Modèles mathématiques et confinement, une introduction

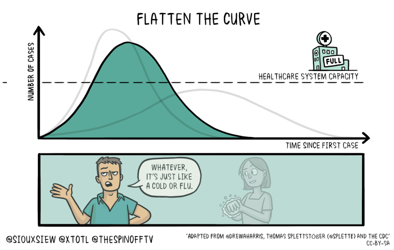
Michel Rigo, Département de Mathématique

http://hdl.handle.net/2268/246583
https://youtu.be/wJ-K8W321pA

LIÈGE université

Préambule :

- Je ne suis pas un spécialiste de la modélisation, je ne suis pas statisticien ; je ne manipule pas des données ;
- J'oeuvre (beaucoup) pour la dissémination des mathématiques au niveau des écoles secondaires ; les mathématiques et la recherche sont utiles à la société ;
- Je voulais comprendre "*on doit réduire le pic de l'épidémie*".



Un modèle “simple” proposé par Kermack et McKendrick en 1927

S : <u>sain</u>
susceptible
d’être infecté

→

I : <u>infectieux</u>
malade et
contagieux

→

R : <u>rétabli</u>
immunisé
ou décédé

Les limitations du modèle SIR :

- la période d'incubation est instantanée
- la période pendant laquelle une personne est contagieuse coïncide avec la période pendant laquelle elle est malade.

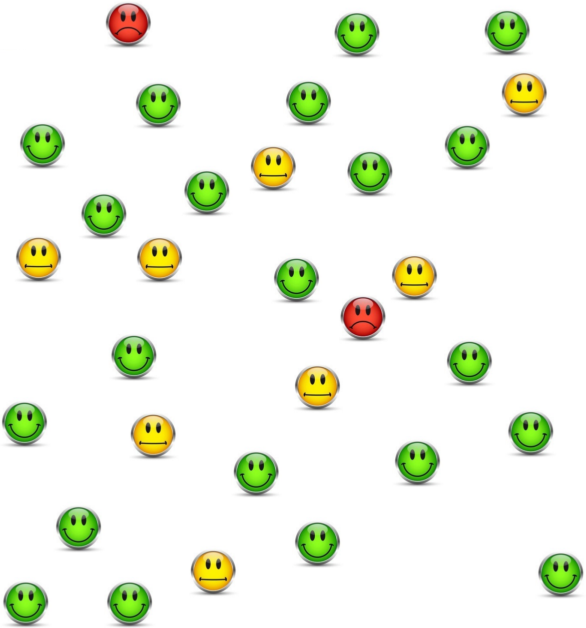
$$\text{infecté} = \text{malade} = \text{contagieux} = \text{infectieux}$$

Remarques :

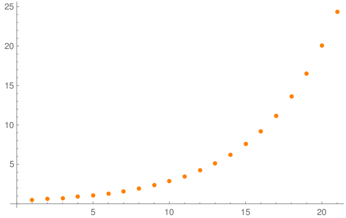
- La catégorie R contient les personnes rétablies et décédées.
- Une personne rétablie ne peut pas retomber malade.

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R$$

Population : mélange uniforme d'individus S, I et R



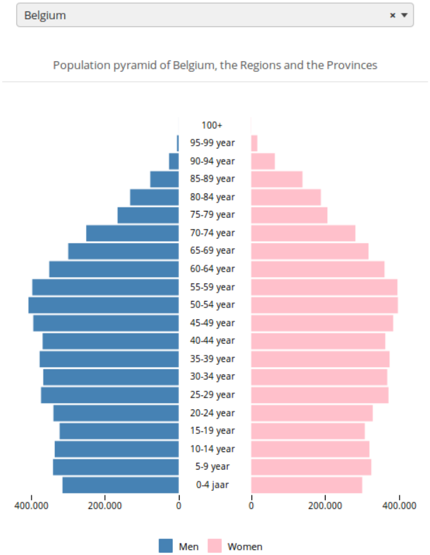
On voudrait jour après jour, estimer $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$



- Tous les patients ne sont pas gravement malades ; dans le cas du COVID-19, il y a aussi des patients asymptomatiques.
- Une proportion stable des malades nécessitera une hospitalisation.
- On connaît la capacité maximale des hôpitaux.
- On ne connaît pas la “vraie” valeur de $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$.

Pourquoi estimer $I(t)$?

Pyramide des âges, cf. `statbel.fgov.be`



Belgium

11,431,406 inhabitants

50.8% women

49.2% men

Flemish Region

6,589,069 (57.6%)

50.5% women

49.5% men

Walloon Region

3,633,795 (31.8%)

51.1% women

48.9% men

Brussels-Capital Region

1,208,542 (10.6%)

51.1% women

48.9% men

Pourquoi estimer $I(t)$?

16 March 2020 Imperial College COVID-19 Response Team

Impact of non-pharmaceutical interventions (NPIs) to reduce COVID-19 mortality and healthcare demand

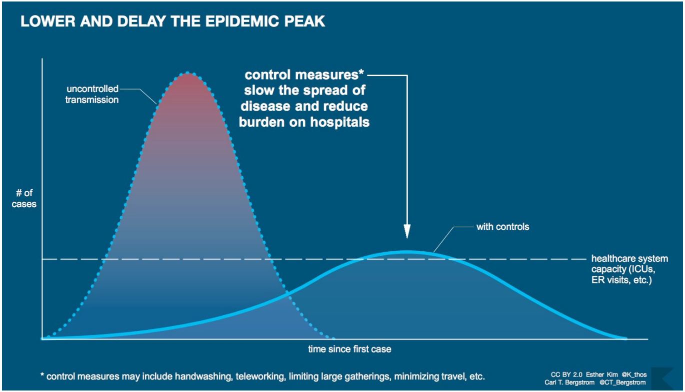
Age-group (years)	% symptomatic cases requiring hospitalisation	% hospitalised cases requiring critical care	Infection Fatality Ratio
0 to 9	0.1%	5.0%	0.002%
10 to 19	0.3%	5.0%	0.006%
20 to 29	1.2%	5.0%	0.03%
30 to 39	3.2%	5.0%	0.08%
40 to 49	4.9%	6.3%	0.15%
50 to 59	10.2%	12.2%	0.60%
60 to 69	16.6%	27.4%	2.2%
70 to 79	24.3%	43.2%	5.1%
80+	27.3%	70.9%	9.3%

DOI: https://doi.org/10.25561/77482

Pourquoi estimer $I(t)$?

On "sait" quelle proportion nécessitera des soins, e.g. 7%.
Le but des décideurs politiques est donc de maintenir

$$\boxed{0,07.I(t) < \text{capacité des hôpitaux.}}$$



Comptage ou proportion :

$S(t)$	$I(t)$	$R(t)$	N
160	2	38	200

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

$s(t)$	$i(t)$	$r(t)$	
80%	1%	19%	100%

$$s(t) = \frac{S(t)}{N} \qquad i(t) = \frac{I(t)}{N} \qquad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1.$$

Evolution de S

On se place au niveau global de la population toute entière ; c'est un problème de *santé publique*.

β taux de transmission moyen de la maladie (*quotidien et par personne infectieuse*), $\beta = m.p$

- m : nombre moyen de contacts quotidiens
- p : probabilité de tomber malade au contact d'une personne infectieuse

ZOOM local :

$$m = 8$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$s(t) = \frac{3}{4}$$

Une personne infectieuse ne peut contaminer qu'une personne saine (susceptible de tomber malade).

Elle va donc contaminer en moyenne

$$\underbrace{m.p}_{\beta}\,.s(t) \text{ personnes saines}$$

$$\text{sur l'exemple :}\quad 8.\frac{1}{2}.\frac{3}{4} = 4.\frac{3}{4} = 3$$

ZOOM local :

$m = 8$

$p = \frac{1}{2}$

$s(t) = \frac{3}{4}$

Une personne infectieuse ne peut contaminer qu'une personne saine (susceptible de tomber malade).

Elle va donc contaminer en moyenne

$$\underbrace{m.p}_{\beta}.s(t) \text{ personnes saines}$$

sur l'exemple : $8.\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4} = 4.\dfrac{3}{4} = 3$

ZOOM local :

$m = 8$

$p = \frac{1}{2}$

$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}}$

Une personne infectieuse ne peut contaminer qu'une personne saine (susceptible de tomber malade).

Elle va donc contaminer en moyenne

$$\underbrace{m.p}_{\beta}.s(t) \text{ personnes saines}$$

$$\text{sur l'exemple :} \quad 8.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 4.\frac{1}{2} = 2$$

ZOOM local :

$m = 8$

$p = \frac{1}{2}$

$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}}$

Une personne infectieuse ne peut contaminer qu'une personne saine (susceptible de tomber malade).

Elle va donc contaminer en moyenne

$$\underbrace{m.p}_{\beta}.s(t) \text{ personnes saines}$$

sur l'exemple : $\quad 8.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 4.\frac{1}{2} = 2$

Notation, différence première :

$$\Delta I(t) = I(t+1) - I(t)$$

donne l'*accroissement* pour passer du jour t au suivant

Simplification du comptage : on suppose que des personnes infectieuses rencontrent des personnes différentes.

Le nombre total de contaminations le jour t vaut $\beta.s(t).I(t)$

Première équation du modèle :

$$S(t+1) = S(t) - \beta.s(t).I(t)$$

$$\boxed{\underbrace{S(t+1) - S(t)}_{\Delta S(t)} = -\beta.s(t).I(t)}$$

Si on exprime les proportions (on divise par l'effectif total)

$$\frac{S(t+1)}{N} = \frac{S(t)}{N} - \beta.s(t).\frac{I(t)}{N}$$

$$\boxed{\Delta s(t) = -\beta.s(t).i(t)}$$

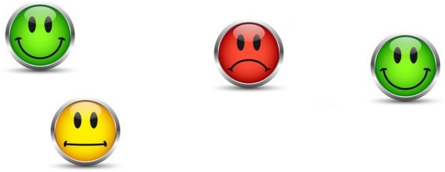
Pour rappel, taux de transmission moyen $\beta = m.p$

$m \downarrow$ avec confinement, interdiction de grands rassemblements, ...

$m = 8$

Pour rappel, taux de transmission moyen $\beta = m.p$

$m \downarrow$ avec confinement, interdiction de grands rassemblements, ...



$m = 3$

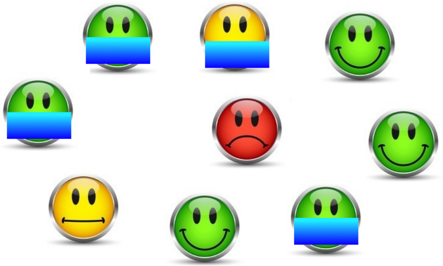
Pour rappel, taux de transmission moyen $\beta = m.p$

$p \downarrow$ avec mesures d'hygiène, port du masque, distanciation, ...

$p = \frac{1}{2}$

Pour rappel, taux de transmission moyen $\beta = m.p$

$p \downarrow$ avec mesures d'hygiène, port du masque, distanciation, ...

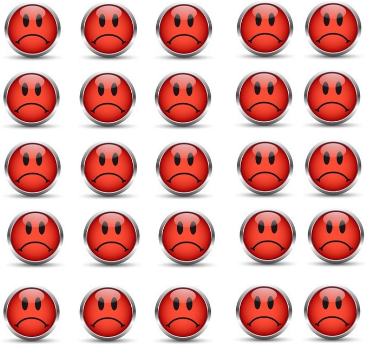


$p = \frac{1}{4}$

Evolution de R

γ : *la proportion de personnes contaminées qui sont rétablies durant une journée*

Si, en moyenne, 5 jours sont nécessaires pour récupérer.

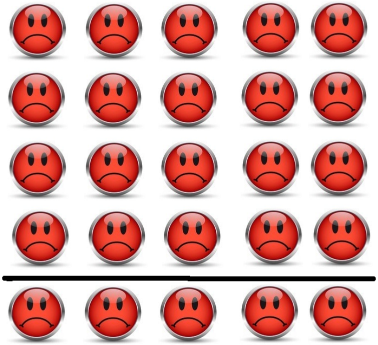


En moyenne, $\gamma = 1/5$ des patients vont récupérer le jour t

Evolution de R

γ : *la proportion de personnes contaminées qui sont rétablies durant une journée*

Si, en moyenne, 5 jours sont nécessaires pour récupérer.

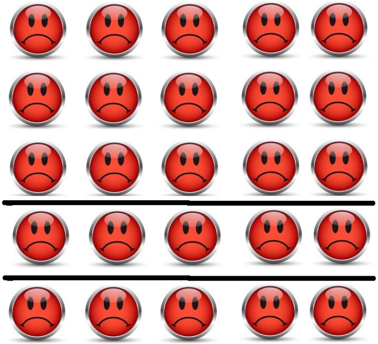


En moyenne, $\gamma = 1/5$ des patients vont récupérer le jour t

Evolution de R

γ : *la proportion de personnes contaminées qui sont rétablies durant une journée*

Si, en moyenne, 5 jours sont nécessaires pour récupérer.



En moyenne, $\gamma = 1/5$ des patients vont récupérer le jour t

Evolution de R

γ : *la proportion de personnes contaminées qui sont rétablies durant une journée*

Si, en moyenne, 5 jours sont nécessaires pour récupérer.

En moyenne, $\gamma = 1/5$ des patients vont récupérer le jour t

EVOLUTION DE R

γ : *la proportion de personnes contaminées qui sont rétablies durant une journée*

Si, en moyenne, 5 jours sont nécessaires pour récupérer.

En moyenne, $\gamma = 1/5$ des patients vont récupérer le jour t

Evolution de R

$$S(t+1) = S(t) - \beta . s(t) . I(t)$$

Deuxième équation du modèle :

$$R(t+1) = R(t) + \gamma . I(t)$$

$$\boxed{\underbrace{R(t+1) - R(t)}_{\Delta R(t)} = \gamma . I(t)}$$

Si on passe aux proportions

$$\boxed{\Delta r(t) = \gamma . i(t)}$$

Le modèle complet

$$\boxed{\Delta s(t) = -\beta . s(t) . i(t)} \qquad \boxed{\Delta r(t) = \gamma . i(t)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} S : \underline{\text{sain}} \\ \text{susceptible} \\ \text{d'être infecté} \end{array}} \xrightarrow{\beta . s(t) . i(t)} \boxed{\begin{array}{c} I : \underline{\text{infectieux}} \\ \text{malade et} \\ \text{contagieux} \end{array}} \xrightarrow{\gamma . i(t)} \boxed{\begin{array}{c} R : \underline{\text{rétabli}} \\ \text{immunisé} \\ \text{ou décédé} \end{array}}$$

Figure – Gains et pertes dans les trois catégories.

$$\Delta i(t) = i(t+1) - i(t) = \beta . s(t) . i(t) - \gamma . i(t)$$

Le modèle complet

$$\boxed{\Delta s(t) = -\beta.s(t).i(t)} \qquad \boxed{\Delta r(t) = \gamma.i(t)}$$

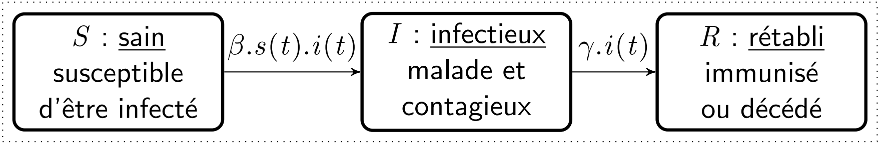


Figure – Gains et pertes dans les trois catégories.

$$\Delta i(t) = i(t+1) - i(t) = \beta.s(t).i(t) - \gamma.i(t)$$

Le modèle complet

On a ainsi obtenu un système

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \Delta s(t) & = & s(t+1)-s(t) & = & -\beta.s(t).i(t) \\ \Delta i(t) & = & i(t+1)-i(t) & = & \beta.s(t).i(t)-\gamma.i(t) \\ \Delta r(t) & = & r(t+1)-r(t) & = & \gamma.i(t) \end{array}\right.$$

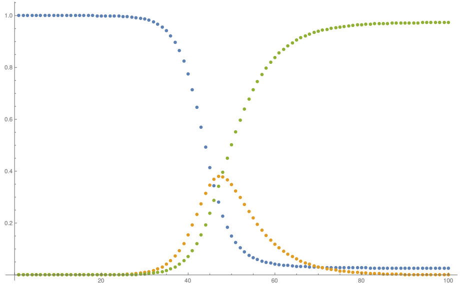
dont la solution dépend des conditions initiales.

Si l'intervalle de temps tend vers 0, on présente souvent le modèle sous forme d'un système d'équations différentielles

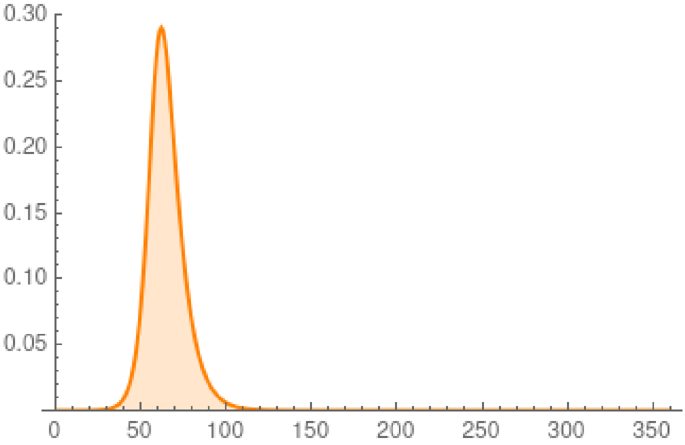
$$\left\{\begin{array}{rcl} s'(t) & = & -\beta.s(t).i(t) \\ i'(t) & = & \beta.s(t).i(t)-\gamma.i(t) \\ r'(t) & = & \gamma.i(t) \end{array}\right.$$

Le modèle complet

```
s[0] = 1 - 0.000001;
i[0] = 0.000001;
r[0] = 0;
β = 1 / 2;
γ = 1 / 7;
s[t_] := s[t] = s[t - 1] - β s[t - 1] × i[t - 1];
i[t_] := i[t] = i[t - 1] + β s[t - 1] × i[t - 1] - γ i[t - 1];
r[t_] := r[t] = r[t - 1] + γ i[t - 1];
ListPlot[{Table[s[t], {t, 1, 100}], Table[i[t], {t, 1, 100}], Table[r[t], {t, 1, 100}]}]
```

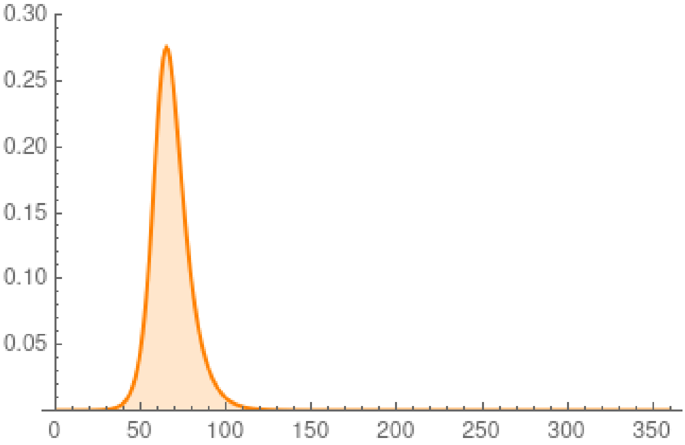


Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ $(\gamma = 1/7)$



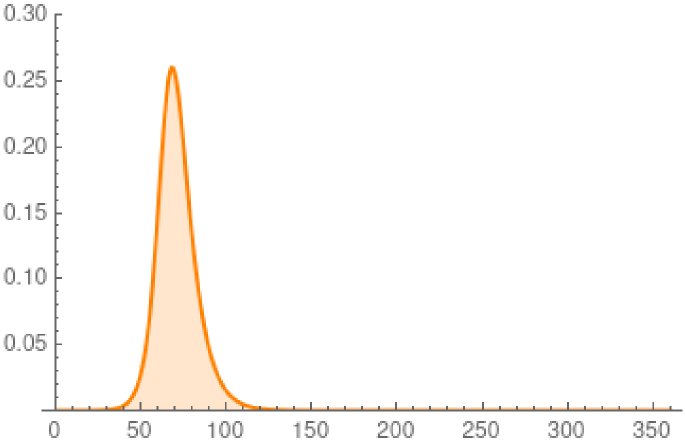
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



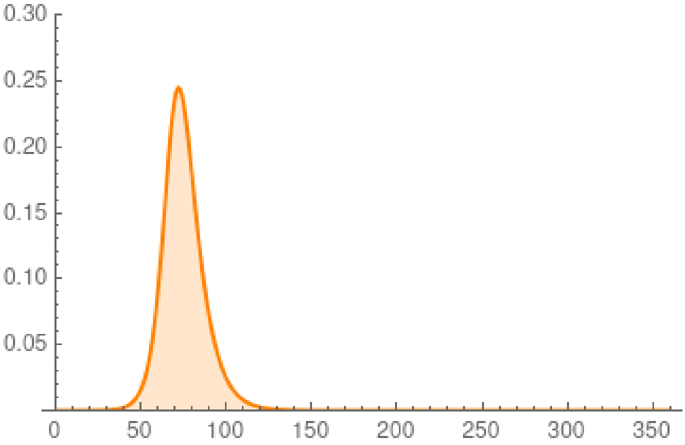
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



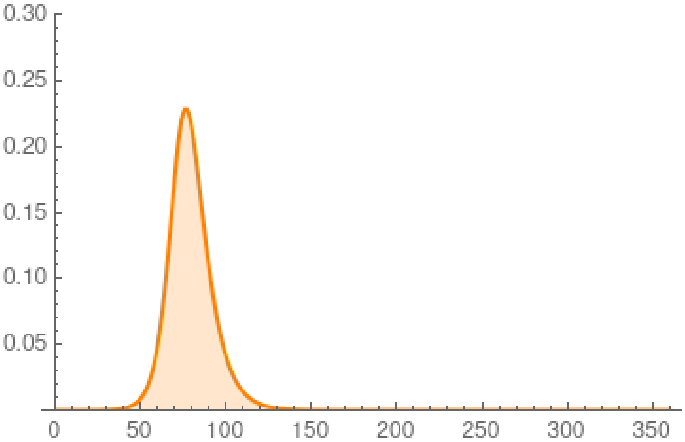
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



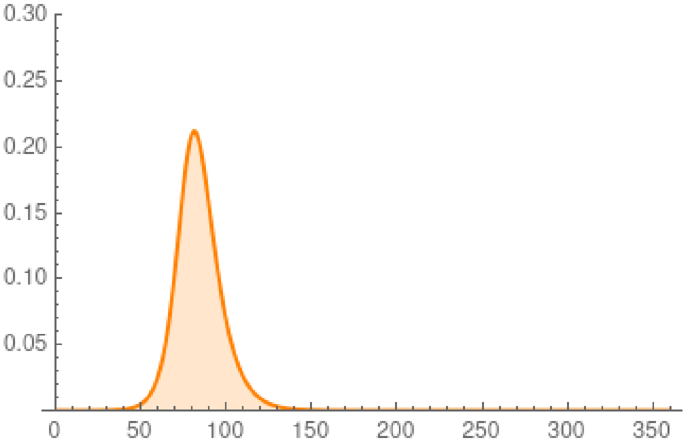
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ $(\gamma = 1/7)$



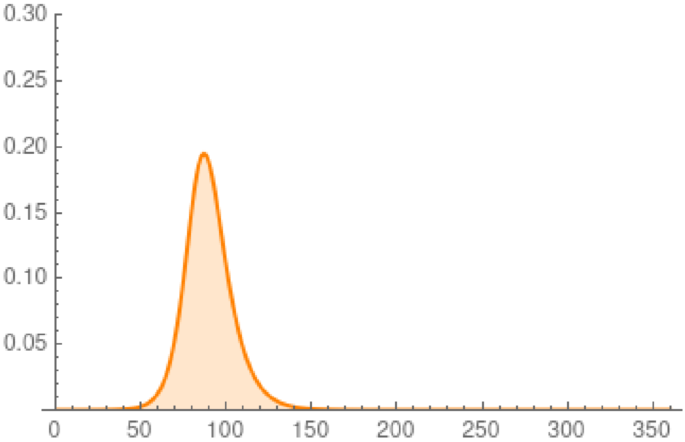
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ $(\gamma = 1/7)$



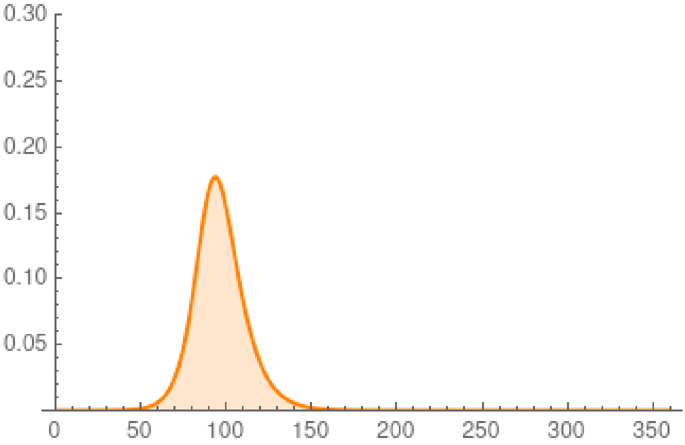
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ $(\gamma = 1/7)$



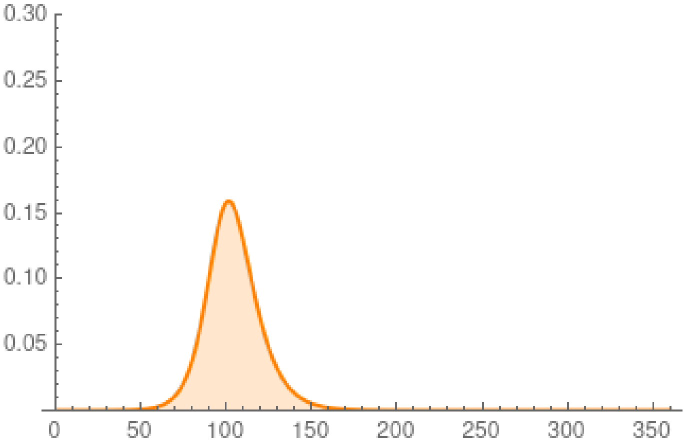
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



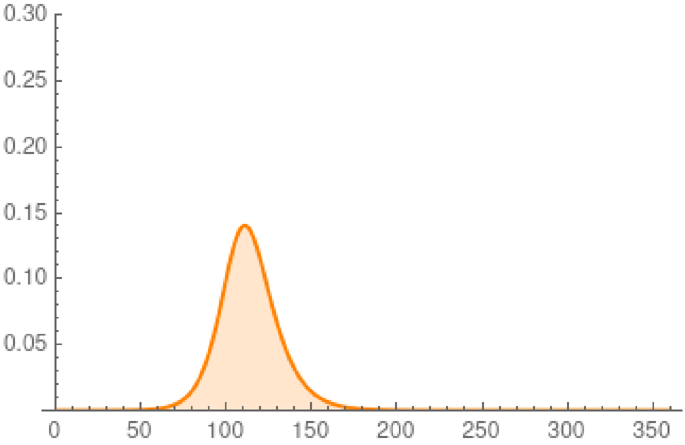
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ $(\gamma = 1/7)$



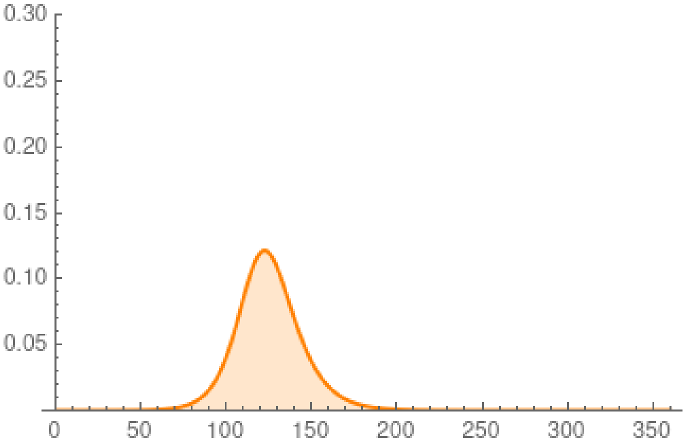
……

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



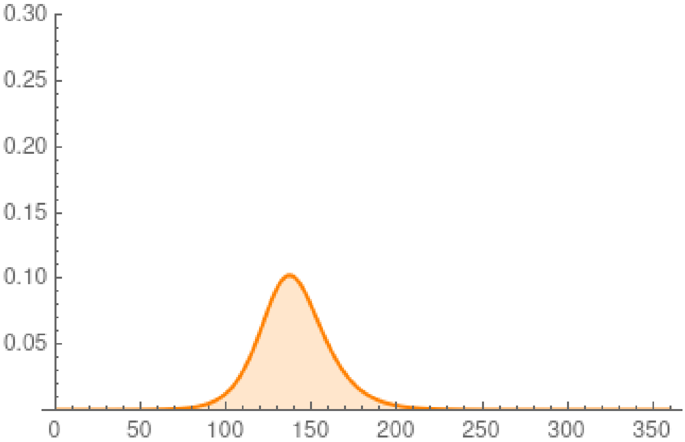
.....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



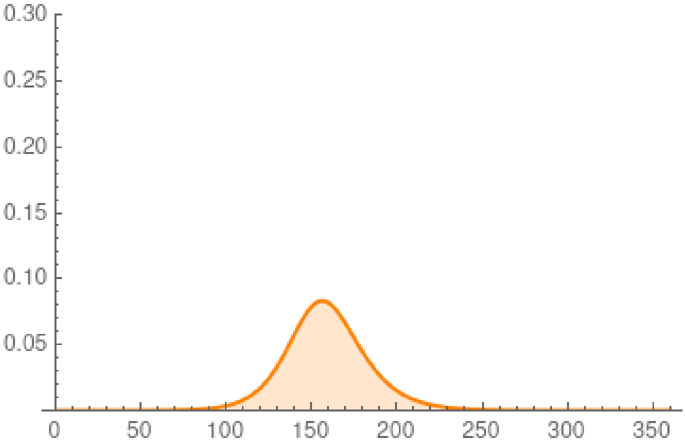
....

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



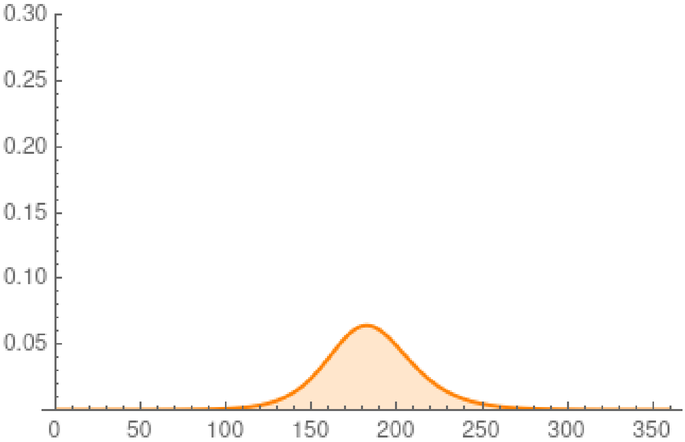
...

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ ($\gamma = 1/7$)



..

Si β change ? par exemple, entre $0,4$ et $0,2$ $(\gamma = 1/7)$



.

Dernière partie :

Coefficient de reproduction
et vaccination

- β taux moyen de transmission
  (par jour, pour une personne infectieuse)
- γ proportion de personnes contaminées qui sont rétablies durant une journée
- $1/\gamma$ nombre moyen de jours de maladie

coefficient de reproduction R_0 : β/γ taux moyen de transmission tout au long de la période infectieuse (pour le COVID-19, $\simeq 2,4$)

Si on le multiplie par la proportion de personnes susceptibles de tomber malade, alors on aura

$$\frac{\beta.s(t)}{\gamma}$$

personnes infectées par une unique personne infectieuse
(sur toute la période où elle est malade).

- β taux moyen de transmission
  (par jour, pour une personne infectieuse)
- γ proportion de personnes contaminées qui sont rétablies durant une journée
- $1/\gamma$ nombre moyen de jours de maladie

coefficient de reproduction R_0 : β/γ taux moyen de transmission tout au long de la période infectieuse (pour le COVID-19, $\simeq 2,4$)

Si on le multiplie par la proportion de personnes susceptibles de tomber malade, alors on aura

$$\frac{\beta.s(t)}{\gamma}$$

personnes infectées par une unique personne infectieuse
(sur toute la période où elle est malade).

$$\Delta i(t) = \beta.s(t).i(t) - \gamma.i(t)$$

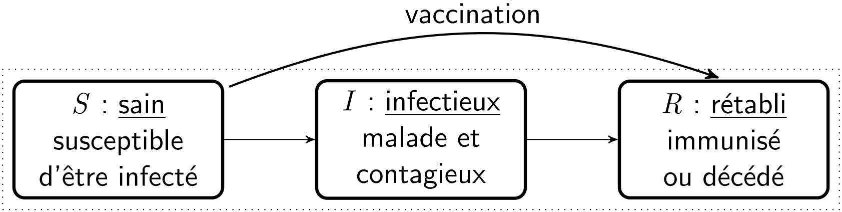
$$\Delta i(t) = \left(\frac{\beta.s(t)}{\gamma} - 1\right).\gamma.i(t).$$

- Si $\Delta i(t) > 0$, accroissement de la proportion de personnes malades
- Si $\Delta i(t) < 0$, diminution de la proportion de personnes malades

$$\frac{\beta . s(t)}{\gamma} - 1 < 0$$

Supposons un instant diviser la population en S/R :

$$s(t) < \frac{\gamma}{\beta}, \qquad r(t) > 1 - \frac{\gamma}{\beta}$$



Si $\beta/\gamma \simeq 2,4$, il faut au moins vacciner $1 - (1/2,4) \simeq 58\%$

Plus une maladie est contagieuse, plus la couverture de vaccination doit être importante :

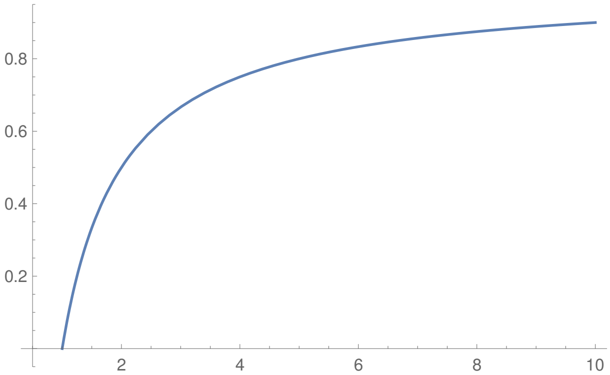


FIGURE – Evolution du taux de vaccination $1 - \gamma/\beta$ en fonction du coefficient de reproduction β/γ.

- Des modèles bien plus sophistiqués existent :
  - SEIR, une classe de personnes *exposées* en période d'incubation (infectées, mais pas encore infectieuses) ;

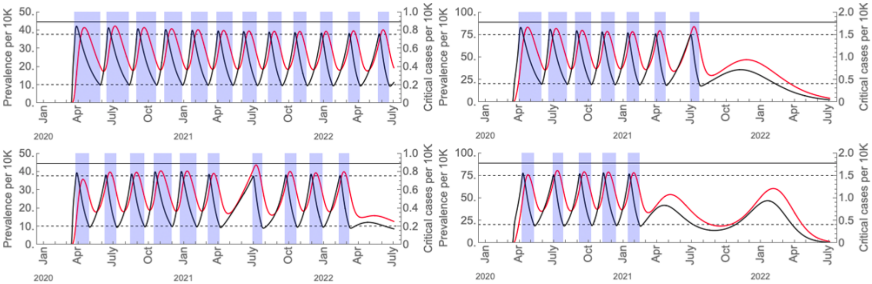
$$S \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow R$$

  - MSEIR, une immunité passive initiale existe ;

$$M \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow R$$

  - MSEIRS, l'immunité dans la classe R est passagère, retour dans la classe S après un certain temps.
- Tenir compte de la distribution spaciale.
- Avoir des données précises permet d'affiner les prédictions ; en particulier, estimer $S(t)$ est important, mais difficile.

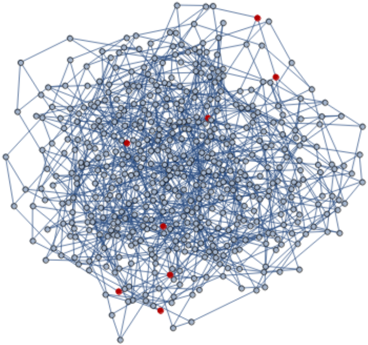
Ce qui nous attend ?



périodes intermittentes de distanciation sociale (Social distancing strategies for curbing the COVID-19 epidemic, Kissler et al.)

Courriel d'un collègue :

« Les dernières décisions du Conseil National de Sécurité vont donner l'occasion d'aborder un nouveau sujet, la théorie des graphes aléatoires. En entendant l'énoncé des règles concernant la rencontre de 4 personnes au maximum, je n'ai pas pu m'empêcher de penser qu'avec très forte probabilité, un tel graphe serait connexe et de faible diamètre ! »



GROUPS: Staff Picks | Medical Sciences | Social Science | Mathematica | Graphs and Networks

28

Agent-Based Network Models for COVID-19

Christopher Wolfram, WOLFRAM   Posted 1 month ago

9801 Views | 17 Replies | 38 Total Likes | Follow this post