

Trigonométrie sphérique et calcul vectoriel

Pascal Dupont

Mots clés : Trigonométrie sphérique, vecteur.

Résumé. Dans ce numéro de Losanges, J. MIÉWIS a établi les principales relations de la trigonométrie sphérique en adoptant un point de vue qui eût pu être celui de MÉNÉLAÛS ou des mathématiciens arabes qui lui ont emboîté le pas [3].

Pour intéressantes qu'elles soient, ces techniques sont tout de même fort lourdes par rapport à une approche « moderne » de la question, reposant notamment sur le calcul vectoriel. Nous avons donc pensé que les lecteurs de cette revue seraient heureux de compléter par ce second point de vue leur étude de ce beau (mais suranné) sujet.

Nous n'avons, ensuite, pas pu résister à l'envie de montrer comment les formules de la trigonométrie rectiligne se cachent dans celles de sa grande ⁽¹⁾ sœur sphérique.

Nous travaillerons sur une sphère Σ de rayon 1, dont le centre sera noté O . Lorsque ABC est un triangle sur Σ , nous noterons A, B & C les angles, et a, b & c les arcs $\widehat{BC}, \widehat{CA}$ & $\widehat{AB}$ respectivement.

Proposition 1 (Relations des cosinus) Dans le triangle ABC ,

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Par symétrie, il suffit de prouver la première égalité. Considérons le grand cercle $\mathcal{A}$, intersection de la sphère et du plan perpendiculaire à OA passant par O . Prolongeons l'arc $\widehat{AB}$ (resp. $\widehat{AC}$) jusqu'à son intersection B' (resp. C') avec $\mathcal{A}$. La mesure de l'arc $\widehat{B'C'}$ est A . Nous avons $\vec{OB} = \cos c \cdot \vec{OA} + \sin c \cdot \vec{OB'}$ et $\vec{OC} = \cos b \cdot \vec{OA} + \sin b \cdot \vec{OC'}$. Puisque ces deux vecteurs sont normés, ainsi que $\vec{OB'}$ et $\vec{OC'}$,

$$\begin{aligned}\cos a &= \langle \vec{OB} | \vec{OC} \rangle \\ &= \langle \cos c \cdot \vec{OA} + \sin c \cdot \vec{OB'} | \cos b \cdot \vec{OA} + \sin b \cdot \vec{OC'} \rangle \\ &= \cos b \cos c \langle \vec{OA} | \vec{OA} \rangle + \sin b \cos c \langle \vec{OA} | \vec{OC'} \rangle + \\ &\quad + \cos b \sin c \langle \vec{OB'} | \vec{OA} \rangle + \sin b \sin c \langle \vec{OB'} | \vec{OC'} \rangle \\ &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.\end{aligned}$$

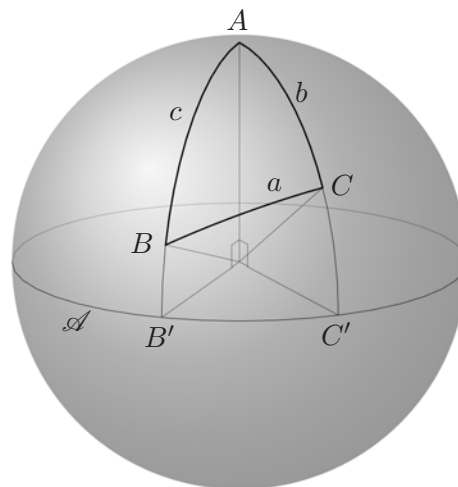


Fig. 1

1. N'oublions pas que la trigonométrie sphérique, née des nécessités de l'astronomie, est antérieure à la trigonométrie plane.

Trigonométrie sphérique

Proposition 2 (Triangle rectangle) Si le triangle ABC est rectangle en A , alors $\cos a = \cos b \cos c$.

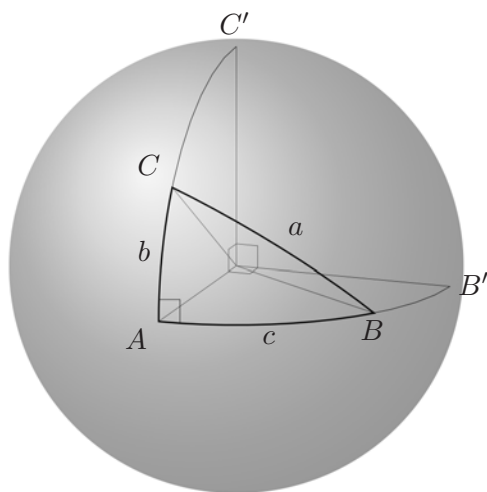


Fig. 2

DÉMONSTRATION. Il suffit de faire $A = \pi/2$ dans la première des relations des cosinus. ■

Proposition 3 (Relations des sinus) Dans le triangle ABC ,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. Par symétrie, il suffit de prouver la première égalité. Soit D le point situé du même côté du plan OAB que C et tel que $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OD})$ soit une base orthonormée. Si le grand cercle $\mathcal{B}$ est la trace sur la sphère du plan orthogonal à OB passant par O , D peut encore être défini comme celui des deux points d'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui est du même côté que C du plan OAB . Remarquons que A et B sont interchangeables dans la définition de ce point.

Considérons le triangle $CC'D$, rectangle en C' . D'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned} \cos \widehat{CD} &= \cos \widehat{CC'} \cos \widehat{C'D} = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - b \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - A \right) = \sin b \sin A. \end{aligned}$$

Mais nous avons observé que la définition de D est symétrique par rapport aux deux sommets A et B du triangle. Nous avons donc également

$$\cos \widehat{CD} = \sin a \sin B.$$

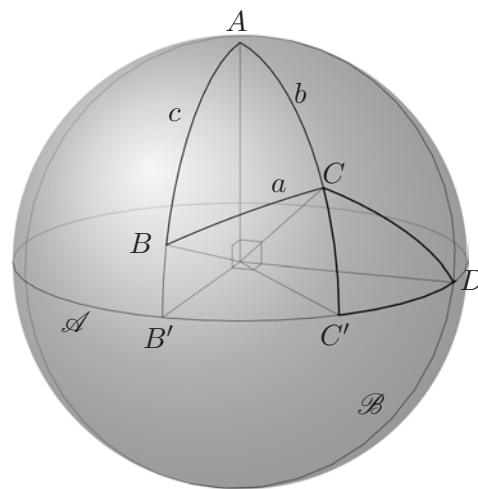


Fig. 3

La comparaison des deux dernières égalités nous permet de conclure que

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Avant de donner une seconde démonstration de cette proposition, nous avons à établir un lemme.

Lemme 1 Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs normés, alors

$$\begin{aligned} \|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w})\| &= \|(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})\| = \\ &= \|(\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{v})\|. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la formule du double produit vectoriel,

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) &= \langle \vec{u} | \vec{u} \wedge \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v} | \vec{u} \wedge \vec{w} \rangle \vec{u} = \\ &= \langle \vec{v} | \vec{w} \wedge \vec{u} \rangle \vec{u}, \end{aligned}$$

puisque $\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{w}$; et, comme $\|\vec{u}\| = 1$,

$$\|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w})\| = |\langle \vec{v} | \vec{w} \wedge \vec{u} \rangle|.$$

De même,

$$\|(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})\| = |\langle \vec{w} | \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle|$$

et

$$\|(\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{v})\| = |\langle \vec{u} | \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle|.$$

Or, le produit mixte jouit de la propriété d'invariance par permutation circulaire :

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \wedge \vec{u} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle.$$

La preuve est donc terminée. ■

Trigonométrie sphérique

SECONDE DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.
Calculons la norme de

$$(\vec{OA} \wedge \vec{OB}) \wedge (\vec{OA} \wedge \vec{OC}),$$

en nous souvenant que, par définition, la norme du produit vectoriel est le produit des normes des deux facteurs et du sinus de leur angle. Ici, d'abord,

$$\|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| = \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin \widehat{AOB} = \sin c$$

et de même

$$\|\vec{OA} \wedge \vec{OC}\| = \sin b.$$

Ensuite (revoir la fig. 3), le vecteur $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$ est parallèle à $\vec{OD}$ et, de même, $\vec{OA} \wedge \vec{OC}$ est parallèle au vecteur $\vec{OE}$ (non représenté) tel que $(\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OE})$ soit une base orthonormée directe. Ainsi,

$$\begin{aligned} \angle(\vec{OA} \wedge \vec{OB}, \vec{OA} \wedge \vec{OC}) &= \angle(\vec{OD}, \vec{OE}) = \\ &= \angle(\vec{OB}, \vec{OC}) = A. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|(\vec{OA} \wedge \vec{OB}) \wedge (\vec{OA} \wedge \vec{OC})\| = \sin c \sin b \sin A;$$

de même,

$$\|(\vec{OB} \wedge \vec{OC}) \wedge (\vec{OB} \wedge \vec{OA})\| = \sin a \sin c \sin B$$

et

$$\|(\vec{OC} \wedge \vec{OA}) \wedge (\vec{OC} \wedge \vec{OB})\| = \sin b \sin a \sin C.$$

Comme, selon le lemme, ces trois normes sont égales,

$$\sin c \sin b \sin A = \sin a \sin c \sin B = \sin b \sin a \sin C,$$

et nous obtenons la thèse en divisant les trois membres par $\sin a \sin b \sin c$. ■

La trigonométrie rectiligne comme limite de la trigonométrie sphérique

Le plan, ce n'est rien d'autre qu'une sphère de très grand rayon, pour ainsi dire. Nous le savons évidemment bien, nous les humains, qui vivons sur une sphère en ayant l'impression de vivre sur un

plan. Rappelons qu'il a fallu attendre les travaux géodésiques de GAUSS pour qu'il soit mis en évidence que les (grands) triangles définis à la surface de notre globe se comportaient comme des triangles sphériques et non comme des triangles rectilignes.

Nous devons donc nous attendre à ce que les formules de la trigonométrie sphérique se réduisent à celles de la trigonométrie rectiligne lorsque le rayon de la sphère tend vers l'infini. Oui, mais... il y a un petit problème : nous avons supposé, tout le long de ce qui précède, que ce rayon était fixé à 1. En fait, si nous avons pu nous le permettre, c'est tout simplement que ce rayon n'intervient nulle part ; en effet, les côtés d'un triangle sphérique sont des arcs et non des longueurs ; et, d'ailleurs, ils n'interviennent dans les formules que *via* les fonctions trigonométriques. Alors ?

Dire que la sphère est très grande, c'est dire qu'elle est très grande *par rapport au triangle étudié* ; ou encore, que celui-ci est très petit par rapport à la sphère. Plus précisément, que leurs côtés a , b & c sont très petits — mais leurs angles A , B & C n'ont aucune raison de l'être.

Dans les formules ci-dessus, nous allons remplacer les fonctions des trois variables a , b & c par leurs polynômes de MACLAURIN d'ordre suffisant (au moins 1).

Commençons par les relations des sinus. Comme le polynôme de MACLAURIN du sinus est $T_1 \sin = X$, les trois membres de

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

deviennent

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Quelle surprise ! Ceci a un petit air de déjà vu !

Poursuivons avec les relations des cosinus. Nous savons que $T_1 \cos = 1$ et $T_2 \cos = 1 - \frac{1}{2}X^2$. Dans la première de ces relations,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

pour obtenir le polynôme de MACLAURIN d'ordre n du membre de droite, il faut non seulement utiliser les polynômes de MACLAURIN d'ordre n du sinus et du cosinus, mais ensuite « raboter », dans l'expression obtenue, tous les termes dont le degré (total par rapport à a , b & c) est strictement supérieur

Trigonométrie sphérique

à n (cf. [2]). À l'ordre 1, nous avons donc (avec des abus d'écriture) :

$$\begin{aligned} T_1(\cos a) &= T_1(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = T_1(1 \times 1 + bc \cos A) \\ &\Leftrightarrow 1 = 1. \end{aligned}$$

Voici qui ne nous apprend rien ! Réessayons en passant à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} T_2(\cos a) &= T_2(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}a^2 = T_2\left(\left(1 - \frac{1}{2}b^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}c^2\right) + bc \cos A\right) \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}a^2 = T_2\left(1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + bc \cos A\right) \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}a^2 = 1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + bc \cos A \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \end{aligned}$$

et nous retrouvons l'une des formules d'AL-KASHI. Enfin, si nous procédons de la même manière avec la formule de la proposition 2, qui concerne un triangle rectangle en A :

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

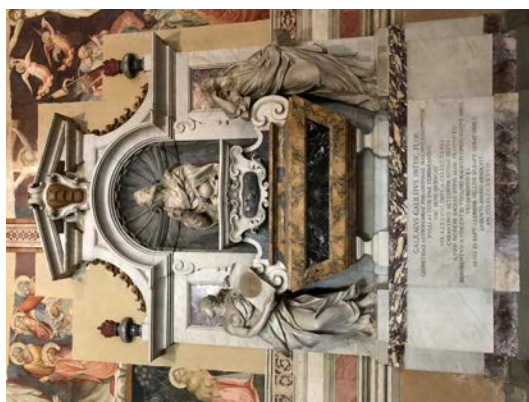
il vient

$$\begin{aligned} T_2(\cos a) &= T_2(\cos b \cos c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}a^2 = T_2\left(\left(1 - \frac{1}{2}b^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}c^2\right)\right) \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}a^2 = T_2\left(1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2\right) \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}a^2 = 1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la célèbre égalité de PYTHAGORE. Celle-ci est un cas particulier de celle d'AL-KASHI, tout comme le résultat de la proposition 2 est un cas particulier de ceux de la proposition 1.

Pour en savoir plus

- [1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonométrie_sphérique. Consulté le 05/12/19.
- [2] DUPONT P. et VAST N., Les polynômes de Taylor : découvrons comment les construire et les utiliser efficacement. *Repères*, 33, pp. 115–126, 1998.
- [3] MIÉWIS J., Mathématiques de la sphère. *Lo-sanges*, 47, pp. 28–44, 2019.



Le tombeau de Galilée.