

Tout sur rien, ou peu s'en faut : 0^0

Pascal Dupont

L'expression 0^0 existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ? On entend parfois —souvent— dire qu'il s'agit d'une forme indéterminée ; est-ce là une manière édulcorée de dire que 0^0 n'existe pas ?

Notre point de vue sera ici celui de l'algébriste. Celui-ci a un constant besoin de 0^0 , ou du moins sa vie serait beaucoup plus compliquée si cette expression n'existait pas (comme le soutiennent les *refusistes*). Voici quelques exemples.

- Formule du binôme.

Dans la formule

$$(a+b)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (1)$$

où nous supposons, pour ne pas compliquer davantage, que n est un naturel non nul, les termes extrêmes sont $\binom{n}{0} a^n b^0$ et $\binom{n}{n} a^0 b^n$; si a ou b est nul, nous voyons apparaître ce fameux 0^0 , ce qui signifie que les tenants de la thèse refusiste doivent formuler le théorème du binôme sous la forme : *Pour tous a et b non nuls, ...*

- Terme constant d'un polynôme.

Tout le monde, sans doute, s'accorde à dire que la valeur en 0 de n'importe quel polynôme est son terme constant. Cependant, si le polynôme est écrit

$$P = \sum_{0 \leq k \leq n} p_k X^k, \quad (2)$$

pour que P puisse être évalué en 0, il faut que 0^0 existe.

- Somme d'une liste géométrique.

Chacun sait, en principe, que, lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$,

$$\sum_{0 \leq k \leq n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (3)$$

Les refusistes devront cependant ajouter l'hypothèse que $q \neq 0$.

Nous voici donc convaincus que, pour que notre vie ne soit pas un enfer, 0^0 doit avoir droit de cité. Mais alors, quelle est sa valeur ? Reprenons les trois exemples ci-dessus.

- Portons $b = 0$ dans la formule du binôme ; il vient

$$\begin{aligned} a^n &= (a+0)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a^{n-k} 0^k = \\ &= \binom{n}{0} a^n 0^0 = a^n 0^0, \end{aligned}$$

puisque $0^k = 0$ pour tout $k \geq 1$ et que le coefficient binomial $\binom{n}{0}$ vaut 1 ; il serait donc utile que 0^0 soit égal à 1.

- Évaluons en 0 les deux membres de (2) : il vient

$$P(0) = \sum_{0 \leq k \leq n} p_k 0^k = p_0 0^0,$$

et comme nous souhaitons que $P(0)$ soit égal à p_0 , il vaudrait mieux que la valeur de 0^0 soit 1.

- Lorsque $q = 0$, (3) devient tout simplement $0^0 = 1$: toujours les mêmes conclusions.

Le mathématicien pose les définitions comme il l'entend. La seule exigence à respecter est la cohérence logique. Une définition n'est jamais qu'une abréviation que l'on introduit pour ne pas devoir répéter sans cesse de longues périphrases. Au-delà, se pose tout de même la question de l'utilité de la définition choisie.

Nous venons de voir que, dans trois cas au moins, il pourrait être utile de décréter que

$$0^0 := 1.$$

Mais peut-être d'autres arguments nous pousseraient-ils à choisir une autre valeur... auquel cas nous serions évidemment fort ennuyés ! Il serait bon, par conséquent, de disposer d'arguments moins anecdotiques. Heureusement, en voici. Trois. Une sainte trinité, qui convaincra même les mécréants. D'ailleurs, *Aller guten Dinge sind drei*.

Zéro puissance zéro ?

1. Soit $\odot$ une opération binaire sur un ensemble A , associative et possédant un neutre e . Il est possible de définir par récurrence

$$\bigodot_{1 \leq k \leq n} a_k = a_1 \odot \cdots \odot a_n,$$

pour $n \geq 1$. Cela se fait de la manière suivante :

$$\bigodot_{1 \leq k \leq 1} a_k := a_1$$

et, si $n > 1$,

$$\bigodot_{1 \leq k \leq n} a_k := \left(\bigodot_{1 \leq k \leq n-1} a_k \right) \odot a_n.$$

Remarquons que, dans l'expression $\bigodot_{1 \leq k \leq n} a_k$, la borne supérieure n détermine le nombre d'opérandes. Nous avons alors, pour tous m et $n \geq 1$:

$$\left(\bigodot_{1 \leq k \leq m} a_k \right) \odot \left(\bigodot_{1 \leq k \leq n} a_{m+k} \right) = \bigodot_{1 \leq k \leq m+n} a_k ; \quad (4)$$

ceci se démontre (par récurrence, bien sûr), mais nous ne le ferons pas ici. Demandons-nous plutôt ce que devient cette équation lorsque $n = 0$:

$$\left(\bigodot_{1 \leq k \leq m} a_k \right) \odot \left(\bigodot_{1 \leq k \leq 0} a_{m+k} \right) = \bigodot_{1 \leq k \leq m} a_k ;$$

dans cette égalité, le premier opérande du membre de gauche est égal au membre de droite. Le second opérande du membre de gauche, par contre, n'a pas (encore) été défini, puisque c'est le composé de zéro opérande. Mais nous voyons donc que si nous voulons que la règle (4) reste vraie lorsque n est nul, eh bien, il faut que $\bigodot_{1 \leq k \leq 0} a_{m+k}$ soit le neutre e : ainsi, *le composé de zéro opérande est toujours le neutre*. Dans le cas de l'addition, une somme de zéro terme est toujours nulle. Dans le cas de la multiplication, un produit de zéro facteur vaut toujours 1.

C'est d'ailleurs la raison des conventions $0! = 1$ ou $a^0 = 1$ (lorsque $a \neq 0$) ; mais donc, il n'y a pas de raison pour qu'il en aille autrement lorsque $a = 0$: 0^0 est aussi égal à 1.

2. Poussons plus à fond le raisonnement précédent : dans le produit 2^0 , par exemple, quels sont les facteurs ? Ce sont des facteurs 2,

direz-vous ; oui, mais combien y en a-t-il ? Il n'y en a pas. Et dans 0^0 ? Il n'y a aucun facteur 0. Parfait : aucun facteur 2, c'est exactement la même chose qu'aucun facteur 0 ! *Il n'y a qu'un seul ensemble vide*, dit-on en théorie des ensembles. Donc le produit 0^0 a *exactement* les mêmes facteurs que 2^0 ou que $0!$, et par conséquent, ils sont égaux. Aussi simple que cela : $0^0 = 2^0 = 0! = 1!$ Et, au passage, notons que lorsque nous avons énoncé, quelques lignes plus haut : *le composé de zéro opérande est toujours le neutre*, c'est *le composé de zéro opérande est le neutre* que nous aurions dû dire ; *le toujours* est superflu : il n'y a qu'un seul tel composé !

3. La théorie des ensembles, précisément, revenons-y. Une manière de définir les opérations sur les nombres naturels, qui sont les cardinaux finis, est de s'appuyer sur les opérations ensemblistes. Ainsi,

- $m + n$ est le cardinal de la réunion disjointe d'un ensemble de cardinal m et d'un ensemble de cardinal n ;
- $m \cdot n$ est le cardinal du produit cartésien d'un ensemble de cardinal m et d'un ensemble de cardinal n ;
- m^n est le cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal m .

C'est cette dernière définition qui nous intéresse ici. Par exemple, 2^3 est le cardinal de l'ensemble des applications de $\{0, 1, 2\}$, qui est le prototype des ensembles de cardinal 3, dans $\{0, 1\}$, qui est le prototype des ensembles de cardinal 2. Il y a 8 telles applications :

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \end{Bmatrix}, \\ & \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

(en fait, la première —par exemple— est notée ici de manière « imagée », mais c'est plus exactement l'ensemble formé de trois couples : $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$), donc $2^3 = 8$.

Dans cette approche, 0^0 n'a nul besoin d'une définition spécifique : c'est tout simplement le cardinal de l'ensemble des applications de

Zéro puissance zéro ?

l'ensemble vide $\emptyset$ dans lui-même. Combien sont-elles ? Il y en a une seule, l'application vide, qui ne comprend aucun couple. Ici encore, $0^0 = 1$.

Et voici l'algébriste satisfait et rassuré. Mais il ne devra pas cependant faire la sourde oreille à la com-

plainte de l'analyste, pour qui il existe bel et bien une « forme indéterminée » $[0^0]$. En effet, que la fonction $(x, y) \mapsto x^y$ soit définie en $(0, 0)$ ne signifie évidemment pas qu'elle y est continue. Mais ceci est une autre histoire.

Pascal Dupont est professeur à HEC–Liège. ✉ pascal.dupont@uliege.be



Un « spiro-pavage », ainsi dénommé par Guy NOËL.