Le théorème de Le Paige

Pascal Dupont

Mots clés : Arithmétique, divisibilité, calcul matriciel, indicatrice d'Euler.

Résumé. *Le théorème de* LE PAIGE, *bien oublié sans doute, ne casse certes pas trois pattes à un canard. Mais il constitue un beau petit exercice mêlant joyeusement arithmétique et calcul matriciel.*

Nous notons $=\!|$ la relation « divise » ([1]) et $\wedge$ l'opération binaire « plus grand commun diviseur ».

Théorème. *Soit n un naturel non nul fixé. Soit L et G les matrices carrées d'ordre n dont les éléments sont respectivement*

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j =\!| i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$g_{ij} = i \wedge j.$$

Soit encore Φ la matrice diagonale d'ordre n

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi(1), \ldots, \varphi(n)),$$

*où φ est l'indicatrice d'*EULER *: $\varphi(n)$ est le nombre de naturels non nuls inférieurs à n et premiers avec n.*
Alors,

$$G = L\Phi L^{\mathrm{t}}.$$

Exemple : $n = 6$.

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&2&1&2&1&2\\ 1&1&3&1&1&3\\ 1&2&1&4&1&2\\ 1&1&1&1&5&1\\ 1&2&3&2&1&6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

Commençons par quelques remarques. Tout d'abord, par construction, la matrice L est triangulaire inférieure, puisque $l_{ij} = 0$ lorsque $i > j$; et G est symétrique, puisque l'opération « pgcd » est commutative ; ce qui tombe bien, puisque le produit $L\Phi L^{\mathrm{t}}$ est symétrique : $(L\Phi L^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = (L^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}\Phi^{\mathrm{t}}L^{\mathrm{t}} = L\Phi L^{\mathrm{t}}$.

1. Nous professons depuis toujours que le symbole usuellement retenu pour cette relation, la simple barre verticale, est mal choisi : un symbole symétrique ne devrait pas noter une relation qui ne l'est pas ; en outre, le symbole que nous proposons, avec sa double barre, admet, comme par exemple $\leqslant$ ou $\subseteq$, la variante sans double barre, $\dashv$, pour noter la relation stricte correspondante « est un diviseur propre de ».

Ensuite, si A, B et C sont trois matrices carrées d'ordre n, nous savons que

$$(ABC)_{ij} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\,;$$

si la matrice B est une matrice diagonale ($b_{ii} = b_i$, $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$), la double somme se réduit à une somme simple

$$(ABC)_{ij} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{ik}b_k c_{kj}\,;$$

si en outre A est triangulaire inférieure et C triangulaire supérieure, ceci devient :

$$(ABC)_{ij} = \sum_{1\leqslant k\leqslant \min\{i,j\}} a_{ik}b_k c_{kj},$$

puisque a_{ik} est nul si $k > i$ et c_{kj} l'est si $k > j$.

Dans notre cas, compte tenu de la symétrie des deux membres, il suffit de prouver que, lorsque $i \leqslant j$,

$$i \wedge j = \sum_{1\leqslant k\leqslant i} l_{ik}\varphi(k)l_{jk}.$$

Or, compte tenu de la définition de l_{ij},

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant i} l_{ik}\varphi(k)l_{jk} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ k=\!\!\mid i\\ k=\!\!\mid j}} \varphi(k) = \sum_{k=\!\!\mid i\wedge j} \varphi(k).$$

La thèse est alors une conséquence directe de la proposition qui suit. ■

Proposition. *Quel que soit le naturel non nul n,*

$$\sum_{k=\!\!\mid n} \varphi(k) = n.$$

Démonstration.

Pour chaque diviseur k de n, notons E_k l'ensemble des naturels inférieurs à k et premiers avec lui, de sorte que $\#E_k = \varphi(k)$. Alors les ensembles $(n/k)E_k$ constituent une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$. En effet, d'une part, si $1 \leqslant j \leqslant n$, j appartient à $(j \wedge n)E_{n/(j\wedge n)}$. D'autre part, si k et k' sont deux diviseurs distincts de n, alors $(n/k)E_k$ et $(n/k')E_{k'}$ sont disjoints ; en effet, s'ils ne l'étaient pas, il existerait $l \leqslant k$ et premier avec k, et $l' \leqslant k'$ et premier avec k', tels que

$$\frac{n}{k}l = \frac{n}{k'}l',$$

soit $kl' = k'l$; alors, l divise $k'l$ et est premier avec k, donc l divise l' ; et de même, l' divise l, donc finalement $l = l'$ et $k = k'$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc,

$$n = \#\{1, 2, \ldots, n\} = \sum_{k=\!\!\mid n} \#\left(\frac{n}{k}E_k\right) = \sum_{k=\!\!\mid n} \#E_k = \sum_{k=\!\!\mid n} \varphi(k).$$ ■

Remarque. La matrice L étant triangulaire inférieure et L^{t}, donc, triangulaire supérieure, il est possible de travailler avec des « matrices infinies » : les produits sont définis.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Note : Constantin Le Paige (Liège, 1852 – Liège, 1929), élève d'Eugène Catalan et de François Folie, fut professeur à l'Université de Liège (1879) et membre de l'Académie royale de Belgique (1890) ; il fut recteur (1895–1898) et administrateur général (1905–1922) de son université.

Pour en savoir plus

[1] MacTutor History of Mathematics archive : Constantin Marie Michel Hubert Jérôme Le Paige. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Le_Paige.html. (Consulté le 13/06/17).

[2] Mathematics Genealogy Project : Constantin Le Paige. http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=100579. (Consulté le 13/06/17).

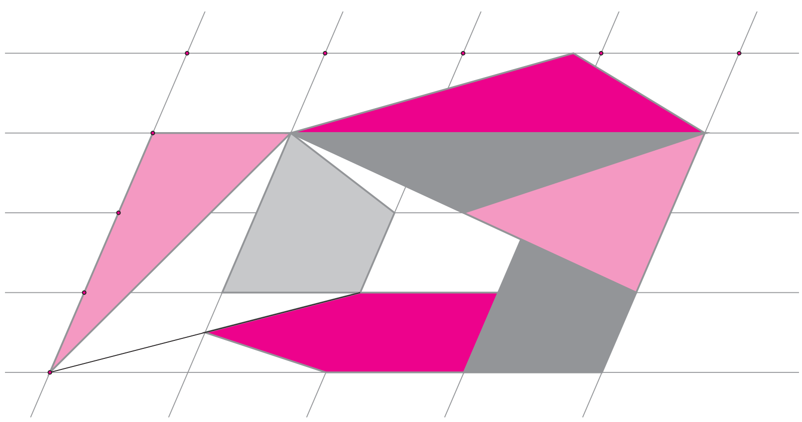
[3] Le Paige C., Sur un théorème de M. Mansion. *Nouv. Corresp. Math*, 4, pp. 176–178, 1878.

[4] Mansion P., On an Arithmetical Theorem of Professor Smith's. *Messenger Math*, 7, pp. 81–82, 1877.

[5] Weisstein E. W., Le Paige's Theorem. From MathWorld — A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/LePaigesTheorem.html. (Consulté le 09/06/17).

Pascal Dupont est professeur à HEC–Liège. ✉ pascal.dupont@uliege.be

---



Parmi les sept polygones représentés sur le treillis, six ont une propriété commune.

Quel est l'intrus ?