Des infinicoles liégeois

par Jacques Bair

L'analyse mathématique repose de façon essentielle sur le concept d'infinitésimal, c'est-à-dire d'infiniment petit [1]. Son histoire est à la fois longue et riche, puisque cette théorie n'a cessé de se développer depuis l'Antiquité. Les mathématiciens qui exploitent, explicitement ou implicitement, des infiniment petits sont appelés « infinicoles » ; cet adjectif est formé du mot « infini » suivi du suffixe « cole » venant du verbe latin « colere » dont une traduction en français peut être « cultiver ». Ceux qui rejettent les infinitésimaux sont nommés des « infinifuges », car le suffixe « fuge » provient du substantif latin « fuga » signifiant « fuite », de sorte que les infinifuges évitent ou fuient les infiniment petits ; ils raisonnent en termes de limites et font ainsi référence à un infini potentiel.

Il est à noter que certains infinicoles conçoivent également l'infini potentiellement en ce sens que pour eux un infiniment petit est une variable (ou une fonction) qui tend vers zéro.

Ce travail est essentiellement consacré à certains infinicoles qui ne rejettent pas une conception actuelle de l'infini. [2] Plus précisément, nous nous intéressons aux infinicoles qui ont fait appel, dans certains de leurs écrits, à des infiniment petits au sens des pionniers de l'analyse classique, c'est-à-dire aux infinicoles qui n'utilisent pas la théorie weierstrassienne des limites mais recourent plutôt à ce que l'on appelait autrefois l'analyse infinitésimale (devenue irréprochable mais plus technique, et nommée désormais l'analyse non standard). Parmi ceux-ci, nous retenons uniquement des liégeois, c'est-à-dire des mathématiciens qui ont habité dans la province de Liège pendant au moins une partie de leur carrière professionnelle. Ils ont même tous travaillé, à un moment de leur carrière, à l'Université de Liège (sauf le plus ancien d'entre eux parce que l'Université n'existait pas encore de son temps).

Avec ce double critère sur les idées défendues à propos des infinitésimaux et sur la localisation géographique, nous retenons des infinicoles qui se répartissent comme suit :

- un précurseur : Sluse (1622 – 1685) ;

[1] Contrairement à certains auteurs, nous ne ferons pas ici de distinction entre les deux concepts d' « infiniment petit » ou d' « infinitésimal ».

[2] A propos de la distinction entre infini actuel et infini potentiel, voir notamment l'appendice 3 du livre [Hauchart-Rouche 1987, pp. 345-358] ainsi que l'article [Bair-Henry 2010, pp. 114 – 119]. Signalons que G. Cantor (1845-1918), qui a formalisé le concept de l'infini et qui est un des fondateurs de la théorie des ensembles, appelait l'infini en acte « infini propre » (voir [Piñeiro 2018], p. 153).

- deux pionniers : J.-N. Noël (1783 – 1867), un infinicole adepte de l'infini actuel, à qui nous associerons un de ses successeurs, à savoir J.-B. Brasseur (1802 – 1868) ; celui-ci, qui envisagea des infiniment petits au début de sa carrière, nous paraît assez emblématique dans la mesure où il fut probablement le premier, à l'Université de Liège, de passer d'un infini en acte à un infini potentiel ;
- six contemporains : N. Rouche (1925 – 2008), J. Mawhin (né en 1942), A. Pétry (né en 1950), J. Bair (né en 1948), V. Henry (née en 1977) et S. Nicolay (né en 1977) : ils ont eu recours, dans certains de leurs écrits, à une présentation de l'analyse non standard.

Ces mathématiciens seront parfois regroupés par deux pour des raisons diverses qui apparaîtront clairement au sein du texte. Dans la suite, ils seront désormais signalés par la première lettre, voire les deux premières lettres en cas de besoin, de leur nom, à savoir Ba, Br, H, M, Ni, No, P, R et S pour, respectivement, Bair, Brasseur, Henry, Mawhin, Nicolay, Noël, Pétry, Rouche et Sluse ; l'ensemble de ces neuf mathématiciens sera simplement noté dans la suite *IL*. Nous emploierons également ces abréviations dans une première bibliographie, qualifiée par les termes « infinico-liégeoise », concernant uniquement les références dont un des auteurs appartient à *IL* ; nous utiliserons alors le signe + suivant la mention de ceux-ci en présence d'autres co-auteurs ne figurant pas dans *IL*. Les références dont aucun auteur ne figure dans *IL* seront regroupées dans une deuxième bibliographie, appelée « non infinico-liégeoise ».

Avant de nous pencher sur les mathématiciens appartenant à *IL*, il nous a semblé opportun de présenter, sans restriction de localisation géographique, quelques infinicoles qui ont joué un rôle déterminant en analyse mathématique.

1. Généralités sur les infinicoles

Au cours du temps, les différents infinicoles qui sont partisans de l'infini actuel peuvent être schématiquement répartis en trois catégories selon l'époque à laquelle ils ont vécu. Nous distinguons effectivement trois étapes dans l'usage du concept d'infiniment petit, à savoir respectivement celle des précurseurs commençant dans l'Antiquité et se terminant vers le milieu du 17^{e} siècle, puis, à la fin du 17^{e} siècle et jusqu'au 19^{e} siècle, celle des pionniers qui sont les deux créateurs de l'analyse infinitésimale et de leurs successeurs immédiats, puis, enfin et à partir environ des années 1960, celle des contemporains qui exploitent l'analyse non standard

1.1. Les infinicoles précurseurs

Ils sont apparus avant la naissance de l'analyse infinitésimale et n'utilisaient donc pas encore explicitement des infiniment petits ; mais ils exploitaient des notions proches et travaillaient sur des problèmes qui ont favorisé l'émergence du calcul infinitésimal. Leurs recherches portaient sur quatre thèmes principaux développés dans la littérature spécialisée, notamment dans le livre *Histoire de l'analyse* [Dugac 2003] :

- Calcul de surfaces planes et de volumes. Ce sujet est déjà abordé, de façon intéressante pour notre propos, dès l'Antiquité. Ainsi, Euclide (environ 330 av. J.-C. – environ 275 av. J.-C.) réussit à déterminer le volume de la sphère par la méthode d'exhaustion qui est un archétype de la notion de limite. Ou encore, Archimède (environ 287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.) détermine de façon heuristique le volume de la sphère en la découpant en « une infinité de tranches infiniment minces, de façon à permettre leur pesée sur une balance imaginaire [puis de comparer] le poids total avec celui d'un corps connu » [Stewart 1989, p.71]. Une avancée importante est l'œuvre de J. Képler (1571-1630) ; celui-ci introduit implicitement des infiniment petits dans ses travaux sur le jaugeage de tonneaux. Une autre direction est suivie par F. B. Cavalieri (1598-1647) qui, dans ses calculs d'aires ou de volumes, fait appel à des indivisibles.

- Etude sur les nombres et leurs liens avec l'infini. S. Stevin (1548-1620) est l'auteur de développements des nombres réels qui ont permis ultérieurement l'émergence de la notion de limite. G. Galilée (1564-1642) a mis en évidence ce que l'on appelle aujourd'hui l'équipotence de certains ensembles infinis. N. Oresme (1325-1387) et G. de Saint-Vincent (1584-1667) ont fait des avancées sur les séries numériques en établissant respectivement la divergence de la série harmonique et la convergence de la série géométrique lorsque sa raison est positive mais inférieure à l'unité.

- Recherche de la tangente à une courbe. Diverses méthodes ont été données, en adoptant des points de vue différents, pour des courbes particulières. Des résultats significatifs relatifs à ce problème sont dûs à R. Descartes (1596-1650) avec une méthode algébrique, G. Roberval (1602-1675) qui a suivi une voie cinématique, B. Pascal (1623-1662) qui a trouvé une méthode pour construire une tangente à une conique, R. Sluse (1622-1685) et J. Hudde (1630-1704) qui ont imaginé un algorithme résolvant la question dans le cas d'une courbe algébrique, I. Barrow (150-1677) qui a introduit dans cette problématique l'idée féconde du triangle différentiel.

- Détermination du maximum ou du minimum d'une fonction. Ce problème a été abordé par des mathématiciens cités dans le point précédent, car ces deux questions sont étroitement reliées entre elles. De plus, une contribution majeure sur ce thème est l'œuvre de P. de Fermat (1601-1665) qui a découvert une méthode générale utilisant de façon décisive le concept d'infiniment petit, sans toutefois le nommer explicitement (voir à ce sujet l'article [B+ 2017]), exploité en même temps qu'une nouvelle opération appelée « adégalité ».

1.2. Les infinicoles pionniers

La paternité de l'analyse mathématique est généralement attribuée à I. Newton (1642-1727) et à G. Leibniz (1646-1716) [3] qui abordaient le concept selon des points de vue différents. En effet, Newton portait son attention sur le rapport de variations de quantités « fluentes » (*x* et *y*) dans un intervalle de temps infiniment petit : ces variations infinitésimales « s'évanouissent » dans le calcul du quotient. Par contre, Leibniz envisageait des accroissements absolus et non pas relatifs ; c'est ainsi qu'il faisait appel à la notion d'*infiniment petit*, c'est-à-dire une quantité qui s'évanouit pour être « plus petite que toute quantité donnée, puisqu'il est en notre pouvoir de diminuer l'incomparablement petit, que l'on peut toujours supposer aussi petit que l'on veut » (Leibniz (1702), cité dans [M 1997, p. 37]).

Les travaux de Newton et de Leibniz sont prolongés par de nombreux savants. Certains de leurs résultats sont encore enseignés de nos jours dans tout cours élémentaire d'analyse mathématique. Ainsi en est-il, par exemple, pour :

- M. Rolle (1652-1719) qui énonça un lemme (devenu éponyme) à la base de tous les théorèmes profonds du calcul différentiel ;
- G. F. A. De l'Hospital (1661-1704) à qui l'on est redevable d'une règle bien connue pour lever des indéterminations ; il fit connaître en France le calcul infinitésimal notamment en publiant en 1696 *L'analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* : c'est le premier traité didactique sur le calcul différentiel ;
- B. Taylor (1685-1731) et C. MacLaurin (1698-1746) qui obtinrent des formules (désormais classiques) pour approcher certaines fonctions par des polynômes ;
- L. Euler (1707-1783) qui fut un des plus grands mathématiciens de tous les temps ; il écrivit entre autres une *Introduction à l'analyse des infiniment petits* en 1755.

A partir de cette époque, et bien qu'elle soit reconnue comme efficace, l'analyse infinitésimale commença à être l'objet de certaines critiques, d'ordre philosophique ou logique, tant et si bien que les mathématiciens s'efforcèrent d'éviter ce concept. Ce courant

[3] Tous les auteurs ne s'accordent pas sur l'orthographe du nom ; certains notent Leibnitz.

est, en grande partie, dû à l'apparition en France de la prestigieuse Ecole polytechnique créée en 1795 ; en effet, ceux qui y enseignaient l'analyse cherchèrent à présenter des théories débarrassées d'imprécisions. Ce fut le cas pour deux éminents professeurs de cette Ecole qui ont eu un impact décisif sur l'évolution de la discipline :

- J. L. Lagrange (1736-1813) fut un des premiers professeurs d'analyse à l'Ecole polytechnique ; il introduisit notamment le mot « dérivée ». En 1797, il construisit un cours d'analyse cherchant à éviter le recours aux infinitésimaux ainsi qu'en atteste le titre d'un de ses ouvrages : « Théorie analytique des fonctions – contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants » (cité dans [Gaud-Guichard-Sicre-Chrétien 1998, p. 77]).
- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fut également titulaire d'une chaire d'analyse à l'Ecole polytechnique. Il ne rejetait pas les infiniment petits et les concevait comme des nombres (ou quantités) mais parfois aussi comme des fonctions ; il écrivit par exemple en 1821 : « Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite » (cité dans [M 1997, p. 78]).

L'idée forte que l'on retient peut-être de Cauchy est que sa façon de considérer des infiniment petits : pour lui, c'étaient des fonctions tendant vers zéro. Cette conception conduisit les mathématiciens de l'époque à dégager progressivement une définition rigoureuse du concept de limite permettant d'éliminer progressivement les interrogations soulevées par les infiniment petits. La version définitive et formelle [4], qui est encore utilisée de nos jours, est due à K. T. Weierstrass (1815-1897). A partir de cette époque, de nombreux mathématiciens abandonnèrent la théorie des infinitésimaux, à l'instar de B. A. W. Russell (1872-1970) qui écrivit : « Les infinitésimaux utilisés pour expliquer la continuité doivent être considérés comme inutiles, erronés et auto-contradictoires » (cité dans [Ba-H 2008, p. 19]).

1.3. Les infinicoles contemporains

Les infinitésimaux ont refait surface au milieu du 20e siècle. En effet, A. Robinson est parvenu à construire effectivement des nombres nommés des hyperréels parmi lesquels on trouve, à côté des réels traditionnels, des infiniment petits (ainsi que des infiniment grands et

[4] C'est la définition en « epsilon – êta » enseignée classiquement.

des nombres infiniment proches des réels [5]). Les travaux de Robinson, faisant appel « aux outils les plus fins que la logique moderne met à notre disposition » (Robinson, cité dans [Ba-H 2008, p. 21]), ont permis l'avènement de ce que l'on appelle aujourd'hui l'analyse non standard. Cette théorie élimine complètement les interrogations et imprécisions du passé [6] et permet notamment de démontrer de façon incontestable les résultats classiques de l'analyse en faisant [7] appel à des infiniment petits. Mais elle est de présentation assez sophistiquée [8] et c'est pourquoi des approches plus abordables pour des débutants en analyse ont été développées. Désormais, on peut enseigner l'analyse non standard de plusieurs manières différentes ; les trois principales sont l'approche constructiviste de Robinson datant de 1961 et 1974, l'approche axiomatique de Nelson en 1977 et l'approche pédagogique de Keisler en 2000 (avec une nouvelle édition électronique et en accès libre datant de 2012) ; elles sont présentées sommairement dans [Ba-H 2008, pp. 179-185].

2. Sluse : un chanoine mathématicien

[5] Tous ces nombres sont qualifiés d'*hyperréels*. Ils forment un corps commutatif, totalement ordonné mais non archimédien ; le classique ensemble des réels en est un sous-corps complet.
[6] A propos de liens entre les théories infinitésimales du passé et celles du présent, voir notamment les différents articles cités dans les bibliographies ci-après.
[7] Keisler suppose l'existence d'au moins un hyperréel non nul, ce qui permet de démontrer qu'il existe des infiniment petits non nuls.
[8] Techniquement, les nombres hyperréels sont en fait des éléments d'une ultrapuissance de l'ensemble des réels.

Assurément, René-François de Sluse, simplement appelé Sluse [9], « est le plus illustre mathématicien qu'ait produit [l'ancien] pays de Liège » [Le Paige 1890, p. 95] ; on peut même affirmer de manière moins locale que, « la figure de René-François de Sluse, chanoine de la cathédrale de Liège, est une des plus sympathiques parmi celles des grands mathématiciens du XVIIe siècle » [Rosenfeld 1928, p. 146]. Diverses biographies, plus ou moins étoffées, ont été réalisées sur Sluse : sa vie et son œuvre sont présentées notamment dans les diverses références figurant dans les deux bibliographies (la liégeoise et la non liégeoise) ; signalons toutefois que nos principales sources d'information sont la correspondance de Sluse rassemblée par le mathématicien C. Le Paige [10] , par le physicien L. Rosenfeld [11], ainsi que la documentation rassemblée à l'occasion du Colloque international « René-François de Sluse » qui s'est tenu du 20 au 22 mars 1985 à Amay-Liège-Visé ; les Actes de ce colloque sont parus dans un Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège (T. 55, fasc. 1, 1986). Les membres Ba et H de *IL* ont aussi rédigé plusieurs articles relatifs au savant chanoine. On trouve également des renseignements utiles relatifs à la vie et à l'œuvre de Sluse sur le Web : le site « Mac Tutor History of Mathematics » de l'Université St-Andrews en Ecosse (http://www-hisrory.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sluze.html), le site de la Bibliothèque Nationale de France (https://data.bnf.fr/fr/12427294/rene-francois_de_sluse/), ainsi que Wikipedia (https://fr.wikipedia.org\wiki\René-François_de_Sluse).

Sluse n'a pas étudié, ni travaillé à l'Université de Liège … et, pour cause, la naissance de celle-ci date seulement de 1817. Mais il a vécu une partie de sa vie sur les bords de la Meuse liégeoise, puisqu'il est né en aval de Liège à Visé, qu'il a été chanoine en amont à Amay et est décédé à Liège. C'est pourquoi Sluse peut assurément être considéré comme un liégeois au sens défini ci-dessus. Mais était-il un authentique infinicole ? La réponse à cette question est moins catégorique, car le mathématicien n'a pas réellement utilisé le concept d'infinitésimal,

---

[9] Anciennement, on trouvait parfois le nom Sluze, notamment dans les archives de Saint-Lambert. Mais, dorénavant, l'orthographe Sluse prévaut en accord avec l'hypothèse selon laquelle la famille de l'intéressé est d'origine flamande et provient probablement de la ville de Sluys, c'est-à-dire la ville de l'Ecluse [S 1885, p. 5].

[10] C. Le Paige (1852-1929) a obtenu son doctorat en sciences mathématiques et physiques en 1875 ; il était un élève de Catalan auquel il a succédé pour les cours d'analyse supérieure et de calcul des probabilités. Il est devenu professeur ordinaire en 1885 et a été Recteur de l'Université de Liège de 1894 à 1897. Il a également dirigé l'Institut d'Astrophysique de Cointe. Il s'est aussi intéressé à l'histoire locale des mathématiques [Le Paige 1890].

[11] Léon Rosenfeld (1904-1974) fut un physicien théoricien belge, formé à l'Université de Liège où il a notamment enseigné. Il s'est intéressé en particulier à la physique quantique, étant par ailleurs un collaborateur proche de Niels Bohr (1885-1962). Il a aussi publié dans la revue ISIS (« *A Journal of the History of Science Society* ») deux articles relatifs à Sluse en 1928 et en 1961.

ce qui peut être expliqué par le fait qu'il a vécu durant ce que certains auteurs appellent la 'troisième partie de l'Age d'or' des mathématiques dans la région occupée par l'actuelle Belgique, c'est-à-dire la période précédant l'époque à laquelle vécurent Newton et Leibniz [Butzer-Schaffrath 1985, p. 122] ; en d'autres termes, l'analyse infinitésimale n'était pas encore née de son temps. L'œuvre de Sluse ne fait pas référence à des infiniment petits ou à des indivisibles déjà mentionnés par certains auteurs contemporains, mais on peut raisonnablement penser que l'intervention de tels concepts est implicite. De fait, la recherche de tangentes (ou celle équivalente de maxima et de minima) de Sluse trouve sa place parmi les travaux précurseurs de l'analyse infinitésimale qui semblaient alors à la mode. Sa théorie des tangentes a d'ailleurs probablement été influencée par des travaux similaires de certains de ses contemporains comme Michelangelo Ricci (1619-1682) et Johannes Hudde (1628-1704) [Bockstaele 1985, p. 141]. Mais les découvertes du liégeois sont originales et témoignent d'un 'esprit de généralisation' mis en évidence par ses biographes Rosenfeld et Le Paige. L'algorithme qui lui est attribué pour construire une tangente n'a pas été démontré selon les normes de rigueur d'aujourd'hui et l'auteur « n'indique pas sur quels principes repose sa méthode » [Le Paige 1980, p. 91]. Toutefois on peut, de manière anachronique, l'expliquer par des présentations modernes de l'analyse. En effet, pour mener une tangente en un point P d'une courbe (supposée implicitement algébrique), Sluse considère tout d'abord un point Q voisin de P et situé sur la courbe, puis il est amené à identifier les deux points P et Q pour obtenir l'équation de la tangente ; il s'agit d'une formule qui fait apparaître les dérivées (partielles) de la fonction définissant implicitement la courbe, résultat alors original, d'autant plus que la théorie des dérivées ne sera développée que bien plus tard. De nos jours, la méthode de Sluse peut être justifiée indifféremment par les deux principales présentations de l'analyse mathématique : de façon classique, c'est-à-dire de façon dynamique et potentielle, en utilisant la théorie des limites et en faisant tendre le point Q vers le point de tangence P (voir [Bockstaele 1985]), ou encore par l'analyse non standard, donc de façon statique et actuelle, en supposant le point Q infiniment proche de P puis en négligeant dans les calculs certains infiniment petits (voir [Ba 2018b] et [Ba-H 2011]). L'hypothèse selon laquelle Sluse utilisait implicitement des infiniment petits est fort plausible pour diverses raisons :

- la théorie des limites n'existait pas de son temps ;
- certains de ses collègues contemporains utilisaient des infiniment petits ou des indivisibles. D'après L. Godeaux, Sluse « séjourna […] dix ans en Italie, se livrant à l'étude des Mathématiques, notamment des travaux de Cavalieri et de Toricelli sur la géométrie des indivisibles » [Godeaux 1943, p. 21] ;

- Sluse insistait dans ses écrits sur la méthode '*monachos*', qui consiste en fait à identifier deux points voisins pour obtenir une solution unique d'une équation qui en possède généralement deux ; ceci pourrait appuyer la conjecture selon laquelle Sluse avait de l'infini une approche actuelle plutôt que potentielle.

Quoi qu'il en soit, l'algorithme de Sluse est épistémologiquement important dans la mesure où il semble établi que les deux créateurs de l'analyse, à savoir Newton et Leibniz, ont été influencés par les travaux du chanoine. Ainsi, Newton lui-même a reconnu les droits de priorité de notre compatriote » [Le Paige, p. 53]. Par ailleurs, Leibniz a écrit le 24 juillet 1686 à A. Arnauld : « j'ai découvert une nouvelle Méthode des Tangentes, que j'ai fait imprimer dans le Journal de Leipsick. Vous savez, Monsieur, que MM. Hudde et depuis Slusius, ont porté les choses assez loin. Mais il manquait deux choses : l'une que lorsque l'inconnue ou l'indéterminée est embarrassée de ses fractions et irrationnelles, il faut l'en tirer, pour user de leurs méthodes. […] L'autre défaut de la Méthode des Tangentes est qu'elle ne va pas aux lignes que Mr. Descartes appelle Mécaniques, et que j'aime mieux appeler Transcendantes » [Taton 1985, pp. 195-196]. C'est donc en remarquant que la méthode de Sluse ne vaut pas pour certaines courbes que Leibniz a construit sa méthode plus générale. Ainsi, le travail de Sluse a été une « étape (…) essentielle dans la découverte de Newton comme dans celle de Leibniz » [Rosenfeld 1928, p. 428].

3. J.-N. Noël et J.-B. Brasseur, deux infinicoles pionniers venus du Luxembourg

J.-N. Noël et J.-B. Brasseur ont de nombreux points en commun.

Tous deux sont passés de l'Athénée de Luxembourg à l'Université de Liège : le premier, français d'origine, a enseigné à l'Athénée avant d'être recruté dans le corps académique de l'Université, tandis que le second, luxembourgeois de naissance, a étudié à l'Athénée avant de compléter sa formation à l'Université où il sera par la suite nommé comme enseignant.

Ils ont vécu les trente dernières de leur existence à Liège où ils sont décédés et sont donc devenus de « véritables liégeois » à notre sens.

Ils ont été des enseignants remarquables. Ainsi, J.-B. Brasseur fut « un professeur très apprécié, patient et bienveillant à l'égard de ses étudiants. […] Il a toujours eu une approche innovante dans sa manière d'enseigner. Il avait à cœur d'illustrer ses théories par des exemples concrets. […] Il aura exercé une profonde influence sur l'enseignement des mathématiques à l'Université de Liège » [12]. Des propos semblables peuvent être tenus sur J.-

[12] D'après une biographie à l'adresse électronique http://200.ulg.ac.be/brasseur-bio.html.

N. Noël qui était « d'un extraordinaire rayonnement didactique » (voir [Jongmans 1996] et [Ba-M]).
Les deux ont eu une carrière universitaire marquante. En effet, Noël fut Recteur de l'Université. Tous deux jouèrent un rôle de premier plan durant les premières années d'existence de la Société royale des Sciences de Liège ; de fait, J.-B. Brasseur fut un membre fondateur tandis que J.-N. Noël fut un membre dès la première année ; tous deux furent présidents de cette société : Noël à trois reprises (en 1841, 1845 et 1848) et J.-B. Brasseur durant une année (en 1849).
La vie et l'œuvre mathématique des deux liégeois d'adoption ont été étudiées de façon inégale par des historiens et leur appartenance à la famille des infinicoles n'est pas de même nature. Attardons-nous dès lors séparément sur chacun de ces deux cas.

3.1. J.-N. Noël : un didacticien infinicole

J.-N. Noël [13] était sans conteste un ardent défenseur des infiniment petits. Dans la célèbre querelle entre infinicoles et infinifuges que connut la Belgique vers le milieu du 19e siècle, il était même le « leader » des infinicoles.
Penchons-nous dans cet article sur un de ses apports sur le plan didactique, à savoir son insistance sur le « principe des zéros relatifs » ; celui-ci est fondamental dans la méthode infinitésimale et peut être énoncé comme suit : « *Toute quantité doit se négliger et être regardée comme absolument nulle à l'égard de celle qui la contient une infinité de fois* : c'est

[13] La photo, donnant une caricature de J.-N. Noël, a été prise à l'Université de Liège (place du XX-Août) dans la Galerie des Recteurs élaborée à l'occasion du 200e anniversaire de l'Université (en 2017). Un portrait authentique, fourni par un descendant du mathématicien, peut être trouvé dans [Ba-M 2019, p. 35].

un *zéro relatif* à cette dernière, bien que zéro ait une valeur et ne soit pas le *zéro absolu* ou le *rien*, marquant l'absence de toute grandeur » [No 1843-44, p. 29].
J.-N. Noël a donné plusieurs « démonstrations », comme il les appelait, de cet énoncé de base. En voici deux, la première étant de nature numérique, tandis que la seconde est géométrique.

1) « En effet, tout nombre *infiniment grand* étant désigné par ∞, qui s'énonce l'*infini*, on conçoit que si a étant une quantité *finie*, on a $a = x \times \infty$, x sera une quantité *infiniment petite* et qu'on aura toujours $a \pm x = a$. Car x étant de a une fraction toujours inconnue et inexprimable, échappant aux sens et à l'imagination, par sa petitesse, il est impossible d'en tenir compte, pour augmenter ou diminuer a ; on doit donc écrire $a \pm x = a$, absolument comme si la quantité x était rigoureusement nulle » [ibidem, p. 29].
Une justification moderne et rigoureuse de cet extrait peut être donnée en travaillant avec des nombres hyperréels (voir [Ba-H 2008] pour le vocabulaire et les règles de base). En effet, si ∞ désigne un nombre hyperréel infiniment grand et si a est un nombre réel non nul, l'égalité $a = x \times \infty$ entraîne effectivement, grâce à l'une des règles de Leibniz, que x n'est ni appréciable ni infiniment grand et est donc bien infiniment petit. En conséquence, $a \pm x$ est un nombre hyperréel infiniment proche de a et celui-ci est d'ailleurs le seul réel situé dans son halo ; en conséquence, la partie standard (c'est-à-dire la partie observable dans les réels) de $a \pm x$ coïncide bien avec a.

2) « Mais pour démontrer complètement le principe démontré, soit m l'aire du carré fait sur la longueur *finie*, interceptée par deux perpendiculaires à une même droite illimitée ; soit B l'aire du *biangle* compris entre la droite et ses deux perpendiculaires : celles-ci étant parallèles, l'aire B est infinie dans le sens de l'ouverture et l'on a nécessairement $B = m\,\infty$. Soient A et C les deux angles droits *correspondants* que la droite fait avec ses deux perpendiculaires : ces deux angles pouvant se confondre en un seul, sont parfaitement égaux, bien que A surpasse actuellement C du biangle B ; celui-ci est donc nul vis-à-vis de A et de C ; et donc B est un *zéro relatif*. Or, on a évidemment $A = B\,\infty = m\,\infty^2$ et $C = B\,(\infty - 1) = m\,(\infty^2 - \infty)$; donc puisque $A = C$, il vient respectivement $\infty^2 = \infty^2 - \infty\,, \infty = \infty - 1\,, 1 = 1 - (1\,sur\,\infty), etc.$ Ces diverses égalités étant exactes, il faut que ∞ soit nul vis-à-vis de ∞^2, 1 sur ∞ vis-à-vis de 1, etc.
Par ce principe, puisque l'aire de tout triangle est nulle vis-à-vis de chacun de ses angles, surfaces planes infinies, on voit que *l'angle extérieur d'un triangle vaut toujours la somme des deux angles intérieurs opposés*, de sorte que les trois angles valent ensemble deux droits » [ibidem, pp. 29-30].

En général, J.-N. Noël raisonne en s'appuyant au départ sur des définitions « claires, simples et précises » [No 1855, p. 61]. Dans le cas présent, il fait appel aux concepts géométriques de base d'angle et de biangle [14]. Durant sa carrière, il éprouve plusieurs fois la nécessité de donner une définition d'un angle, ce qui le cas dans les tomes 2, 10 et 16 des Mémoires, et d'analyser de façon critique les définitions données par d'autres géomètres (comme Lacroix). Pour commenter la démonstration exposée ci-dessus, retenons cette version : « on appelle *angle* la portion plane comprise entre deux droites illimitées, partant d'un même point » [ibidem, p. 61]. L'auteur s'appuie sur de semblables définitions, mais aussi sur des règles (ou principes) simples comme celui de *superposition* : c'est « le moyen le plus simple et le plus clair de savoir si deux grandeurs sont égales ou inégales entre elles ; ce mode direct de recherche et de démonstration doit donc s'employer pour étudier les égalités et les inégalités dans les angles, … » [ibidem, p. 66].

Illustrons la démonstration de J.-N. Noël par un exemple emblématique.

Considérons le plan habituel rapporté à deux axes cartésiens orthonormés et désignons par a l'origine du plan, par c le point situé sur l'axe horizontal à l'abscisse 1, par B le biangle égal à l'ensemble $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 , y \geq 0\}$, et par m le carré $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 1\}$. Il est visible que l'on peut retrouver B en superposant toutes les copies de m obtenues en translatant le carré unitaire par des vecteurs verticaux dont la seconde composante est un entier naturel ; comme il existe une infinité de tels translatés, J.-N. Noël écrit l'égalité $B = m\,\infty$; de nos jours et avec la terminologie robinsonienne, on pourrait dire que ∞ désigne ici un nombre hypernaturel infiniment grand.

Par ailleurs, l'angle A est le quadrant positif du plan : son sommet est le point a et ses côtés sont les deux demi-axes positifs de base. Cet angle A peut être obtenu en effectuant la réunion du biangle B et de tous les translatés de ce dernier par un vecteur horizontal dont la première composante est un entier naturel ; on peut donc écrire $A = B\,\infty$, d'où, en vertu de ce qui précède, $A = B\,\infty = m\,\infty^2$. Un même raisonnement vaut pour l'angle C qui correspond à l'ensemble $\{(x, y): x \geq 1 , y \geq 0\}$; on en déduit les autres formules sachant que A et C sont égaux puisqu'ils peuvent se superposer en translatant C d'un vecteur horizontal de première composante égale à -1.

La dernière partie de la démonstration concerne un triangle. Fixons encore notre attention sur un exemple typique, à savoir le triangle T dont les trois sommets sont les points a, b et c, où, à nouveau, $a = (0 , 0)$, $c = (1 , 0)$, tandis que $b = (0 , 1)$. L'angle intérieur γ de sommet c

[14] Quelquefois noté bi-angle.

possède comme côtés les demi-droites [*c : a*) et [*c : b*) [15] , alors que l'angle intérieur β de sommet *b* possède pour côtés les demi-droites [*b : a*) et [*b : c*). Mais ce dernier angle β est égal, par symétrie autour de *b*, à l'angle de sommet *b* dont les côtés sont les demi-droites coïncidant avec (*a : b*) \ ]*b : a*) et (*a : b*) \ ]*b : c*). En réunissant les portions de plan déterminées par β et γ, on trouve la réunion de l'ensemble $\{(x\,,y)\;\; x \leq 0\,, y \geq 0\,\}$, qui est l'angle extérieur en *a* du triangle *T*. Comme ce dernier est un « zéro relatif » par rapport à un angle [16], on a ainsi démontré la propriété géométrique annoncée. Le corollaire sur la somme des trois angles du triangle en découle immédiatement.

3.2. J.B. Brasseur et sa méthode des indéfiniment petits

Plusieurs biographies de J.-B. Brasseur existent. On peut en trouver une dans le *Liber Memorialis* de l'Université de Liège par Le Roy en 1869 (colonnes 77-82), sur le site historique de l'Université écossaise de Sint-Andrews [17], au sein de l'*Esquisse d'une histoire des sciences mathématiques en Belgique* de L. Godeaux [Godeaux 1943, pp. 44-45], dans un document, réalisé par J. Samedi et l'équipe d'ORBI à l'occasion du bicentenaire de l'Université de Liège [18] , au sein duquel on trouve notamment la liste des publications de l'intéressé.

[15] Une droite passant par deux points distincts *x* et *y* se note (*x : y*). Une demi-droite issue du point *x* et passant par *y* se note [*x : y*) si l'extrémité *x* en fait partie,]x : y) sinon. Le symbole \ désigne la différence ensembliste.
[16] En effet, on considère ici une région bornée comparée à une région non bornée.
[17] Accessible à l'adresse électronique : http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brasseur.html.
[18] Accessible à l'adresse électronique http://200.ulg.ac.be/brasseur-bio.html.

Pour notre propos, signalons que J.-B. Brasseur n'a pas pris une position nette dans la lutte entre infinicoles et infinifuges qui eut lieu en Belgique vers le milieu du 19e siècle. Néanmoins, il nous semble que le luxembourgeois peut être catalogué comme infinicole, à l'instar de son collègue J.-N. Noël grâce à sa publication, la seule en analyse [19], *Exposition nouvelle des principes du calcul différentiel et du calcul intégral*, parue dans le Tome 3 de la Série 2 des Mémoires la Société royale des sciences de Liège [Br 1873, pp. 113-192], En fait, comme le signale F. Folie [20] dans l'avant-propos de cet ouvrage, l'auteur avait eu l'idée de sa méthode dès 1829 quand il étudiait encore à Paris : il l'avait alors présentée à « un célèbre professeur d'analyse » [ibidem, p. 125], mais aucune suite n'y fut alors donnée, peut-être parce que ce dernier « lui répondit que telle était aussi sa manière de voir » (d'après Folie, dans [ibidem, p. 125]). Il attendit donc plus de quarante ans avant de publier ce Mémoire, suivant sur ce point un conseil donné par M. Pagani [21]. Selon le même F. Folie, J.-B. Brasseur présenta une méthode qui « a, au point de vue de l'enseignement, sur celle des fluxions l'avantage de n'exiger aucune notion métaphysique, et sur les limites, celui d'être beaucoup plus directe et de ne donner prise à aucune attaque, même spécieuse » [ibidem, p. 121]. Cette méthode consiste à écrire $\Delta y = f'(x)dx + etc$ où x, y et $x + dx, y + \Delta y$ sont respectivement les coordonnées de deux points de la courbe, dx « étant arbitraire, et pouvant, en vertu de la continuité, devenir plus petit que toute quantité donnée » [ibidem, p. 122]. Ainsi, J.-B. Brasseur utilisait des infinitésimaux et peut donc être rangé parmi les infinicoles. Toutefois, pour ne pas être atteint par des critiques émanant de collègues infinifuges, il évitait par la suite les vocables 'infiniment petit' ou 'infiniment grand' et remplaçait l'adverbe 'infiniment' par 'indéfiniment', déjà utilisé par Cauchy qui fut son professeur à la Sorbonne [22]. Il donnait cette définition : « une quantité variable est dite indéfiniment petite lorsqu'ayant un maximum, assignable ou non, elle a pour limite 0 » ; il introduisait semblablement le concept d'infiniment grand et même l'idée d'une quantité « qui est à la fois indéfiniment grande et indéfiniment petite » [ibidem, p. 142]. Ainsi, un infiniment petit était pour lui une variable tendant vers 0.

[19] J.-B. Brasseur est surtout connu pour ses travaux en géométrie.

[20] François Folie (1833-1905) était un astronome. On lui doit notamment la construction de l'observatoire de Cointe ; il dirigea celui-ci avant de devenir directeur à l'observatoire royal de Belgique.

[21] Gaspard Michel Pagani (1796-1855) est d'origine piémontaise. Il a professé aux Universités de Liège et de Louvain.

[22] C'est pourquoi, il est peut-être permis de supposer que celui-ci fut le « célèbre professeur d'analyse » évoqué par Folie.

Donc, on peut penser que Brasseur a joué en Belgique un rôle similaire à celui de Cauchy sur le plan international, puisqu'il a introduit l'idée d'un infiniment petit potentiel et non plus actuel ; de fait, les successeurs immédiats de Brasseur à l'Université de Liège [23] abandonnèrent l'usage des infinitésimaux en acte pour adopter la théorie des limites.

Quelle aurait été la position de J.-N. Noël si son collègue luxembourgeois avait publié dès 1829 ses idées qui lui faisait concevoir un infinitésimal de façon potentielle ? Le français aurait-il défendu avec autant de conviction sa conception en acte des infiniment petits ? On peut se le demander … mais on ne connaîtra jamais la réponse à ces deux questions.

4. Deux analystes d'ULouvain

N. Rouche et J. Mawhin ont de multiples points en commun. Ils sont nés tous deux dans la province de Liège [24], ont fait leurs études supérieures [25] à l'Université de Liège où ils furent, une fois diplômés, assistants [26] dans un service privilégiant les mathématiques appliquées, notamment en mécanique ; cette dernière information peut avoir influencé leur intérêt ultérieur pour l'analyse non standard puisque les utilisateurs des mathématiques que sont les physiciens (mais aussi les ingénieurs ou les économistes) raisonnent fréquemment en termes d'infini actuel [27]. Par la suite, ils devinrent professeurs à l'Université de Louvain et furent des membres actifs de la réputée « école de Louvain » en équations différentielles ; ils publièrent d'ailleurs ensemble un ouvrage de référence sur le sujet en 1973. Ils furent les premiers, en Belgique, à s'intéresser à l'analyse selon Nelson ; leur expertise les emmena notamment à participer à des jurys de doctorat sur le sujet en Belgique et en France.

---

[23] Antoine Mayer (1803-1857), Mathias Schaar (1817-1903), Eugène Charles Catalan (1814-1894), …

[24] N. Rouche provient de Huy, petite ville située à environ trente kilomètres à l'ouest de Liège. J. Mawhin est né à Lambermont, près de Verviers, donc à une trentaine de kilomètres de Liège, mais à l'est cette fois.

[25] N. Rouche fut ingénieur civil avant d'obtenir le titre d'agrégé de l'enseignement supérieur. Son collègue est licencié puis docteur en mathématiques.

[26] N. Rouche a été assistant de Florent Bureau (1906-1999) tandis que J. Mawhin le fut pour Paul Ledoux (1914-1988) ; des biographies de ces deux professeurs peuvent être trouvées sur le site Wikipédia. Il est à noter pour notre propos que P. Ledoux faisait appel à des infiniment petits dans ses cours en début de carrière ; par la suite, il les élimina, sur le conseil d'un de ses assistants, de manière à se conformer à la pratique des collègues analystes de son Université.

[27] Par exemple, selon A. Einstein, « c'est uniquement en passant à l'observation du phénomène pendant un temps infiniment petit (loi différentielle) que Newton arrive à dégager les formules s'appliquant à des mouvements quelconques » [Einstein 2009, p. 220].


4.1. N. Rouche, un analyste, épistémologue et didacticien

On peut trouver sur Internet diverses biographies de N. Rouche [28].
En dehors de son action en Mécanique théorique et appliquée ainsi que dans le domaine des équations différentielles, N. Rouche est connu, tant en Belgique qu'à l'étranger, pour son travail inlassable en didactique des Mathématiques ; il peut être appelé le « père de l'école belge de la didactique moderne ». Il a en effet fondé, à Louvain-la-Neuve, le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM [29]) ainsi que, au niveau de la Région Wallonie-Bruxelles et aussi de la Région wallonne, le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM [30]). Il est à noter que N. Rouche n'était guère favorable à une certaine vision contemporaine de la didactique des mathématiques, à savoir celle qui utilise un jargon réservé aux seuls initiés ; il se voyait plutôt épistémologue que didacticien.
C'est toutefois dans le cadre de son travail sur l'enseignement des mathématiques que N. Rouche s'est intéressé à l'analyse non standard dès la fin des années 1980. Il n'était peut-être pas un grand partisan des infiniment petits, ainsi qu'il l'avoua dans un entretien privé, mais il se montrait ouvert à une théorie qui commençait à être enseignée à l'étranger, notamment en France sous l'impulsion de Georges Reeb (1920-1993). Il travailla en collaboration avec plusieurs de ses élèves qui réalisèrent un doctorat sous sa direction. Ainsi, il rédigea avec Christiane Hauchart deux livres traitant de l'enseignement de l'analyse et abordant les infinitésimaux. Dans le premier de ceux-ci, paru en 1987 et intitulé « *apprivoiser l'infini – un*

[28] Sur Wikipédia, le site du Crem ou celui de l'Académie avec une rubrique dans la *Nouvelle biographie Nationale*.
[29] Adresse du site : http://www.gem-math.be.
[30] Adresse du site : https://www.crem.be.

enseignement des débuts de l'analyse », les auteurs montrent [31] que les deux conceptions d'infini ponctuel et potentiel se sont affrontées au cours de l'histoire, « l'une dominant le plus souvent l'autre en une sorte d'alternance » [R+ 1987, p. 347] ; ils concluent cette étude historique en notant que « c'est le point de vue actuel qui triomphe dans l'analyse non standard » [ibidem, p. 358]. Le second livre de C. Hauchart et N. Rouche reprend la plupart des exposés donnés au colloque « L'enseignement de l'analyse aux débutants » que les auteurs avaient organisé le 16 mars 1991 aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur [32] et auxquels participaient de nombreux professeurs belges (et quelques français) enseignant l'analyse dans des Universités francophones. Parmi ceux-ci, deux abordèrent le concept d'infiniment petit : Jean Mawhin dont il sera question ci-dessous et le français André Deledicq. Ce dernier s'était « fait éloquemment l'avocat d'une cause délicate […] : les avantages qu'il y a à prendre appui sur l'analyse non standard pour enseigner l'analyse élémentaire » [R+ 1992, p. 6] ; dans les traces de ses compatriotes G. Reeb et les deux Diener (Francine et Marc), il adoptait une présentation de l'analyse non standard proche de celle de Nelson [ibidem, pp. 55-86].

En 1996, N. Rouche dirige, en tant que Président du CREM, une table ronde à un colloque international sur l'Enseignement des Mathématiques qui s'est tenu à Liège (voir ci-dessous dans [P 1998]). La même année, il écrit un article sur l'analyse non standard en collaboration avec Thérèse Gilbert, une de ses disciples. Celle-ci avait, en 1992, rédigé un article intitulé « Qu'est-ce que l'analyse non standard ? » qui fut notamment publié dans une revue belge pour professeurs de mathématiques, à savoir dans *Mathématique et Pédagogie* (n°89, 1992, pp. 51-67), et simultanément dans la revue française *Repères Irem* (n°13, 1993, pp. 89-110) sous le titre « L'enseignement de la continuité et de la dérivabilité en analyse non-standard » ; il y était question essentiellement de la présentation selon Nelson. Quatre ans plus tard donc, T. Gilbert et N. Rouche écrivaient ensemble un chapitre du livre « *Méthodes et analyse non standard* » (Academia-Bruylant, Louvain-la-Neuve, 1996) sur le thème « Y a-t-il vraiment autant de nombres pairs que de nombres naturels ? » [P 1996, pp. 99-139]. En se référant à une idée de Lakatos qui cherche à « rapprocher au mieux la construction des concepts des preuves où ils jouent un rôle clé, de telle sorte qu'on voie le plus tôt possible leur fonctionnement technique dans les déductions » [ibidem, p. 100], les auteurs présentent, « au départ de considérations concernant le 'comptage' des éléments d'un ensemble fini, une

[31] Dans « L'infini potentiel et l'infini actuel » : Annexe 3 de [R+ 1987, pp. 346-358].
[32] Ces Facultés sont devenues désormais l'Université de Namur (UNamur).

introduction motivée des hypernaturels » [ibidem, p. 6], à la suite de quoi, « on peut passer sans trop de peine aux hyperrationnels et aux hyperréels » [ibidem, p. 100].

T. Gilbert et N. Rouche ont également écrit ensemble, en 2001, l'ouvrage « *La notion d'infini* » qui est l'aboutissement d'une collaboration de longue date » [R+ 2001, p. 3]. Ce livre ne traite pas des infinitésimaux ni d'analyse non standard, mais aborde des sujets voisins comme « l'infini potentiel et l'infini actuel » [ibidem, section 1.1.5, pp. 15-16] ou encore « l'infini accepté » [ibidem, chapitre 6, p. 281-325].

Mentionnons encore le rôle de premier plan qu'a tenu N. Rouche dans les thèses de doctorat présentées par deux didacticiennes belges des mathématiques sur des thèmes traitant, de loin ou de près, le concept d'infini actuel, à savoir la théorie des indivisibles en calcul intégral et l'analyse non standard enseignée à des économistes. N. Rouche fut promoteur de la thèse de M. Schneider-Gillot sur « *Des objets mentaux 'aires' et 'volume' au calcul de primitives* » à Louvain-la-Neuve en 1988 et il présida le jury de celle de V. Henry, intitulée « des questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes », à l'Université Paul Sabatier de Toulouse en 2004.

4.2. J. Mawhin, un académicien analyste, épistémologue et historien

Il est aisé d'obtenir, sur le Web (wikipédia, researchgate, linkedin, ainsi que sur divers sites comme ceux de l'UCL, de l'Académie de Belgique, …), des renseignements relatifs à la carrière scientifique et les activités mathématiques de Jean Mawhin; on peut même trouver un curriculum complet (jusqu'en 2008) à l'adresse électronique : www.cmat.uminho.pt/uploads/CV-Jean-Mawhin.pdf.

En plus d'être un analyste de premier plan, Jean Mawhin est également un réputé historien des mathématiques. Ce double intérêt pour l'analyse et pour l'épistémologie l'a probablement amené assez tôt à être le premier belge à enseigner à ses étudiants, futurs mathématiciens, la présentation par Nelson de l'analyse non standard. En effet, dans les années 1980, il a été titulaire à l'Université de Louvain, en plus de sa chaire d'analyse, d'un cours de « Méthodologie mathématique » dispensé à de futurs licenciés en sciences mathématiques. Ce cours était un cadre idéal pour y aborder l'analyse non standard car les étudiants avaient déjà reçu auparavant (en candidature) une solide formation en analyse classique, avec de nombreuses références historiques aux fondateurs de l'analyse (Leibniz, Newton, Euler, Cauchy, …) qui faisaient appel à des infiniment petits [M 1997]; ils étaient dès lors donc bien préparés à recevoir, en licence, un nouvel éclairage dans un cours dont le titulaire avait la totale liberté académique du choix, sans contrainte imposée par d'autres cours du programme. Ainsi la présentation de l'analyse non standard apparaissait non seulement comme étant un cours portant sur une actualité mathématique du moment décrite notamment dans [M 1987] ainsi que dans [M 1996b] et comme un cours d'élargissement de la culture mathématique des apprenants, car, comme l'écrivait le titulaire de ce cours, « il est toujours enrichissant, […] pour comprendre une théorie mathématique, de voir les choses de plusieurs points de vue différents, c'est même souvent indispensable si on veut vraiment comprendre. Un nouvel outil ne chasse pas nécessairement les autres, il s'ajoute aux autres » (cité dans [Diener 1985], p. 59).

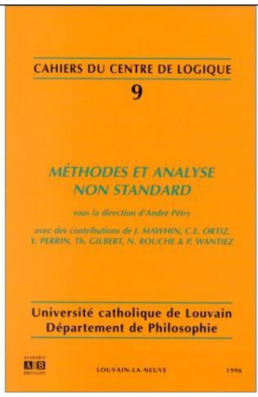
Jean Mawhin est un chercheur prolifique, auteur de plus de quatre cents publications, principalement en analyse non linéaire et en histoire des mathématiques ; il est membre de l'Académie de Belgique (classe des Sciences) où il se montre fort actif. Dès la fin des années 1980, il a rédigé plusieurs articles appliquant l'analyse non standard au calcul intégral. Le premier d'entre eux est paru dans *Casopis pro pestovani matematiky*, une revue de l'Institut mathématique de l'Académie des Sciences de la République de Tchécoslovaquie [33]. L'auteur y utilisait la théorie IST de Nelson pour étudier en 1986 des intégrales de Riemann généralisées. Par la suite, il revint deux fois sur ce thème, en 1992 et en 1996, en dressant « une synthèse des différents types d'intégrales et de leur caractérisation non standard », [et en présentant] les microjauges qui permettent de caractériser simplement l'intégrale de Kurzweil-Henstock » [P 1996, p. 5].

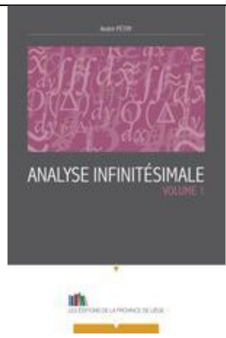
On soulignera encore l'étroite collaboration de J. Mawhin avec l'active école internationale d'analyse non standard initiée par G. Reeb et dont la réputation fut assurée par de nombreux mathématiciens comme M. Artigue, A. Deledicq, F. et M. Diener, J. Hartong, C. Lobry, R. Lutz, A. Makhlouf, E. Urlacher, … Son nom est explicitement cité dans les remerciements de plusieurs thèses de mathématiques rédigées par des membres de ce groupe (voir l'Annexe 1 du livre [Lobry 1989]).

J. Mawhin s'est associé récemment avec J. Bair pour rédiger un article historique portant sur le « didacticien infinicole » J.-N. Noël [Ba-M 2019] ; de plus, ces deux auteurs se sont associés à A. Pétry pour rédiger à trois une note donnant « un éclairage non standard sur l'enseignement de l'analyse » [Ba-M-P 2019].

[33] Cette revue est devenue *Matematica Bohemica* depuis 1990.

5. A. Pétry, un logicien de l'ISIL (HEPL)





A. Pétry a étudié les mathématiques à l'Université de Liège où les programmes des candidatures accordaient alors une grande importance aux enseignements de Henri Georges Garnir (1921-1985) et de ses disciples Jules Gobert (1934- 2010), Marc De Wilde (né en 1940) et Jean Schmets (né en 1940). Il a donc été initié à l'analyse mathématique par les livres du professeur [Garnir 1963] qui constituent « un modèle exemplaire de cette symbiose entre l'enseignement et la recherche qui fait et devra toujours faire la richesse de l'université » [Butzer-Mawhin 2002]. Ces enseignants liégeois en mathématiques qualifiées souvent de 'pures' étaient clairement infinifuges ; ils ne parlaient pas d'infiniment petits, si ce n'est pour souligner le manque de rigueur manifesté par leurs collègues spécialisés en mathématiques appliquées qui y recouraient.

A. Pétry ne suit pas la voie empruntée par ses professeurs d'analyse. Il choisit très tôt de se spécialiser en logique mathématique. Ainsi, son travail de fin d'études porte sur « la technique générale du forcing de P.J. Cohen [34] en langage formalisé » (1972). Dès qu'il est licencié en sciences mathématiques, A. Pétry est engagé comme assistant au service d'algèbre du professeur Louis Nollet (1921- 1999) et entame un doctorat qu'il défend, après quatre années de recherches, avec une dissertation intitulée « sur les cardinaux dans les 'new foundations' de Quine [35] » (1976). Ce sujet de thèse lui fournit l'opportunité de travailler avec le logicien

[34] Paul Joseph Cohen (1934-2007) est un mathématicien américain connu notamment pour ses travaux sur l'hypothèse du continu, l'axiome du Choix et la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Il a développé, dans les années 1960, la technique du forcing pour démontrer des résultats de cohérence et d'indépendance sur les ensembles et les modèles.

[35] Willard Van Orman Quine (1908-2000) est un logicien et philosophe américain. En logique mathématique, on lui doit une théorie axiomatique des ensembles appelée les 'New Fundations' ; dans une extension de sa

Maurice Bofffa [36] qui accepte dès 1973 de guider ses recherches doctorales. Nous allons voir ci-après que A. Pétry et M. Boffa vont avoir une collaboration fructueuse et importante pour le développement de l'analyse non standard en Belgique francophone. Nous aurions d'ailleurs pu grouper ces deux mathématiciens comme c'est le cas pour d'autres couples traités dans ce travail. Mais M. Boffa n'est pas liégeois, de sorte que nous ne mentionnerons pas ici ses apports dans le domaine considéré.

Après l'obtention de son diplôme de docteur en sciences, A. Pétry est engagé à la Haute Ecole Rennequin Sualem, encore appelée Institut Supérieur Industriel Liégeois (ISIL, en abrégé), une Haute Ecole, de la Province de Liège et de niveau universitaire, où sont formés des 'ingénieurs industriels' [37]. Il succède ainsi à Jean Massart dont les cours d'analyse, en quatre tomes et publiés en 1970 chez Dunod, sont présentés de façon moderne pour l'époque avec une approche classique assez semblable à celle des cours donnés à l'Université de Liège par l'infinifuge H.G. Garnir. Toutefois, J. Massart, qui avait une longue expérience d'enseignant auprès d'ingénieurs (civils et techniciens), présentait à ses étudiants le concept d'infiniment petit, mais de façon potentielle (donc au sens de Cauchy ou de Brasseur) puisque pour lui « un infiniment petit est une **variable** [38] qui a pour limite zéro » [Massart 1970, p. 59].

Parallèlement à sa charge d'enseignement, A. Pétry se montre actif sur le plan scientifique, travaillant notamment pour le Centre National de Recherches de Logique dont il devient le trésorier. Il y travaille avec M. Boffa ; cette collaboration débouche notamment sur la mise au point d'un enseignement non classique de l'analyse pour ingénieurs. Avec son collègue montois, A. Pétry organise à l'ISIL, en mai 1992, des exposés présentant cette expérience nouvelle : pour la première fois en Belgique, l'analyse non standard selon Robinson est exposée en partant de résultats trouvés en logique mathématique, notamment des modèles non standard de l'Arithmétique obtenus en 1934 par Skolem [39]. Leurs deux conférences font l'objet d'un même article intitulé « Des naturels non standard à l'Analyse non standard, une introduction » [P+ 1993], publié dans la revue Mathématique et Pédagogie de la Société belge

---

présentation initiale (datant de 1937), il introduit, en 1940 et 1951, la théorie ML (acronyme pour *Mathematical Logic*) qui fait appel à des classes et à des ensembles.

[36] Maurice Boffa (1939-2001) a été professeur à l'Université de Mons. Ses principales publications scientifiques portaient sur « la théorie des ensembles, la théorie des modèles et la calculabilité » [Crabbé M. – Michaux C. – Point P. 2001].

[37] Autrefois, 'Ingénieurs techniciens' formés en trois ans (et non pas en quatre années comme c'est le cas présentement).

[38] Caractères renforcés par l'auteur.

[39] Les auteurs introduisent les modèles non standard de l'Arithmétique à l'aide d'une « mesure » sur l'ensemble N ; l'existence de cette mesure équivaut à celle d'un ultrafiltre non principal sur N.

des professeurs de mathématiques d'expression française, peu de temps après la parution, par T. Gilbert, d'une note présentant l'analyse non standard dans la version de Nelson. Les deux auteurs terminent leur article en montrant notamment, sans faire appel au concept de limite et de manière très convaincante, que la dérivée d'un sinus est un cosinus. Cette approche nouvelle de l'analyse est à l'origine d'une introduction progressive de l'analyse non standard à l'Université de Liège à la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales (voir la section suivante).

A. Pétry rédige trois articles sur le même thème, en 1995, 1996 et 1998, en insistant notamment sur deux aspects importants de son enseignement : l'usage de microscopes (virtuels) et la considération d'ensembles internes et hyperfinis présentés d'une manière simplifiée. Le troisième de ces articles est issu d'un volume, paru en 1998, de la Société Mathématique de Belgique reprenant les textes de conférences données au Colloque international 'Logique dans l'Enseignement des Mathématiques' qui s'est tenu les 29 et 30 mai à l'ISIL à l'initiative d'A. Pétry. Les acteurs de cette organisation étaient principalement issus des pays étrangers : ils étaient français avec J.-M. Salanskis de Lille III, D. Lacombe de Paris VII, J. Adda de Lyon II, M. Diener de Nice Sophia-Antipolis et V. Gautheron de Paris VII) ou italien avec C. Bernardi de Rome.

S'il était, au départ de son aventure en analyse non standard, un adepte de l'approche de Robinson, A. Pétry était ouvert à d'autres cadres théoriques. Ainsi, il a dirigé un 'Cahier du Centre de Logique' [P 1996], publié (chez Academia-Bruylant) par le Département de Philosophie de l'Université catholique de Louvain, contenant divers articles rédigés en ayant recours à la vision de Nelson, parmi lesquels on trouve des notes de Mawhin et Gilbert-Rouche. Au début de ce siècle, il s'est focalisé davantage sur l'approche de Keisler « qui constitue une introduction de l'Analyse non standard particulièrement simple est bien adaptée à l'enseignement » [P 2001, p. 156]. Dans un article, datant de 2001 et figurant au sein d'un fascicule édité par la Société Mathématique de Belgique qui avait rassemblé « des textes d'exposés présentés ou suscités à l'occasion des journées organisées à Bruxelles et à Mons en l'honneur de Maurice Boffa pour son soixantième anniversaire » [40], il développe à la manière de Keisler une présentation non standard des tangentes à une courbe en exploitant des microscopes de grossissement infiniment grand. Il reviendra ultérieurement en profondeur sur

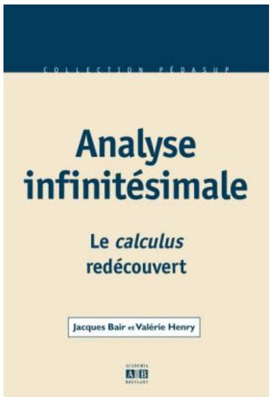
[40] Crabbé M. – Michaux C. – Point F. (2001). A tribute to Maurice Boffa. *Belgian Mathematical Society – Simon Stevin*. Recueil d'articles rédigés à l'occasion des journées du soixantième anniversaire de Maurice Boffa les 23 et 24 mars 2000 aux Universités libre de Bruxelles et de Mons-Hainaut.

cette méthode dans des livres, en 2011-2012 et en 2016-2016, publiés aux éditions Céfal. Ceux-ci reprennent l'essentiel des enseignements en analyse donnés à l'ISIL par A. Pétry et ses collègues. Parmi ceux-ci figure R. Fourneau, docteur en sciences mathématiques ; au début de sa carrière professionnelle, il a fait partie des convexistes liégeois formés par le professeur F. Jongmans [41], puis s'est notamment « converti » à l'analyse non standard ; par exemple, il a montré « comment la notion d'infiniment petit permet de prouver de manière rigoureuse quelques théorèmes de statistiques dont la preuve classique est peu agréable » [Fourneau 2005, p. 137].

Signalons encore qu'en 2006 A. Pétry a participé à une recherche interuniversitaire sur l'enseignement de l'analyse ; celle-ci, dirigée par le logicien montois Christian Michaux qui a succédé à N. Rouche à la présidence du CREM, regroupait différents chercheurs issus de plusieurs universités francophones belges. Dans le cadre de cette recherche, A. Pétry a rédigé en 2006 deux documents de travail sur la récurrence ainsi que sur les ensembles internes et la saturation. Par ailleurs, entre 2002 et 2015, il a été promoteur de quatre projets de recherche appliquée 'First Région wallonne' dans lesquels étaient utilisées des méthodes liées à l'apprentissage statistique et à l'analyse d'images.

Les recherches et travaux de A. Pétry sont à la base de l'introduction des infiniment petits dans les enseignements de Jacques Bair et Valérie Henry en sciences économiques et de gestion à l'Université de Liège.

6. Deux mathématiciens enseignant en économie



[41] Sur l'histoire de l'Ecole liégeoise de géométrie convexe du professeur F. Jongmans, voir notamment [Ba 2014b].

Au début de ce siècle, Jacques Bair et Valérie Henry ont introduit progressivement les infiniment petits dans les cours de mathématiques dispensés à la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, puis à HEC-Ecole de Gestion, à l'usage des étudiants inscrits en sciences économiques, en sciences de gestion et en ingéniorat de gestion. Le début de cette aventure est raconté dans [Ba-H 2013b]. Cette collaboration déboucha sur un cours publié chez *Academia Bruylant* en 2008, ainsi que sur de nombreuses publications. Ils ont publié ensemble près de trente articles dont le tiers en anglais (et les deux tiers en français) ; ils ont cosigné à eux deux 22 titres, plus 7 autres avec la collaboration de collègues étrangers allant de 1 à 11 co-auteurs supplémentaires qui, pour la plupart, appartiennent au *team* mis sur pied par l'israélien Mikhail Katz (voir [Ba-H 2013b] [42]. Le choix des endroits où les deux auteurs ont publié (avec éventuellement l'aide d'autres chercheurs) est large puisqu'il comprend :

- Des revues internationales de mathématiques : *Notices of the American Mathematical Society, Mathematical Intelligencer, Matematychni Studii, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin* ;
- Deux revues consacrées à l'histoire des mathématiques: *Antiquitates Mathematicae* (série 6 des Annales de la société mathématique de Pologne*), British Journal of History of Mathematics;*
- Un journal de philosophie: *The Journal of General Philosophy of Science* ;
- Des revues de didactique des mathématiques en Belgique ou à l'étranger : *Mathématique et Pédagogie, Losanges, Teaching Mathematics and Computer Sciences, College Mathematics Journal* ;
- Des magazines de vulgarisation ou destinés a priori à des étudiants du Supérieur : *Tangente, Tangente-Sup* ;
- Une revue et un site consacrés surtout à l'épistémologie de la science : *Foundations of Science*, Textes fondateurs de la Science dans *Bibnum* (France).

Signalons de plus l'organisation de séminaires et conférences, dans le cadre du GEMME (Groupe d'Etude des Mathématiques du Management et de l'Economie, co-dirigé par J. Bair et Y. Crama) ou de l'IREM L-L (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Liège-Luxembourg, dirigé par J. Navez), afin d'expliciter à leurs collègues

[42] Pour plus de renseignements sur ce groupe international d'infinicoles, voir le site de Mikhail Katz qui est *Full Professor* à la *Bar Ilan University in Ramat Gan* en Israël (http://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/).

universitaires ou de l'enseignement secondaire la vision de leur enseignement en analyse mathématique.
En plus de ce parcours en commun, mentionnons quelques caractéristiques propres à chacun de ces deux infinicoles liégeois.

6.1. J. Bair, un convexiste et épistémologue

Etant quasiment de la même génération, A. Pétry et J. Bair ont reçu la même formation de base en mathématiques supérieures, leurs enseignants en analyse étant des infinifuges. Alors qu'A. Pétry s'est spécialisé en logique mathématique au sein du service du professeur L. Nollet, J. Bair a choisi de travailler en géométrie convexe sous la direction du professeur François Jongmans [43] qui fut son chef de service, puis son conseiller et son guide tout au long de sa carrière. A posteriori, il semble limpide que F. Jongmans fut implicitement à la base de l'intérêt porté par son disciple à l'analyse non standard. En effet, on ne peut pas réellement cataloguer F. Jongmans d'infinicole au sens décrit ci-dessus, mais il est assurément permis de lui attribuer le qualificatif de « quasi-infinicole », et ceci pour les quatre arguments suivants :
a) Alors qu'il venait d'obtenir son diplôme d'agrégé de l'enseignement supérieur (1947) et qu'il était chef de travaux (1951) au service du professeur Lucien Godeaux (1877-1975), F. Jongmans assurait des répétitions destinées aux candidats ingénieurs, mathématiciens et physiciens. A cette occasion, il avait rédigé un recueil d'exercices d'analyse mathématique élémentaire comprenant « en tête de chaque chapitre un résumé théorique mettant l'accent sur la technique des méthodes » [Jongmans 1960, p. 1]. Dans ce livre, calligraphié par l'auteur, un paragraphe entier du premier chapitre est consacré aux infiniment petits qui sont « des variables qui tendent vers 0 » [ibidem, 1.4, pp. 5-9], conformément à la conception de Brasseur et de ses successeurs à l'Université de Liège. Il y est question de l'ordre de grandeur d'un infiniment petit (par rapport à x) et de sa partie principale ; suivent ensuite des calculs de limites faisant appel à des infiniment petits équivalents.
b) F. Jongmans était titulaire d'une chaire de topologie au Département de Mathématique de la Faculté des Sciences. Dans ce cadre, il dispensait un cours à option pour les deux ou trois étudiants qui avaient choisi cette orientation dans leur programme de licence. Le thème de ce cours de spécialisation pouvait varier d'une année à l'autre. Vers le milieu des années 1960, le sujet de cet enseignement était « convergence et filtre » ; il y était question notamment de

[43] François Jongmans (1921-2014) fut le créateur et le directeur de l'Ecole liégeoise de géométrie convexe, et, en fin de carrière, un historien réputé, auteur notamment d'un ouvrage consacré à Eugène Catalan. A son décès, deux biographies ont été rédigées par ses disciples [Ba 2014b] et [Seneta 2015].

notions telles que celles de filtre, de filtre de Fréchet, d'ultrafiltre, … Le professeur ne faisait explicitement aucune mention à l'analyse non standard, qui venait à cette époque d'être créée par A. Robinson, mais il en était fort proche, puisqu'il écrivait par exemple dans ses notes : « l'étude de la convergence des suites apparaît ainsi comme un cas très particulier de l'étude des limites de familles filtrées » [Jongmans 1964, p. 23].

c) Dans son cours de mathématiques générales pour étudiants en sciences économiques ou commerciales [Jongmans 1967], le professeur évoque accessoirement (au sein d'une parenthèse) le concept d'infiniment petit dans ce court passage concernant la différentielle d'une fonction : « on appelle différentielle dy ou df de f en x l'expression d$y = f'(x)\ \Delta x$ (dans le jargon spécialisé, dy représente la « partie principale » de l'infiniment petit Δy par rapport à Δx, hormis le cas f'=0). C'est donc de façon quasi anecdotique qu'est faite cette évocation, par ailleurs unique au sein du cours, des infiniment petits ; l'auteur s'explique quelque peu dans l'avant-propos en signalant qu'il ne pouvait dans ce cours « étaler, à beaucoup près, toutes les richesses de l'analyse infinitésimale ». Néanmoins, ce bref passage suggère que F. Jongmans avait, à tout le moins dans ce cas, une vision actuelle de l'infini semblable à celle utilisée souvent par des économistes quand ils traitent de notions telles que celles de valeurs marginales ou encore d'élasticité.

d) A la fin de sa carrière professionnelle et après son admission à l'éméritat, F. Jongmans s'est intéressé de façon active à l'histoire des mathématiques [Seneta 2015]. Parmi ses thèmes favoris d'étude figure le jaugeage de tonneaux ([Jongmans 2008] et [Jongmans 2010]). A cette occasion, il aimait insister sur le rôle important qu'avait eu J. Képler dans le développement de l'analyse mathématique, spécialement dans la création du calcul intégral avec son recours à des infiniment petits.

C'est donc avec une formation en analyse donnée par des infinifuges, mais dans un environnement nullement hostile à l'esprit des infinicoles, que J. Bair a entamé sa carrière professionnelle. A ses débuts, ses recherches portaient sur la géométrie convexe, et particulièrement sur la séparation d'ensemble ainsi que sur le comportement à l'infini des ensembles (convexes ou non) ; il était actif au sein de la Société royale des Sciences de Liège qu'il présida en 1999. De 1970 à 1997, il a publié plus de quarante articles (exactement 43) dans le Bulletin de la Société, dont la moitié environ (précisément 21) en collaboration ; aucune de ces publications ne portait sur les infinitésimaux, mais il faisait appel au concept d'infini actuel lorsqu'il associait divers cônes à des ensembles pour en caractériser le comportement asymptotique. A ses débuts, comme assistant au service du professeur

Jongmans (de 1970 à 1977), ensuite à l'Institut Supérieur Industriel de l'Etat à Huy et à Verviers (de 1977 à 1988), puis comme responsable de la formation mathématique de base des futurs économistes, sociologues et gestionnaires (à partir de 1988), il enseignait en effet l'analyse classique, avec la définition en « epsilon-delta » de la limite ; mais, vers la fin du siècle précédent, il se posa des questions sur l'opportunité de donner cette présentation weierstrassienne à ses étudiants en économie et en gestion. En intégrant certaines idées que lui avait conseillées son ancien patron sur les infiniment petits et, surtout, en profitant de l'expérience pédagogique d'A. Pétry enseignant une version de l'analyse non standard bien adaptée à des futurs ingénieurs (voir [Keisler 2012]), J. Bair en arriva, au début de ce siècle et avec l'appui de sa collaboratrice V. Henry, à mettre progressivement au point un cours d'analyse non standard convenant particulièrement bien à ses étudiants en économie et en gestion (voir [Ba-H 2008e]). Il présenta ses idées pour la première fois publiquement à un colloque sur l'enseignement de l'analyse organisé, en 2004 à Mulhouse par A. Maklhouf et R. Lutz ; y participaient des enseignants et des didacticiens comme M. Artigue et M. Schneider. Les deux organisateurs, en collaboration avec des collègues appartenant à leur IREM, avaient mis au point un enseignement d'analyse élémentaire basé sur le concept d'infiniment petit (selon la conception de Nelson) ; ce cours était dispensé dans les lycées de leur région et a fait l'objet d'une brochure de l'A.P.M.E.P. ([Lutz-Makhlouf-Meyer 1996]) ; lors de ce colloque, R. Lutz défendit avec brio cet enseignement de l'analyse en invoquant des arguments de nature anthropologique. Bien que séduit par le travail didactique présenté par A. Makhlouf et R. Lutz, J. Bair ne suivit par leur voie d'une présentation nelsonienne, car il n'était pas dans la même situation que ses collègues français ; en effet, les étudiants inscrits à l'Université de Liège avaient reçu, lors de leurs études en secondaire, un certain bagage sur les nombres réels et l'enseignant belge ne pouvait pas admettre, comme les professeurs en Alsace, qu'il existe à côté des réels standard (qu'ils appelaient « bien déterminés ») des infiniment petits et des infiniment grands au sein des réels. Néanmoins, la participation à ce colloque en France renforça la conviction qu'un cours d'analyse non standard était possible et souhaité à la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales à l'Université de Liège. Avec l'appui de V. Henry (voir ci-dessous), une version quasi-définitive de ce cours fut publiée en 2008 et dispensée aux étudiants jusqu'à l'admission du professeur à l'éméritat en 2013.

Après son départ à la retraite, J. Bair a poursuivi ses publications en s'orientant dans deux directions :

- vers l'histoire locale des mathématiques et de la statistique, avec des travaux sur Catalan (en collaboration avec G. Haesbroeck), sur Sluse (en collaboration avec V. Henry), sur Noël (en collaboration avec J. Mawhin) et sur l'histoire de la statistique à ULiège (en collaboration avec A. Albert et G. Haesbroeck) ;
- vers l'épistémologie des mathématiques et les fondements de l'analyse infinitésimale, en collaboration avec divers membres du groupe international dirigé par l'israélien M. Katz qui notamment promeut l'analyse non standard selon Robinson.

A l'occasion de son départ à la retraite, la revue française *Tangente* a publié un livre intitulé « *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique. Une dimension insoupçonnée* » (Hors Série 51, Mars 2014). Cet ouvrage, coordonné par son collaborateur bruxellois de longue date Daniel Justens, contient tout un dossier consacré à cet infinicole liégeois.

6.2. V. Henry, une didacticienne à HEC-Ecole de Gestion

Née le 29 mars 1977 à Rocourt, V. Henry a terminé sa licence en mathématiques à l'Université de Liège en 1999. Dès l'obtention de ce diplôme, elle s'est orientée vers la didactique disciplinaire, obtenant en 2000 son agrégation de l'enseignement secondaire supérieur à ULiège, puis en 2004 son doctorat en didactique des disciplines scientifiques à l'Université P. Sabatier de Toulouse. Sa thèse fut à la base de la création puis du développement du cours d'analyse infinitésimale donné à la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, et, après la fusion avec HEC, à HEC-Ecole de Gestion de l'Université de Liège.

A l'Université de Liège, elle fut assistante à temps plein de 2000 à 2007, première assistante de 2008 à 2013, chargée de cours à mi-temps depuis 2013 en remplacement de J. Bair parti à la retraite ; à partir de 2005, elle fut chargée de cours à temps partiel à la formation pédagogique, orientation Mathématiques, à l'Université du Luxembourg, et lors de l'année académique 2006-2007, Maître-assistante à la Haute-Ecole Charlemagne de Liège.

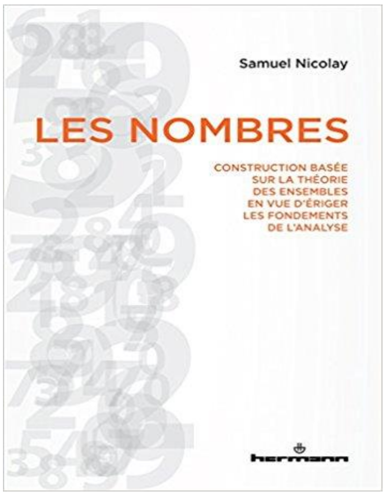
Depuis le premier janvier 2008, elle est titulaire à mi-temps de la chaire de didactique des mathématiques à l'Université de Namur (UNamur) où elle est devenue successivement chargée de cours puis professeure.

Elle a été élue membre du Conseil d'Administration du CREM en 2008 et en est la secrétaire depuis 2010 ; elle y est également directrice de recherches. Depuis 2013, elle est présidente de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française.

7. Samuel Nicolay, un professeur d'analyse

L'Université de Liège existe depuis plus de deux cents ans et les mathématiques y ont toujours été enseignées. Le cours le plus important figurant dans les programmes de la formation des futurs mathématiciens a, de tout temps, été l'analyse. Ces dernières décennies, les professeurs du cours d'analyse de base, à savoir H. Garnir, J. Gobert et J. Schmets, étaient clairement infinifuges : ils suivaient de loin ou de près l'ouvrage de référence [Garnir 1963]. Le titulaire actuellement en poste est S. Nicolay ; il semble prêt à donner une autre impulsion à l'enseignement élémentaire de l'analyse mathématique.

S. Nicolay lors de sa nomination dans le corps académique de ULiège, félicité par le Recteur de l'époque, B. Rentier



Né en 1977 Samuel Nicolay s'oriente dès sa jeunesse vers les sciences, et plus particulièrement vers les mathématiques. Il étudie donc les mathématiques à l'Université de Liège de 1996 à 2000. Après l'obtention de sa licence en mathématiques, il obtient un poste d'assistant dans son Université et y entame un DEA (Diplôme d'Etudes Approfondies, de niveau de troisième cycle) qu'il termine en 2001 avec un mémoire intitulé « Analyse multirésolution et applications » (91 pages). Au cours de ce travail, il découvre la théorie des ondelettes et commence à s'intéresser à diverses de leurs applications pratiques comme les électrocardiogrammes et la spectrométrie. Il poursuit ensuite ses recherches sur des applications biologiques des ondelettes au sein de l'équipe du physicien Alain Arneodo à l'ENS Lyon et les concrétise par l'obtention, en 2006, d'un doctorat dont la thèse est intitulée « Analyse des séquences ADN par la transformée en ondelettes : extraction d'informations structurelles, dynamiques et fonctionnelles » (259 pages).

Ensuite, il obtient un poste de chargé de recherche FNRS au Département de Mathématique de l'Université de Liège, avant de devenir, dès 2009, chargé de cours puis professeur, notamment titulaire du cours d'analyse mathématique aux étudiants commençant des études de mathématiques à ULiège.
Ses recherches portent sur l'analyse, l'analyse fonctionnelle et les ondelettes ; elles sont souvent réalisées en collaboration avec d'autres scientifiques ; elles comprennent des sujets purement mathématiques et traitent aussi des problèmes plus appliqués [44].
S. Nicolay fut le président de la Société Royale des Sciences de Liège en 2013.
Il fait partie du groupe des infinicoles liégeois car il est le premier membre du Département de Mathématique de l'ère contemporaine à se préoccuper de l'emploi d'infinitésimaux dans les fondements de l'analyse ; en fait il s'intéresse à l'analyse infinitésimale non pas d'un point de vue didactique (il enseigne toujours une approche dite classique, c'est-à-dire weierstrassienne), mais aux niveaux de mathématiques pures, comme en topologie, en logique, … ; il estime en effet que le recours aux hyperréels « permet d'envisager différents concepts sous un oeil différent et, dans certaines branches de la mathématique (en topologie notamment), de raccourcir substantiellement certaines démonstrations » [Ni 2015, p. 253).
Ayant éprouvé le besoin de rédiger un livre donnant *ex nihilo* une construction, « basée sur la théorie des ensembles », de tous les nombres « en vue d'ériger les fondements de l'analyse » [Ni 2015], il consacre tout un chapitre (le sixième et dernier, pp. 253-287) à l'ensemble des hyperréels en illustrant « l'intérêt de l'analyse non-standard grâce à quatre domaines d'applications : la construction des nombres entiers non-standards, une définition de R reposant sur les nombres rationnels non-standard, la topologie (nous allons notamment obtenir une caractérisation non-standard des ensembles compacts et l'utiliser pour obtenir le théorème de Heine-Borel) et l'étude des fonctions (limite, continuité, dérivabilité) » [ibidem, p. 276].
Dans la foulée de ce livre, l'auteur rédige, en 2016, un article sur les nombres hyperréels ; il est publié dans la revue française *Quadrature* qui a été récemment fusionnée avec *Tangente-Sup* et vise donc essentiellement un public d'étudiants entrant dans l'enseignement supérieur (les « prépas » en France) et de leurs professeurs. Il y propose « une brève construction classique des nombres hyperréels à partir des nombres réels ». Dans un souci de pédagogie, il omet les détails les plus techniques. La présentation est divisée en deux parties. La première fait presqu'exclusivement appel à l'intuition, tandis que la seconde reprend les mêmes

[44] Voir son site à l'adresse électronique : http://www.afaw.ulg.ac.be/.

linéaments mais se veut plus rigoureuse » (d'après le site Orbi, http://hdl.handle.net/2268/202578).

8. Bibliographie infinico-liégeoise

Dans cette huitième section, nous n'indiquons que les travaux qui ont été rédigés par au moins un membre de *IL* et qui portent sur les infinitésimaux ou sur des problèmes géométriques faisant intervenir, explicitement ou implicitement, un infini actuel. Nous adoptons les conventions d'abréviation expliquées ci-avant. La liste a été arrêtée au début du mois de mai 2020.

8.1. Publications de Bair

- [Ba 1971] Cônes asymptotes et cônes caractéristiques, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 40, pp. 428-437.
- [Ba 1972] Cônes associés à un ensemble et pseudo-cônes, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, pp. 171-178.
- [Ba 1981a] Some characterizations of the asymptotic cone and the lineality space of a convex set, *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, 12, pp. 173-176.
- [Ba 1981b] A geometric description of the inner aperture of a convex set, *Acta math. Sc. Hung.*, 38, pp. 237-240.
- [Ba 1983] Liens entre le cône d'ouverture interne et l'internat du cône asymptotique d'un convexe, *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XXXV, pp. 177-187.
- [Ba 1984] *Structure asymptotique et propriétés de séparation en géométrie convexe*, dissertation présentée en vue de l'obtention du grade d'agrégé de l'enseignement supérieur, Université de Liège, Faculté des Sciences.
- [Ba 2004] Introduction du concept de limite à l'aide des nombres hyperréels. Compte rendu du Colloque *Regards et perspectives sur l'enseignement de l'analyse*, Mulhouse.
- [Ba 2013] Infiniment grand en analyse, *Tangente*, 155, pp. 38 – 40.
- [Ba 2014a] Analyse classique ou analyse non standard ? *Tangente HS 51*, sur le thème *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique*, Editions Pole, Paris, pp. 150 – 155.
- [Ba 2014b] A la mémoire du géomètre François Jongmans (1921-2014). *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 11 ; http://www.academieroyale-sciences.be.
- [Ba 2018a] La dérivée en analyse non standard, *Tangente* 183, p. 20.
- [Ba 2018b] L'ingénieux algorithme de René-François de Sluse. *Tangente* 183, pp. 18-19.

8.2. Publications de Bair et co-auteurs n'appartenant pas à *IL*

- [Ba+ 1982] Du bon usage des cônes dans l'aménagement de la tour de Babel, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 51, pp. 74-81.
- [Ba+ 1983a] Relations entre l'enveloppe conique, le cône d'infinitude et la gaine d'un ensemble convexe, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 52, pp. 17-21.
- [Ba+ 1983b] Sur l'énigme de l'enveloppe conique fermée, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 52, pp. 285-294.
- [Ba+ 1984] Some remarks about recent results on the asymptotic cone, en collaboration avec F. Jongmans, *Results in Mathematics*, Vol. 7, pp. 117-118.
- [Ba+ 1993] A classification for non-linearly bounded convex sets, en collaboration avec J.L. Valein, *Archiv der Mathematik*, 61, pp. 576-583.
- [Ba+ 1996] The infinite shadow of a convex set, en collaboration avec G. Hansen, *Bull. Soc. Roy. Se. Liège*, Vol. 65 (6), pp. 407-416.
- [Ba+ 1997a] Gaine, cône de récession et séparation forte pour des convexes fermés non bornés, en collaboration avec J.C. Dupin, *Bull. Soc. Roy, Sc. Liège*, Tome LXVI, pp. 353-364.
- [Ba+ 1997b] Cover and bounded parallel faces, en collaboration avec J.C. Dupin, *Geometriae Dedicata*, 72, pp. 299-307.
- [Ba+ 1997c] Some properties of the conical hull of a closed convex set, en collaboration avec G. Hansen, le *Bulletin de l'Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, *XXXI*, pp. 419-426.
- [Ba+ 1999] The barrier cone of a convex set and the infinitude cone of the cover, en collaboration avec J.C. Dupin, *Journal of Convex Analysis*, 6, pp. 3 395-398.
- [Ba+ 2018a] Leibniz's well-founded fictions and their interpretations. En collaboration avec Blaszczyk P. – Ely R. – Heinig P. – Katz M., *Mat. Stud.*, V 49, n° 2, pp. 186-224. Accessible aux adresses électroniques : http://dx.doi.org/10.15330/ms.49.2.186-224, https://arxiv.org/abs/1812.00226 et https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3882551.
- [Ba+ 2018b] Fermat's dilemma : why did he keep mum on infinitesimal ? and the european theological context. En collaboration avec Katz M. – Sherry D., *Foundations of Science*, 23, n° 3, pp. 559-595; http://dx.doi.org/10.1007/s10699-017-9542-y; https://arxiv.org/abs/1801.00427 et https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3836239.

- [Ba+ 2018c] Klein vs Mehrtens : restoring the reputation of a great modern. En collaboration avec Blaszczyk P. – Heinig P. – Katz M. – Schaefermeyer J.P. – Sherry D. *Matematychni Studii,* 48 (2017), n° 2, pp. 189-219 ; http://arxiv.org/pdf/1803.02193, http://dx.doi.org/10.15330/ms.48.2.189-219 et https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3819950.
- [Ba+ 2018d] Analyzing Bernadete's comment on decimal notation. En collaboration avec Blaszczyk – Katz M – Kudrik T. – Sherry D (2018). *Philosophy of Mathematics Education Journal*, n° 33 ; https://arxiv.org/abs/1706.00191.
- [Ba+ 2019a] Procedures of Leibnizian infinitesimal calculus : an account in three modern frameworks. En collaboration avec Piotr BLASZCZYK, Peter HEINIG, Robert Ely, Mikhail G. KATZ et Karl Kuhlemann. En voie de publication dans *British Journal of History of Mathematics*.
- [Ba+ 2019b] Continuity between Cauchy and Bolzano: issues of antecedents and priority. En collaboration avec Blaszczyk P. – Fuentes-Guillén E., Heinig P. – Kanovei V. – Katz M. En voie de publication dans *British Journal of History of Mathematics*.
- [Ba+ 2019c] 19th century real analysis, forward and backward. En collaboration avec Blaszczyk P. – Heinig P. – Kanovei V. – Katz M. *Antiquitates Mathematicae*, vol. 13 (1), pp. 35-65 ; doi : 10.14708/am.v13i1.6440.
- [Ba+ 2020] Cauchy's work on integral geometry, centers of curvature, and other applications of infinitesimals. En collaboration avec Blaszczyk P. – Ely R. – Heinig P. – Kanovei V. – Katz M. – MCGaffey T. *Real Analysis Exchange*, 45, pp. 1-13.

8.3. Publications de Bair - Henry

- [Ba-H 2003a] De l'Analyse Classique à l'Analyse Non Standard, *Les cahiers de la mathématique appliquée*, éditions Ferrer – Céfal, Bruxelles – Liège, n° 1, pp. 51-74.
- [Ba-H 2003b] De l'Analyse Classique à l'Analyse Non Standard : axiomatique et développements récents. *Les cahiers de la mathématique appliquée*, éditions Ferrer – Céfal, Bruxelles – Liège, n° 2, pp. 75-96.
- [Ba-H 2006a] Etude épistémologique sur la méthode de Fermat pour la recherche d'extrema. *Mathématique et Pédagogie*, n° 156, pp. 49 – 61.
- [Ba-H 2006b] Les angles corniculaires et l'infiniment petit. *Tangente – Sup*, n° 31, pp. 4 – 7.

- [Ba-H 2006c] Introduction des infiniment petits au moyen d'angles corniculaires : résultats expérimentaux. *Les cahiers thématiques de l'IREM L-L*, 27 pages.
- [Ba-H 2007a] From Newton's fluxions to Virtual Microscopes. *Teaching Mathematics and Computer Science*, Vol. V, Issue II, pp. 377 – 384.
- [Ba-H 2007b] A propos des nombres hyperréels : une vision positiviste de nombres hyperréels au moyens d'angles – quelques réflexions sur l'existence des infiniment petits. *Les cahiers thématiques de l'IREM L-L*, 6 pages.
- [Ba-H 2008a] From Mixed Angles to Infinitesimals. *College Mathematics Journal*, The Mathematical Association of America, Vol. 39, n° 3, pp. 230 – 233.
- [Ba-H 2008b] Utilisation d'un microscope virtuel. *Tangente – Sup*, n° 46, pp. 10 – 12.
- [Ba-H 2008c] Angles corniculaires et nombres superréels. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, Volume 15, n° 1, pp. 77 – 86.
- [Ba-H 2008d] Méthode pour la recherche du minimum et du maximum. Analyse des œuvres de Fermat, *BibNum*, Bibliothèque Nationale de France, http://www.bibnum.education.fr.
- [Ba-H 2008e] *Analyse infinitésimale : Le Calculus redécouvert.* Academia-Bruylant, Louvain-la-Neuve, 192 pages.
- [Ba-H 2010a] Implicit differentiation with microscopes. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32, n° 1, pp. 53 – 55.
- [Ba-H 2010b] Quand les tangentes étaient touchantes. *Tangente Sup*, n° 54, pp. 8 – 9.
- [Ba-H 2010c] Newton : un précurseur en analyse non standard. *Tangente*, n° 137, pp. 36 – 38.
- [Ba-H 2010d] Infini actuel, infini potentiel. Bibliothèque Tangente n° 38 « Mathématique & Philosophie », Editions Pole, pp. 114-119.
- [Ba-H 2010e] Les infiniment petits selon Fermat : prémisses de la notion de dérivée. *Regards sur les textes fondateurs de la science, Volume I , de l'écriture au calcul – théorie des nombres*, sous la direction de A. Moatti, Editions Cassini. Paris, pp. 35 – 44.
- [Ba-H 2011] Sluse : ses perles et son algorithme. *Losanges*, 14, pp. 14 – 18.
- [Ba-H 2013a] Les infinitésimaux nilpotents en analyse. *Tangente Hors-série n° 49, Les maths de l'impossible*, pp. 88 – 91.
- [Ba-H 2013b] Osculating circle with microscope within microscope. *Foundations of Science*, 18(2), pp. 319-325.
- [Ba-H 2013c] Principe de transfert en analyse infinitésimale. *Tangente-Sup*, n° 70 – 71, thème « transfert et échange », Editions Pole, pp. 22 – 25.

- [Ba-H 2013d] *Parcours et détours en analyse infinitésimale*. Université de Liège, ISBN : 978-2-87456-169-6, 139 pages ; accessible à l'adresse électronique : http://hdl.handle.net/2268/156549.
- [Ba-H 2014a] Les infiniment petits en économie. *Tangente*, 156, pp. 16 - 18.
- [Ba-H 2014b] Angles corniculaires et de demi-cercle chez Euclide. *Tangente HS 53* sur le thème *Les angles*, pp. 6 – 8 ; version *Bibliothèque*, pp. 6 – 11.
- [Ba-H 2019] La lente reconnaissance des infiniment petits. Dans *Tangente*, HS n° 69 sur le thème « Mathématiques et Physique », *Editions Pole, Paris, 2019, pp. 48-51 ; Bibliothèque Tangente*, HS 69, 2019, pp. 32-35.

8.4. Publications de Bair – Henry et co-auteurs n'appartenant pas à *IL*

- [Ba-H+ 2004a] Limites de courbes : théorie et applications en analyse. En collaboration avec Antibi A., *Mathématique et Pédagogie*, n° 147, 2004, pp. 65-87.
- [Ba-H+ 2004b] Une modélisation d'un zoom au moyen de microscopes virtuels. En collaboration avec Antibi A., *Teaching Mathematics and Computer Science*, Vol. II, Issue II, pp. 319 – 335.
- [Ba-H+ 2013] Is mathematical history written by the victors? *Notices of the American Mathematical Society, en collaboration avec* Błaszczyk P. – Ely R. – Kanovei V. – Katz K. – Katz M. – Kutateladze S. – McGaffey T. – Schaps D. – Sherry D. – Shnider S., Vol. 60, n° 7, pp. 886-904 ; http://www.ams.org/notices/201307/rnoti-p886.pdf, http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3086638 et https://arxiv.org/abs/1306.5973.
- [Ba-H+ 2017a] Cauchy, infinitesimals, and ghosts of departed quantifiers. En collaboration avec Blaszczyk P. – Ely R. – Kanovei V. – Katz K. – Katz M – Kudrik T. – Kutateladze S. – McGaffey T. – Mormann T. – Schaps D. – Sherry D., *Matematychni Studii*, Vol. 47, Number 2, pp. 115-144 ; http://dx.doi.org/10.15330/ms.47.2.115-144, https://arxiv.org/abs/1712.00226, http://matstud.org.ua/texts/2017/47_2/115-144 et https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3733080.
- [Ba-H+ 2017b] Interpreting the infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler. En collaboration avec Blaszczyk, P. – Ely, R. – Kanovei, V. – Katz, K. – Katz, M. – Kutateladze, S. – McGaffey, T. – Reeder, P. – Schaps, D. – Sherry, D. – Shnider, S., *Journal for General Philosophy of Science*, 48, no. 2, pp. 195–238; http://dx.doi.org/10.1007/s10838-016-9334-z, https://arxiv.org/abs/1605.00455 et http://ams.org/mathscinet-getitem?mr=3663035.

- [Ba-H+ 2018] History of mathematics without philosophy of mathematics is blind : Fraser's surreal numbers. En collaboration avec Blaszczyk – Ely R. – Kanovei V. – Katz K. - Katz M. – Kudrik T. – Kutateladze S. – McGaffey T. – Mormann T. – Schaps D. – Sherry D., *The Journal of General Philosophy of Science* (JGPS). A paraître.

8.5. Publications de Bair – Mawhin

- [Ba-M 2019] Le mathématicien Jean-Nicolas Noël (1783 – 1867) : un didacticien infinicole du 19e siècle. *Revue des Questions Scientifiques, Tome 190, N° 1-2, pp. 27-59.*

8.6. Publication de Bair – Mawhin – Pétry

- [Ba-M-P 2019] Eclairage non standard pour l'enseignement de l'analyse. A paraître dans *Festschrift en l'honneur de Philippe Nabonnand*, en voie de publication.

8.7. Publication de Bair – Pétry

- [B-P 2020] Les distributions : une théorie des « fonctions généralisées ». *Tangente* 192, pp. 24-26.

8.8. Publication de Brasseur

- [Br 1873] *Exposition nouvelle des principes du calcul différentiel et du calcul intégral*. Mémoires de la Société royale des sciences de Liège. Série 2 ; volume 3 ; pp. 113-192.

8.9. Publications de Henry

- [H 2003a] Les hyperréels en analyse. *Mathématique et Pédagogie*, 141, pp. 47-58.
- [H 2003b] La notion d'infiniment petit en économie : historique et implications didactiques, *Actes du Colloque EMF*, Tozeur.
- [H 2004a] *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes*. Thèse présentée à l'Université Paul Sabatier (Toulouse III) en vue de l'obtention du doctorat en didactique des mathématiques, Toulouse, 320 pages.
- [H 2004b] Nouvelle approche pour introduire la notion de tangente à une courbe. *Mathématique et Pédagogie*, n° 145, pp. 65-79.
- [H 2005a] Moins que rien : les infiniment petits. *Tangente, L'aventure mathématique*, n° 100, pp. 22-23.

- [H 2005b] Une proposition d'ingénierie pour définir la différentielle. CD-Rom du Colloque international du Crem, Mons.
- [H 2006] Décalage interdisciplinaire dans l'enseignement universitaire en économie, *Actes du Colloque EMF*, Sherbrooke.
- [H 2007] Il était une fois … les infiniment petits, *Math-Jeunes*, n°116, pp. 22-24.
- [H 2009] Des variations discrètes aux variations infiniment petites : le point de vue des économistes, *Actes du Colloque EMF*, Dakar.
- [H 2010a] Tangentes aux coniques: Méthodes passées, présentes et à venir. *Mathématique et Pédagogie*, n°152, pp. 41-75.
- [H 2010b] An Introduction to Differentials with Hyperreal Numbers and Infinite Microscopes. *Problems Ressources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies* (PRIMUS), 20 (1), pp. 39-49.
- [H 2013] Quand l'ellipse devient parabole – l'esthétique de l'illusion. Dans *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique*. Editions Pole, Paris, *Tangente* HS n° 51, pp. 40-43.
- [H 2018] Des variations discrètes aux variations infiniment petites : le point de vue des économistes. *Losanges*, 40, pp. 40-48.

8.10. Publications de Mawhin

- [M 1986] Nonstandard analysis and generalized Riemann integrals. *Casop. Pest. Mat.*, 11, pp. 34-67.
- [M 1987] La méthode infinitésimale en analyse. Dans *Mathématiques à venir*. Supplément au *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Tome 115. Gauthier-Villars, Paris, pp. 63-65.
- [M 1992] Initiation à la compacité : une variante. Dans « *Enseignement de l'analyse aux débutants* », C. Hauchart et N. Rouche éd., Academia-Ersame, Louvain-la-Neuve, pp. 109-125.
- [M 1996a] Intégration et analyse non standard. Dans « *Méthodes et analyse non standard* », *Cahier du Centre de Logique*, 9, Academia-Bruylant, Louvain-la-Neuve, pp. 9-23.
- [M 1996b] Introduction et « book reviews » du fascicule *Non Standard Analysis*. Supplément du *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, p. i-iii, 141-143.
- [M 1997] *Analyse : fondements, techniques, évolution*. De Boeck & Larcier. Bruxelles et Paris, 808 pages.

8.11. Livre de Mawhin – Rouche

- Mawhin J. – Rouche N. (1973). *Equations différentielles ordinaires*, 2 tomes, Masson, Paris.

8.12. Publications de Nicolay

- [Ni 2015] *Les nombres – construction basée sur la théorie des ensembles en vue d'ériger les fondements de l'analyse*. Hermann, Paris, 292 pages.
- [Ni 2016] Une construction des nombres hyperréels. *Quadrature : Magazine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 102, pp. 20-23.

8.13. Publications de Noël

- [No 1843-44] *De l'Analogie en Géométrie*. Mémoires de la Société royale des sciences de Liège. Série 1 ; volume 1 ; pp. 1-48.
- [No 1845-46] *Résumé des Méthodes élémentaires, en Géométrie*. Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Série 1 ; volume 2 ; pp.493-520.
- [No 1855a] *Théorie infinitésimale appliquée*. Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Série 1 ; volume 10 ; pp. 25-136.
- [No 1855b] *Simplification des éléments de géométrie*. Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Série 1 ; volume 10 ; pp. 461-532.
- [No 1861a] *Méthode infinitésimale en Géométrie.* Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Série 1 ; volume 16 ; pp. 73-144.
- [No 1861b] *Notes sur l'Analyse infinitésimale*. Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Série 1 ; volume 16 ; pp. 411-426.
- [No 1866] *Mémoire relatif à différents sujets de Mathématiques élémentaires*. Mémoires de la Société royale des sciences de Liège. Série 2, Tome 1, pp. 51-88.

8.14. Publications de Pétry

- [P 1995] Introduction à l'Analyse non standard ou le redécouverte des infiniment petits. Dans *Les bases scientifiques de l'Etude du Milieu*, par J. Aghion et J. Depireux coord. - editors. CSIPWIC Liège 1995, pp. 82-91.

- [P 1996a] Balade en Analyse non standard sur les traces de A. Robinson. Dans le Supplément « Non Standard Analysis » du *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, pp. 1-28.
- [P 1996b] *Méthode et Analyse non standard*. Cahiers du Centre de Logique, n° 9, Academia – Bruylant, Louvain-la-Neuve, 168 pages.
- [P 1998] Un enseignement concret et intuitif de l'Analyse grâce aux méthodes non standard ? Dans le supplément « Logique dans l'enseignement des mathématiques » du volume 5 du *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, pp. 45-62.
- [P 2001] A propos des tangentes à une courbe, une présentation non standard. Dans le Supplément « A Tribute to Maurice Boffa » du *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, pp. 155-166.
- [P 2006a] *Utiliser la récurrence*. Document de travail. Unité d'Etude et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Institut Supérieur Industriel Liégeois, 16 pages.
- [P 2006b] *Notions internes, saturation. Une présentation simplifiée*. Document de travail. Unité d'Etude et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Institut Supérieur Industriel Liégeois, 13 pages.
- [P 2011-2012] *Une introduction à l'analyse infinitésimale*. 2 volumes. Céfal éditions.
- [P 2015-2016] *Analyse Infinitésimale*. 2 volumes. Céfal éditions.

8.15. Publication de Pétry et co-auteur n'appartenant pas à *IL*

- [P+ 1993] Des naturels non standard à l'Analyse non standard, une introduction. En collaboration avec M. Boffa, *Mathématique et Pédagogie*, 94, pp. 39-54.

8.16. Publications de Rouche et co-auteurs n'appartenant pas à *IL*

- [R+ 1987] *Apprivoiser l'infini – un enseignement des débuts de l'analyse*. En collaboration avec C. Hauchart, Gem – Ciaco éditeur, Louvain-la-Neuve, 371 pages.
- [R+ 1992] *L'enseignement de l'analyse aux débutants*. En collaboration avec C. Hauchart, Academia – éditions Erasme, Louvain-la-Neuve, 127 pages.
- [R+ 1996] Y a-t-il vraiment autant de nombres pairs que de nombres naturels. En collaboration avec T. Gilbert, Dans « Méthodes et analyse non standard » sous la direction de A. Pétry, *Cahier du Centre de Logique*, 9, Academia-Bruylant, Louvain-la-Neuve, pp. 99-139.

- [R+ 2001] *La notion d'infini – l'infini mathématique entre mystère et raison : intuitions, paradoxes, rigueur*. En collaboration avec T. Gilbert, Editions Ellipses, Paris, 348 pages.

8.17. Correspondances de Sluse

- [S 1863-1864] Lettres inédites de René Sluse, rassemblées par S. Bormans *; Bulletin de l'Institut archéologique liégeois*, Tome VI, pp. 81-111 ; accessible à l'adresse électronique : https://babel.hathitnut.org/cgi/.
- [S 1885] *Correspondance de René-François de Sluse*, publiée pour la première fois et précédée d'une introduction par M. C. Le Paige. Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Science Matematice e Fisiche*, tomo XVII, Imprimerie des sciences mathématiques et physiques, Rome, 252 pages.

9. Bibliographie non infinico-liégeoise

Cette bibliographie a la particularité de ne mentionner que des travaux exploités au sein de ce texte et rédigés par des auteurs qui n'appartiennent pas à *IL*. Elle est présentée sous une forme assez courante dans la littérature.

- Bernes A.C. – Lefèbvre P. (1986). La correspondance de René-François de Sluse : essai de répertoire chronologique. *Revue d'histoire des sciences*, 39 (1), pp. 35-69 et 39(2), pp. 155-175.
- Bockstaele P. (1986). La théorie des tangentes aux courbes algébriques dans l'oeuvre de René-François de Sluse. *Bulletin de la Société royale des sciences de Liège*. Tome LV, fascicule 1, pp. 135-144.
- Butzer P.L. – Mawhin J. (2002). Henri-Georges Garnir, *Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, Bruxelles: ARB, pp. 41-53.
- Butzer P.L. – Schaffrath A. (1986). Mathematics in Belgium from the time of Charlemagne to the seventeenth century. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 55 (1), pp. 99-134.
- Crabbé M. – Michaux C. – Point P. (2001). A Tribute to Maurice Boffa, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin*, Vol. 5.

- Dugac P. (2003). *Histoire de l'analyse – autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Vuibert, Paris, 419 pages.
- Einstein A. (2009). *Comment je vois le monde*. Flammarion, Paris, 243 pages.
- Fourneau (2005). Applications de l'analyse non standard aux statistiques. Dans *Contributions à la didactique de la statistique* par J. Bair et V. Henry, Les Editions de l'Université de Liège, pp. 137-145.
- Garnir H.G. (1963). *Fonctions de variables réelles I*, Gauthier-Villars à Paris et Librairie Universitaire à Louvain, 518 pages.
- Gilbert T. (1992). Qu'est-ce que l'analyse non standard ? *Mathématique et Pédagogie*, 89, pp. 51-67.
- Godeaux L. (1943). *Esquisse d'une histoire des sciences mathématiques en Belgique*. Collection nationale, Office de publicité, Bruxelles, 60 pages.
- Hauchecorne B. – Surreau D. (1996). *Des mathématiciens de A à Z*. Editions Ellipses, Paris, 382 pages.
- Jongmans F. (1960). *Exercices d'analyse mathématique*, 2e édition, Sciences et Lettres, Liège, 161 pages.
- Jongmans F. (1964). *Convergence et filtres*. Notes écrites du cours de Topologie générale, matière approfondie ; chapitre VIII, Université de Liège, 33 pages.
- Jongmans F. (1967). *Cours de mathématiques générales*, 2 tomes. Université de Liège.
- Jongmans F. (1996). *Eugène Catalan : Géomètre sans patrie. Républicain sans république*, Société Mathématique des Professeurs de Mathématique, Mons, 223 pages.
- Jongmans F. (2008). In vino veritas, in dolio calamitas. *Applied Probability Trust*, vol. 33, issue 1, pp. 1-7.
- Jongmans F. (2010). Le jaugeage des tonneaux : un jardin secret en mathématiques pures et appliquées. *Quadrature*, 75, pp. 23-34.
- Jongmans F. – Halleux R. – Levèbvre P. – Bernes A.C. (1985). *Les Sluse et leur temps : une famille, une ville, un savant au XVIIe siècle*. Edition du Crédit Communal, Bruxelles, 269 pages.
- Keisler H.J. (2012). *Elementary Calculus : An Infinitesimal Approach*. http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html.
- Le Paige C. (1890). *Notes sur l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège*. Imprimerie de Léon de Thier, Liège, 111 pages.

- Lobry C. (1989). *et pourtant, ils ne remplissent pas N !* Aleas Editeur, Lyon, 314 pages.
- Lutz R. – Makhlouf A. – Meyer E. (1996). *Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : Les réels dévoilés*. Publication de l'A.P.M.E.P., n° 103, Paris, 201 pages.
- Massart J. (1970). *Cours d'analyse*, 4 tomes. Dunod, Paris.
- Nelson E. (1977). Internal Set Theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83, pp. 1165-1198.
- Noël G. – Trompler S. (2003). *Vers les infiniment petits*. Commission Pédagogique de la SBPMef, Mons, 128 pages.
- Piñeiro G.E. (2018). *Cantor, la formalisation du concept de l'infini*, Génies des Mathématiques, 175 pages.
- Robinson A. (1961). Non-standard Analysis, *Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A 64, pp. 432-440.
- Robinson A. (1974). *Non-standard Analysis*, North-Holland Pub. Comp., Masterdam-London.
- Seneta E. (2015). In Memoriam François Jongmans (1921-2014) Mathematical Historian, *Math. Scientist*, 40, pp. 67-79.
- Stewart I. (1989). *Les mathématiques*. Belin – Pour la Science, Paris, 266 pages.
- O'Connor J.J. – Robertson E.F., René-François de Sluse, *Mac Tutor History of Mathematics Archives*, University of St-Andrews, http://www.history.mcs.st-andrews;ac.uk/biographies/Sluze.htm.
- Rosenfeld L. (1928). René-François de Sluse et le problème des Tangentes. *ISI*, vol. 10, n° 2, pp. 416-434.
- Rosenfeld L. (1961). Marginalia to Newton's Correspondence, *ISIS*, vol. 52, n° 1, pp. 117-120.
- Taton R. (1986). La vie mathématique à la mort de Sluse (1685). *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 55 (1), pp. 191-203.
- SRSL (1985). Actes du Colloque international « René-François de Sluse (1622-1685) », Amay-Liège-Visé, 20-22 mars 1985. *Bulletin de la Société royale des sciences de Liège*. Tome 55, fasc. 1, 269 pages.