

Kapitel 12

Auswertung von Beobachtungsdaten

There is no more common error than to assume that, because prolonged and accurate mathematical calculations have been made, the application of the result to some fact of nature is absolutely certain.

Alfred North Whitehead

a. Einfluß verschiedener Parameter und qualitative Erwartungen

i. λ_0

Der Einfluß der Kosmologie auf die Funktion $d\tau$ setzt sich zusammen aus dem Einfluß durch die Größe $\frac{cdt}{dz}$

$$\frac{cdt}{dz} \sim \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \quad (12.1)$$

und durch den Ausdruck

$$D_d^2 \left(\frac{D_s}{D_{ds}} \right)^\mu \exp \left(- \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^\nu \quad (12.2)$$

wobei $\mu < 0$ und $\nu > 0$ sind. (Dies ergibt sich aus Gl. 9.10.) Die Entfernungen ergeben sich aus der Differentialgleichung

$$D'' + \left(\frac{2}{v} + \frac{g'(v)}{g(v)} \right) D' + \frac{3\Omega_0 \eta}{2} \frac{v}{g^2(v)} D = 0 \quad (12.3)$$

wobei $g(v) = \sqrt{\Omega_0 v^3 + (\Omega_0 + \lambda_0 - 1)v^2 - \lambda_0}$, $v = 1 + z$. Es ist aus Gl. 12.1 klar, daß, was die Größe $\frac{cdt}{dz}$ betrifft, im betrachteten Bereich des Parameterraumes, λ_0 einen größeren Einfluß als Ω_0 hat. Für die Entfernungsparameter ist dies nicht unmittelbar zu sehen, aber viele Untersuchungen zeigen [TOG 84, FFKT 92, Breimer & Sanders 92, Krauss & White 92a], daß der Einfluß von λ_0 größer ist als die von Ω_0 , sowohl auf die integrierte optische Tiefe (Fläche unter der Kurve) als auch auf die Lage des Maximums (Form der Kurve). Es ist also erfreulich, daß der Parameter λ_0 , sonst am schwierigsten zu messen, bei der Linsenstatistik die wichtigste Größe ist. Es scheint sogar jetzt schon mehr oder weniger allgemein bekannt zu sein, daß Linsenstatistik bei weitem die beste Obergrenze für λ_0 liefert [PCT 92].

ii. Ω_0

Der Einfluß von Ω_0 ist kleiner als der von λ_0 , aber es ist klar, daß $d\tau$ auch von Ω_0 abhängt.

iii. η

Die Größe η taucht nur in dem Entfernungsparameter auf, also nicht in der Größe $\frac{cdt}{dz}$. Man erwartet also von vornherein, daß η weniger wichtig als die anderen kosmologischen Parameter ist. Zusätzlich ist es auch der Fall, daß sich der η -Einfluß weghebt in dem Ausdruck für den Entfernungsparameter, so daß auch hier der Einfluß von η nicht wichtig zu sein scheint. (Siehe, z.B., [FFKT 92].) Dies ist ein Vorteil dieser Methode zur Bestimmung des kosmologischen Modells; bei der kosmologischen Korrekturfunktion beim *time delay* spielt ja η meist eine größere Rolle als die anderen Parameter.

iv. m_{grenz}

Interessiert man sich für die Kosmologie, dann sollte diese Untersuchung von m_{grenz} unabhängig sein. Man könnte befürchten, daß diese Tatsache die Grundlage der Arbeit zerstört, aber der Einfluß *der genauen Wahl* von m_{grenz} ist nicht sehr groß. Wohl aber macht es einen Unterschied, ob man $m_{\text{grenz}} = \infty$ setzt oder nicht. Dies ist leicht zu verstehen, denn die Funktion $m(z)$ ist sehr steil bei kleinen z -Werten,¹ was zur Folge hat, daß es relativ gleichgültig ist, welchen (realistischen) Wert für m_{grenz} (Verschiebung des Abschneidepunktes entlang der steilen Kurve) man nimmt; selbst relativ große Änderungen in der Helligkeit spielen sich in einem relativ kleinen z -Intervall ab, so daß die Unsicherheit in m_{grenz} keine zu große Rolle spielt.² Da aber schon bei relativ kleinem z eine Helligkeit erreicht wird, die viel zu schwach ist, um eine Rotverschiebungsmessung zu erlauben, ist das Abschneiden der Funktion $d\tau$ sehr wichtig. Es ist erfreulich, daß dieses Abschneiden meistens in einem Bereich passiert, daß nicht empfindlich von den genauen Werten von m_{grenz} abhängt. Zusätzlich hat man den unerwarteten *Vorteil*, daß man Entwicklungseffekte eher vernachlässigen kann, weil man sowieso die Wirkung von Linsengalaxien bei verhältnismäßig kleinem z betrachtet.

b. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Vorgehensweise

i. λ_0 - Ω_0

Ich habe λ_0 und Ω_0 als die wichtigsten unabhängigen Variablen gewählt, und die meisten Rechnungen in Abhängigkeit von λ_0 und Ω_0 durchgeführt. Um den gewünschten Bereich in der λ_0 - Ω_0 -Ebene abzudecken, habe ich die

¹Zwei Effekte spielen hier eine Rolle: die Abnahme der scheinbaren Helligkeit mit zunehmenden z (bei gleicher absoluter Helligkeit) und die Abnahme der absoluten Helligkeit (die dadurch zustandekommt, weil die benötigte Linsenmasse *bei festgehaltenem Bildabstand* mit z zunächst abnimmt).

²Die Funktion $d\tau$ ist in diesem z -Bereich nicht so steil, daß kleine Änderungen in dem z -Wert für die obere Grenze der Integration zu einer zu großen Ungenauigkeit beitragen könnten.

folgenden Grenzen gewählt:

$$\begin{array}{ccc} -10 < \lambda_0 < 10 \\ 0 < \Omega_0 < 10 \end{array}$$

Es ist klar, daß nicht das ganze Gebiet erlaubt ist. Man stellt fest, daß erlaubte Weltmodelle sich in einem Bereich befinden, der begrenzt ist durch folgende Bedingungen

- (1) Ω_0 muß > 0 sein
- (2) ein minimales Weltalter
- (3) eine maximale Rotverschiebung³
- (4) ein minimales q_0

(Die oben hergeleiteten Untergrenzen für Ω_0 sind so klein, daß man für praktische Zwecke $\Omega_0 > 0$ als Bedingung hat.) Eine Abschätzung über ein minimales q_0 , zusammen mit Z_{\max} , wurde benutzt, um eine Obergrenze sowohl für Ω_0 als auch für λ_0 festzulegen. Die Untergrenze für Ω_0 ist selbstverständlich, und die Untergrenze für λ_0 ergibt sich aus extremen Annahmen über das Weltalter.

Die Berechnung der relativen Wahrscheinlichkeit verschiedener Weltmodelle mit λ_0 und Ω_0 als Variablen habe ich zunächst für „kanonische“ Werte der anderen Parameter durchgeführt.⁴ (Diese Werte sind unten erläutert.) Um die Abhängigkeit von den anderen Parametern zu untersuchen, die laut Erwartung kleiner als die Abhängigkeit von λ_0 und Ω_0 sein soll, habe ich die Berechnung für verschiedene Werte der anderen Parameter durchgeführt, wobei jeweils ein Parameter (η oder m_{grenz}) beim Festhalten des anderen verändert wurde.

ii. η

Die Bedingung für η ist $0 < \eta < 1$; als „kanonischen Wert“ habe ich 0,5 benutzt. Untersucht wurden folgende Werte

0,0 0,3 0,5 0,7 1,0

iii. m_{grenz}

Streng genommen ist m_{grenz} kein „freier Parameter“, sondern sollte für jedes System einzeln angegeben werden. Es hat sich aber gezeigt, daß das Ergebnis nicht stark von dem (realistischen) Wert von m_{grenz} abhängt, so daß es keine zu schlechte Näherung sein dürfte, einen gemeinsamen Wert für alle Systeme anzunehmen; als „kanonischen Wert“ habe ich $m_r = 23,5$ benutzt. Untersucht wurden folgende Werte

23,5 24,5 ∞

³ $Z_{\max} \leq z_{\max}$ wobei Z_{\max} der größte beobachtete z -Wert ist und z_{\max} der größtmögliche z -Wert in dem jeweiligen Weltmodell ist. Es ist möglich, z_{\max} analytisch zu bestimmen [Feige 92].

⁴ Eine solche Rechnung, mit einer Auflösung von 100×100 , also für 10.000 Weltmodelle mit Schritten von 0,2 in λ_0 bzw. 0,1 in Ω_0 , braucht etwa vier Stunden CPU-Zeit auf einem DEC μ VAX Rechner.

iv. $k = 0$

Für den Spezialfall $k = 0$ ($\lambda_0 = 1 - \Omega_0$) wurden 10.000 Modelle in der η - Ω_0 -Ebene berechnet, wobei der bereits erwähnte Wertebereich für η benutzt wurde. 10.000 Modelle in der m_{grenz} - Ω_0 -Ebene wurden ebenfalls untersucht; hierbei wurden Werte für m_{grenz} zwischen 20 und 26 betrachtet.

v. $\lambda_0 = 0$

Für den Spezialfall $\lambda_0 = 0$ wurden 10.000 Modelle in der η - Ω_0 -Ebene berechnet, wobei die bereits erwähnten Wertebereiche für η benutzt wurden. 10.000 Modelle in der m_{grenz} - Ω_0 -Ebene wurden ebenfalls untersucht; hierbei wurden Werte für m_{grenz} zwischen 20 und 26 betrachtet.

c. Untersuchungen durch numerische Rechnungen: Ergebnisse

i. Allgemeines

Wegen der Definition der relativen Wahrscheinlichkeit ist es klar, daß man nur diskrete Werte für diese Größe hat, und daß die Zahl der möglichen Werte mit der Zahl der Bins (= Zahl der Systeme) rasch ansteigt. Obwohl natürlich nicht alle Werte vorkommen müssen, ist es ersichtlich, daß man wahrscheinlich durch die größere Anzahl möglicher Werte mehr „Struktur“ in der Darstellung einer Berechnung erhält, wenn man mehr geeignete Systeme zur Verfügung hätte.

Auf S. 93 werden die Ergebnisse graphisch dargestellt.

ii. λ_0 - Ω_0 **Allgemeines**

Die „wichtigsten“ Rechnungen sind die für die λ_0 - Ω_0 -Ebene; wie bereits erklärt, sollen diese Parameter den größten Einfluß haben.⁵ Daß dies der Fall ist, ist an Hand der anderen Rechnungen gezeigt worden.

Man erkennt zunächst Streifen gleicher Wahrscheinlichkeit, die ungefähr „parallel“ zu den Kurven gleichen Weltalters (und zu der Grenze zum unendlichen Weltalter bzw. den M_2 -Modellen—der A_2 Kurve bei [Stabell & Refsdal 66].) Die Tatsache, daß diese eher senkrecht als waagrecht sind, spiegelt die Tatsache wider, daß die Abhängigkeit von λ_0 größer ist als die von Ω_0 . Im erlaubten Bereich erkennt man, daß Modelle, die sich in der Nähe dieser Kurve befinden, unwahrscheinlicher sind. Ungefähr senkrecht zu diesen Streifen befinden sich Geraden von konstantem Krümmungsradius. Es scheint also der Fall zu sein, daß diese Methode nicht sehr empfindlich auf den Krümmungsradius reagiert. Auf der anderen Seite, bei bekanntem Ω_0 bzw. Krümmungsradius scheint es möglich zu sein, etwas über den Wert von λ_0 auszusagen. Eine andere Betrachtungsweise wäre folgende: der Parameter, der in erster Linie gemessen wird, ist also q_0 .

⁵Sie sind auch die „interessantesten“ Parameter; ein Vorteil dieser Methode ist, daß die interessantesten Parameter diejenigen sind, die den größten Einfluß auf die Berechnungen haben.

Entscheidend ist also der Abstand von der A_2 -Kurve, nicht der Wert von λ_0 an sich. Sind bei flachen ($k = 0$) Modellen große λ_0 -Werte relativ unwahrscheinlich, gilt dies nicht für $k = +1$. Dies kann man wie folgt verstehen: Die allgemeine Wirkung der kosmologischen Konstante, das Maximum von $d\tau$ zu höheren Rotverschiebungen zu verschieben, wird z.T. dadurch ausgeglichen, daß das Volumenelement $\frac{1}{1+z} \frac{dV}{dz}$ bei diesen Modellen bei großen Rotverschiebungen sehr klein sein kann—es kann sogar verschwinden.

Für den Fall, daß die (berechnete) scheinbare Helligkeit irgend einer Linsengalaxie schwächer wurde als m_{grenz} , so wurde die relative Wahrscheinlichkeit für das entsprechende Weltmodell = 0 gesetzt.⁶ So ist zu erklären, daß es ein Gebiet in der Ω_0 - λ_0 -Ebene der Wahrscheinlichkeit 0 gibt, jenseits dessen man wieder eine relative Wahrscheinlichkeit > 0 hat; die Linsengalaxie, die unsichtbar wurde, wird wieder sichtbar wenn χ in der Nähe von π kommt.⁷ Es gibt eine andere mögliche Erklärung für das Auftreten der Wahrscheinlichkeit 0 außerhalb des M_2 -Bereichs, nämlich, daß die Wahrscheinlichkeit auch = 0 gesetzt wurde, falls irgendeine Entfernung (D_l , D_s oder D_{ls}) zu klein ($< 10^{-6} \times \frac{c}{H_0}$) war, damit weder bei der Berechnung von $d\tau$ noch bei der Berechnung von m Divergenzen auftreten. (Dies ist zwar numerisch notwendig bedeutet aber keine Ungenauigkeit, denn für den Grenzfall, daß ein $D_{ij} = 0$ wird, ist die optische Tiefe $d\tau$ ebenfalls = 0, was eine analytische Betrachtung zeigt—es ist sicher gerechtfertigt, einem Weltmodell die Wahrscheinlichkeit 0 zuzuordnen, wenn $d\tau = 0$ ist bei der beobachteten Rotverschiebung z_l .)

η

Vergleicht man die Ergebnisse für verschiedene η -Werte, so sieht man einen systematischen Effekt: es gibt eine „Drehung“ der Streifen. Dies kommt zum Teil von dem Einfluß von η auf die Entfernungsparameter, aber hauptsächlich von dem Einfluß von η auf die Helligkeitsentfernung für die Berechnung des z_d -Wertes, oberhalb dessen $d\tau = 0$ gesetzt werden muß. Dieser Effekt ist aber aus zwei Gründen nicht wichtig:

⁶Es ist natürlich genau genommen zu streng, ein Weltmodell wegen der Tatsache, daß eine Linsengalaxie eine schwächere Helligkeit als m_{grenz} hätte, zu verwerfen—vor allem weil die Berechnung der scheinbaren Helligkeit nicht ohne Fehler ist. Die Berechnung der relativen Wahrscheinlichkeit (Kapitel 10) betrachtet aber Zahlen im Intervall]0,1[; ist m jedoch schwächer als m_{grenz} , dann würde dies eine Zahl > 1 bedeuten. Bei der kleinen Zahl der betrachteten Systeme wäre es nicht empfehlenswert, dieses System aus der Betrachtung herauszunehmen, vor allem weil meistens *mehrere* Systeme nicht betrachtet werden sollten. Die beobachteten Linsenhelligkeiten (siehe die Tabellen in Kapitel 11) sind aber mindestens eine Größenklasse heller als m_{grenz} , so daß das Problem nur bei Weltmodellen auftritt, die nahe der A_2 -Kurve liegen und/oder einen kleinen Krümmungsradius ($\sim (\lambda_0 + \Omega_0 - 1)^{-\frac{1}{2}}$) haben, die also durch eine genauere Betrachtung aus anderen Gründen ausgeschlossen werden könnten.

⁷Wenn man als zusätzliche Bedingung fordert, daß $\chi < \pi$ sein muß bis zu einer bestimmten z -Wert, dann kann man ein größeres Gebiet ausschließen als mit der Betrachtung von z_{max} . Dies habe ich aus zwei Gründen nicht getan:

- Es ist schwierig, eine genaue Abschätzung zu machen, bis zu welchem z -Wert man das Vorhandensein der Antipoden ausschließen kann.
- Das Gebiet, was man zusätzlich ausschließen kann, ist so klein, daß dies keine praktischen Vorteile bringt.

Es ist eher wünschenswert, dies nicht zu tun, denn der Formalismus funktioniert für solche Weltmodelle genau so gut, und (wenn man mehr Systeme hätte) man vielleicht so eine unabhängige Methode hätte, solche Weltmodelle auszuschließen.

- (1) Die Unterschiede kommen zustande, wenn η als gleichwertiger kosmologischer Parameter auftritt. Meine Ergebnisse stellen also eine Obergrenze des Effekts dar.
- (2) Im erlaubten Bereich ist der Effekt weniger stark ausgeprägt.

Weil es zwei mögliche Gründe dafür gibt, die relative Wahrscheinlichkeit $= 0$ zu setzen, hat die Tatsache, daß sich die Größe des Gebietes ändert, wo die Wahrscheinlichkeit für nicht M_2 -Modelle $= 0$ gesetzt wird, zwei mögliche Erklärungen:

- (1) Für ein gegebenes Weltmodell sind Objekte bei gleicher Rotverschiebung heller für größere η -Werte.
- (2) Für $\eta = 0$ kann keine Entfernung $= 0$ werden (außer für $z = 0$); je kleiner η , desto weniger ausgeprägt ist dieser Effekt.

Da das Gebiet für größere η -Werte größer ist, überwiegt der zweite Effekt.

m_{grenz}

Eine Änderung von m_{grenz} hat den erwarteten Effekt: eine Änderung zu schwächeren Helligkeiten hin führt dazu, daß man auch schwächere Galaxien noch sehen könnte. Dies führt wiederum dazu, daß Modelle, die einen höheren Wert des Medians der $d\tau$ -Kurve haben (z.B. die nahe der A_2 -Kurve) eine kleinere relative Wahrscheinlichkeit zugeordnet bekommen. (Zusätzlich sieht man, daß der Bereich außerhalb des M_2 -Bereichs der relativen Wahrscheinlichkeit 0 kleiner wird, denn wenn m_{grenz} schwächer ist, dann kommt es in weniger Weltmodellen vor, daß eine Linsengalaxie eine schwächere berechnete scheinbare Helligkeit als m_{grenz} hat. Dies zeigt auch, daß, wie oben vermutet, der Hauptgrund für die Vergrößerung dieses Gebietes mit η der zweite dort besprochene Effekt ist.) Interessant ist, daß eine Änderung in m_{grenz} von einer Größenklasse⁸ nur einen kleinen Effekt hat. Dies zeigt, daß eine einigermaßen gute Abschätzung ausreicht, um den Einfluß der spektroskopischen Grenzhelligkeit zu untersuchen. Betrachtet man jedoch den Fall $m_{\text{grenz}} = \infty$, dann wird klar, daß die Vernachlässigung dieses Effektes zu völlig falschen Ergebnissen führen kann. Allein die Tatsache, daß man nur am Rande des erlaubten Gebietes (wenn überhaupt) Modelle mit der größten Wahrscheinlichkeit hat, zeigt, daß die Vernachlässigung der Grenzhelligkeit in die Irre führt. Man sieht ziemlich deutlich, daß die so gefundene kleine Wahrscheinlichkeit für Modelle nahe der A_2 -Kurve eine Folge der falschen Annahme ist, daß man die Rotverschiebungen der Linsengalaxien bei *allen* z -Werten (bis hin zu z_s) messen könnte.

Vergleich mit Kochanek

Als Vergleich habe ich mein Verfahren auf dieselben Systeme angewendet, die in der Arbeit von Kochanek [Kochanek 92] verwendet werden, die als Ausgangspunkt dieser Diplomarbeit diente. Ich habe z.T. andere Systeme betrachtet, entweder weil es in der Zwischenzeit neue Beobachtungsdaten gibt, was die Betrachtung zusätzlicher Systeme ermöglicht, oder weil in [Kochanek 92] statt einer gemessenen *Emissionsrotverschiebung* eine

⁸Dies ist tatsächlich extremer als es zunächst vielleicht zu sein scheint, denn die Grenzhelligkeit wird für alle Systeme herabgesetzt. (In allen Berechnungen dieser Arbeit wird m_{grenz} quasi als freien Parameter betrachtet; in der Praxis jedoch sollte man m_{grenz} für jedes System im einzelnen abschätzen.)

Abschätzung aus *Absorptionslinien* benutzt wurde. (Wegen der Berücksichtigung des Einflusses der Linsenhelligkeit durch m_{grenz} kann ich natürlich nur Linsen betrachten, deren Rotverschiebungen in Emission gemessen worden sind. Ein anderer Grund, solche Systeme aus der Betrachtung herauszulassen, ist, daß das Absorptionssystem bei einer anderen Rotverschiebung als der der Linse liegen darf.) Ich erwarte also von vornherein andere Ergebnisse; diese Betrachtung stellt eher eine Kontrolle meines Verfahrens dar. (Um seiner Vorgehensweise zu entsprechen ist $m_{r m_{\text{grenz}}} = \infty$ und $\eta = 1$.) Das Verhältnis der relativen Wahrscheinlichkeiten des Einstein-de Sitter- und des de Sitter-Modells $(\Omega_0; \lambda_0) = (1, 0; 0, 0)$ bzw. $(0, 0; 1, 0)$ beträgt nach meinem Verfahren 6:1; dies ist zu vergleichen mit dem in [Kochanek 92] gefundenen Ergebnis von 5–10.

iii. $k = 0$ und $\lambda_0 = 0$

In diesen Plots kann man natürlich entlang der Geraden parallel zur Ω_0 -Achse, die dem kanonischen Wert von η bzw. m_{grenz} entspricht, dieselben Werte der relativen Wahrscheinlichkeit feststellen, als im Plot der kanonischen Werte entlang der Geraden für $k = 0$ bzw. $\lambda = 0$.

η

Man sieht, daß die Abhängigkeit von η relativ schwach ist, außer bei sehr großen Ω_0 -Werten. Für große Ω_0 -Werte spielt die Frage, wieviel Materie sich im Lichtkegel befindet, doch eine merkliche Rolle. Dies ist auch zu erwarten. Für $k = 0$ jedoch scheiden solche großen Ω_0 -Werte sowieso wegen des kleinen Weltalters aus. Für $\lambda_0 = 0$ gilt dies auch, aber die Einschränkung ist nicht ganz so stark.

m_{grenz}

Die Abhängigkeit von m_{grenz} ist beruhigend schwach. Für (unrealistisch) helle m_{grenz} -Werte (in Abhängigkeit von Ω_0) findet man, daß die relative Wahrscheinlichkeit auf 0 gesetzt wird für manche Weltmodelle (was bedeutet, daß die scheinbare Helligkeit mindestens einer Linsengalaxie schwächer ist als m_{grenz}). Zu großen Helligkeiten hin sieht man, daß der genaue Wert von m_{grenz} unwichtig ist.

Zusammenfassung

- Man kann den Einfluß der verschiedenen Parameter auf die Ergebnisse abschätzen und qualitative Erwartungen formulieren.
- Es scheint günstig zu sein, die $\lambda_0 - \Omega_0$ -Ebene für die meisten Rechnungen zu benutzen, wobei man „kanonische Werte“ für die anderen Parameter benutzt. Der Einfluß dieser Parameter kann untersucht werden, indem man entweder sie einzeln variiert oder bei Unterdrückung eines Freiheitsgrades (z.B. durch die Bedingungen $\lambda_0 = 0$ oder $k = 0$) die Abhängigkeit über einen weiten Bereich untersucht.
- Man stellt fest, daß die Methode eher zwischen verschiedenen Modellen mit dem gleichen Krümmungsradius unterscheidet bzw. in erster Linie ein Maß für q_0 ist. Der Einfluß von η (im erlaubten Bereich) ist klein, der durch die Berücksichtigung von m_{grenz} erheblich gegenüber

dem Fall, daß man $m_{\text{grenz}} = \infty$ setzt—für realistische m_{grenz} -Werte jedoch spielt der genaue Wert keine große Rolle.

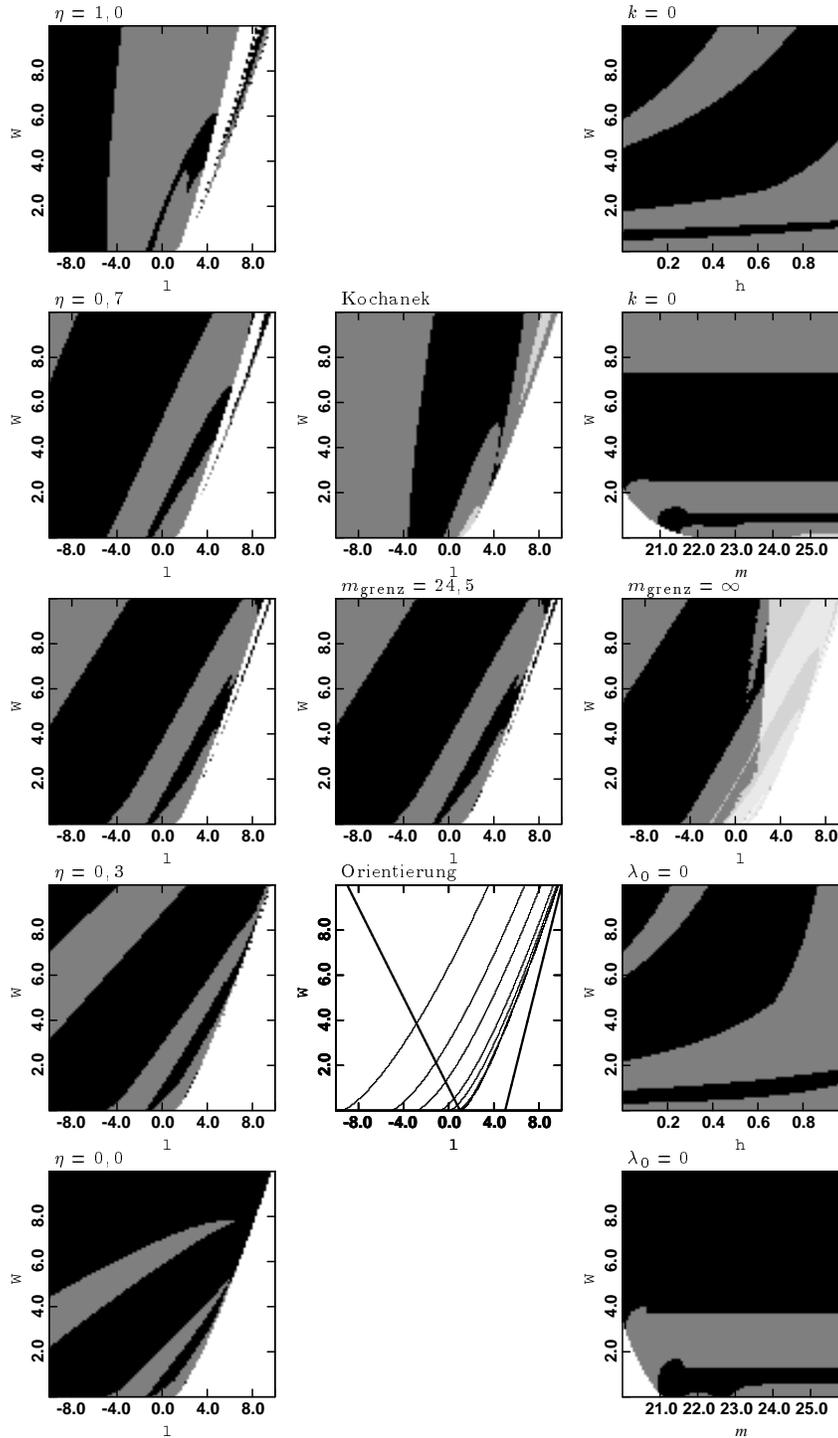


Abbildung 12-1. Graphische Darstellung der Ergebnisse

Die linke Spalte zeigt verschiedene η -Werte; die mittlere Reihe verschiedene m_{grenz} -Werte. Zum Vergleich sind in der mittleren Spalte die Ergebnisse für die Eingabewerte von [Kochanek 92] (oben) und ein Bild zur Orientierung (unten). (All dies in der λ_0 - Ω_0 -Ebene.) Oben rechts sind Bilder für den Fall $k=0$: Abhängigkeit von Ω_0 und η bzw. m_{grenz} . Unten rechts das entsprechende für $\lambda_0=0$. Schwarz entspricht einer relativen Wahrscheinlichkeit von 1, weiß einer von 0; die Graustufen stellen lineare Zwischenwerte dar. (Nicht angegebene Parameter besitzen ihre „kanonischen“ Werte.)

Kapitel 13

Vergleich mit anderen Arbeiten

Obwohl es relativ viele Arbeiten über die Statistik von Gravitationslinsensystemen im allgemeinen gibt, z.B. [TOG 84, Krauss & White 92a, Jaroszyński 92], ist die Betrachtung der Verteilung der Rotverschiebung der Linsengalaxien bei Gravitationslinsensystemen mit mehrfach abgebildeten Quellen in Bezug auf Kosmologie ein relativ neues Gebiet; die Hauptarbeiten sind [FFKT 92] und [Kochanek 92]. In der Einleitung wurden folgende Forderungen an eine Arbeit auf diesem Gebiet gestellt:

alle Modelle Es sollten alle Weltmodelle betrachtet werden, die nicht aus anderen Gründen ausgeschlossen werden.

η -Parameter Verschiedene η -Werte sollten betrachtet werden.

Verteilung Man sollte bei der Analyse der Beobachtungsdaten nicht nur die Gesamtzahl der Systeme, sondern auch ihre z_l -Verteilung betrachten, da man so zusätzliche Aussagen machen kann, obwohl die Zahl der Systeme sehr klein sein mag. (Siehe [Kochanek 92].)

Auswahleffekte Wichtig für den Vergleich mit Beobachtung ist, daß man „korrigierte“ Verteilungen berechnet, die alle Auswahleffekte und Beobachtungsungenauigkeiten berücksichtigen.

Entwicklungseffekte Jede realistische Betrachtung muß zumindest den Einfluß der zeitlichen Entwicklung der Linsen abschätzen.

Räumliche Verteilung Bei der Betrachtung von Galaxien als Linsen würde man den Umfang und Anwendbarkeit der Untersuchung erheblich einschränken, wenn man nur isolierte Galaxien betrachtet.

a. Alle Modelle

[FFKT 92] betrachten vier Modelle¹:

Case A $\Omega_0 = 1, \lambda_0 = 0$ ($k = 0$; Einstein-de Sitter-Modell)

¹ $k = \text{sign}(\Omega_0 + \lambda_0 - 1)$

Case B $\Omega_0 = 0, 1, \lambda_0 = 0$ ($k = -1$)

Case C $\Omega_0 = 0, 1, \lambda_0 = 0, 9$ ($k = 0$)

Case D $\Omega_0 = 0, \lambda_0 = 1$ ($k = 0$; de Sitter-Modell)

Kochanek betrachtet folgende Modelle:

STD 01 $\Omega_0 = 0, 1, \lambda_0 = 0$ ($k = -1$)

STD 10 $\Omega_0 = 1, \lambda_0 = 0$ ($k = 0$; Einstein-de Sitter-Modell)

LBD 10 $\Omega_0 = 0, \lambda_0 = 1$ ($k = 0$; de Sitter-Modell)

die identisch sind mit „Case B“, „Case A“ und „Case D“ bei [FFKT 92].

Wie in Kapitel 3 erläutert, gibt es einfachere Entfernungformeln für verschiedene Spezialfälle. Da in diesen Arbeiten ausschließlich solche Spezialfälle betrachtet werden, liegt die Vermutung nahe, daß dies aus Gründen der Leichtigkeit der Berechnungen geschieht. Stellt man den Anspruch, vollständig und systematisch zu sein [FFKT 92], dann sollte man wenigstens zeigen, daß die betrachteten Fälle die Schar möglicher Modelle einigermaßen abdecken. („Case D“ ist sicher unrealistisch, obwohl es einen Grenzfall darstellen könnte.)

Daß sowohl [FFKT 92] als auch Kochanek jeweils 2 Modelle mit $k = 0$ (von allen möglichen!) betrachten, ist sicher nicht gerechtfertigt, wenn man versuchen will, mit 3 oder 4 Modellen die ganze Bandbreite abzudecken. Die Vermutung liegt nahe, daß Modelle mit $k = 0$ aus anderen Gründen bevorzugt werden, und dies wird bei Kochanek angedeutet; die Bezeichnung der Modelle als „for convenience of comparison. . . four typical choices“ bei [FFKT 92] wirkt unglaubwürdig. Tatsächlich beginnen viele moderne Arbeiten über Kosmologie mit dem Hinweis auf die *Erwartung* $k = 0$, da diesen Fall wegen der Theorie des inflationären Universums bevorzugt wird;² dies wird wohl der Grund sein, weshalb auch in Bezug auf Gravitationslinsenstatistik Modelle mit $k = 0$ bevorzugt betrachtet werden. (Siehe aber hierzu [Feige 92, S. 141].)

Da ich die Berechnung der Winkelgrößenentfernungen mit Hilfe der Differentialgleichung von Kayser [Kayser 85] durchgeführt habe, war es für mich möglich, alle Weltmodelle zu betrachten. Mit Hilfe von Programmen von Feige [Feige 92] konnte ich für beliebige Friedmann-Lemaître-Modelle viele η -unabhängig Eigenschaften, z.B. das Weltalter oder z_{max} , untersuchen.

Insbesondere war die Betrachtung von Modellen mit $k = +1$ wichtig, denn bei manchen dieser Modelle wird die allgemeine Zunahme der optischen Tiefe mit zunehmendem λ_0 z.T. durch die Abnahme des Volumenelementes ausgeglichen, so daß die für Modelle mit $k = 0$ gültige³ Aussage, daß man auf Grund jetziger Beobachtungen Weltmodelle mit $\lambda_0 \approx 1$ ausschließen kann, für $k = +1$ nicht ohne weiteres zutrifft.

b. η -Parameter

Gravitationslinsenphysik setzt notwendigerweise voraus, daß das Universum nicht vollkommen homogen ist (Kapitel 3 Abschnitt d). Jede realistische Arbeit über Kosmologie in Zusammenhang mit Gravitationslinsen

²In vielen anderen wird dies zwar nicht explizit gesagt, aber es werden hauptsächlich kosmologische Modelle mit $k = 0$ gerechnet.

³abgesehen von Auswahleffekten, siehe unten

sollte also verschiedene η -Werte betrachten. Fukugita *et al.* [FFKT 92] betrachten lediglich die zwei Grenzfälle $\eta = 1$ und $\eta = 0$, wobei für den zweiten Fall zwei statistische Ansätze betrachtet werden. Kochanek [Kochanek 92] betrachtet lediglich Modelle mit $\eta = 1$. Es ist natürlich leichter, Modelle mit $\eta = 1$ zu rechnen, da sich hier die Winkelgrößenentfernungen leichter berechnen lassen (Kapitel 3). (Für den Grenzfall $\eta = 0$ gibt es ebenfalls vereinfachte Entfernungsformeln [FFKT 92].)

Mit Hilfe der Differentialgleichung von Kayser [Kayser 85] ist es für mich möglich gewesen, *beliebige* η -Werte zu betrachten. Hierbei konnte ich feststellen, daß das von [FFKT 92] auf Grund ihrer einfacheren Betrachtung bereits gefundene Ergebnis, daß der η -Parameter nicht so ausschlaggebend für die Gravitationslinsenstatistik ist, auch für eine weitere Zahl von Friedmann-Lemaître-Modellen und für alle η -Werte gültig ist.

c. Verteilung

[FFKT 92] entwickeln den Formalismus für die Berechnung der z_l -Verteilung, wenden ihn aber nur im theoretischen Teil der Arbeit an; beim Vergleich mit Beobachtung wird nur die integrierte Form betrachtet. Kochanek hingegen vergleicht theoretisch berechnete Verteilungen mit den beobachteten Systemen. Ich habe diesen Ansatz übernommen und erweitert, um möglichst alle Information, die in der Verteilung steckt, auszunutzen (Kapitel 10).

d. Auswahleffekte

Bei [FFKT 92] werden Auswahleffekte diskutiert, aber in Hinblick auf die *integrierte* optische Tiefe. Ein Vorteil der Betrachtung der *differentiellen* optischen Tiefe ist, daß Auswahleffekte nicht so störend sind. Eine Ausnahme ist die Beobachtbarkeit der Linsengalaxie (genauer die spektroskopische Grenzhelligkeit), die eine wichtige Rolle spielt. So weit ich weiß, wurde dieser Effekt erst in dieser Arbeit untersucht. Es hat sich gezeigt, daß die Vernachlässigung dieses Effekts erheblichen Einfluß auf die Ergebnisse hat. Ein wichtiger Punkt ist die Änderung, die bei vielen Modellen mit $\lambda_0 > 0$ auftritt: weil die scheinbare Helligkeit einer Galaxie bei gegebener absoluter Helligkeit und gegebenem z meist kleiner ist bei diesen Modellen, und weil die *absolute* Helligkeit einer Linsengalaxie unter sonst gleichen Bedingungen kleiner ist, reicht selbst eine verhältnismäßig schwache spektroskopische Grenzhelligkeit aus, um typische Linsengalaxien bereits bei kleinem z für die Statistik unbrauchbar zu machen, weil sie sonst zu schwach sind. Mit anderen Worten, die Ablehnung von Weltmodellen mit einem verhältnismäßig hohen typischen z_d -Wert kann dadurch zustandekommen, daß man bei hohem z die Galaxien nicht sehen kann, und nicht unbedingt dadurch, daß diese Weltmodelle unser Universum nicht richtig beschreiben. Berücksichtigt man m_{grenz} , so ist man gezwungen, nur bei kleinem z diese Modelle mit anderen zu vergleichen, so daß die typische Eigenschaft, ein hoher z -Wert des Medians der Funktion $d\tau$, keinen Einfluß hat.

e. Entwicklungseffekte

Weder [FFKT 92] noch [Kochanek 92] berücksichtigen Entwicklungseffekte. Es hätte den Rahmen dieser Diplomarbeit gesprengt, Entwicklungseffekte der Linsengalaxien⁴ miteinzubeziehen. Jedoch aufgrund der Betrachtung der spektroskopischen Grenzhelligkeit m_{grenz} sind Entwicklungseffekte für den von mir entwickelten Formalismus nicht ausschlaggebend, da man sich auf kleine Rotverschiebungen beschränken muß, wo die Entwicklungseffekte klein sind.

f. Räumliche Verteilung

[FFKT 92] gehen von einer gleichmäßigen Galaxienverteilung aus. Ich habe den Ansatz von Kochanek [Kochanek 92] übernommen, die sich auf isolierte Galaxien als Linsen beschränkt. Dadurch kann man zwar nicht alle Systeme mit in die Statistik aufnehmen, aber dadurch, daß man sich auf einfache Linsen beschränkt, sind die Unsicherheiten der Ergebnisse leichter abzuschätzen. Man kann auch sicher sein, daß kein unsichtbarer Galaxienhaufen vorliegt, denn eine Voraussetzung ist, daß man die Rotverschiebung der Linsengalaxie kennt. Wären andere Galaxien in der Nähe, dann wäre es möglich, sie zu sehen, auch wenn sie etwas schwächer wären als die Linsengalaxie, da die Anwesenheit der hellen Bilder der Quelle nicht so viel stört als bei der Linsengalaxie (deren Rotverschiebung man ja messen kann).

Zusammenfassung

- Mit Hilfe der Differentialgleichung von Kayser [Kayser 85] und einem Programmpaket von Feige [Feige 92] konnte ich die Linsengalaxienrotverschiebungsstatistik für beliebige Friedmann-Lemaître Weltmodelle untersuchen. Ergebnisse, die für Spezialfälle gewonnen worden sind, lassen sich nicht einfach auf beliebige Modelle extrapolieren.
- Ich habe verschiedene η -Werte betrachtet. Hier konnte ich feststellen, daß die Unsicherheit bezüglich η bei der Bestimmung von λ_0 und Ω_0 nicht stört.
- Den Ansatz von Kochanek [Kochanek 92] für die Betrachtung der Verteilung der Rotverschiebungen beobachteter Linsengalaxien in z_d habe ich erweitert, um möglichst alle Information der Verteilung auszunutzen.
- Ein wichtiges Ergebnis dieser Arbeit ist, daß die spektroskopische Grenzhelligkeit m_{grenz} nicht außer Acht gelassen werden darf; eine grobe Abschätzung von m_{grenz} reicht jedoch für praktische Zwecke aus, so daß dies keine zu große zusätzliche Unsicherheit mithineinbringt.
- Durch die Berücksichtigung von m_{grenz} muß man Entwicklungseffekte nicht so stark beachten, da man dadurch gezwungen wird, die Abhängigkeit der Form der Funktion $d\tau$ vom kosmologischen Modell nur bei kleinen Rotverschiebungen zu betrachten.

⁴Entwicklungseffekte der Quellen spielen keine Rolle.

- Unwissen über die räumliche Verteilung der Galaxien stört das Verfahren nicht, denn es beschränkt sich auf isolierte Galaxien, wo es möglich ist, eine quantitative Analyse leicht durchzuführen.

Kapitel 14

Zusammenfassung und Ausblick

Wegen der notwendigen Betrachtung der spektroskopischen Grenzhelligkeit m_{grenz} , was in der Praxis bedeutet, daß man die Unterschiede der Form der $d\tau$ -Funktion für verschiedene Weltmodelle nur bei kleinem z betrachtet, ist man nicht in der Lage, bestimmte Weltmodelle mit einer zufriedenstellenden kleinen Wahrscheinlichkeit auszuschließen. Man kann aber ansatzweise erkennen, daß das Verfahren numerisch stabil ist, und daß ein Bereich der größten relativen Wahrscheinlichkeit sich in dem Bereich befindet, der nach anderen Überlegungen erlaubt ist. Durch bessere Beobachtungen, die m_{grenz} zu schwächeren scheinbaren Helligkeiten hin verschieben, oder durch die Vergrößerung der Zahl der Gravitationslinsensysteme,¹ die als Eingabedaten für das Verfahren geeignet sind, wäre man wahrscheinlich in der Lage, ein kleines Gebiet in dem sonst erlaubten Parameterraum eine so hohe relative Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, daß man den erlaubten Bereich weiter als mit anderen Methoden einschränken könnte.

Eine Untersuchung an Hand von Simulationen, um zu sehen, wieviele Systeme man braucht, um den erlaubten Bereich weiter als mit existierenden Methoden einzuschränken, ist bereits in Arbeit. Bei mehr Aussagekraft wäre es möglich, nicht nur die relative Wahrscheinlichkeit darzustellen, sondern auch eine Fehlerangabe für den Bereich höchster relativer Wahrscheinlichkeit, die sich aus der statistischen Streuung ergibt—mit anderen Worten, den Bereich kleinerer Wahrscheinlichkeit, der im Rahmen der statistischen Streuung doch im „richtigen“ Weltmodell entstehen könnte. In diesem Zusammenhang wäre auch ein Ausprobieren anderer Methoden der Berechnung der relativen Wahrscheinlichkeit, wie z.B. des Kolmogorov-Smirnov-Tests, angebracht, vor allem wenn man mehr Systeme betrachtet.

Es ist heute nicht möglich, allein durch die Verteilung der Rotverschiebungen der Linsengalaxien bei bekannten Gravitationslinsensystemen, bestimmte Weltmodelle mit einer zufriedenstellenden Sicherheit auszuschließen. Die Aussage von [Kochanek 92], daß flache Modelle mit einem großen λ_0 -Wert 5–10 mal unwahrscheinlicher sind als das Einstein-de Sitter-Modell, ist nicht aufrechtzuerhalten, wenn man m_{grenz} in die Betrachtung miteinbezieht. (Mit seinen Eingabedaten ohne die Betrachtung von m_{grenz} habe ich ebenfalls 10.000 Modelle in der λ_0 - Ω_0 -Ebene gerechnet, wobei dieses Ergebnis bestätigt wird, was eine kleine Kontrolle meines Verfahrens

¹ Dies könnte entweder durch die Messung von mehr (meist Galaxien-) Rotverschiebungen bei existierenden Systemen oder durch die Entdeckung neuer Systeme geschehen.

darstellt.) Selbst wenn *flache* Modelle mit einem großen λ_0 -Wert ausgeschlossen werden können, kann man dieses Ergebnis i.a. nicht auf andere Weltmodelle, insbesondere nicht auf solche mit $k = +1$ und einem etwas größerem q_0 -Wert, übertragen.

Erfreulicherweise spielen die Größen η und m_{grenz} keine so große Rolle, daß sie zur Unsicherheit der Bestimmung von λ_0 und Ω_0 beitragen. Eigentlich ist m_{grenz} kein freier Parameter, sondern sollte für jedes System einzeln abgeschätzt werden. Hierdurch könnte die Aussagekraft des Verfahrens etwas vergrößert werden.

Durch eine Untergrenze für das Weltalter (bei bekannter Hubble-Konstanten) ist man in der Lage, den erlaubten Bereich auf einen Streifen „parallel“ zu und angrenzend an der A_2 -Kurve einzuschränken. Mein Verfahren kann wahrscheinlich noch zusätzlich einen Bereich unmittelbar angrenzend an der A_2 -Kurve ausschließen, so daß eine zusätzliche Bestimmung von, z.B., Ω_0 ausreichen würde, um Ω_0 und λ_0 mit einer hoffentlich ausreichenden Genauigkeit zu bestimmen. Noch besser wäre eine Bestimmung des Krümmungsradius,² denn Linien von gleichem Krümmungsradius laufen in etwa senkrecht auf die Streifen gleicher relativen Wahrscheinlichkeit. In diesem Zusammenhang ist interessant, daß das von Kayser entwickelte Verfahren [Kayser 93] zur Bestimmung kosmologischer Parameter durch die Winkelgrößen-Rotverschiebungs-Beziehung für kompakte Radioquellen Streifen gleicher relativen Wahrscheinlichkeit in etwa parallel zu Linien mit gleichem Krümmungsradius liefert, so daß die Verfahren sich ergänzen. (Im allgemeinen wird man in Zukunft wahrscheinlich eher durch das Zusammenspiel vieler verschiedener Methoden als durch Verfeinerung einer Methode Fortschritte in der Bestimmung kosmologischer Parameter machen.)

Hoffnungen, mit Hilfe von bereits gewonnenen Beobachtungen bestimmte kosmologische Modelle ausschließen zu können, konnte ich nicht bestätigen. Das Verfahren ist aber wahrscheinlich geeignet, mit etwas umfangreichem Beobachtungsmaterial Aussagen über das kosmologische Modell zu machen, die vergleichbar sind mit denen herkömmlicherer Methoden. Dies will ich durch Simulationen testen. Dadurch, daß in erster Linie man etwas über λ_0 und vielleicht Ω_0 erfahren kann, macht das Verfahren dazu geeignet, mit anderen Methoden ergänzend zusammenzuwirken. Auch dies kann mittels Simulationen getestet werden.

²im wesentlichen $|\Omega_0 + \lambda_0|$

Anhänge

Anhang 1

Herleitung des Ausdrucks für die optische Tiefe

'You damn sadist', said Mr. Cummings,
'you try to make people think'.

Ezra Pound

Es ist zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{L}{L^*}} = n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha + \frac{4}{\gamma}} \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \quad (1.1)$$

durch die Variablentransformation von $\frac{L}{L^*}$ zu $\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}$ und Faltung mit $\delta(\hat{a} - \hat{a}')$ den Ausdruck

$$\frac{d\tau}{dz_d} = 16\pi^3 n^* \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} D_d^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) \quad (1.2)$$

liefert. (Bemerkung: In Gl. 1.1 ist \hat{a} als *Variable* zu verstehen, wie auch z ; in Gl. 1.2 hingegen ist mit \hat{a} (eigentlich \hat{a}') eine *feste Größe* gemeint. Im folgenden ist zunächst \hat{a} als Variable zu betrachten.)

Nun ist

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{v}{v^*}\right)^\gamma$$

(Gl. 9.6) und

$$\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} = \left(\frac{v}{v^*}\right)^2 \frac{D_{ds}}{D_s}$$

(siehe S. 65). Daraus folgt

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

Einsetzen in Gl. 1.1 liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{L}{L_*}} &= n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \left(\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right)^{\alpha + \frac{4}{\gamma}} \\ &\quad \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left(- \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{L}{L_*}}{d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= \frac{d}{d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} \left(\frac{v}{v^*} \right)^\gamma \\ &= \frac{\partial}{\partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}-1} \left(\frac{D_s}{D_{ds}} \right) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(\alpha + \frac{4}{\gamma})} \\ &\quad \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}-1} \frac{D_s}{D_{ds}} \\ &\quad \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left(- \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= n^*(1+z_d)^2 16\pi^3 \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)+1} \\ &\quad \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{D_s}{D_{ds}} \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left(- \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

Durch Umformung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_d \partial \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}} &= 16\pi^3 n^* \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} \\ &\quad \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \left(\frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right)^2 \frac{D_s}{D_{ds}} \\ &\quad \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left(- \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

Da ich mich für ein *festes* \hat{a} interessiere, also für die Abhängigkeit der optischen Tiefe von z für einen festen Bildabstand, füge ich die δ -Funktion $\delta(\hat{a} - \hat{a}')$ dem etwas umgeformten Integranden hinzu und integriere über $d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dz_d} &= \int 16\pi^3 n^* \left(\frac{v^*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)} \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} D_d^2 \\ &\quad \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{P(z_d)}} \exp \left(- \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right) \delta(\hat{a} - \hat{a}') d \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \end{aligned}$$

Wenn man $P(z_d)$ durch $\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}$ ersetzt, die Integration ausführt und \hat{a}' in \hat{a} umbenennt, so erhält man

$$\frac{d\tau}{dz_d} = 16\pi^3 n_* \left(\frac{v_*}{c}\right)^4 (1+z_d)^2 \frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}(1+\alpha)}$$

$$D_d^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z_d)^2(\Omega_0 z_d + 1 - \lambda_0) + \lambda_0}} \exp\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}^*} \frac{D_s}{D_{ds}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right)$$

Q.E.D.

Anhang 2

Programme

We haven't the money, so we've got to think.

Ernest Rutherford

Die Programme, mit denen ich die Berechnungen durchgeführt habe, wurden hauptsächlich von mir in der Programmiersprache **FORTRAN 77** geschrieben. Ausnahmen bilden einige Unterprogramme aus den *Numerical Recipes* [PFTF] (ebenfalls **FORTRAN 77**), ein Programmpaket von Bernd Feige¹ für die Berechnung von verschiedenen kosmologischen Größen auf der Basis von elliptischen Integralen (in der Programmiersprache C) und einige kleine Unterprogramme, die für dieses benötigt werden (von mir, z.T. mit Hilfe von Reiner Schlotte, in C geschrieben). Alle Quellprogramme zusammen haben eine Größe von etwa 130 Kilobyte.

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgte mit Hilfe des Programmpakets *GRAL* von Rainer Kayser [Kayser]. Das Einbinden der hiermit erzeugten **POSTSCRIPT**-Darstellungen in **L^AT_EX**, mit dem diese Arbeit entworfen und gesetzt wurde, geschah ebenfalls mit Hilfe von Reiner Schlotte.

¹ beschrieben in [Feige 92]

Literaturverzeichnis

*Let us come now to references to authors,
which other books contain and yours lacks.
The remedy for this is very simple;
for you have nothing else to do
but to look for a book
which quotes them all from A to Z...
Then you put this same alphabet into yours...
And if it serves no other purpose,
at least that long catalogue of authors
will be useful
to lend authority to your book...*

Miguel de Cervantes

- [Alcock & Anderson 86] C. Alcock & N. Anderson: „On the distance measure for gravitational lenses“
APJ, **302**, 1, 43 (1986)
- [Bartelmann & Schneider 92] M. Bartelmann & P. Schneider: „A large-scale structure model for gravitational lensing“
A&A, **259**, 2, 413 (1992)
- [Berry] M. V. Berry: *Cosmology and Gravitation*
Bristol: Adam Hilger, 1989
- [Binney & Tremaine] J. Binney & S. Tremaine: *Galactic dynamics*
Princeton: Princeton University Press, 1987
- [Blandford & Narayan 1992] R. D. Blandford & R. Narayan: „Cosmological applications of gravitational lensing“
ARA, **30**, 311 (1992)
- [Bondi] H. Bondi: *Cosmology*
Cambridge: Cambridge University Press, 1952
- [Borgeest 82] U. Borgeest: *Zur Massenbestimmung mittels des Gravitationslinseneffektes*
Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1982
- [Borgeest 83] U. Borgeest: „The difference in light travel time between gravitational lens images. II. Theoretical foundations“
A&A, **128**, 1, 162 (1983)

- [Borgeest 85] U. Borgeest: *Die allgemeine Methode zur Bestimmung der Deflektormasse und der Hubble-Konstanten durch den Gravitationslinseneffekt*
Dissertation, Universität Hamburg, 1985
- [Breimer & Sanders 92] T. G. Breimer & R. H. Sanders: „Constraints on cosmological parameters from clusters of galaxies containing luminous arcs“
MNRAS, **257**, 1, 97 (1992)
- [BSP 88] B. J. Boyle, T. Shanks & B. A. Peterson: „The evolution of optically selected QSOs-II“
MNRAS, **235**, 3, 935 (1988)
- [BST 88] B. Binggeli, A. Sandage & G. A. Tammann: „The luminosity function of galaxies“
ARA, **26**, 509 (1988)
- [Catelan & Pacheco 92] M. Catelan & J. A. de Freitas Pacheco: „A new age-metallicity relation for galactic globular clusters in the α -enhanced scenario: cosmological implications“
A&A, **258**, 2, L5 (1992)
- [CWW 80] G. D. Coleman, C.-C. Wu & D. W. Weedman: „Colors and magnitudes predicted for high redshift galaxies“
APJS, **43**, 3, 393 (1980)
- [Dar 90] A. Dar: „Astrophysics and cosmology closing in on neutrino masses“
Science, **250**, 4987, 1529 (1990)
- [Duemmler 92] R. Duemmler: „The Hubble constant free from local velocity effects“
A&A, **264**, 1, 1 (1992)
- [Eddington] A. Eddington: *The expanding universe*
Cambridge: Cambridge University Press, 1933
- [Eddington 30] A. S. Eddington: „On the instability of Einstein’s spherical world“
MNRAS, **90**, 7, 668 (1930)
- [EEP 88] G. Efstathiou, R. S. Ellis & B. A. Peterson: „Analysis of a complete galaxy redshift survey-II. The field-galaxy luminosity function“
MNRAS, **232**, 3, 431 (1988)
- [Einstein 17] A. Einstein: „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“
Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, **1917**, Februar 8, 142 (1917)

- [Einstein 31] A. Einstein: „Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie“
Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, **1931**, 235 (1931)
- [Einstein & de Sitter 32] A. Einstein & W. de Sitter: „On the relation between the expansion and the mean density of the universe“
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **18**, 3, 213 (1932)
- [Faber & Jackson 76] S. M. Faber & R. E. Jackson: „Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies“
APJ, **204**, 3, 668 (1976)
- [Feige 92] B. Feige: „Elliptic integrals for cosmological constant cosmologies“
Astronomische Nachrichten, **313**, 3, 139 (1992)
- [FFKT 92] M. Fukugita, K. Futamase, M. Kasai & E. L. Turner: „Statistical properties of gravitational lenses with a nonzero cosmological constant“
APJ, **393**, 1, 3 (1992)
- [Friedmann 22] A. Friedmann: „Über die Krümmung des Raumes“
Zeitschrift für Physik, **10**, 4, 377 (1922)
- [Friedmann 24] A. Friedmann: „Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes“
Zeitschrift für Physik, **21**, 2, 326 (1924)
- [Gessner 92] E. Gessner: „Cosmological constant and the flat rotation curves of galaxies“
Astrophysics and Space Science, **194**, 2, 197 (1992)
- [Gott 77] J. R. Gott III: „Recent theories of galaxy formation“
ARA, **15**, 239 (1977)
- [GPL 89] J. R. Gott III, M.-G. Park & H. M. Lee: „Setting limits on q_0 from gravitational lensing“
APJ, **338**, 1, 1 (1989)
- [Harrison] E. R. Harrison: *Cosmology—the science of the universe*
Cambridge: Cambridge University Press, 1981

- [Harrison 93] E. R. Harrison: „The redshift-distance and velocity-distance laws“
APJ, **403**, 1, 28 (1993)
- [Hawkins & Veron 93] M. R. S. Hawkins & P. Veron: „The quasar luminosity function from a variability-selected sample“
MNRAS, **260**, 1, 202 (1993)
- [Heckmann] O. Heckmann: *Theorien der Kosmologie*
Heidelberg: Springer-Verlag, 1968
- [Hubble 26] E. P. Hubble: „Extra-galactic nebulae“
APJ, **64**, 5, 321 (1926)
- [Ichikawa & Fukugita 92] T. Ichikawa & M. Fukugita: „Hubble flows in Pisces-Perseus region from the Giovanelli-Haynes galaxy sample“
APJ, **394**, 1, 61 (1992)
- [Jackson 92] J. C. Jackson: „A deflationary universe“
QJRAS, **33**, 1, 1 (1992)
- [Jaroszyński 92] M. Jaroszyński: „Gravitational lensing in a universe with realistic mass distribution: II. Results“
MNRAS, **255**, 4, 655 (1992)
- [Kayser] R. Kayser: *GRAL: An advanced gravitational lens software package*
(Installiert am Rechner der Hamburger Sternwarte)
- [Kayser 82] R. Kayser: *Gravitationslinseneffekt: Einfluß kosmologischer Größen auf die Lichtlaufzeit*
Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1982
- [Kayser 85] R. Kayser: *Helligkeitsänderungen durch den statistischen Gravitationslinseneffekt*
Dissertation, Universität Hamburg, 1985
- [Kayser 93] R. Kayser: „Testing cosmology with compact radio sources“
(in Vorbereitung)
- [Kayser & Refsdal 83] R. Kayser & S. Refsdal: „The difference in light travel time between gravitational lens images. I. Generalisation of the wavefront method to arbitrary deflectors and inhomogeneous universes“
A&A, **128**, 1, 156 (1983)
- [Kayser & Refsdal 88] R. Kayser & S. Refsdal: „Gravitational lenses and the brightness distribution of distant sources“
A&A, **197**, 1, 63 (1988)

- [Kellerman 93] K. I. Kellermann: „The cosmological deceleration parameter estimated from the angular-size/redshift relation for compact radio sources“
Nature, **361**, 6408, 134 (1993)
- [Kochanek 92] C. S. Kochanek: „Do the redshifts of gravitational lens galaxies rule out a large cosmological constant?“
APJ, **384**, 1, 1 (1992)
- [Krauss & White 92a] L. M. Krauss & M. White: „Gravitational lensing, finite galaxy cores, and the cosmological constant“
APJ, **394**, 2, 385 (1992)
- [Krauss & White 92b] L. M. Krauss & M. White: „Gravitational lensing and the variability of G “
APJ, **394**, 2, 385 (1992)
- [Kron 93] R. Kron: „Evolution in the galaxy population“
(Vorträge beim 23^d „Saas-Fee“ Advanced Course *The Deep Universe*, 1993)
- [Kunze 90] W. D. Kunze: „Amplification near a gravitational lens macro-caustic“
in *Gravitational lensing*, Y. Mellier, B. Fort & G. Soucail (Hrsg.)
Berlin: Springer-Verlag, 1990
- [Lee 92] Y.-W. Lee: „Evidence for an old galactic bulge from RR Lyrae stars in Baade’s window: implications for the formation of the galaxy and the age of the universe“
AJ, **104**, 5, 1780 (1992)
- [Leibundgut & Pinto 92] B. Leibundgut & P. A. Pinto: „A distance-independent calibration of the luminosity of type Ia supernovae and the Hubble constant“
APJ, **401**, 1, 49 (1992)
- [Lemaître 27] G. Lemaître: „Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale de nébuleuses extra-galactiques“
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, **47**, A, 49 (1927)
- [Lemaître 31a] G. Lemaître: „A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae“
MNRAS, **91**, 5, 483 (1931)
- [Lemaître 31b] G. Lemaître: „The expanding universe“
MNRAS, **91**, 5, 490 (1931)

- [Longair 93] M. S. Longair: „The physics of background radiation“
(Vorträge beim 23^d „Saas-Fee“ Advanced Course *The Deep Universe*, 1993)
- [Mao 91] S. Mao: „Statistics of gravitational lenses: the uncertainties“
APJ, **380**, 1, 9 (1991)
- [Matravers & Aziz 88] D. R. Matravers & A. M. Aziz: „A note on the observer area-distance formula“
MNASSA, **47**, 9&10, 124 (1988)
- [Mattig 58] W. Mattig: „Über den Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und scheinbarer Helligkeit“
Astronomische Nachrichten, **284**, 3, 109 (1958)
- [McCrea & Milne 34] McCrea & Milne: „Newtonian universes and the curvature of space“
Quart. Jou. Math. (Oxford), **5**, 73 (1934)
- [Milne] E. A. Milne: *Relativity, gravitation and world structure*
Oxford: Oxford University Press, 1935
- [Milne 34] E. A. Milne: „World-models and world-picture“
The Observatory, **57**, 716, 24 (1934)
- [MRRS] G. Musiol, J. Ranft, R. Reif & D. Seeliger: *Kern- und Elementarteilchenphysik*
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988
- [MTW] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler: *Gravitation*
New York: W. H. Freeman and Company, 1973
- [Moroney] M. J. Moroney: *Facts from figures*
Harmondsworth, Middlesex, England: Penguin Books Ltd., 1951
- [Narayan & Wallington 92] R. Narayan & S. Wallington: „Introduction to basic concepts of gravitational lensing“
in *Gravitational Lenses*, R. Kayser, T. Schramm & L. Nieser (Hrsg.)
Heidelberg: Springer-Verlag, 1992
- [Narlikar & Padmanabhan 91] J. V. Narlikar & T. Padmanabhan: „Inflation for astronomers“
ARAA, **29**, 325 (1991)
- [Paczynski & Gorski 81] B. Paczynski & K. Gorski: „Another possible case of a gravitational lens“
APJ, **248**, 2, L101 (1981)

- [Pagel & Kazlauskas 92] B. E. J. Pagel & A. Kazlauskas: „Primordial helium: the third decimal place“
MNRAS, **256**, 3, 49P (1992)
- [PCT 92] W. H. Press, S. M. Carroll & E. L. Turner:
„The cosmological constant“
ARA, **30**, 499 (1992)
- [Peacock 92] J. A. Peacock: „Errors on the measurement of Ω via cosmological dipoles“
MNRAS, **258**, 3, 581 (1992)
- [Peletier] R. F. Peletier: *Elliptical galaxies: structure and stellar content*
Groningen: krips repro meppel, 1989
- [Pence 76] W. Pence: „K-corrections for galaxies of different morphological types“
APJ, **203**, 2, 39 (1976)
- [PFTF] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky & W. T. Vetterling: *Numerical recipes: the art of scientific computing*
Cambridge: Cambridge University Press, 1986
- [PMR 92] M. J. Pierce, R. D. McClure & R. Racine:
„High resolution imaging of Virgo Cluster galaxies. I. The distance bases on the brightest stars in NGC 4571“
APJ, **393**, 2, 523 (1992)
- [Postman & Geller 84] M. Postman & M. J. Geller: „The morphology-density relation: the group connection“
APJ, **281**, 1, 95 (1984)
- [PRS 92] M. J. Pierce, M. E. Ressler & M. S. Shure:
„An absolute calibration of type 1a supernovae and the value of H_0 “
APJ, **390**, 2, L45 (1992)
- [Ratra & Quillen 92] B. Ratra & A. Quillen: „Gravitational lensing effects in a time-variable cosmological ‘constant’ cosmology“
MNRAS, **259**, 4, 718 (1992)
- [Refsdal 64a] S. Refsdal: „The gravitational lens effect“
MNRAS, **128**, 4, 295 (1964)
- [Refsdal 64b] S. Refsdal: „On the possibility of determining Hubble’s parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect“
MNRAS, **128**, 4, 307 (1964)
- [Refsdal 66a] S. Refsdal: „On the possibility of testing cosmological theories from the gravitational lens effect“
MNRAS, **132**, 1, 101 (1966)

- [Refsdal 66b] S. Refsdal: „On the possibility of determining the distances and masses of stars from the gravitational lens effect“
MNRAS, **134**, 3, 315 (1966)
- [Refsdal 70] S. Refsdal: „On the propagation of light in universes with inhomogeneous mass distribution“
APJ, **159**, 1, 357 (1970)
- [RLT 92] D. Richstone, A. Loeb & E. L. Turner: „A lower limit on the cosmic mean density from the ages of clusters of galaxies“
APJ, **393**, 2, 447 (1992)
- [RSdL 67] S. Refsdal, R. Stabell & F. G. de Lange: „Numerical calculations on relativistic cosmological models“
MNRAS, **71**, 1, 143 (1967)
- [Robertson 29] H. P. Robertson: „On the foundations of relativistic cosmology“
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **15**, 11, 822 (1929)
- [Robertson 33] H. P. Robertson: „Relativistic cosmology“
Rev. Mod. Phys., **5**, 1, 62 (1933)
- [Robertson 35] H. P. Robertson: „Kinematics and world-structure. I“
APJ, **82**, 4, 284 (1935)
- [Robertson 36a] H. P. Robertson: „Kinematics and world-structure. II“
APJ, **83**, 3, 187 (1936)
- [Robertson 36b] H. P. Robertson: „Kinematics and world-structure. III“
APJ, **83**, 4, 257 (1936)
- [Robertson 37] H. P. Robertson: „The apparent luminosity of a receding nebula“
Zeitschrift für Astrophysik, **15**, 1, 69 (1937)
- [Robertson 55] H. P. Robertson: „The theoretical aspects of the nebular redshift“
PASP, **67**, 395, 82 (1955)
- [Sandage 93a] A. Sandage: „ $H_0 = 43 \pm 11$ based on angular diameters of high luminosity field spiral galaxies“
APJ, **402**, 1, 3 (1993)
- [Sandage 93b] A. Sandage: „The elements of practical cosmology“
(Vorträge beim 23^d „Saas-Fee“ Advanced Course *The Deep Universe*, 1993)

- [Sandage & Tammann 93] A. Sandage & G. A. Tammann: „The Hubble diagram in V for supernovae of type Ia and the value of H_0 therefrom“
APJ, **415**, 1, 1 (1993)
- [Sandage *et. al* 92] A. Sandage, A. Saha, G. A. Tammann, N. Panagia & D. Macchetto: „The Cepheid distance to IC 4182: calibration of $M_V(\text{max})$ SN Ia 1937C and the value of H_0 “
APJ, **401**, 1, L7 (1992)
- [Schechter 76] P. Schechter: „An analytic expression for the luminosity function for galaxies“
APJ, **203**, 2, 297 (1976)
- [SEF] P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco: *Gravitational Lenses*
New York: Springer-Verlag, 1992
- [Sextl & Urbantke] R. U. Sextl & H. K. Urbantke: *Gravitation und Kosmologie*
Zürich: Bibliographisches Institut AG, 1975
- [de Sitter 17a] W. de Sitter: „On Einstein’s theory of gravitation, and its astronomical consequences. First paper.“
MNRAS, **76**, 9, 699 (1917)
- [de Sitter 17b] W. de Sitter: „On Einstein’s theory of gravitation, and its astronomical consequences. Second paper.“
MNRAS, **77**, 2, 155 (1917)
- [de Sitter 17c] W. de Sitter: „On Einstein’s theory of gravitation, and its astronomical consequences. Third paper.“
MNRAS, **78**, 1, 3 (1917)
- [Stabell & Refsdal 66] R. Stabell & S. Refsdal: „Classification of general relativistic world models“
MNRAS, **132**, 3, 379 (1966)
- [Suginohara & Suto 92] T. Suginohara & Y. Suto: „Properties of galactic halos in spatially flat universes dominated by cold dark matter: effects of non-vanishing cosmological constant“
APJ, **396**, 2, 395 (1992)
- [Surdej *et.al.* 93] J. Surdej, J. F. Claeskens, D. Cramp-ton, A. V. Filippenko, D. Hutsemékers, P. Magain, B. Pirenne, C. Vanderriest & H. K. C. Yee: „Gravitational lensing statistics based on as sample of highly luminous quasars“
AJ, **105**, 6, 2064 (1993)

- [TOG 84] E. L. Turner, J. P. Ostriker & J. R. Gott III: „The statistics of gravitational lenses: the distributions of image angular separations and lens redshifts“
APJ, **284**, 1, 1 (1984)
- [Tully & Fisher 77] R. B. Tully & J. R. Fisher: „A new method of determining distances to galaxies“
A&A, **54**, 1, 661 (1977)
- [Turner 80] E. L. Turner: „The effect of undetected gravitational lenses on statistical measures of quasar evolution“
APJ, **242**, 3, L135 (1980)
- [Turner 90] E. L. Turner: „Gravitational lensing limits on the cosmological constant in a flat universe“
APJ, **365**, 2, L43 (1990)
- [Turner & Ikeuchi 92] E. L. Turner & S. Ikeuchi: „Quasar absorption lines with a nonzero cosmological constant“
APJ, **389**, 2, 478 (1992)
- [de Vaucouleurs & Olson 82] G. de Vaucouleurs & D. W. Olson: „The central velocity dispersion in elliptical and lenticular galaxies as an extragalactic distance indicator“
APJ, **256**, 2, 346 (1982)
- [Voigt] H. H. Voigt: *Abriss der Astronomie*
Zürich: Bibliographisches Institut (Wissenschaftsverlag) und F. A. Brockhaus AG, 1988
- [Walker 35] A. R. Walker: „On Riemannian spaces with spherical symmetry about a line and the conditions for isotropy in general relativity“
Quart. Jou. Math. (Oxford), **6**, 81 (1935)
- [Walker 36] A. R. Walker: „On Milne’s theory of world-structure“
Proc. Math. Soc. Lond., **42**, 2, 90 (1936)
- [Weinberg] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology*
New York: Wiley, 1972
- [Weinberg 76] S. Weinberg: „Apparent luminosities in a locally inhomogeneous universe“
APJ, **208**, 1, L1 (1976)
- [Weyl 23] H. Weyl: „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“
Physikalische Zeitschrift, **24**, 11, 230 (1923)

Danksagung

Work, Finish, Publish.

Michael Faraday

Ich danke ganz herzlich Prof. Dr. Sjur Refsdal für die Gelegenheit, in seiner Arbeitsgruppe meine Diplomarbeit zu schreiben. Besonders die Möglichkeit, meine Vorliebe für die klassische Kosmologie mit einem sehr aktuellen Thema verbinden zu können, hat mir sehr gefallen. Dres. Rainer Kayser und Thomas Schramm danke ich für viele hilfreiche Gespräche und gute Ratschläge. Rainers **FORTRAN**-, **VMS/DCL**- und **POSTSCRIPT**-Software hat die Fertigstellung dieser Arbeit sehr erleichtert. Reiner Schlotte hat mir sehr geholfen bei Problemen in Zusammenhang mit dem Einbinden von Graphik und mit **C-FORTRAN**-Schnittstellen (hier auch Thorsten Köhler). Bernd Neindorf half mir, wo die Mathematik schwierig wurde. Für alle diese Hilfen bin ich dankbar—für die Fehler bin ich verantwortlich. Allen anderen in der Gravitationslinsengruppe (Dr. Ulf Borgeest, Martina Erlemann, Willi Hoff, Joachim von Linde, Christoph Lisson, Dörte Mehlert, Lars Nieser, Michael Schaaf und Dr. Jochen Schramm) und an der ganzen Sternwarte danke ich für die vielen kleinen Hilfen und die gute Arbeitsatmosphäre.

Ich danke auch meiner Freundin Anke und Tochter Raika für ihre Hilfe und Geduld während meiner Diplomandenzeit.

Erklärung

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Hamburg-Bergedorf, den 01.11.1993

Phillip King