle-ci.

L'emploi d'une microstructure de Hashin avec des inclusions sphériques conduit à une solution similaire. La pénalisation des densités intermédiaires étant cette fois un peu plus importante, on voit naître le réseau de raidisseurs orthogonaux de manière plus nette.

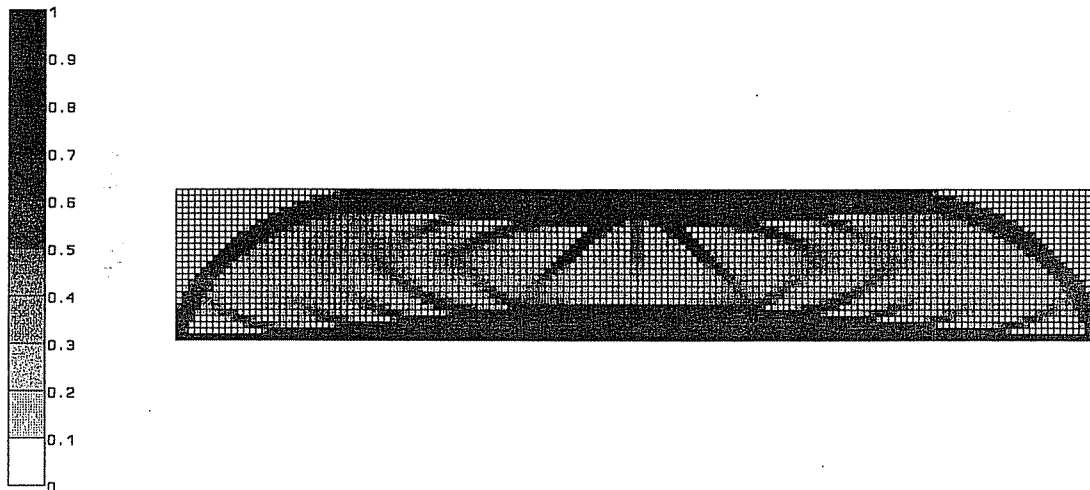


Figure 56 : Distribution de matière avec des micro-inclusions sphériques

Pour augmenter encore la séparation vide-solide et pour créer une distribution plus facile à interpréter, on adopte cette fois une loi raideur-densité de type SIMP avec un exposant cubique  $p=3$ . On conserve le même maillage transfini ainsi que des éléments de degré 2 pour atténuer les distributions en damier. La carte de distribution de densité de la figure 57 est obtenue après 75 itérations CONLIN. La compliance optimale vaut  $l^*=75,60$  Nm soit un déplacement sous la charge de 7,56 mm.

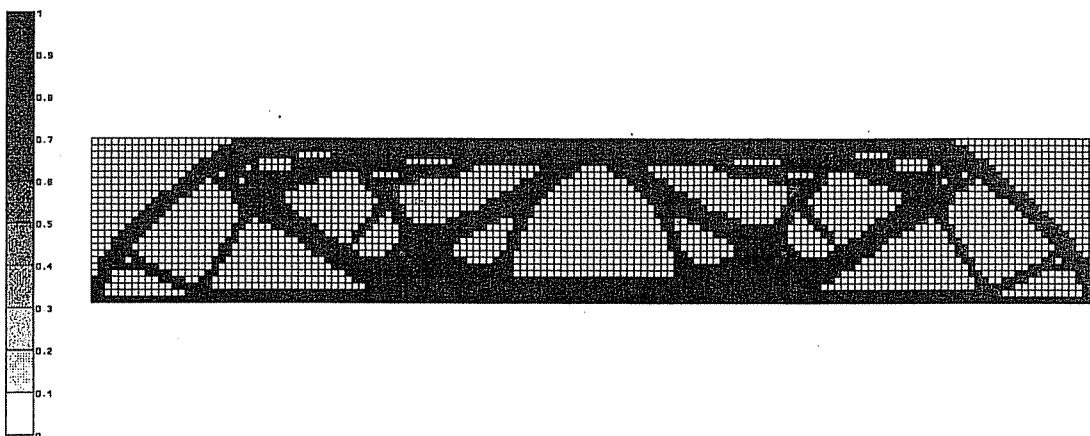
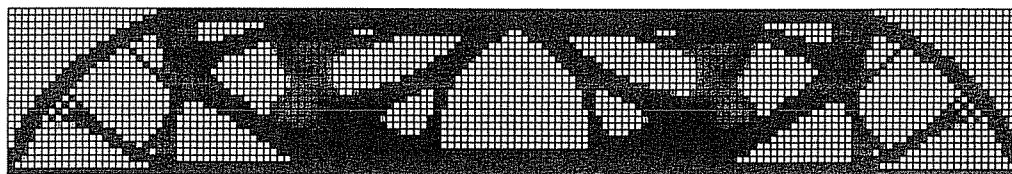


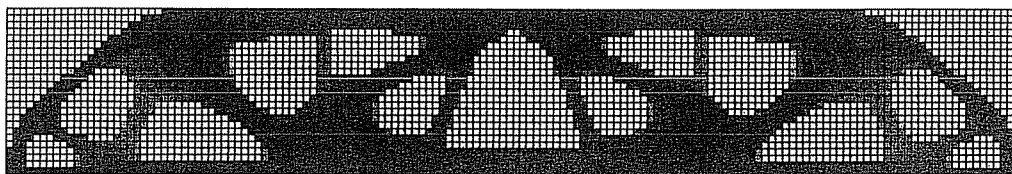
Figure 57 : Distribution de densité de matériau SIMP ( $p=3$ )

La distribution de matière suggère maintenant de manière plus précise le réseau courbe de raidisseurs orthogonaux entre eux des figures 55 et 56. Comme la loi SIMP n'introduit pas une relaxation complète du problème de conception, les distributions de matière que l'on obtiendrait en raffinant de plus en plus le maillage, seraient telles que l'on verrait apparaître de plus en plus de barres organisées

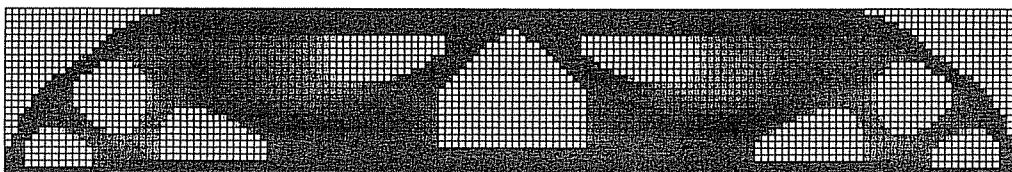
selon le réseau orthogonal suggéré par la solution de Zhou et Rozvany (1991).



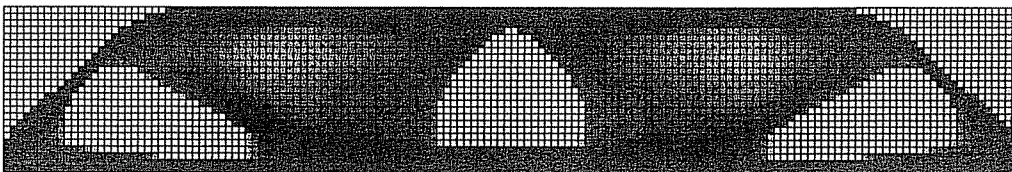
$P=7,5$



$P=6,5$



$P=5,5$



$P=4,5$

Figure 58 : Contrôle du périmètre  $P=7,5$  -  $P=6,5$  -  $P=5,5$  -  $P=4,5$

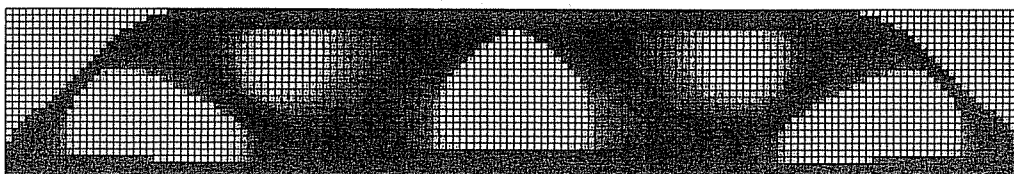


Figure 59 : Distribution avec  $P^*=4,5$  et un matériau SIMP avec un exposant  $p=4$

Cette fois, la séparation entre le vide et le solide est bien établie et l'on peut distinguer une topologie précise que l'on pourrait utiliser comme base pour un modèle CAO de la structure à réaliser. La structure optimale qui est suggérée est située entre les membranes et les treillis de barres ou de poutres. On voit aussi que la distribution est encore complexe et qu'elle serait difficile à fabriquer.

Pour créer de manière rationnelle une topologie plus facile à utiliser comme base pour un modèle CAO dans une étape ultérieure de la chaîne de conception, on décide de se servir du contrôle du périmètre. La distribution de matière de la figure 57 obtenue sans borner le périmètre affiche un périmètre voisin de 7.5 m pour la demi-portée. On essaie donc successivement des bornes  $\bar{P}$  sur le périmètre de 7,5 ; 6,5 ; 5,5 et 4.5. Comme le périmètre est borné, on travaille avec des éléments du premier degré pour alléger le temps de calcul. L'utilisation d'une borne sur le périmètre ralentit toutefois le processus d'optimisation et le nombre d'itérations croît au fur et à mesure que l'on abaisse la borne sur périmètre.

Lorsque le périmètre diminue, le nombre de trous dans le domaine est progressivement réduit. On passe de 17 trous, quand le périmètre n'est pas contrôlé, à 5 trous lorsqu'on impose une borne de 4,5 m. La compliance de la solution augmente également. On passe de 73,08 Nm si  $P=7,5$ ; à 75,01 Nm lorsque  $P=6,5$ , à 81,07 Nm si  $P=5,5$  et finalement à 85,91 Nm si  $P=4,5$ . Il ne faut pas s'étonner que la compliance de la solution avec un périmètre de 7,5m soit inférieure à la compliance de la solution libre de périmètre de la figure 57. En effet, la compliance avec le périmètre limité est effectuée avec des éléments du premier degré qui surestiment la raideur et donc la compliance.

La borne sur le périmètre a aussi un effet indirect indésirable. Lorsqu'on force le périmètre à décroître, on remarque une augmentation des zones de densité intermédiaire. Ce type de distribution constitue une manière artificielle de diminuer le périmètre de la solution. Lorsque l'on impose un périmètre de 4m, un des trous est partiellement bouché par une membrane poreuse. Pour enlever celle-ci, on augmente la pénalisation des densités intermédiaires en prenant  $p=4$ . En repartant de la solution obtenue pour  $p=3$ , on trouve la distribution de la figure 59 qui est beaucoup plus facile à interpréter. La compliance optimale augmente encore à cause de la pénalisation des densités intermédiaires  $I^*=93,12$  Nm.

Les solutions obtenues en bornant le périmètre donnent lieu à une topologie semblable à celle qui avait été proposée par Olhoff *et al.* (1992) en interprétant la distribution de densité obtenue avec un matériau avec des perforations rectangulaires. Remarquons toutefois que la topologie de Olhoff *et al.* (1992) est semblable, mais pas identique. Le résultat de nos calculs semble donc indiquer que la topologie de la figure 60 est sub-optimale. Cette remarque démontre toute l'utilité de la méthode du périmètre pour décider d'une topologie concrète sur la base de critères rationnels afin d'éliminer autant que possible une phase hasardeuse dans l'interprétation de la distribution de densité.

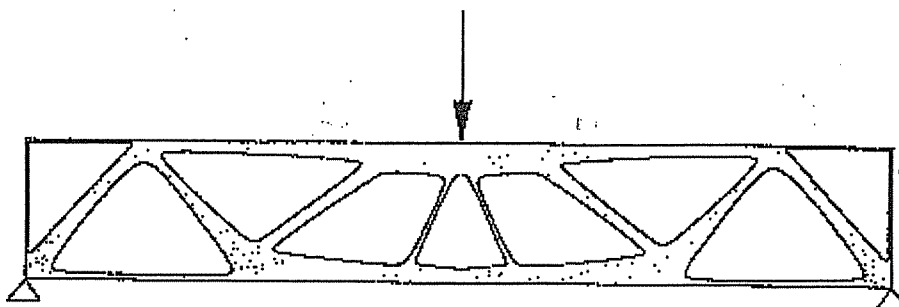


Figure 60 : Modèle CAO et topologie de la poutre MBB proposés par Olhoff *et al.* (1992)

## 6.2 Optimisation topologique tridimensionnelle : conception d'une plaque cantilever épaisse

Le problème de distribution de matière de compliance minimale et de volume donné est aussi applicable pour les structures tridimensionnelles. La généralisation de la méthode est immédiate.

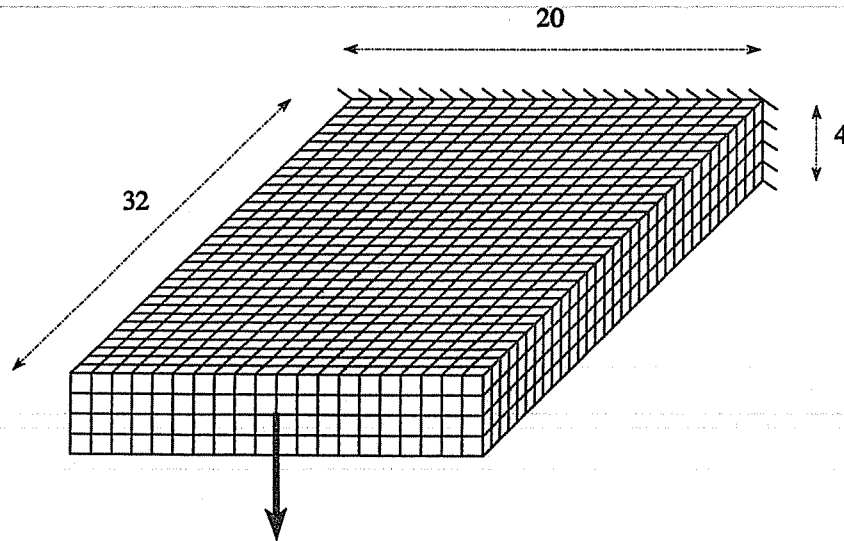


Figure 61 : Géométrie du problème de conception d'une poutre tridimensionnelle

L'utilisation de microstructure à 3 dimensions est cependant beaucoup plus lourde. Les efforts de calcul sont beaucoup plus conséquents. L'analyse par éléments finis fait appel à des éléments de brique ou de tétraèdre, plus coûteux. La discrétisation du volume de conception demande, rapidement, un nombre important d'éléments. Pour mettre deux fois plus d'éléments par côté, on multiplie le nombre d'éléments par 4 en état plan et par 8 en trois dimensions. Le nombre de variables de conception croît donc rapidement aussi. Pour un matériau orthotrope de rang 3 ou avec des perforations en forme de parallélépipède, on a 3 variables de microstructures et 3 variables angulaires par élément. L'orientation optimale à 3 dimensions reste toujours un problème partiellement ouvert. En conséquence, on se limite souvent aux microstructures suboptimales telles que la microstructure de Hashin avec des inclusions sphériques. Ce matériau composite possède des propriétés homogénéisées isotropes.

On étudie une plaque cantilever courte soumise à une force de cisaillement. Les dimensions du problème sont reprises à la figure 61 en unités MKS. Le domaine est discrétisé avec un maillage régulier de  $32 \times 20 \times 4 = 2560$  éléments de brique du premier degré. Un côté de la plaque est encasté, tandis que l'autre extrémité est soumise à une charge concentrée en son centre. Le volume de matière est limité à une valeur de  $800 \text{ m}^3$  alors que le volume total est de  $2560 \text{ m}^3$ . Le solide de référence est un matériau standard: module de Young  $E = 100 \text{ GPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

On obtient la solution après 50 itérations. La visualisation des résultats en trois dimensions est évidemment plus difficile. A la figure 62, on montre, d'abord, la distribution de matière suivant des coupes faites selon l'épaisseur en partant de la couche supérieure. Ensuite, la figure 63 donne deux vues en perspective dans lesquelles on retire tous les éléments dont la densité relative est inférieure à 30% de la densité du solide de référence. La distribution de matière forme deux semelles de forme triangulaire. Les couches intérieures forment un caisson ouvert, et l'on reconnaît une sorte de poutre caissonnée. Elle se compose de deux semelles pour augmenter la raideur flexionnelle. La matière dans les deux couches intérieures forme un caisson qui relie les deux faces et les tient écartées. En l'absence de torsion, la présence du caisson fait en sorte que la solution optimale peut être assimilée à une plaque sandwich, dont le bon comportement en flexion est réputé. Les semelles ont une forme de largeur croissante, de sorte que le moment d'inertie de la poutre va en augmentant depuis l'emplanture jusqu'au point d'application de la force. La forme du caisson est, elle aussi, surprenante : elle s'évase depuis la pointe puis se referme aux  $2/3$  de la portée. L'encastrement est libre de caissonnage. On

pense que la solution libère de la matière à l'encastrement où l'écartement des semelles est maintenu par les conditions de fixation, pour la placer là où elle est plus utile.

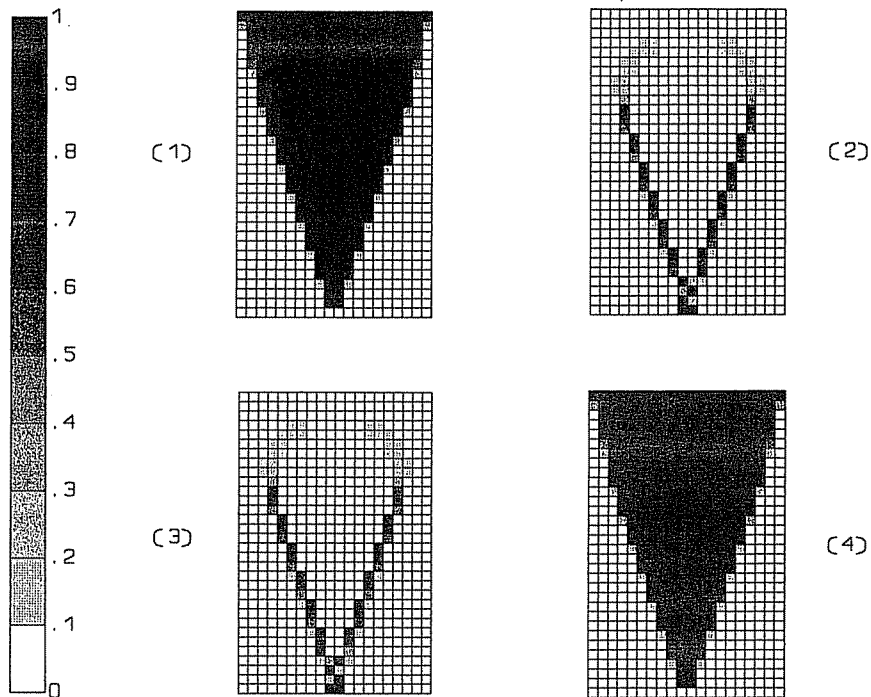


Figure 62 : Distribution de la densité - coupes selon l'épaisseur

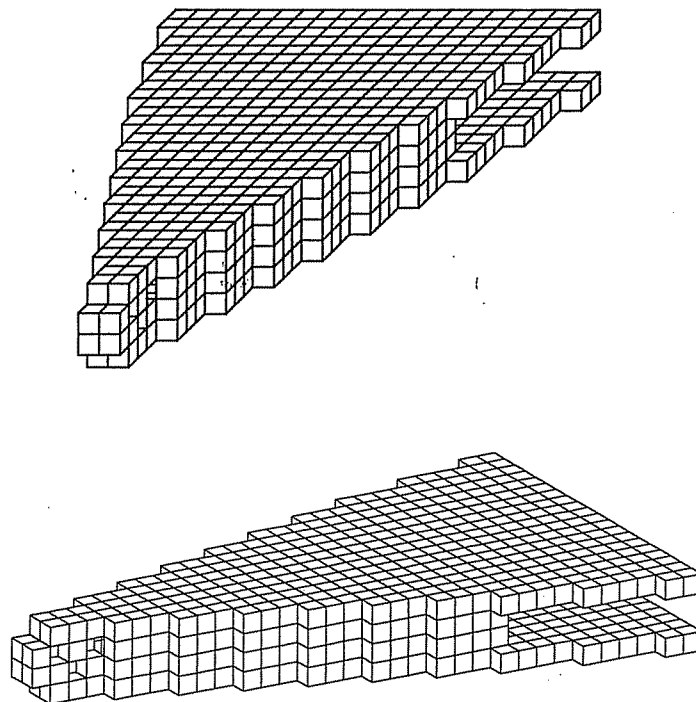


Figure 63 : Vue tridimensionnelle de la plaque cantilever





## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Allaire, G. et R.V. Kohn (1993). "Optimal Design of Minimum Compliance", *European Journal of Mechanics A*, vol. 12, pp 839-878.
- Ambrosio, L. et G. Buttazzo (1993). "An Optimal Design Problem with Perimeter Penalization", *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Vol. 1, pp 55-69.
- Avellaneda, M. (1987). "Optimal Bounds and Microgeometries for Elastic Two-Phase Composites", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 47, 1987, pp 1216-1228.
- Beckers, M. et C. Fleury (1994). "A Primal-Dual Approach in Truss Optimization", dans: *Advances in Structural Optimization* (Topping, B.H.V. et M. Papadrakakis, édés). CIVIL-COMP PRESS, Edinburgh, Scotland, Proceedings of the Second International Conference on Computational Structures Technology, Athènes, 30 Août - 1 Septembre 1994, pp 91-101.
- Bendsøe, M.P. et N. Kikuchi (1988). "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, 1988, pp 197-224.
- Bendsøe, M.P. (1989). "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem", *Structural Optimization*, vol. 1, 1989, pp 193-202.
- Bendsøe, M.P. et H.C. Rodrigues (1991). "Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 87, 1991, pp 15-34.
- Bendsøe, M.P. et C.C. Mota Soares, C.C., (Editeurs) (1993). "Topology Design of Structures", NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Bendsøe, M.P. et A. Díaz (1993). "Optimization of Material Properties for Mindlin Plate Design", *Structural Optimization*, vol. 6, 1993, pp 268-270.
- Bendsøe, M.P., A. Díaz et N. Kikuchi (1993). "Topology and Generalized Layout of Elastic Structures", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, eds.), pp 159-205, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Bendsøe, M.P. et R.B. Haber (1993). "The Mitchell Layout Problem as a Low Volume Fraction Limit of the Perforated Plate Topology Optimization Problem : an Asymptotic Study", *Structural Optimization*, vol. 6, 1993, pp 263-267.
- Bendsøe, M.P. (1995). "Optimization of Structural Topology, Shape and Material", Springer Verlag, Heidelberg, 1995.
- Bensoussan, A., J.L. Lions et G. Papanicolaou (1978). "Asymptotic Analysis for Periodic Structures", North Holland.
- Bergman, D., J.L. Lions, G. Papanicolaou, F. Murat, L. Tartar et E. Sanchez-Palencia (1983). "Les Méthodes de l'Homogénéisation : Théorie et Applications en Physique", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 57, Eyrolles.
- Bremicker, M., M. Chirehdast, N. Kikuchi et P. Papalambros (1992). "Integrated Topology and Shape Optimization in Structural Design", *Mechanics of Structures and Machines*, vol. 19, 1991, pp 551-587.
- Christensen, R.M. et K.H. Lo (1979). "Solutions for Effective Shear Properties in Three Phase Sphere and Cylinder Models", *Journal of Mech. Phys. Solids*, vol. 27, n°4, 1979.
- Díaz, A. et M.P. Bendsøe (1992). "Shape Optimization of Structures for Multiple Loading Conditions Using a Homogenization Method", *Structural Optimization*, vol. 4, 1992, pp 17-22.
- Díaz, A. et N. Kikuchi (1992). "Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, 1992, pp 1487-1502.
- Duvaut, G. (1976). "Analyse Fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus. Application à l'Etude des Matériaux Composites à Structure Périodique - Homogénéisation", dans: *Theoretical and Applied Mechanics* (W.T. Koiter, éd.), p 119, North-Holland, Amsterdam.

- Duysinx, P., W.H. Zhang, C. Fleury, V.H. Nguyen, S. Haubruge (1995). "A New Separable Approximation Scheme for Topological Problems and Optimization Problems Characterized by a Large Number of Design Variables", Proceedings du *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 108-109.
- Duysinx, P. (1996). "Optimisation topologique : du milieu continue à la Structure Elastique", thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, Février 1996, rapport LTAS OF-37.
- Duysinx, P. (1997). "Layout Optimization : A Mathematical Programming Approach", rapport LTAS OA-41, soumis pour publication.
- Duysinx, P. et V.H. Nguyen (1997). "New Approximation Procedures for Structural Optimization Based on Quasi-Newton Update Preserving Diagonal Structures". En préparation.
- Fleury, C. (1978). "Le Dimensionnement Automatique des Structures Elastiques", Thèse de Doctorat, Université de Liège, 1978, Rapport Interne SF-72.
- Fleury, C. (1982). "Reconciliation of Mathematical Programming and Optimality Criteria Methods", dans: *Foundation of Structural Optimization: A Unified Approach*, (Morris, A.J. éd), chap. 10, pp 263-404, John Wiley & Sons, 1982.
- Fleury, C. et G. Sander (1983). "Dual Method for Optimizing Finite Element Flexural Systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, 1983, pp 249-275.
- Fleury, C. et V. Braibant (1986). "Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp 409-428.
- Fleury, C. (1989a). "CONLIN : an Efficient Dual Optimizer Based on Convex Approximation Concepts", *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989, pp 81-89.
- Fleury, C. (1989b). "Efficient Approximation Concepts Using Second Order Information", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp 2041-2058.
- Fleury, C. (1989c). "CONLIN V2.0 - User's and Installation Manuel".
- Fleury, C. (1991a). "Dual Methods for Convex Seperable Problems", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 509-530, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Fleury, C. (1991b). "Sequential Convex Programming for Structural Optimization Problems", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 531-553, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Fukushima, J., K. Suzuki et N. Kikuchi (1991). "Applications to Car Bodies: Generalized Layout Design of Three-Dimensional Shells", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), vol. I, pp 177-191, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, Kluwer Academic Publishers.
- Gibianski, L.V. et A.V. Chekaev (1988). "Microstructures of Composites of Extremal Rigidity and Exact Estimates of Provided Energy Density", Ioffe Science and Technology Institute, Leningrade.
- Haber, R.B., C.S. Jog et M.P. Bendsøe (1994). "Variable-Topology Shape Optimization with a Control on Perimeter", dans: *Advances in Design Automation* (Gilmore, B.J., Hoeltzel, D.A., Dutta, D. et Eschenauer, H.A. Eds), Proceedings du 1994 ASME Design Technical Conferences - 20<sup>th</sup> Design Automation Conference, vol. 2, Mineapolis, MN, 11 - 14 Septembre, 1994, pp 261-272.
- Haber, R.B., C.S. Jog et M.P. Bendsøe (1995). "The Perimeter Method - A New Approach to Variable Topology Optimization", Proceedings du *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 63.
- Haftka, R. (1982). "Second-Order Sensitivity Derivatives in Structural Analysis", *AIAA Journal*, vol. 20, 1982, pp 1765-1766.

- Haftka, R.T. et H.M. Adelman (1991). "Sensitivity of Discrete Systems", dans: *Optimization of Large Structural Systems*, (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 289-311, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Halpin, J.C. et S.W. Tsai (1969). "Effects of Environmental Factors on Composite Materials", AFML-TR 67-423, June, 1969.
- Hashin, Z. (1962). "The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials", *Journal of Applied Mechanics*, March, 1962, pp 143-150.
- Hashin, Z. et S. Shtrikman (1963). "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, March-April, 1963, pp 127-140.
- Hashin, Z. et W. Rosen (1964). "The Elastic Moduli of Fiber Reinforced Materials", *Journal of Applied Mechanics*, June, 1964, pp 223-232, Errata, March, 1965, p219.
- Haug, E.J., V. Komkov et K.K. Choi (1983). "Design Sensitivity of Structural Systems", *Academic Press*.
- Hervé, E., C. Soltz et A. Zaoui (1991). "A propos de l'assemblage des sphères composites d'Hashin", *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, II, vol. 313, pp 857-862.
- Hill, R. (1964). "Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials: I. Elastic Behaviour", *J. Mech. Phys. Solids*, vol 12, p 199.
- Kill, N. et M. Géradin (1984). "Analyse de Sensibilité en Dynamique des Structures : Concepts", rapport LTAS, VF 52.
- Kohn, R.V. et G. Strang (1986). "Optimal Design and Relaxation of Variational Problems", *Communication in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 39, 1986, pp 1-25 (Part I), pp 139-182 (Part II), pp 353-377 (Part III).
- Michell, A.G.M. (1904). "The Limits of Economy of Material in Frame Structures", *Philosophical Magazine*, Vol. 8, Series 6, 1904, pp 589-597.
- Mori, T. et K. Tanaka (1973). "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *ACTA Metallurgica*, vol. 21, pp 571-574.
- Mlejnek, H.P. (1993). "Some Exploration in the Genesis of Structures", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, édés.), pp 287-300, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Murat, F. et L. Tartar (1985a). "Calcul des Variations et Homogénéisation", *Les Méthodes de l'Homogénéisation : Théorie et Applications en Physique*, pp. 319-369, 1985, Eyrolles.
- Murat, F. et L. Tartar (1985b). "Optimality Conditions and Homogenization", dans: *Nonlinear Variational Problems* (Marino A. et al., édés.), Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985, pp 1-8.
- Olhoff, N., M.P. Bendsøe et J. Rasmussen (1992). "On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 89, pp 259-279.
- Papalambros, P.Y. et M. Chiredast (1990). "An Integrated Environment for Structural Configuration Design", *Journal of Engineering Design*, vol. 1, pp 73-96.
- Papalambros, P.Y. et M. Chiredast (1993). "Integrated Structural Optimization Systems", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, édés.), pp 501-514, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Pedersen, P. (1989). "On optimal orientation of orthotropic materials", *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989, pp 101-106.
- Pedersen, P. (1990). "Bounds on elastic energy in solids of orthotropic materials", *Structural Optimization*, Vol. 2, 1990, pp 55-63.
- Rasmussen J., J. Thomsen et N. Olhoff (1993). "Integrating Topology and Boundary Variations Design Method in a CAD System", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares édés.), pp 483-499, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.

- Rozvany, G.I.N. (1993a). "Layout Topology for Grid-Type Structures", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, éd.), pp 251-272, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Rozvany, G.I.N., M. Zhou, T. Birker et O. Sigmund (1993b). "Topology Optimization Using Iterative Continuum-Type Optimality Criteria (COC) Methods for Discretized Systems", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, éd.), pp 273-286, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). "Non Homogeneous Media and Vibration Theory", Lecture Notes in Physics 127, Berlin, Springer-Verlag.
- Sheu, C.Y. et L.A. Schmit (1972). "minimum Weight Design of Elastic Redundant Trusses under Multiple Static Loading Conditions", *AIAA Journal*, vol. 10., n°2, pp. 155-162.
- Smaoui, H., C. Fleury et L.A. Schmit (1988). "Advances in Dual Algorithms and Convex Approximation Methods", Proceedings of AIAA/ASME/ASCE 29th Structures, Structural Dynamics and Material Conference, pp 1339-1347, 1988.
- Suzuki, K. et N. Kikuchi (1991). "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, 1991, pp 291-318.
- Suzuki, K. et N. Kikuchi (1992). "Generalized Layout Optimization of Shape and Topology in Three-Dimensional Shell Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, 1992, pp 291-318.
- Svanberg, K. (1987). "The Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp 359-373.
- Thapa, K.N. (1981). "Optimization of Unconstrained Functions with Sparse Hessian Matrices", Ph. D. dissertation, Stanford University, Department of Operations Research.
- Toint, P.L. (1977). "On Sparse and Symetric Matrix Updating Subject to a Linear Equation", *Math. Computing*, Vol. 31, pp 954-961.
- Zhang, W.H. et C. Fleury (1994). "Recent Advances in Convex Approximation Methods for Structural Optimization", dans: *Advances in Structural Optimization* (Topping, B.H.V. et M. Papadrakakis, éd.). CIVIL-COMP PRESS, Edinburgh, Scotland, Proceedings of the Second International Conference on Computational Structures Technology, Athènes, 30 Août - 1 Septembre 1994, pp 83-90.
- Zhou, M. et G.I.N. Rozvany (1991). "The COC algorithm, Part II : Topological, Geometry and Generalized Shape Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp 309-336.